UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Superfluidità e condensazione di Bose-Einstein: dall'elio 4 liquido ai gas quantistici ultrafreddi

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Leonardo Ongaro

Anno Accademico 2024/2025

Indice

1 Introduzione **1**

2 Condensazione di Bose-Einstein **3**
2.1 Equazione di Gross-Pitaevskii 5
2.1.1 Equazione di Gross-Pitaevskii modificata per l'elio-4 7
2.1.2 Spettro delle eccitazioni elementari per l'elio-4 8
2.2 Proprietà termodinamiche 8

3 ^{4}He liquido **11**
3.1 Superfluidità 11
3.1.1 Motivazioni sperimentali 12
3.2 Spettro delle eccitazioni 13
3.3 Frazione superfluida e frazione normale 17
3.4 Frazione condensata a $T = 0$ 19
3.5 Modello a due fluidi di Landau 19
3.5.1 Idrodinamica di un superfluido 19
3.5.2 Velocità del suono 21
3.5.3 Velocità del suono nei casi limite 24

4 Gas quantistici ultrafreddi **25**
4.1 Proprietà superfluide 25
4.2 Spettro di Bogoliubov 26
4.3 Frazione condensata a $T = 0$ 27

5 Conclusioni **29**

Capitolo 1

Introduzione

Il *condensato di Bose-Einstein*, anche definito come il quinto stato della materia (dopo lo stato solido, liquido, gassoso e il plasma), è un particolare stato della materia in cui i bosoni occupano tutti lo stesso stato quantistico di energia minore. Questo stato della materia è importante, poiché consente l'osservazione macroscopica di fenomeni quantistici tipicamente confinati al mondo microscopico, come l'interferenza tra due funzioni d'onda di condensato. Inoltre, nei condensati di Bose-Einstein, possono emergere proprietà collettive non riconducibili al comportamento microscopico delle particelle, come la superfluidità dell'^{4}He.

Questo stato della materia fu predetto teoricamente nel 1924 da Satyendranath Bose e da Albert Einstein nel caso ideale di un gas di bosoni non interagenti. Tuttavia, la condensazione di Bose-Einstein rimase una speculazione teorica fino al 1995, quando Eric Cornell e Carle Wieman realizzarono il primo condensato utilizzando atomi di rubidio raffreddati ad una temperatura di circa $6 \cdot 10^{-8}$ K, impiegando tecniche di raffreddamento laser. Una particolarità di questa scoperta fu l'utilizzo di gas alcalini ultrafreddi debolmente interagenti, in contrasto con la previsione iniziale di Einstein e Bose che prevedeva l'assenza di interazioni tra gli atomi. Questa scoperta portò al premio Nobel nel 2001 per Eric Cornell, Carl Wieman e Wolgang Ketterle.

Nel 1937, Pyotr Kapitsa scoprì la *superfluidità* dell'elio liquido, cioè la capacità di fluire senza attrito. Il primo a pensare che il fenomeno della superfluidità potesse essere collegato alla condensazione di Bose-Einstein fu Fritz London.

Oggi sappiamo che superfluidità e condensazione di Bose-Einstein sono fenomeni diversi ma profondamente legati. Alcuni sistemi possono presentare superfluidità senza condensazione di Bose-Einstein come l'^{3}He superfluido, mentre altri, possono presentare condensazione di Bose-Einstein non completa (soltanto una frazione del sistema diventa un condensato) ma essere completamente superfluidi a temperature prossime allo zero assoluto, come i sistemi fortemente interagenti, per esempio l'^{4}He. Questo dimostra la complessità dei fenomeni quantistici collettivi nei sistemi a bassa temperatura e l'importanza delle interazioni tra particelle per determinarne le proprietà macroscopiche.

In questa tesi verranno presentate le principali proprietà dei sistemi superfluidi e condensati, mettendo in risalto le differenze e le somiglianze, in particolare nell'elio-4 e nei gas alcalini ultrafreddi.

L'autore vuole ringraziare il prof. Luca Salasnich per la continua disponibilità alla discussione dell'elaborato e per i consigli ricevuti durante la stesura di esso.

Capitolo 2

Condensazione di Bose-Einstein

Gas bosonico ideale in 3D Un risultato fondamentale della meccanica statistica quantistica è la scoperta dell'occupazione macroscopica di un singolo stato quantistico di energia minore, originariamente dovuta a S. Bose e ad A. Einstein. In questa sezione ripercorreremo la dimostrazione classica della condensazione di Bose-Einstein [9, 7, 14, 4].

Il numero di occupazione medio per i bosoni

$$E[n_{\boldsymbol{q}}] = \frac{1}{e^{\beta(E(q)-\mu)} - 1} \tag{2.1}$$

dove μ è il potenziale chimico, è per definizione sempre positivo. Di conseguenza $E(q) - \mu > 0$, cioè $\mu \leq \min_{\boldsymbol{q}} \{E(q)\} = E(q_0)$, dove q_0 è il vettore d'onda di energia minore. Nel caso di particelle confinate in un volume cubico $V = L^3$ avremo $E(q_0) = 0$. Ad alte temperature e bassa densità μ è grande e negativo, mentre diminuendo la temperatura μ si avvicina a 0; di conseguenza la fugacità $z = e^{\beta\mu}$ può variare tra $0 < z \leq 1$. Come vedremo, nel limite per cui $z \to 1$, lo stato con q minore verrà occupato macroscopicamente. Questo vuol dire che, se chiamiamo N il numero di particelle totale e N_0 il numero di particelle nello stato con q minore, il valore di N_0 sarà comparabile con N.

Scriviamo il numero totale di particelle come:

$$N = \sum_{\boldsymbol{q}} \frac{1}{e^{\beta(E(q)-\mu)} - 1} = N_0 + \sum_{\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{q}_0} \frac{1}{e^{\beta(E(q)-\mu)} - 1} \tag{2.2}$$

Utilizzando le condizioni al contorno periodiche possiamo scrivere l'energia di una particella confinata in una scatola cubica di volume $V = L^3$ come

$$E(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^3} \tag{2.3}$$

dove $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $n_i \in \mathbb{Z}$. Nel limite termodinamico $N \to +\infty$, $V \to +\infty$ e $n = N/V = \text{cost}$, la separazione tra i livelli energetici diventa infinitesima e quindi possiamo passare dalla sommatoria all'integrale, con la sostituzione $\sum_{\boldsymbol{q}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 q$. Applicando questa sostituzione, otteniamo

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 q \, \frac{1}{z^{-1} e^{\beta E(q)} - 1} = \frac{z}{z-1} + \frac{V}{\lambda^3(T)} f_{\frac{3}{2},+}(z) \tag{2.4}$$

dove $f_{m,+}(z)$ è definita come

$$f_{m,+}(z) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{x^{m-1}}{z^{-1} e^x - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^m} \tag{2.5}$$

che soddisfa la relazione

$$\frac{\mathrm{d} f_{m,+}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^m} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{z^{k-1}}{k^m} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^{m-1}} = \frac{1}{z} f_{m-1,+}(z) \tag{2.6}$$

e $\lambda(T)$ è definito come

$$\lambda(T) = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \tag{2.7}$$

Adesso dobbiamo studiare il comportamento di $f_{\frac{3}{2},+}(z)$ nel limite $z \to 1$. Dall'Eq. (2.6) possiamo vedere che una derivata di ordine sufficientemente alto è divergente in $z = 1$, per ogni m. Notiamo inoltre che la funzione $f_{\frac{3}{2},+}(z)$ è monotona crescente nell'intervallo $0 < z \leq 1$ e a $z = 1$ la sua derivata diverge, ma la funzione tende a un valore finito dato dalla funzione zeta di Riemann $f_{\frac{3}{2},+}(1) = \zeta(\frac{3}{2})$. Quindi per ogni z vale $f_{\frac{3}{2},+}(z) \leq f_{\frac{3}{2},+}(1) = \zeta(\frac{3}{2})$. Possiamo riscrivere l'Eq. (2.4) nella forma

$$n\lambda^3(T) = f_{\frac{3}{2},+}(z) + \frac{\lambda^3(T)}{V}\frac{z}{z-1} = f_{\frac{3}{2},+}(z) + n_0\lambda^3(T) \tag{2.8}$$

dove n e n_0 sono la densità numerica di particelle rispettivamente totale e dello stato con $\boldsymbol{q} = 0$. Vediamo che se $\lambda^3(T)N/V < \zeta(\frac{3}{2})$ allora possiamo trovare una soluzione con $z < 1$, cioè nel limite termodinamico

$$n_0 = \frac{1}{V}\frac{z}{z-1} \to 0 \tag{2.9}$$

Tuttavia, quando $n\lambda^3(T) > \zeta(\frac{3}{2})$, z deve tendere a 1 per bilanciare l'equazione e in questo caso abbiamo che la frazione di particelle nel condensato è

$$n_0 = \frac{1}{\lambda^3(T)}\left[n\lambda^3(T) - \zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right] \tag{2.10}$$

che è maggiore di 0. Questo vuol dire che lo stato con $\boldsymbol{q} = 0$ viene occupato da un numero macroscopico di particelle, portando alla formazione di un condensato di Bose-Einstein. Ponendo $n_0 = 0$ in Eq. (2.10) possiamo ricavare la temperatura critica T_c, cioè la temperatura al di sotto della quale avviene la condensazione di Bose-Einstein

$$T_c(n) = \frac{h^2}{2\pi m k_B}\left(\frac{n}{\zeta(\frac{3}{2})}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.11}$$

Utilizzando quest'ultima equazione, possiamo ricavare un'espressione più semplice per la frazione condensata

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{n}\left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.12}$$

da cui possiamo vedere la dipendenza esplicita da T.

Criterio di Penrose-Onsager Con la scoperta, nel 1995, della condensazione di Bose-Einstein con atomi di rubidio debolmente interagenti, si capì che la derivazione teorica di Bose e Einstein non era sufficiente a spiegare questo fenomeno, dato che utilizza gas di bosoni non interagenti. Quindi, era necessario dare una definizione rigorosa di condensato di Bose-Einstein, anche nel caso di sistema interagente e in sistemi fuori equilibrio. In questo paragrafo, verrà presentata la definizione di condensato di Bose-Einstein originariamente dovuta a O. Penrose e L. Onsager [22, 18].

Consideriamo un gas di N bosoni in cui ogni particella è caratterizzata dal vettore posizione $\boldsymbol{r}_i$, con $i = 1, 2, \ldots, N$. La funzione d'onda di multiparticella associata a questo sistema è

$$\Psi_N(t) \equiv \Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = \langle \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N | \Psi(t) \rangle \tag{2.13}$$

che è simmetrica per lo scambio di $\boldsymbol{r}_i$ con $\boldsymbol{r}_j$ per ogni $i, j = 1, \ldots, N$. A questa funzione d'onda possiamo associare la matrice densità

$$\rho(t) = |\Psi_N(t)\rangle \langle \Psi_N(t)| \tag{2.14}$$

i cui elementi nella base $\{|\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N\rangle\}$ sono

$$\rho(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{r}'_1, \ldots, \boldsymbol{r}'_N, t) = \langle \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_N | \rho(t) | \boldsymbol{r}'_1 \ldots \boldsymbol{r}'_N \rangle = \Psi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)\Psi^*(\boldsymbol{r}'_1, \ldots, \boldsymbol{r}'_N, t) \tag{2.15}$$

Introduciamo quindi la matrice densità di singola particella

$$\rho_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) = N \mathrm{Tr}_{2,3,\ldots,N} \rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_2', \ldots, \boldsymbol{r}_N', t) \tag{2.16}$$

ottenuta prendendo la traccia parziale sulle altre particelle:

$$\rho_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) = N \int \mathrm{d}r_2^3 \, \mathrm{d}r_3^3 \ldots \mathrm{d}r_N^3 \, \Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) \Psi^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) \tag{2.17}$$

La matrice ρ_1 rappresenta la probabilità che la particella si trovi nella posizione $\boldsymbol{r}$ moltiplicata per quella nella posizione $\boldsymbol{r}'$ al tempo t e normalizzata rispetto alle altre particelle. Dalla definizione si può vedere che è hermitiana e quindi possiamo diagonalizzarla ottenendo

$$\rho_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) = N \sum_i n_i(t) \chi_i(\boldsymbol{r}, t) \chi_i^*(\boldsymbol{r}', t) = \sum_i N_i(t) \chi_i(\boldsymbol{r}, t) \chi_i^*(\boldsymbol{r}', t) \tag{2.18}$$

con $\sum_i n_i(t) = 1$ e $n_i N = N_i$.

