

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Processi e diagrammi per sistemi quantistici

finito-dimensionali

Relatore

Prof. Pieralberto Marchetti

Laureando

Giacomo Brunello

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Costruzione del formalismo	1
1.1	String diagrams	1
1.2	Cenni alla teoria delle categorie	7
1.3	Mappe lineari	9
2	Processi quantistici e formalismo di Von Neumann	12
2.1	Sistemi quantistici, stati del sistema, sistemi composti	12
2.2	Evoluzioni temporali, evoluzioni generalizzate	16
2.3	Osservabili, processi di misura	19
	Conclusioni	23
	Bibliografia	24

Introduzione

Nel 1935 Einstein, Podolsky e Rosen con il paradosso EPR hanno mostrato che, assumendo la località e un opportuno principio di realtà, la meccanica quantistica non poteva fornire una descrizione completa della realtà e nel 1964 Bell propose delle disuguaglianze con cui rese sperimentalmente verificabili le conseguenze di tale paradosso, misurando alcune osservabili di correlazione di sistemi in stati entangled. Nel 1982 l'esperimento di Aspect mostrò la violazione delle disuguaglianze di Bell, dimostrando la completezza della meccanica quantistica e rinforzando il dibattito sui suoi fondamenti. Nello stesso anno Feynmann elaborò l'idea di un computer quantistico per risolvere simulazioni numeriche di sistemi quantistici. Tale problema è infatti molto arduo da risolvere con un computer tradizionale e la soluzione proposta fu quella di usare direttamente sistemi quantistici per tali simulazioni. Ciò portò nel 1995 alla nascita di nuovi rami della teoria quantistica come l'informazione quantistica, la computazione quantistica e le tecnologie quantistiche. Il linguaggio tradizionale degli spazi di Hilbert tuttavia non è molto utile a spiegarne alcune caratteristiche fondamentali, poiché esso pone al centro dell'attenzione il concetto di stato del sistema anziché l'interazione di più sistemi nello spazio e nel tempo. Un esempio è il teletrasporto quantistico, che è stato scoperto solamente nel 1992, 60 anni dopo la pubblicazione del libro *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* di von Neumann. L'idea quindi è quella di riformulare la meccanica quantistica in un nuovo linguaggio, costruendo un formalismo diagrammatico che tratti ogni processo e che veda lo stato del sistema fisico solamente come un tipo speciale di processo. Ciò è molto in linea anche con la *computer science* la quale pone al centro della propria attenzione non il singolo programma bensì l'interazione tra essi.

Il "*quantum pictorialism*", formalismo che tratteremo all'interno della tesi, consiste nell'utilizzo di diagrammi per ragionare sulle caratteristiche essenziali dei sistemi quantistici interagenti, in modo tale che le equazioni diagrammatiche diventino il vero formalismo delle teorie quantistiche esaminate in questa tesi. Vale la pena evidenziale fin da subito che il linguaggio diagrammatico che andremo ad introdurre funziona solo per sistemi quantistici finito-dimensionali e perciò ci restringeremo ad essi. Questo è dovuto al fatto che molti elementi cardine che utilizzeremo nella trattazione non esistono per sistemi infinito-dimensionali. L'esposizione del linguaggio avverrà in fasi successive: dapprima verrà descritto il formalismo degli *string diagrams*, soffermandosi in particolare sulla teoria processuale delle *mappe lineari*, seguirà poi uno sviluppo del linguaggio dei *processi quantistici* per confronto con gli assiomi della meccanica quantistica. Tale formalismo ha avuto ampie applicazioni nel campo della computazione quantistica, in cui sono state ideate varie tecniche di calcolo quantistico basate sull'utilizzo di diagrammi, e nel campo dei fondamenti della teoria quantistica, in cui sono state analizzate in dettaglio varie proprietà come l'entanglement e la non-località.

Capitolo 1

Costruzione del formalismo

1.1 String diagrams

È necessario innanzitutto fornire le basi del ragionamento diagrammatico. Un diagramma è costituito da una serie di box che rappresentano dei processi (ψ, g, h) e da dei collegamenti che rappresentano invece dei tipi di sistema (A, B, C, D):




Usiamo il termine *processo* per riferirci a tutto ciò che abbia zero o più input e zero o più output e viene rappresentato da un box con una serie di linee: quelle che arrivano dal basso rappresentano i sistemi di input mentre quelle che partono dall'alto rappresentano i sistemi di output.