Possiamo distinguere i seguenti tre casi:

- Se tutti gli $N_i(t)$ sono dell'ordine dell'unità, allora il sistema è normale, cioè non c'è condensazione di Bose-Einstein,
- Se c'è un singolo autovalore $N_i(t)$ di ordine N e tutti gli altri sono dell'ordine dell'unità, abbiamo un condensato di Bose-Einstein semplice, o semplicemente un condensato di Bose-Einstein,
- Se ci sono due o più autovalori di ordine N, allora parliamo di condensato di Bose-Einstein frammentato.

Nonostante questa definizione si applichi al caso di particelle con spin nullo, la definizione può essere estesa alle particelle con spin arbitrario. Infatti, considerando la funzione d'onda a molti corpi nel caso di particelle dotate di spin

$$\Psi_N(t) = \Psi(\boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N s_N) \tag{2.19}$$

dove s_i è la componente assiale dello spin dell'i-esima particella, otteniamo come matrice densità

$$\rho_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) = N \sum_{s_2, \ldots, s_N} \int \mathrm{d}r_2^3 \, \mathrm{d}r_3^3 \ldots \mathrm{d}r_N^3 \, \Psi(\boldsymbol{r} s, \boldsymbol{r}_2 s_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N s_N, t) \Psi^*(\boldsymbol{r}' s', \boldsymbol{r}_2 s_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N s_N, t) \tag{2.20}$$

Diagonalizzandola, otteniamo

$$\rho_1(\boldsymbol{r} s, \boldsymbol{r}' s', t) = \sum_i n_i(t) \chi_i(\boldsymbol{r} s, t) \chi_i^*(\boldsymbol{r} s', t) \tag{2.21}$$

e la definizione di condensazione di Bose-Einstein data prima si estende anche in questo caso.

2.1 Equazione di Gross-Pitaevskii

Vogliamo ricavare un'equazione che descriva l'evoluzione temporale della funzione d'onda del condensato $\Psi_{N_0}(t)$. Nella prima parte, la discussione sarà limitata al caso di gas bosonici diluiti e con interazioni di contatto, che sarà utile nella descrizione dei gas alcalini ultrafreddi, ricavando l'equazione di Gross-Pitaevskij [17]. Nella seconda parte della discussione, invece, ricaveremo un'equazione più generale, ottenuta modificando l'equazione di Gross-Pitaevskij, che permetta di descrivere il comportamento dell'elio-4.

Per ricavare l'equazione di Gross-Pitaevskii, consideriamo l'hamiltoniano di un sistema a molti corpi di N_0 bosoni con spin nullo

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N_0} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}_i^2 + U(\boldsymbol{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j}) \tag{2.22}$$

dove $V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ è il potenziale di interazione tra gli atomi. Per semplificare i conti, nel seguito della dimostrazione utilizzeremo la notazione $\hat{h}_i \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_i^2 + U(\boldsymbol{r}_i)$. L'evoluzione temporale dello stato di un sistema a molti corpi è descritta dall'equazione di Schrödinger per sistemi a molti corpi:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_{N_0},t) = \hat{H}\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_{N_0},t) \tag{2.23}$$

dove $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_{N_0},t)$ è definita come in Eq. (2.13). Possiamo ricavare l'equazione di Gross-Pitaevskii dal principio di minima azione; nel nostro caso definiamo l'azione $S_D[\Psi]$ come

$$S_D[\Psi] = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r_1\,\ldots\,\mathrm{d}^3r_{N_0}\,\Psi^*(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_{N_0},t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_{N_0},t) \tag{2.24}$$

Inseriamo l'ansatz di Hartree, cioè assumiamo che tutte le particelle si trovino nello stesso stato quantistico:

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_{N_0},t) = \prod_{i=1}^{N_0}\psi(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{2.25}$$

Otteniamo

$$S_D[\psi] = S_1[\psi] + S_2[\psi] + S_3[\psi] \tag{2.26}$$

dove i tre addendi sono:

$$\begin{aligned} S_1[\psi] &= i\hbar\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r_1\,\ldots\,\mathrm{d}^3r_{N_0}\,\psi(\boldsymbol{r}_1,t)^*\ldots\psi^*(\boldsymbol{r}_{N_0},t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi(\boldsymbol{r}_1,t)\ldots\psi(\boldsymbol{r}_{N_0},t)\right] = \\ &= i\hbar N_0\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r\psi^*(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} S_2[\psi] &= -\sum_{i=1}^{N_0}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r_1\,\ldots\,\mathrm{d}^3r_{N_0}\,\psi^*(\boldsymbol{r}_1,t)\ldots\psi^*(\boldsymbol{r}_{N_0},t)\hat{h}_i\psi(\boldsymbol{r}_1,t)\psi(\boldsymbol{r}_{N_0},t) = \\ &= -N_0\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r\,\psi^*(\boldsymbol{r},t)\hat{h}\psi(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} S_3[\psi] &= -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r_1\,\ldots\,\mathrm{d}^3r_{N_0}\,\psi^*(\boldsymbol{r}_1,t)\ldots\psi^*(\boldsymbol{r}_{N_0},t)V(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\psi(\boldsymbol{r}_1,t)\ldots\psi(\boldsymbol{r}_{N_0},t) = \\ &= -\frac{N_0(N_0-1)}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r\,\psi^*(\boldsymbol{r},t)\left[\int \mathrm{d}^3r'\,\psi^*(\boldsymbol{r}',t)V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}',t)\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Sommando i tre addendi otteniamo la seguente azione:

$$S_D[\psi] = N_0\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r\,\psi^*(\boldsymbol{r},t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 - U(\boldsymbol{r}) - \frac{N_0-1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\,\psi^*(\boldsymbol{r}',t)V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}',t)\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{2.30}$$

Quindi possiamo imporre il principio di minima azione $\delta S_D[\psi,\delta\psi] = S_D[\psi+\delta\psi] - S_D[\psi] = 0$, ottenendo

$$\begin{aligned} \delta S_D[\psi,\delta\psi] &= N_0\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r\,\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{h} - (N_0-1)\int \mathrm{d}^3r'\,\psi^*(\boldsymbol{r}',t)V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}',t)\right]\psi(\boldsymbol{r},t) + \\ &+ N\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r\,\psi^*(\boldsymbol{r},t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{h} - (N_0-1)\int \mathrm{d}^3r'\,\psi^*(\boldsymbol{r}',t)V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}',t)\right]\delta\psi(\boldsymbol{r},t) = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Per fare in modo che il principio di minima azione sia verificato, entrambe le funzioni integrande devono essere nulle. Otteniamo dunque:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N_0-1)\int \mathrm{d}^3r'\,\psi^*(\boldsymbol{r}',t)V(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}',t)\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{2.32}$$

Nella descrizione dei gas diluiti debolmente interagenti, assumiamo che il potenziale interatomico sia un potenziale di contatto, proporzionale alla delta di Dirac tridimensionale $\delta^{(3)}$

$$V(r) \simeq g_0 \delta^{(3)}(r) \tag{2.33}$$

ottenendo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N_0-1)g_0|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{2.34}$$

Resta da capire come poter legare g_0 a delle grandezze sperimentali. Per definizione $g_0 = \int V(r)\mathrm{d}^3r$ e sapendo che la lunghezza di scattering di onda s si può scrivere come $a_s = \frac{m}{4\pi\hbar^2}\int V(r)\mathrm{d}^3r$, possiamo scrivere

$$g_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s \tag{2.35}$$

ottenendo un'espressione di g_0 in funzione di grandezze misurabili sperimentalmente.

2.1.1 Equazione di Gross-Pitaevskii modificata per l'elio-4

L'equazione di Gross-Pitaevskii, non riesce a descrivere correttamente le proprietà fisiche dell'elio-4, perché il potenziale di interazione è più complesso di un potenziale di contatto e assume che a temperatura nulla tutti gli atomi partecipino al condensato di Bose-Einstein, mentre sappiamo che ciò non accade per l'elio-4. Per trovare un'equazione più generale di quella di Gross-Pitaevskii, aggiungiamo un termine correttivo all'azione [19].

$$S[\psi] = S_D[\psi] - \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3r\,\varepsilon_{\mathrm{corr}}(|\psi|^2) \tag{2.36}$$

dove S_D è l'azione definita in Eq. (2.30). Cercando l'estremale dell'azione come fatto per il caso dei gas alcalini ultrafreddi, otteniamo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N_0-1)\int \mathrm{d}^3\,r' V(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)|\psi(\boldsymbol{r}',t)|^2 + \mu_{\mathrm{corr}}(|\psi|^2)\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{2.37}$$

dove

$$\mu_{\mathrm{corr}}(|\psi|^2) = \frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{corr}}(|\psi|^2)}{\partial|\psi|^2} \tag{2.38}$$

Dall'Eq. (2.37) possiamo ricavare l'equazione di Gross-Pitaevskij modificata stazionaria. Cerchiamo soluzioni della forma

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \varphi(\boldsymbol{r})e^{-i\mu t/\hbar} \tag{2.39}$$

dove μ è il potenziale chimico, ottenendo l'equazione

$$\mu\varphi(\boldsymbol{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N_0-1)\int \mathrm{d}^3r'\,V(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)|\varphi(\boldsymbol{r}')|^2 + \mu_{\mathrm{corr}}(|\varphi|^2)\right]\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{2.40}$$

Moltiplicando per $\varphi^*(\boldsymbol{r})$ e integrando, si ottiene

$$\mu = \frac{1}{N_0}\int d^3\boldsymbol{r}\,\varphi^*(\boldsymbol{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N_0-1)\int \mathrm{d}^3r'\,V(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)|\varphi(\boldsymbol{r}')|^2 + \mu_{\mathrm{corr}}(|\varphi|^2)\right]\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{2.41}$$

Consideriamo $U(\boldsymbol{r}) = 0$ e prendiamo il caso di un condensato omogeneo e infinito, cioè quello in cui $\varphi(\boldsymbol{r})$ è costante e otteniamo

$$\mu = \frac{N_0-1}{N_0}g_0|\varphi|^2 + \mu_{\mathrm{corr}}(|\varphi|^2) \tag{2.42}$$

Prendiamo il limite termodinamico ($N_0 \to +\infty$) e sostituiamo $|\varphi|^2 \to n_0$, dove n_0 è la densità volumetrica di particelle condensate, ottenendo la relazione di dispersione

$$\mu = g_0 n_0 + \mu_{\mathrm{corr}}(n_0) \tag{2.43}$$

2.1.2 Spettro delle eccitazioni elementari per l'elio-4

Vogliamo caratterizzare le eccitazioni elementari del nostro sistema studiandone il comportamento quando è soggetto a una perturbazione $\delta\psi(\boldsymbol{r},t)$. Cioè vogliamo cercare delle soluzioni dell'Eq. (2.37) nella forma

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = e^{-i\mu t/\hbar}\left[\varphi(\boldsymbol{r}) + \delta\psi(\boldsymbol{r},t)\right] \tag{2.44}$$

Sostituendo questa espressione e mantenendo soltanto i termini lineari in $\delta\psi(\boldsymbol{r},t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\delta\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mu\left[\varphi(\boldsymbol{r}) + \delta\psi(\boldsymbol{r},t)\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\varphi(\boldsymbol{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + U(\boldsymbol{r})\left[\varphi(\boldsymbol{r}) + \delta\psi(\boldsymbol{r},t)\right] + \\ + \left[\varphi(\boldsymbol{r}) + \delta\psi(\boldsymbol{r},t)\right]\int \mathrm{d}^3r'\, V(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\left[|\varphi(\boldsymbol{r})|^2 + \varphi(\boldsymbol{r}')(\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + \delta\psi^*(\boldsymbol{r},t))\right] + \\ +\mu_{\mathrm{corr}}(|\varphi(\boldsymbol{r})|^2)\left[\varphi(\boldsymbol{r}) + \delta\psi(\boldsymbol{r},t)\right] + |\varphi(\boldsymbol{r})|^2\frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(|\varphi(\boldsymbol{r})|^2)}{\partial|\varphi(\boldsymbol{r})|^2}\left[\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + \delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)\right] \end{aligned} \tag{2.45}$$

Utilizziamo Eq. (2.40) e poniamo $U(\boldsymbol{r})$, $\varphi(\boldsymbol{r}) = \text{cost}$ e $|\varphi|^2 \to n_0$ per restringerci al caso di un condensato omogeneo e infinito ottenendo

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\delta\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + n_0\int \mathrm{d}^3r'\, V(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\left[\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + \delta\psi^*(\boldsymbol{r}',t)\right] + \\ +n_0g_0\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + \mu_{\mathrm{corr}}(n_0)\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}\left[\delta\psi(\boldsymbol{r},t) + \delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)\right] - \mu\delta\psi(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{2.46}$$

Cerchiamo soluzioni di onda piana $\delta\psi(\boldsymbol{r},t) = Ae^{i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} + B^*e^{-i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ e separiamo l'equazione in una dipendente da $\delta\psi(\boldsymbol{r},t)$ e una da $\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)$

$$A\left[-\hbar\omega + \frac{\hbar^2q^2}{2m} + n_0\hat{V}(q) + n_0g_0 + \mu_{\mathrm{corr}}(n_0) - \mu + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}n_0\right] + B\left[n_0\hat{V}(q) + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}n_0\right] = 0 \tag{2.47}$$

$$A\left[n_0\hat{V}(q) + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}n_0\right] + B\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2q^2}{2m} + n_0\hat{V}(q) + n_0g_0 + \mu_{\mathrm{corr}}(n_0) - \mu + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}n_0\right] = 0 \tag{2.48}$$

Questo sistema ha soluzioni non banali se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema è nullo, cioè se

$$E(q) = \hbar\omega = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2q^2}{2m} + n_0\hat{V}(q) + n_0g_0 + \mu_{\mathrm{corr}}(n_0) - \mu + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}n_0\right)^2 - \left(n_0\hat{V}(q) + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}n_0\right)^2} \tag{2.49}$$

Utilizzando l'Eq. (2.43) possiamo ottenere lo spettro semplificato

$$E(q) = \sqrt{\frac{\hbar^2q^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2q^2}{2m} + 2n_0\left[\hat{V}(q) + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}\right]\right)} \tag{2.50}$$

Sapendo che nello spettro dei fononi $E(q) = \hbar qc$, c è la velocità del suono, troviamo che la velocità del suono nel nostro sistema è:

$$c = \lim_{q\to 0}\frac{1}{q\hbar}E(q) = \sqrt{\frac{n_0}{m}\left[\hat{V}(0) + \frac{\partial\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)}{\partial n_0}\right]} \tag{2.51}$$

2.2 Proprietà termodinamiche

Per determinare la frazione condensata nelle sezioni successive, dobbiamo poter descrivere la termodinamica del sistema [26]. Per scrivere l'hamiltoniano di questo sistema, dobbiamo sommare due contributi, uno della parte condensata e uno della parte non condensata. L'energia parte condensata si può scrivere come:

$$\Omega_0 = E_0 - \mu N_0 \tag{2.52}$$

che è il potenziale gran canonico del sistema. Il contributo della parte non condensata è dato dalla somma dell'energia delle eccitazioni elementari. Dunque l'hamiltoniano risultante è

$$\hat{H} = \Omega_0 + \sum_{\boldsymbol{q}} \left(\hat{N}_{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \right) E(q) \tag{2.53}$$

dove $\hat{N}_{\boldsymbol{q}}$ è l'operatore numero che, avendo l'autostato $|n_{\boldsymbol{q}}\rangle$ restituisce come autovalore il numero di occupazione $n_{\boldsymbol{q}}$ dell'autostato. La funzione di partizione gran canonica è

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \hat{H}} \right) \tag{2.54}$$

La calcoliamo esplicitamente, seguendo [14, 4], ottenendo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Z} &= \sum_{\{N_{\boldsymbol{q}}\}}{}' \langle \{N_{\boldsymbol{q}}\} | e^{-\beta \hat{H}} | \{N_{\boldsymbol{q}}\} \rangle = \sum_{\{N_{\boldsymbol{q}}\}}{}' e^{-\beta \left[\Omega_0 + \sum_{\boldsymbol{q}} \left(N_{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \right) E(q) \right]} = \\ &= e^{-\beta \Omega_0} \sum_{\{N_{\boldsymbol{q}}\}}{}' \prod_{\boldsymbol{q}} e^{-\beta E(q) \left(N_{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \right)} = e^{-\beta \Omega_0} \prod_{\boldsymbol{q}} e^{-\frac{1}{2} \beta E(q)} \sum_{N=0}^{+\infty} e^{-\beta N E(q)} = \\ &= e^{-\beta \Omega_0} \prod_{\boldsymbol{q}} e^{-\frac{1}{2} \beta E(q)} \frac{1}{1 - e^{-\beta E(q)}} \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dalla funzione di partizione possiamo ricavare il potenziale gran canonico

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \mathrm{Z} = \Omega_0 + \Omega_g^{(0)} + \Omega_g^{(T)} \tag{2.56}$$

dove

$$\Omega_0 = E_0 - \mu N_0, \qquad \Omega_g^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{q}} E(q), \qquad \Omega_g^{(T)} = \frac{1}{\beta} \sum_{q} \ln \left(1 - e^{-\beta E(q)} \right) \tag{2.57}$$

Per cui possiamo scrivere il potenziale gran canonico per unità di volume come:

$$\frac{\Omega(\mu, n_0, T)}{V} = \left(\frac{E_0}{V} - \mu n_0 \right) + \frac{1}{2V} \sum_{\boldsymbol{q}} E(q, \mu, n_0) + \frac{1}{\beta V} \sum_{\boldsymbol{q}} \ln \left(1 - e^{-\beta E(q, \mu, n_0)} \right) \tag{2.58}$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza di $E(q)$ da μ e n_0. Questo è scritto nel modo più generale possibile; infatti compaiono sia μ che n_0 come variabili indipendenti. Per determinare la termodinamica del sistema, ricordiamo che

$$\mathrm{d}\Omega = -S \mathrm{d}T - P \mathrm{d}V - N \mathrm{d}\mu \tag{2.59}$$

dove con Ω si intende $\Omega(\mu, T)$, ottenuta utilizzando l'Eq. (2.43). Di conseguenza, l'entropia del sistema è

$$S(\mu, T, V) = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\mu, V} \tag{2.60}$$

mentre la pressione è:

$$P(\mu, T, V) = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{\mu, T} = -\frac{\Omega}{V} \tag{2.61}$$

dove si è utilizzata l'estensività dell'energia. Inoltre, la densità numerica di particelle è:

$$n(\mu, T, V) = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{V, T} \tag{2.62}$$

Capitolo 3

^{4}He liquido

3.1 Superfluidità

Gli unici due superfluidi che possono essere studiati in laboratorio e che si presentano in stati stabili sono due isotopi dell'elio: l'^{4}He e l'^{3}He. A differenza della maggior parte delle sostanze, questi non solidificano nemmeno allo zero assoluto. Questo comportamento anomalo è dovuto principalmente alla difficoltà nel formare legami interatomici, a causa della shell elettronica 1s completa e alla piccola massa atomica. Ciò implica che la distanza interatomica possa risultare inferiore alla lunghezza d'onda termica di de Broglie:

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \tag{3.1}$$

che rappresenta la lunghezza d'onda associata al moto termico delle particelle. Per vedere se gli effetti quantistici sono importanti nel fenomeno che si studia, si può verificare se la lunghezza d'onda di de Broglie è dello stesso ordine di grandezza delle lunghezze in gioco nel sistema oppure no. Per esempio, nel caso del neon alla temperatura di condensazione $T = 27$ K, si ha $\lambda_{\mathrm{dB}} = 0.08$ nm, mentre la distanza media tra gli atomi è $d \simeq 0.3$ nm. Per l'elio, invece, alla temperatura di condensazione $T = 4$ K la lunghezza d'onda di de Broglie è $\lambda_{\mathrm{dB}} = 0.4$ nm mentre la distanza interatomica media è $d \simeq 0.27$ nm. Questo significa che per l'elio, λ_{dB} e d sono dello stesso ordine di grandezza, rendendo gli effetti quantistici rilevanti a bassa temperatura. Il neon, invece, non presenta tale caratteristica, e quindi non manifesta superfluidità.

Sebbene i due isotopi dell'elio possano sembrare simili, in realtà hanno proprietà profondamente differenti a temperature prossime allo zero assoluto. Questo dipende dalla statistica quantistica a cui sono soggetti; infatti l'^{4}He è un bosone e quindi viene descritto dalla statistica di Bose-Einstein, mentre l'^{3}He è un fermione e viene descritto dalla statistica di Fermi-Dirac.

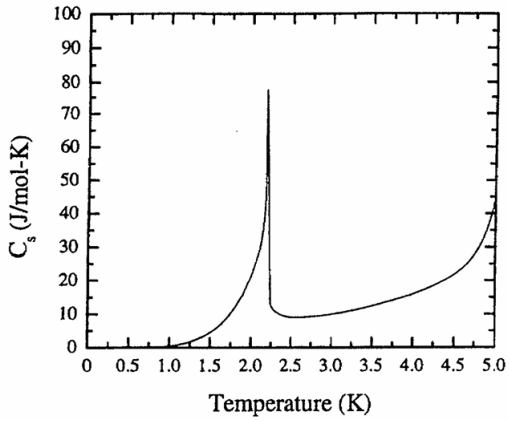

Figura 3.1: Lambda point dell'^{4}He [8]

La temperatura alla quale i due isotopi dell'elio diventano superfluidi è chiamata temperatura critica T_λ; essa vale 2.17 K per l'^{4}He e 20 mK per l'^{3}He. Nel caso dell'^{4}He si definisce He-II l'elio liquido al di sotto della temperatura critica e He-I l'elio liquido al di sopra. La transizione tra questi due stati avviene nel cosiddetto punto lambda, così chiamato per la forma del grafico della capacità termica C_V in funzione della temperatura T, che ricorda una λ, come si vede in Fig. (3.1).

La superfluidità è un fenomeno analogo a quello della superconduttività; mentre per i superconduttori la resistenza elettrica si annulla a basse temperature, nei superfluidi è la viscosità η a diventare nulla. Tuttavia, questo fatto non è propriamente vero perché sperimentalmente si vede che la viscosità del superfluido varia in base al metodo utilizzato per misurarla.

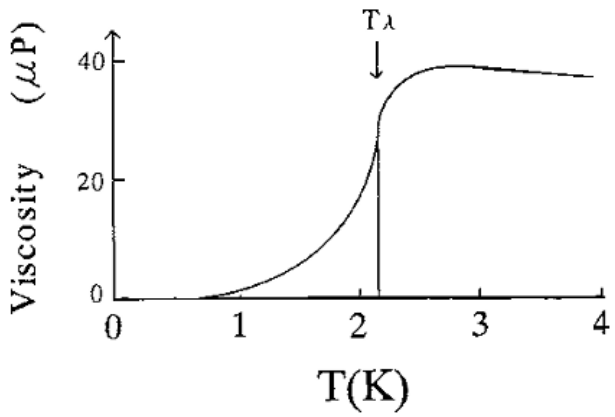

Figura 3.2: Grafico della viscosità dell'^{4}He in funzione della temperatura [15].

Ad esempio, il grafico in Fig. (3.2) è ottenuto attraverso una misura indiretta partendo dai dati sperimentali sulla misura del momento angolare di un disco rotante che veniva raffreddato fino allo zero assoluto.

Per una spiegazione teorica del fenomeno della superfluidità è necessario il modello a due fluidi di Landau.

3.1.1 Motivazioni sperimentali

In questa sezione, presenteremo due esperimenti che mostrano il differente comportamento della viscosità nell'He-II.

Esperimento di Kapitsa L'esistenza di flusso senza viscosità è stata dimostrata per la prima volta da P. Kapitsa negli anni '30 [13]. Egli osservò che l'He-II poteva scorrere lungo capillari senza resistenza. In un fluido classico, la velocità dipende dalla viscosità η, dalla differenza di pressione $\Delta P = P_2 - P_1$, dalla lunghezza e dal diametro del capillare secondo la relazione

$$\frac{\Delta P}{L} \sim \eta \frac{v}{R^2} \tag{3.2}$$

Tuttavia, Kapitsa osservò che nell'He-II si ha $\Delta P = 0$ per ogni velocità minore di una certa velocità, chiamata velocità critica. Da ciò si può dedurre che la viscosità del fluido è nulla: $\eta = 0$.

Esperimento di Andronikashvili L'esperimento condotto nel 1946 da E. Andronikashvili [2] mostrò un comportamento diverso della viscosità nell'He-II. In questo esperimento, utilizzò un sistema costituito da un disco sospeso in un fluido, libero di ruotare attorno al proprio asse. In un fluido classico, il disco è soggetto sia al momento torsionale del filo che all'attrito viscoso che rallenta la rotazione del disco. Andronikashvili osservò che, se si studia il moto del disco rotante immerso nell'He-II, soltanto una parte del fluido partecipa al moto rotatorio. Questo esperimento validò la teoria secondo

la quale un superfluido è composto da una parte superfluida con viscosità nulla e una parte normale con viscosità diversa da 0.

3.2 Spettro delle eccitazioni

In un fluido normale, la viscosità è causata dagli urti delle particelle del liquido con quelle del mezzo nel quale scorre. Il motivo per cui ciò non si verifica nei superfluidi è stato spiegato da Lev Landau. Ponendoci nel sistema di riferimento del fluido, le pareti del fluido si muovono e quindi possiamo utilizzare la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo. Nel sistema di riferimento del laboratorio, possiamo trattare l'interazione fluido-pareti come un potenziale $V(\boldsymbol{r})$ che diventa $V(\boldsymbol{r'}+\boldsymbol{v}t)$ nel sistema di riferimento del fluido. Quindi una singola particella di quantità di moto $\boldsymbol{p}_i = \hbar \boldsymbol{q}_i$ e energia E_i viene diffusa elasticamente nello stato finale di quantità di moto $\boldsymbol{p}_f = \hbar \boldsymbol{q}_f$ e energia E_f solo se

$$E_f = E_i - \hbar \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_f) \tag{3.3}$$

Se la particella ha inizialmente quantità di moto nulla, la relazione Eq. (3.3) si riduce a

$$E(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} = \hbar \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q} \tag{3.4}$$

Se questa relazione ha soluzioni per $\boldsymbol{q} \neq 0$ allora siamo in presenza di un fluido normale, in quanto si possono produrre eccitazioni che rallentano il moto del fluido. Il comportamento superfluido si ha quando la relazione Eq. (3.3) non può verificarsi. Quindi è lecito aspettarsi che lo spettro di energia abbia un andamento particolare.

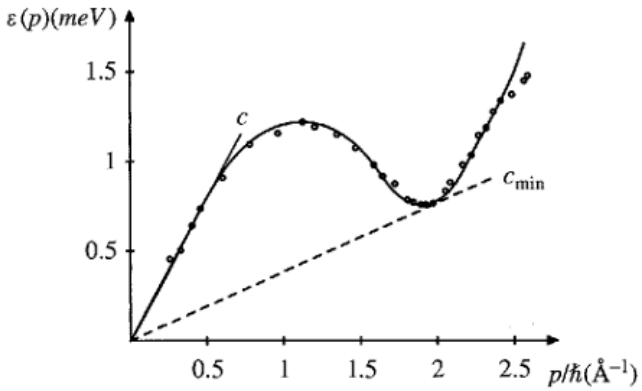

Figura 3.3: Spettro di energia dell'^{4}He [3]

Possiamo identificare due regioni nello spettro di energia Fig. (3.3). Per quantità di moto $\boldsymbol{p}$ piccole lo spettro in energia è approssimativamente lineare

$$E(q) = \hbar c q \tag{3.5}$$

dove $q = p/\hbar$ è il vettore d'onda. Questa parte dello spettro si chiama *fononica* in analogia con i fononi dei solidi. Notiamo che è presente un minimo nello spettro di energia, nella parte dello spettro chiamata *rotonica*, che si può modellizzare come

$$E(q) = \Delta + \frac{\hbar^2 (q - q_o)^2}{2\mu} \tag{3.6}$$

dove da misure sperimentali con scattering di neutroni [12] si ha

- $\Delta k_B = 8.6$ K
- $q_0 = 1.91\ \mathring{A}^{-1}$

- $\mu = 0.16\ \mathrm{m_{He}}$

Per piccole quantità di moto ogni atomo di elio è accoppiato fortemente agli atomi circostanti e quindi il sistema si muove insieme come un solido, avendo come eccitazioni elementari soltanto fononi. Al contrario per quantità di moto vicine al minimo rotonico, ogni atomo di elio fa spostare gli atomi circostanti all'indietro, in un moto simile ad un moto circolare, avendo come effetto risultante lo spostamento in avanti di un atomo.

Velocità critica Ritornando all'Eq. (3.4), vediamo che non può essere soddisfatta per ogni valore della quantità di moto $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{q}$ se la velocità del superfluido $\boldsymbol{v}_s$ è piccola. Quindi esiste una velocità limite $c_{\min}$ oltre la quale si perde la superfluidità, come si può vedere in Fig. 3.3. In particolare, in un superfluido si ha la condizione $E(q) > \hbar q c_{\min}$, dove $c_{\min} = 1/\hbar \min_p (E(q)/q)$. Quindi per fare in modo che l'Eq. (3.4) non sia vera bisogna avere

$$v_s < c_{\min} \tag{3.7}$$

Questo ci dice che esiste una velocità minima $\boldsymbol{v}_s$ oltre la quale le eccitazioni elementari rallentano il moto del superfluido, di fatto distruggendo la superfluidità.

Spettro delle eccitazioni elementari In questa sezione vogliamo determinare un'espressione analitica per lo spettro delle eccitazioni nella forma Eq. (2.50). Per fare ciò, dobbiamo trovare delle espressioni analitiche per $V(\boldsymbol{r})$ e $\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)$. Seguendo [6, 5] scriviamo $\mu_{\mathrm{corr}}(n_0)$ e $V(r)$ come

$$\mu_{\mathrm{corr}}(n_0) = W n_0^{1+\nu} \tag{3.8}$$

$$V(r) = V_0 \left[(\alpha + \beta r^2 A^2 + \gamma r^4 A^4) e^{-A^2 r^2} + \delta e^{-B^2 r^2} \right] \tag{3.9}$$

dove W, ν, A, B, α, β, γ e δ sono parametri. Notiamo che il potenziale di interazione che abbiamo scelto non è uno dei classici potenziali che si utilizzano per descrivere l'elio-4, come il potenziale di Lennard-Jones, dato che quest'ultimo non è Fourier trasformabile. La trasformata di Fourier del potenziale $V(r)$ è:

$$\hat{V}(q) = \frac{1}{16}\pi^{3/2} V_0 \left\{ \frac{e^{-\frac{q^2}{4A^2}}}{A^3} \left[16\alpha + 4\beta \left(6 - \frac{q^2}{A^2} \right) + \gamma \left(60 - \frac{20q^2}{A^2} + \frac{q^4}{A^4} \right) \right] + 16\delta \frac{e^{-\frac{q^2}{4B^2}}}{B^3} \right\} \tag{3.10}$$

Utilizziamo $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu m}}$ e $2\mu = \frac{\hbar^2}{m\xi^2}$ rispettivamente come unità di lunghezza e di energia del nostro modello e notiamo che $2n_0 \frac{\partial \mu_{\mathrm{corr}}}{\partial n_0} = 2(1+\nu) W n_0^{1+\nu}$. Definiamo il parametro adimensionale

$$\chi = \frac{W n_0^{1+\nu}}{\mu} \tag{3.11}$$

e poniamo $V_0 = \mu \xi^{-3}/n_0$. Sostituendo nell'Eq. (2.50) si ottiene la forma finale dello spettro energetico per l'elio-4 superfluido

$$E(q) = \frac{\hbar^2}{m\xi^2} \sqrt{\frac{q^2\xi^2}{2} \left\{ \frac{q^2\xi^2}{2} + \left[\hat{\tilde{V}}(\xi q) + (1+\nu)\chi \right] \right\}} \tag{3.12}$$

dove con $\hat{\tilde{V}}(0)$, si intende la trasformata di Fourier del potenziale di interazione in unità adimensionali. Da Eq. (2.43) otteniamo il vincolo su χ per i parametri del fit

$$\chi = 1 - \hat{\tilde{V}}(0) \tag{3.13}$$

Da Eq. (2.51) possiamo ricavare la velocità del suono secondo questo modello come $c = \frac{\hbar}{m\xi}\sqrt{\frac{1+\chi\nu}{2}}$. Conoscendo sperimentalmente la velocità del suono possiamo ricavare un'espressione per ξ

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2}mc}\sqrt{1+\chi\nu} = 0.471\sqrt{1+\chi\nu}\,\mathring{A} \tag{3.14}$$

Nel nostro modello è presente un vincolo su χ e ν. Sperimentalmente sappiamo che la lunghezza di scattering di onda s vale $a_s = 2.2\ \mathring{A}$ [10], quindi possiamo scrivere

$$a_s = \frac{m\hat{V}(0)}{4\pi\hbar^2} = \frac{m^2c^2}{4\pi n_0\hbar^2}\frac{1-\chi}{1+\nu\chi} \tag{3.15}$$

Quindi, deciso un valore di ν, il valore di χ è dato. Se scegliamo $\nu = 2.8$ otteniamo $\chi = 0.419$; questo valore di ν è stato scelto per riprodurre la corretta relazione di proporzionalità tra la velocità del suono e la densità condensata: $c \propto n_0^{2.8}$ [6]. Come mostrato in [6, 5], i risultati del fit sono $A \simeq 1.82$, $B \simeq 0.667$, $\alpha \simeq 10.2$, $\beta \simeq -16$, $\gamma \simeq 1.764$ e $\delta \simeq 0.383$.

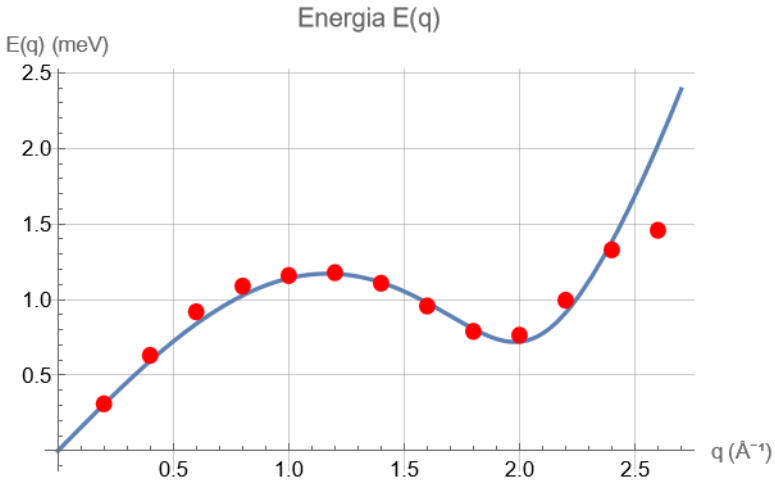

Figura 3.4: Grafico dello spettro delle eccitazioni in funzione del vettore d'onda in Eq. (3.12), realizzato con Mathematica. I punti rossi sono punti sperimentali presi da [8].

Entropia e capacità termica Per la discussione successiva sulla velocità del suono e per testare il modello dello spettro di energia dell'elio-4 è importante ottenere delle espressioni per l'entropia S e per la capacità termica a volume costante C_V nel limite dello spettro di energia per $\boldsymbol{q} \to 0$, cioè utilizzando lo spettro fononico in Eq. (3.5) [10] e utilizzando lo spettro dell'elio-4 in Eq. (3.12). Queste grandezze si possono calcolare come

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_V \tag{3.16}$$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \tag{3.17}$$

dove Ω è il potenziale gran canonico definito come in Eq. (2.58). Dato che dobbiamo derivare rispetto a T, l'unico termine che ci interessa è

$$\Omega_g^{(T)} = k_BT\sum_{q=0}^{+\infty}\ln\left(1-e^{-\frac{E(q)}{k_BT}}\right) \tag{3.18}$$

Al limite termodinamico ($N \to \infty$, $V \to \infty$, $N/V \to$ cost), applicando la sostituzione $\sum_{q=0}^{+\infty} \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}q$, si può passare alla forma integrale

$$\Omega_g^{(T)} = k_BT\frac{V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3q\ \ln\left(1-e^{-\frac{E(q)}{k_BT}}\right) \tag{3.19}$$

Vogliamo calcolare l'integrale in Eq. (3.19) utilizzando l'energia nello spettro fononico in Eq. (3.5)

$$\Omega_{\mathrm{ph}}(T) = k_BT\frac{V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3q\ \ln\left(1-e^{-\frac{\hbar cq}{k_BT}}\right) \tag{3.20}$$

Passando in coordinate sferiche e utilizzando la sostituzione $x = \frac{\hbar c q}{k_B T}$ si ottiene

$$\Omega_{\text{ph}}(T) = k_B T \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \ln\left(1 - e^{-x}\right) \tag{3.21}$$

Utilizzando lo sviluppo in serie

$$\ln(1 - e^{-x}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \tag{3.22}$$

si calcola l'integrale come

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \ln(1 - e^{-x}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^2 e^{-nx} = -\Gamma(3)\zeta(4) = -\frac{2\pi^4}{90} \tag{3.23}$$

dove $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ è la funzione gamma di Eulero e $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ è la funzione zeta di Riemann. Quindi si ottiene

$$\Omega_{\text{ph}}(T) = -\frac{\pi^2}{90} V \frac{k_B^4 T^4}{\hbar^3 c^3} \tag{3.24}$$

Da questa espressione si può calcolare l'entropia

$$S_{\text{ph}} = -\left(\frac{\partial \Omega_{\text{ph}}}{\partial T}\right)_V = \frac{2\pi^2}{45} V \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^3} T^3 \tag{3.25}$$

e la capacità termica

$$C_{V\,\text{ph}} = T \left(\frac{\partial S_{\text{ph}}}{\partial T}\right)_V = \frac{2\pi^2}{15} V \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^3} T^3 \tag{3.26}$$

È interessante vedere quanto queste espressioni si discostano dai dati sperimentali e dai valori calcolati utilizzando lo spettro di energia in Eq. (3.12). In quest'ultimo caso il calcolo verrà svolto numericamente.

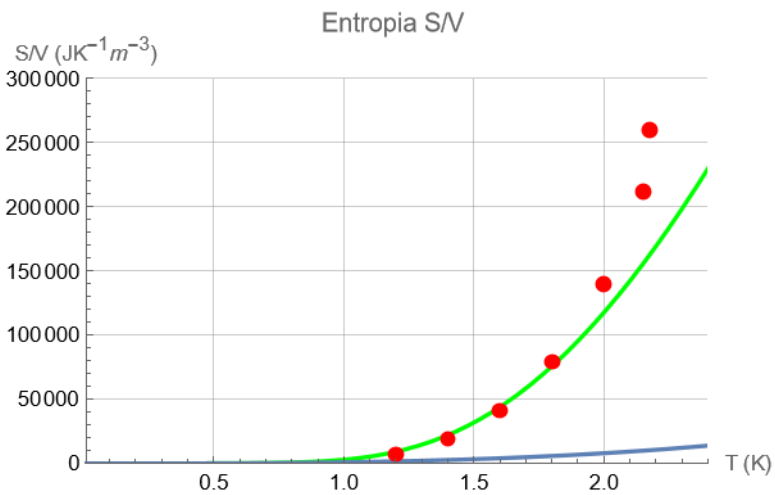

Figura 3.5: Grafico dell'entropia per unità di volume in funzione della temperatura, realizzato con Mathematica. Il grafico blu è ottenuto dallo spettro fononico in Eq. (3.25), il grafico verde è ottenuto numericamente dallo spettro in Eq. (3.12), mentre i punti rossi sono punti sperimentali presi da [8].

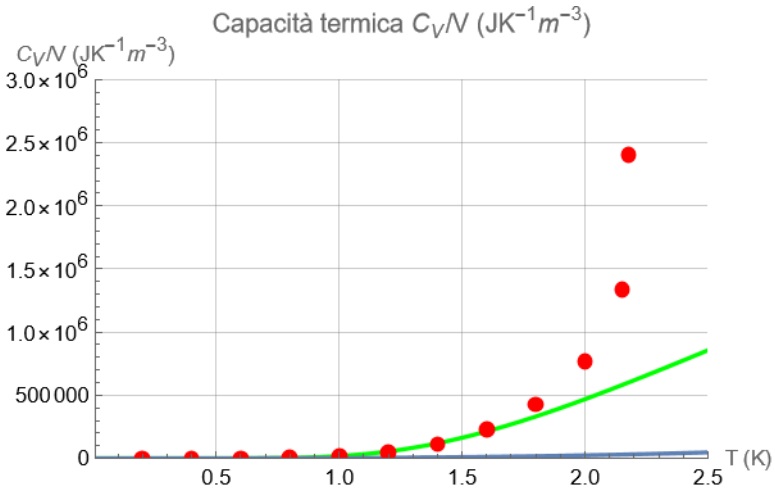

Figura 3.6: Grafico della capacità termica per unità di volume in funzione della temperatura, realizzato con Mathematica. Il grafico blu è ottenuto dallo spettro fononico in Eq. (3.26), il grafico verde è ottenuto numericamente dallo spettro in Eq. (3.12), mentre i punti rossi sono punti sperimentali presi da [8].

Come possiamo vedere i valori che abbiamo calcolato sono in accordo con i dati sperimentali soltanto per temperature basse, come ci aspettavamo dal nostro modello teorico. In entrambi i casi il grafico ottenuto dallo spettro in Eq. (3.12) è migliore di quello ottenuto dallo spettro fononico in Eq. (3.5).

3.3 Frazione superfluida e frazione normale

È interessante cercare un'espressione per la frazione superfluida n_s e per la frazione normale n_n nel caso in cui $T \to 0$. Per ottenerla si inizia scrivendo un'espressione per la corrente normale di massa $\boldsymbol{j}_n$

$$\boldsymbol{j}_n = m n_n \boldsymbol{v} = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \boldsymbol{q} f_{\mathrm{BE}}(E(q) - \hbar \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{3.27}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità del fluido normale e f_{BE} è la distribuzione di Bose-Einstein

$$f_{\mathrm{BE}}(E(q)) = \frac{1}{e^{\frac{E(q)}{k_B T}} - 1} \tag{3.28}$$

Assumendo velocità $\boldsymbol{v}$ piccole e espandendo in serie l'Eq. (3.28) si ottiene l'espressione

$$f_{\mathrm{BE}}(E(q) - \hbar \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v}) \simeq f_{\mathrm{BE}}(E(q)) - \hbar \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v} \frac{\partial f_{\mathrm{BE}}(E)}{\partial E} \tag{3.29}$$

Il primo addendo da un contributo nullo all'integrale per simmetria e sostituendo in Eq. (3.27) si ottiene

$$n_n(T) = -\frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 q^2}{m} \frac{d}{dE} \left(\frac{1}{e^{\frac{E(q)}{k_B T}} - 1} \right) = \frac{1}{3 k_B T} \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 q^2}{m} \frac{e^{\frac{E(q)}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{E(q)}{k_B T}} - 1 \right)^2} \tag{3.30}$$

Dove il termine $\frac{1}{3}$ è ottenuto considerando che $\int \mathrm{d}^3 q \, q_i q_j f(q) = \delta_{ij}/3 \int \mathrm{d}^3 q \, q^2 f(q)$. Passando in coordinate sferiche e usando lo spettro dell'energia per i fononi in Eq. (3.5) si ottiene

$$n_n(T) = \frac{1}{3 k_B T} \frac{\hbar^2}{2\pi^2 m} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}q \, q^4 \frac{e^{\frac{\hbar c q}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar c q}{k_B T}} - 1 \right)^2} \tag{3.31}$$

Quindi si applica la sostituzione $x = \frac{\hbar c q}{k_B T}$, ottenendo

$$n_n(T) = \frac{1}{3k_B T}\frac{\hbar^2}{2\pi^2 m}\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^5 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^4 \frac{e^x}{(e^x-1)^2} \tag{3.32}$$

Per calcolare questo integrale si nota che è valida la seguente relazione

$$\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-xn} \tag{3.33}$$

Adesso resta da calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^4 \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^4 e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u\, u^4 e^{-u} = \Gamma(5)\zeta(4) = \frac{4\pi^4}{15} \tag{3.34}$$

dove nella seconda uguaglianza si è utilizzata la sostituzione $u = xn$. Sostituendo il risultato dell'integrale in Eq. (3.32) si ottiene

$$n_n(T) = \frac{2}{45}\frac{k_B^4 \pi^2}{\hbar^3 m c^5} T^4 \tag{3.35}$$

e la frazione superfluida di conseguenza sarà

$$n_s(T) = n - n_n(T) = n - \frac{2}{45}\frac{k_B^4 \pi^2}{\hbar^3 m c^5} T^4 \tag{3.36}$$

Possiamo ricavarci un risultato analogo utilizzando lo spettro in Eq. (3.12). In questo caso la soluzione sarà soltanto numerica.

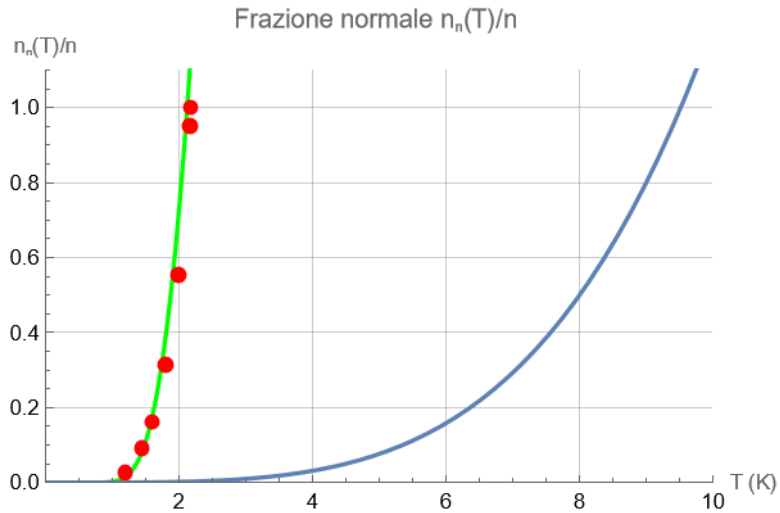

Figura 3.7: Grafico della frazione normale in funzione della temperatura, realizzato con Mathematica. Il grafico blu è ottenuto da Eq. (3.35), il grafico verde è ottenuto numericamente dallo spettro Eq. (3.12), mentre i punti rossi sono punti sperimentali presi da [8].

Dal grafico in Fig. (3.7) si può vedere che lo spettro in Eq. (3.12) porta ad una densità normale in accordo con i dati sperimentali al contrario dell'Eq. (3.35). Inoltre, il risultato ottenuto ha un accordo migliore con i dati sperimentali rispetto a stime teoriche recenti con metodi ab initio, ad esempio [21] oppure attraverso altre forme dello spettro energetico come [20].

Temperatura critica Si può pensare di ricavare una formula per la temperatura del lambda point utilizzando l'Eq. (3.35). Poniamo $n_n = n$ e invertiamo rispetto a T ottenendo

$$T_\lambda = \left(\frac{45\hbar^3 c^5}{2k_B^4 \pi^2}\rho_{\mathrm{He}}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{3.37}$$

dove ρ_{He} è la densità dell'elio al lambda point. Sostituendo con i valori sperimentali:

- $\rho_{\text{He}} = 145.1$ Kg/m^3
- $c = 238$ m/s

si ottiene $T_\lambda = 9.52$ K. La temperatura critica ottenuta è ovviamente incompatibile con il valore sperimentale $T_\lambda = 2.17$ K; quindi questo è l'errore che si ha utilizzando soltanto lo spettro fononico, invece che quello completo.

Possiamo ottenere una stima della temperatura critica anche utilizzando lo spettro in Eq. (3.12). In questo caso basta guardare sul grafico in Fig. (3.7) a che temperatura T corrisponde $n_n(T)/n = 1$. Facendo così otteniamo $T_\lambda = 2.13$ K, più vicino al risultato sperimentale rispetto a quello ottenuto in Eq. (3.37).

3.4 Frazione condensata a $T = 0$

Se prendiamo $T = 0$ in Eq. (2.58) otteniamo che $\Omega_g^{(T)} = 0$ e $\Omega = \Omega_0 + \Omega_g^{(0)}$. Da questo possiamo calcolare la densità volumetrica di particelle come

$$n(n_0) = -\frac{1}{V}\frac{\partial\Omega(\mu, n_o, T=0)}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=g_0 n_0+\mu_{\text{corr}}} = n_0 + n_g^{(0)}(n_0) \tag{3.38}$$

Per determinare $n_g^{(0)}$ dobbiamo calcolare $\frac{\partial E(q,\mu,n_0)}{\partial\mu}$ utilizzando lo spettro in Eq. (2.49)

$$\frac{\partial E(q,\mu,n_0)}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=g_0 n_0+\mu_{\text{corr}}} = -\frac{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + n_0\hat{V}(q) + \frac{\partial\mu_{\text{corr}}(n_0)}{\partial n_0}n_0}{\sqrt{\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2n_0\hat{V}(q) + 2n_0\frac{\partial\mu_{\text{corr}}(n_0)}{\partial n_0}\right)}} \tag{3.39}$$

Quindi abbiamo che

$$n_g^{(0)}(n_0) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}q\, q^2 \frac{\partial E(q,\mu,n_0)}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=g_0 n_0+\mu_{\text{corr}}} \tag{3.40}$$

Risolvendo questo integrale otteniamo n in funzione di n_0, quindi basterebbe cercare il valore di n_0 corrispondente a $n = 2.18 \cdot 10^{28}$ atomi/m^3 [8], cioè il valore sperimentale della densità numerica dell'elio-4 superfluido a pressione ambiente.

Il calcolo non può essere portato a termine perché manca il valore di W e V_0 in Eq. (3.8). Sperimentalmente si vede che la frazione condensata non è vicina all'unità come per i gas quantistici ultrafreddi, ma vale $n_0/n = (7.25 \pm 0.75)\%$ [11].

3.5 Modello a due fluidi di Landau

In questa sezione verrà esposto il modello a due fluidi di Landau [16, 24].

3.5.1 Idrodinamica di un superfluido

Nel modello a due fluidi di Landau, si assume che il superfluido sia formato da due componenti distinte, una *normale* e una *superfluida*. La componente normale (indicata con il pedice n) è descritta dalle leggi dell'idrodinamica classica ed è responsabile del trasporto di entropia; mentre la componente superfluida (indicata con il pedice s), invece, è priva di viscosità e non contribuisce al trasporto di entropia. Per semplicità, in questa trattazione trascureremo eventuali fenomeni dissipativi, sebbene siano presenti sperimentalmente. In questa trattazione, si utilizzeranno coordinate euleriane, cioè coordinate spaziali fisse caratterizzate dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$ e ad ogni grandezza verrà associato un campo scalare o vettoriale che descrive la grandezza nel punto $\boldsymbol{r}$ al tempo t. La corrente di massa del superfluido è definita come:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \rho_s(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r},t) + \rho_n(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{r},t) \tag{3.41}$$

dove $\boldsymbol{v}_{n,s}(\boldsymbol{r},t)$ e $\rho_{n,s}(\boldsymbol{r},t)$ sono, rispettivamente, la velocità e la densità della componente normale e superfluida. La densità del superfluido è definita come

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_s(\boldsymbol{r},t) + \rho_n(\boldsymbol{r},t) \tag{3.42}$$

dove $\rho_{n,s}$ è la densità della componente normale e superfluida.

Equazioni del moto La dinamica di un superfluido secondo il modello a due fluidi di Landau è descritta dalle seguenti equazioni del moto:

- **Equazione di continuità**:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{3.43}$$
dove ρ e $\boldsymbol{j}$ sono rispettivamente la densità del superfluido e la corrente di massa
- **Legge di conservazione della quantità di moto**:
$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{3.44}$$
dove il tensore Π_{ik} che caratterizza il flusso di densità di quantità di moto è
$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} \tag{3.45}$$
e P è la pressione del superfluido
- **Legge di conservazione dell'entropia** per la parte normale:
$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho S \boldsymbol{v}_n) = 0 \tag{3.46}$$
dove S è l'entropia del superfluido

Per avere un set di equazioni completo per la descrizione di un superfluido è necessario aggiungere un'equazione contenente $\boldsymbol{v}_s$, cioè l'equazione di Newton per la parte superfluida. Per ricavare questa equazione bisogna determinare la forza che agisce sulla parte superfluida e uguagliarla al prodotto di massa e accelerazione. Supponiamo di spostare una massa M di componente superfluida da un punto all'altro del liquido. La variazione di energia sarà

$$\Delta u = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_2 \tag{3.47}$$

quindi chiamando $\boldsymbol{f}$ la forza per unità di massa che agisce su un superfluido abbiamo:

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right) = -\boldsymbol{\nabla} u \tag{3.48}$$

dove tutte le derivate sono da intendersi mantenendo la componente normale costante. Per mantenere costante la componente normale devono essere costanti anche la quantità di moto $\boldsymbol{p}$ tra la parte normale e la parte superfluida e l'entropia S. Quindi l'energia U deve essere sostituita dall'energia libera di Gibbs $G = Mg$, dove g è l'energia libera di Gibbs per unità di massa. L'energia libera di Gibbs è

$$Mg = Mg_0 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M_n} \tag{3.49}$$

dove g_0 è l'energia libera di Gibbs della parte superfluida e $\boldsymbol{p}$ è la quantità di moto della parte normale nel sistema di riferimento in cui la velocità superfluida è nulla. La densità di energia u diventa

$$u = \left(\frac{\partial (Mg)}{\partial M}\right)_{\boldsymbol{p},P,T} = g_0 - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M_n M} \tag{3.50}$$

dove $M = M_s + M_n$. Esplicitando la quantità di moto del fluido normale come

$$\boldsymbol{p} = M_n(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s) \tag{3.51}$$

si ottiene

$$u = g_0 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s)^2 \frac{\rho_n}{\rho_n + \rho_s} \tag{3.52}$$

Sostituendo questa espressione in Eq. (3.48) e uguagliando il prodotto di massa e accelerazione si ottiene

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}\left(Mg_0 - \frac{M}{2}(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s)^2 \frac{\rho_n}{\rho_n + \rho_s}\right) \tag{3.53}$$

Utilizzando l'identità per la derivata totale nel sistema in moto: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}$, si ottiene

$$M\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(G_0 + M\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \frac{M}{2}(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s)^2 \frac{\rho_n}{\rho_n + \rho_s}\right) = -\boldsymbol{\nabla} G \tag{3.54}$$

3.5.2 Velocità del suono

Nella propagazione del suono si suppone che le velocità nelle onde sonore siano piccole e che densità, pressione, entropia e temperatura siano soggette a piccole oscillazioni rispetto al punto di equilibrio. Linearizzando le equazioni si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \rho S \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_n = 0 \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} P = 0 \tag{3.57}$$

$$M\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} G = 0 \tag{3.58}$$

Nelle equazioni precedenti, i termini di ordine $O(v^2)$ sono trascurati. Inoltre, si è considerato costante il termine ρS nell'Eq. (3.56), dato che è già moltiplicato per $\boldsymbol{v}_n$. Derivando rispetto al tempo l'Eq. (3.55) e applicando il gradiente all'Eq. (3.57) si ottiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}^2 P \tag{3.59}$$

Questa è l'equazione classica per la propagazione delle onde sonore.

In un superfluido, tuttavia, possono esserci anche onde di temperatura. Queste onde si ottengono combinando l'Eq. (3.56) e l'Eq. (3.58). Si può ricavare questa equazione partendo dalla definizione di energia libera di Gibbs in forma differenziale

$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + \frac{M\mathrm{d}P}{\rho} \tag{3.60}$$

si ha

$$M\boldsymbol{\nabla} P = S\rho\boldsymbol{\nabla} T + \rho\boldsymbol{\nabla} G \tag{3.61}$$

Sostituendo con l'Eq. (3.57) e l'Eq. (3.58) otteniamo

$$\rho_n M\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_s) + \rho S\boldsymbol{\nabla} T = 0 \tag{3.62}$$

Esplicitando la derivata dell'Eq. (3.56) e usando l'Eq. (3.55), si ricava:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S\rho_s}{\rho}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_n) \tag{3.63}$$

Prendendo il gradiente dell'Eq. (3.62) e la derivata rispetto al tempo dell'Eq. (3.63) si ottiene come equazione risultante

$$M\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = S^2\frac{\rho_s}{\rho_n}\boldsymbol{\nabla}^2 T \tag{3.64}$$

che rappresenta un'equazione d'onda che coinvolge la temperatura e l'entropia.

Propagazione del suono in un superfluido Supponiamo piccole perturbazioni attorno all'equilibrio:

$$S(\boldsymbol{r},t) = S_0 + S'(\boldsymbol{r},t) \qquad \rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_0 + \rho'(\boldsymbol{r},t) \tag{3.65}$$

$$P(\boldsymbol{r},t) = P_0 + P'(\boldsymbol{r},t) \qquad T(\boldsymbol{r},t) = T_0 + T'(\boldsymbol{r},t) \tag{3.66}$$

Espandendo $\rho'(P',T')$ e $S'(P',T')$ in serie e trascurando i termini non lineari si ha

$$\rho' = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T P' + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p T' \qquad S' = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T P' + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p T' \tag{3.67}$$

Sostituendo queste espressioni nell'Eq. (3.59) e nell'Eq. (3.64) si ottiene il sistema di equazioni accoppiate

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 P' + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0 \tag{3.68}$$

$$M\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} + M\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - \frac{\rho_s S^2}{\rho_n}\boldsymbol{\nabla}^2 T' = 0 \tag{3.69}$$

Per determinare le soluzioni di onde sonore di questo sistema bisogna cercare soluzioni del tipo

$$P' = \tilde{P}' e^{-i\omega(t-x/c)} \qquad T' = \tilde{T}' e^{-i\omega(t-x/c)} \tag{3.70}$$

con c velocità del suono e inserendo queste espressioni si ottiene il sistema

$$\tilde{P}'\left(1 - c^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T\right) + \tilde{T}'\left(-c^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P\right) = 0 \tag{3.71}$$

$$\tilde{P}'\left(-c^2 M\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\right) + \tilde{T}'\left(S^2\frac{\rho_s}{\rho_n} - c^2 M\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\right) = 0 \tag{3.72}$$

Imponendo che il sistema abbia soluzioni non banali, cioè che la matrice dei coefficienti abbia determinante nullo, si ricava l'equazione

$$Mc^4\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P\right) - c^2\left(\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P M + \frac{\rho_s S^2}{\rho_n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T\right) + \frac{\rho_s S^2}{\rho_n} = 0 \tag{3.73}$$

Si può notare che

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial(\rho,S)}{\partial(P,T)} = \frac{1}{\frac{\partial(P,T)}{\partial(\rho,S)}} \tag{3.74}$$

è il determinante jacobiano della trasformazione da S e ρ a P e T. Il determinante dello jacobiano inverso si ottiene come

$$\frac{\partial(P,T)}{\partial(\rho,S)} = \frac{\partial(P,T)/\partial(\rho,T)}{\partial(\rho,S)/\partial(\rho,T)} = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T \frac{T}{C_V} \tag{3.75}$$

oppure come

$$\frac{\partial(P,T)}{\partial(\rho,S)} = \frac{\partial(P,T)/\partial(P,S)}{\partial(\rho,S)/\partial(P,S)} = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S \tag{3.76}$$

Utilizzando queste due relazioni si ottiene l'equazione per la velocità del suono

$$c^4 - c^2\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S + \frac{\rho_s T S^2}{M\rho_n C_V}\right] + \frac{\rho_s T S^2}{M\rho_n C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T = 0 \tag{3.77}$$

Come si può notare, le equazioni per le onde di pressione e le onde di temperatura sono accoppiate, cioè una variazione di densità produce una variazione di entropia e viceversa. Per semplicità di scrittura si riscrive l'equazione come

$$c^4 - Ac + B = 0 \tag{3.78}$$

con

$$A = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S + \frac{\rho_s T S^2}{M \rho_n C_V} \right] \tag{3.79}$$

$$B = \frac{\rho_s T S^2}{M \rho_n C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \tag{3.80}$$

e quindi le soluzioni dell'equazione delle onde sono:

$$c_1^2 = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2} \right)^2 - B} \tag{3.81}$$

$$c_2^2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2} \right)^2 - B} \tag{3.82}$$

Per dare un significato fisico a queste soluzioni cerchiamo le soluzioni dell'Eq. (3.77) nel caso disaccoppiato, cioè quando le oscillazioni di entropia sono indipendenti dalle oscillazioni di densità. Osservando l'Eq. (3.71) e l'Eq. (3.72) si vede che la condizione di disaccoppiamento si traduce nelle seguenti due condizioni

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = 0 \tag{3.83}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = 0 \tag{3.84}$$

Queste condizioni si equivalgono per la relazione di Maxwell

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \tag{3.85}$$

In questo caso per il coefficiente di espansione termica α vale la relazione

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \to 0 \tag{3.86}$$

e quindi per i coefficienti di compressibilità vale

$$\kappa_T - \kappa_S = \frac{T V \alpha^2}{c_P} \to 0 \tag{3.87}$$

cioè $\kappa_T = \kappa_S$. Sapendo che

$$\kappa = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \tag{3.88}$$

si ottiene

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \tag{3.89}$$

Utilizzando questa condizione nell'Eq. (3.82) si ottengono delle espressioni semplificate

$$c_1^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \tag{3.90}$$

$$c_2^2 = \frac{T S^2 \rho_s}{M C_V \rho_n} \tag{3.91}$$

Il primo suono, che si propaga con velocità c_1, rappresenta un'onda di pressione (come nei fluidi ordinari), mentre il secondo suono, che si propaga con velocità c_2, corrisponde a un'onda di temperatura o entropia, caratteristica dei superfluidi. In elio liquido e in gas bosonici ultrafreddi, l'approssimazione disaccoppiata è generalmente valida. Tuttavia, in sistemi di bosoni debolmente interagenti, il termine di accoppiamento non è trascurabile e bisogna utilizzare le soluzioni complete in Eq. (3.82).

Qualitivamente si può vedere che il secondo suono consiste principalmente in oscillazioni di densità della parte superfluida con la parte normale a riposo, mentre nella parte normale avviene il contrario.

3.5.3 Velocità del suono nei casi limite

Fluido classico In questa parte si studieranno le onde sonore nel limite in cui $T \to T_\lambda$, quindi in prossimità del lambda point dove si ha che $\rho_s \to 0$ e $\rho_n \to \rho$. In questo limite, l'equazione delle onde sonore in Eq. (3.77) diventa

$$c^4 - c^2 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = 0 \tag{3.92}$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$c_1^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \tag{3.93}$$

$$c_2^2 = 0 \tag{3.94}$$

Quindi in prossimità del punto di transizione di fase la velocità di secondo suono è nulla

Liquido completamente superfluido In questa parte invece studieremo il limite in cui $T \to 0$ K, cioè quando $\rho_n = 0$ e $\rho_s = \rho$. In questo caso vedremo come si comporta l'espressione Eq. (3.91) per temperature basse. Per fare questo limite verranno usate l'Eq. (3.35) per $n_n(T)$, l'Eq. (3.26) per $C_V(T)$ e l'Eq. (3.25) per $S(T)$ che sono state calcolate precedentemente con lo spettro fononico, cioè

$$n_n(T) = \frac{2}{45} \frac{k_B^4 \pi^2}{\hbar^3 M c_1^5} T^4 \tag{3.95}$$

$$C_V(T) = \frac{2\pi^2}{15} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c_1^3} \frac{M}{\rho} T^3 \tag{3.96}$$

$$S(T) = \frac{2\pi^2}{45} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c_1^3} \frac{M}{\rho} T^3 \tag{3.97}$$

A cui aggiungiamo anche

$$n_s(T) = \frac{\rho}{M} - n_n(T) \tag{3.98}$$

Si possono considerare le soluzioni disaccoppiate dell'equazione della velocità del suono perché la differenza tra i due coefficienti di compressibilità in Eq. (3.87) tende a 0 per $T \to 0$. Sostituendo le espressioni di $n_n(T)$, $C_V(T)$ e $S(T)$ in Eq. (3.91) otteniamo

$$c_2^2 = \frac{c_1^2}{3} \tag{3.99}$$

Quindi, sapendo che sperimentalmente c_1 tende a un valore costante per temperature prossime allo zero assoluto [8], troviamo che per $T \to 0$ la velocità del secondo suono tende ad un valore costante.

Capitolo 4

Gas quantistici ultrafreddi

4.1 Proprietà superfluide

Definiamo

$$N_0^{1/2}\psi(\boldsymbol{r},t) = n_0(\boldsymbol{r},t)^{1/2}e^{i\theta(\boldsymbol{r},t)} \tag{4.1}$$

e sostituiamo nell'equazione di Gross-Pitaevskii Eq. (2.34), ottenendo

$$-\hbar\sqrt{n_0}\frac{\partial\theta}{\partial t}+i\hbar\frac{1}{2\sqrt{n_0}}\frac{\partial n_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\boldsymbol{\nabla}^2\sqrt{n_0}+\sqrt{n_0}\left(i\boldsymbol{\nabla}^2\theta-(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2\right)\right)+i\frac{\boldsymbol{\nabla}\theta\cdot\boldsymbol{\nabla}n_0}{\sqrt{n_0}}\right]+U(\boldsymbol{r})\sqrt{n_0}+\frac{N_0-1}{N_0}g_0n_0^{\frac{3}{2}} \tag{4.2}$$

Eguagliando la parte reale e la parte immaginaria dell'equazione, si ottengono le due equazioni

$$\frac{\partial n_0}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot n_0\boldsymbol{v}_s = 0 \tag{4.3}$$

$$m\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}}-\frac{1}{2}mv_s^2-U(\boldsymbol{r})-\frac{N_0-1}{N_0}g_0n_0\right] \tag{4.4}$$

dove

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r},t) \tag{4.5}$$

Ricordiamo che le equazioni di un fluido generico a $T=0$ sono:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot n_0\boldsymbol{v} = 0 \tag{4.6}$$

$$m\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{1}{2}mv^2-U(\boldsymbol{r})+\mu\right] = \eta\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}+m\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) \tag{4.7}$$

Da questo possiamo notare che, attraverso le identificazioni

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_s \qquad \mu = g_0\frac{N-1}{N}n_0-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} \qquad \eta=0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}_s=0 \tag{4.8}$$

l'equazione di Gross-Pitaevskii descrive un condensato di Bose-Einstein come un fluido irrotazionale, con viscosità nulla che si muove con velocità Eq. (4.5), che sono le caratteristiche peculiari di un superfluido. Queste caratteristiche producono dei fenomeni rilevabili sperimentalmente come i vortici quantizzati. Per vedere questo, iniziamo dalla definizione di velocità superfluida in Eq. (4.5) e calcoliamo la circolazione lungo un cammino chiuso C qualsiasi (tutti i cammini sono equivalenti per l'irrotazionalità della velocità superfluida):

$$\oint_C \boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{d}l = \frac{\hbar}{m}\oint_C\boldsymbol{\nabla}\theta\cdot\mathrm{d}l = \frac{\hbar}{m}\Delta\theta \tag{4.9}$$

Sapendo che θ è definito modulo 2π otteniamo che la differenza di fase $\Delta\theta$ dopo un percorso chiuso può essere scritta come

$$\Delta\theta = 2\pi k \tag{4.10}$$

con k intero. Inserendo quest'ultima nella circuitazione, otteniamo la condizione di quantizzazione di Onsager-Feynman:

$$\oint \boldsymbol{v}_s \cdot \mathrm{d}l = \frac{h}{m}k \tag{4.11}$$

Fisicamente k è il numero di volte che θ, in unità di 2π, si modifica in un percorso chiuso. Questa è una proprietà topologica della funzione d'onda che è stata confermata in numerosi esperimenti, come [23].

4.2 Spettro di Bogoliubov

In questa sezione vogliamo determinare lo spettro di energia dei condensati di Bose-Einstein utilizzando l'Eq. (4.3) e l'Eq. (4.4), cioè l'energia delle eccitazioni elementari in funzione della loro quantità di moto. Assumendo $U(r) = 0$ poniamo $n_0(\boldsymbol{r}, t) = \tilde{n}_0 + \delta n_0(\boldsymbol{r}, t)$ e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = \delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ in Eq. (4.4) e otteniamo, tralasciando i termini non lineari,

$$\frac{\partial \delta n_0}{\delta t} + \tilde{n}_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \delta\boldsymbol{v} = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial \delta\boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\mathrm{c}_s^2}{\tilde{n}_0}\boldsymbol{\nabla}\delta n_0 - \frac{\hbar^2}{4m^2\tilde{n}_0}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}^2\delta n_0) = 0 \tag{4.13}$$

con

$$m\mathrm{c}_s^2 = g_0 \frac{N_0 - 1}{N_0}\tilde{n}_0 \tag{4.14}$$

Le due equazioni possono essere riscritte come

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathrm{c}_s^2\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2}\boldsymbol{\nabla}^4\right]\delta n_0(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{4.15}$$

Questa equazione differenziale ammette soluzioni del tipo $\delta n_0 = Ae^{-i\omega(t - x/c_s)}$, cioè onde piane monocromatiche se si ha:

$$E(q) = \hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2m\mathrm{c}_s^2\right)} \tag{4.16}$$

dove $q = \omega/c_s$ è il modulo del vettore d'onda. Notiamo che Eq. (4.16) si può ricavare anche dall'Eq. (2.50) ponendo $\hat{V}(q) = g_0$ e $\mu_{\mathrm{corr}} = 0$, con l'identificazione $m\mathrm{c}_s^2 = g_0 n_0$.

Velocità del suono Prendendo il limite per $q \to 0$ dell'Eq. (4.16) si ottiene

$$E(q) = c_s \hbar q \tag{4.17}$$

cioè che le eccitazioni elementari con quantità di moto piccola sono fononi. Sapendo che in uno spettro fononico c_s è la velocità del suono, cioè la velocità di propagazione dei fononi, e utilizzando le relazioni in Eq. (2.35) e Eq. (4.14) otteniamo un'espressione per la velocità del suono in un gas alcalino ultrafreddo

$$c_s^2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s\frac{N_0 - 1}{N_0}\frac{\tilde{n}_0}{m} \tag{4.18}$$

che può essere semplificata prendendo il limite $N_0 \to +\infty$ ottenendo

$$c_s^2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m^2}a_s\tilde{n}_0 \tag{4.19}$$

Ad esempio, nel caso del ^{87}Rb, usato sperimentalmente per la produzione di condensati di Bose-Einstein, dove si ha $a_s \approx 5.31 \cdot 10^{-9}$ m, $m \approx 1.443 \cdot 10^{-25}$ Kg e $\tilde{n}_0 \approx 2.5 \cdot 10^{18}$ atomi/m^3, la velocità del suono è pari a $c_s = 1.67$ mm/s [1].

4.3 Frazione condensata a $T = 0$

Seguendo i risultati in [26, 27] determiniamo quanto vale la frazione condensata per i gas alcalini ultrafreddi nel limite di $T \to 0$. In questo caso, utilizzeremo lo spettro in Eq. (2.49) con le sostituzioni $\hat{V}(q) = g_0$ e $\mu_{\text{corr}} = 0$, che sono le condizioni necessarie per ottenere lo spettro in Eq. (4.16), ricordando la relazione $\mu = g_0 n_0$ ottenuta dall'Eq. (2.43). Nel potenziale gran canonico in Eq. (2.58), vediamo che, dato che siamo a temperatura 0, il termine $\Omega_g^{(T)} = 0$ e quindi possiamo scrivere la densità volumetrica di particelle come

$$n(n_0, T = 0) = -\frac{1}{V}\frac{\partial \Omega(\mu, n_0)}{\partial \mu}\bigg|_{\mu = g_0 n_0} = n_0 + n_g^{(0)}(n_0) \tag{4.20}$$

Otteniamo dunque

$$n_g^{(0)}(n_0) = -\frac{1}{V}\frac{\partial \Omega(\mu, n_0)}{\partial \mu}\bigg|_{\mu = g_0 n_0} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}q\, q^2 \frac{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g_0 n_0}{\sqrt{\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2 g_0 n_0\right)}} \tag{4.21}$$

Questo integrale diverge per q molto grandi. Dato che comunque non ci aspettiamo che questo modello valga per q molto grandi, introduciamo un cutoff, calcolando l'integrale da 0 a Λ e eliminiamo i termini dipendenti da Λ. Otteniamo così

$$n_g^{(0)} = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{m}{\hbar^2} g n_0\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.22}$$

da cui segue

$$n = n_0 \left[1 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(a_s n_0^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{4.23}$$

Quindi per la frazione condensata vale

$$\frac{8}{3\sqrt{\pi}}(a_s n^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n_0}{n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{n_0}{n} = 1 \tag{4.24}$$

Si vede subito che per $a_s \neq 0$ la frazione condensata è diversa da 1 anche a $T = 0$; questo fenomeno si chiama quantum depletion. Se $a_s n^{\frac{1}{3}}$ è molto piccolo si può approssimare $n_0/n \simeq 1$ e ottenere la formula di Bogoliubov:

$$\frac{n_0}{n} \simeq 1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(a_s n^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.25}$$

Capitolo 5

Conclusioni

Nella prima parte della tesi abbiamo presentato le caratteristiche principali della condensazione di Bose-Einstein. Inizialmente è stata riportata la derivazione valida per il gas di bosoni ideale in $3D$ e la definizione di condensato di Bose-Einstein secondo il criterio di Penrose-Onsager. Successivamente, si è parlato dell'equazione di Gross-Pitaevskii che descrive la dinamica della funzione d'onda di condensato, ricavandone un'estensione valida anche per l'elio-4 e non solo per i gas alcalini ultrafreddi. Da questa estensione si è ricavato lo spettro di energia delle eccitazioni elementari nella forma più generale. Infine, è stata presentata la formulazione delle proprietà termodinamiche che sono servite per le discussioni successive. Per l'elio-4 si è presentato uno spettro di energia fenomenologico derivato da quello generale presentato in precedenza. Da questo spettro si sono ricavate numerose proprietà utili a caratterizzare l'elio-4, quali la capacità termica a volume costante e l'entropia. Inoltre, utilizzando lo stesso spettro di energia si è ricavato l'andamento della frazione normale in funzione della temperatura, ottenendo un ottimo accordo con i dati sperimentali. Non si è riusciti a dare una stima quantitativa della frazione condensata nell'elio-4 per la mancanza di valori per alcuni parametri, anche se si è impostato il procedimento matematico per ottenerla. Alla fine della discussione relativa all'elio-4, si è studiata anche l'idrodinamica secondo il modello a due fluidi di Landau, tra cui la velocità del suono; in particolare si è studiato il limite per temperature vicine allo zero assoluto, arrivando al risultato noto in letteratura, che la velocità del secondo suono assume un valore costante in questo limite. Nell'ultima parte si sono studiati i gas alcalini ultrafreddi, ricavando il noto spettro di energia di Bogoliubov e la velocità di propagazione del suono. Si è visto, inoltre, che l'equazione di Gross-Pitaevskii ha una formulazione idrodinamica che suggerisce un comportamento superfluido del sistema. Infine si è studiata la frazione condensata nei gas alcalini ultrafreddi, osservando che a temperatura nulla la frazione condensata è solo in prima approssimazione uguale a uno.

Bibliografia

[1] M. H. Anderson et al. "Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor". In: *science* 269.5221 1995.

[2] E. L. Andronikashvili e Y. G. Mamaladze. "Quantization of Macroscopic Motions and Hydrodynamics of Rotating Helium II". In: *Reviews of Modern Physics* 38.4 1966.

[3] J. F. Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates.* Vol. 5. Oxford University Press, 2004.

[4] F. Baldovin. "Statistical Mechanics - Lecture notes". Note del corso di Istituzioni di Meccanica Statistica, Università degli Studi di Padova. 2024.

[5] N. G. Berloff e P. H. Roberts. "Roton creation and vortex nucleation in superfluids". In: *Physics Letters A* 274.1-2 2000.

[6] Natalia G Berloff e Paul H Roberts. "Motions in a bose condensate: VI. Vortices in a nonlocal model". In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 32.30 1999.

[7] S. Bose. "Plancks gesetz und lichtquantenhypothese". In: *Zeitschrift für Physik* 26.1 1924.

[8] R. J. Donnelly e C. F. Barenghi. "The observed properties of liquid helium at the saturated vapor pressure". In: *Journal of physical and chemical reference data* 27.6 1998.

[9] A. Einstein. "Quantentheorie des einatomigen idealen gases. zweite abhandlung". In: *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932* 2005.

[10] A. L. Fetter e J. D. Walecka. *Quantum theory of many-particle systems.* Courier Corporation, 2012.

[11] H.R. Glyde, R.T. Azuah e W.G. Stirling. "Condensate, momentum distribution, and final-state effects in liquid 4 He". In: *Physical Review B* 62.21 2000.

[12] D. G. Henshaw e A. D. B. Woods. "Modes of atomic motions in liquid helium by inelastic scattering of neutrons". In: *Physical Review* 121.5 1961.

[13] P. Kapitza. "Viscosity of liquid helium below the λ-point". In: *Nature* 141.3558 1938.

[14] M. Kardar. *Statistical physics of particles.* Cambridge University Press, 2007.

[15] S. Koh. "Nonclassical rotational behavior at the vicinity of the λ point". In: *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* 74.5 2006.

[16] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics.* Vol. 6. Elsevier, 1987.

[17] A. J. Leggett. "Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts". In: *Reviews of modern physics* 73.2 2001.

[18] A. J. Leggett. *Quantum liquids: Bose condensation and Cooper pairing in condensed-matter systems.* Oxford university press, 2006.

[19] A. Lenoci. "Elementary excitations and quantized vortices in bosonic superfluids". BSc Thesis. Università degli Studi di Padova, 2018.

[20] F. Mainardis. "Meccanica statistica dell'elio-4 superfluido". BSc Thesis. Università degli Studi di Padova, 2023.

[21] Tommaso Morresi e Giovanni Garberoglio. "Revisiting the properties of superfluid and normal liquid 4He using ab initio potentials". In: *Journal of Low Temperature Physics* 219.3 2025.

[22] O. Penrose e L. Onsager. "Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium". In: *Physical Review* 104.3 1956.

[23] C. Raman et al. "Vortex Nucleation in a Stirred Bose-Einstein Condensate". In: *Physical review letters* 87.21 2001.

[24] A. Tononi. “Sound propagation in a quantum fluid”. Nota interna, Università degli Studi di Padova. 2019.

[25] A. Tononi, A. Cappellaro e L. Salasnich. “Condensation and superfluidity of dilute Bose gases with finite-range interaction”. In: *New Journal of Physics* 20.12 2018.

[26] C. Vianello. “Condensazione di Bose-Einstein e Superfluidità di un gas di bosoni diluito”. BSc Thesis. Università degli Studi di Padova, 2021.

[27] C. Vianello e L. Salasnich. “Condensate and superfluid fraction of homogeneous Bose gases in a self-consistent Popov approximation”. In: *Scientific Reports* 14 2024.