Le etichette attaccate ad ogni linea rappresentano invece i tipi di sistema o semplicemente i *tipi*. Solitamente si è interessati a determinati tipi di processi come ad esempio ai processi fisici, chimici, biologici, computazionali, eccetera. È necessario quindi organizzare i processi in macrostrutture chiamate *teorie processuali*:

Definizione 1.1.1. Una teoria processuale è costituita da una collezione T di tipi di sistema, da una collezione P di processi con input e output presi da T , e da un'operazione che consente di interpretare un diagramma di processi uniti tra loro e appartenenti a P come un processo in P .

Alcuni esempi di teorie processuali sono:

- le **funzioni** le quali hanno come tipi di sistema gli insiemi (ad es. \mathbb{R}) e come processi funzioni tra di essi (ad es. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), 
- le **mappe lineari** che hanno come tipi di sistema gli spazi vettoriali e come processi mappe lineari tra essi,
- i **processi quantistici** che hanno come tipi di sistema sistemi classici e quantistici.

Si definisce un'equazione diagrammatica come un'uguaglianza tra due diagrammi e a partire da una di esse è possibile ottenere nuove equazioni deformando i diagrammi o facendo delle sostituzioni.

Esistono inoltre due tipi di operazioni tra diagrammi:

- La *composizione in parallelo* che consiste nel porre due diagrammi uno accanto all'altro e viene indicata col simbolo \otimes . Tale operazione è ben definita anche per tipi di sistema: dati due sistemi

A e B andiamo a definire $A \otimes B$ come la composizione in parallelo tra A e B :

$$\begin{array}{c} | \\ \boxed{f} \\ | \end{array} \otimes \begin{array}{c} | \\ \boxed{g} \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \boxed{f} \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ \boxed{g} \\ | \end{array} \quad A \otimes B \quad \begin{array}{c} | \\ A \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ B \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ \boxed{f} \\ | \end{array} \otimes \begin{array}{c} | \\ \text{(*)} \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \boxed{f} \\ | \end{array} \quad (1.2)$$

Il processo (*) è detto diagramma vuoto e rappresenta l'identità.

- *composizione in serie* che consiste nel connettere l'output di un primo diagramma con l'input del secondo e viene indicata col simbolo \circ :

$$\begin{array}{c} | \\ \boxed{g} \\ | \end{array} \circ \begin{array}{c} | \\ \text{(*)} \\ | \end{array} \circ \begin{array}{c} | \\ \boxed{f} \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \boxed{g} \\ | \\ \text{ } \\ | \\ \boxed{f} \\ | \end{array} \quad (1.3)$$

Il diagramma (*) è chiamato *scambio* e permette di invertire tra loro due tipi di input o due tipi di output.

Un diagramma costruito componendo box, identità e scambi utilizzando \otimes e \circ è detto *circuito*. Introduciamo ora alcuni processi speciali che giocheranno un ruolo centrale nel seguito:

$$\text{stati : } \begin{array}{c} | \\ \nabla \psi \\ | \end{array} \quad \text{effetti : } \begin{array}{c} \nabla \Pi \\ | \end{array} \quad \text{numeri : } \begin{array}{c} \diamond \lambda \end{array} \quad (1.4)$$

Gli stati (ad es. ψ) sono processi senza alcun input, gli effetti (ad es. Π) sono processi senza alcun output mentre i numeri (ad es. λ) sono processi senza input né output.

Componendo in serie uno stato con un effetto otteniamo un numero:

$$\begin{array}{c} \nabla \Pi \\ | \\ \nabla \psi \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \lambda \end{array} \quad (1.5)$$

I diagrammi visti fino ad ora e quelli successivi sono un'evoluzione di quelli introdotti da Penrose per rappresentare i calcoli tensoriali [4]. Ogni diagramma ed ogni equazione diagrammatica infatti è scrivibile anche in maniera tensoriale nel seguente modo: si fanno corrispondere i processi a tensori e le linee di input e output rappresentano gli indici alti e bassi di questi ultimi. Se in un diagramma sono presenti delle connessioni tra più processi possiamo rappresentarle in forma tensoriale con indici sommati (una volta come indice alto e una volta come indice basso) e operazioni di prodotto in serie e parallelo inoltre rappresentano rispettivamente le operazioni di contrazione e di prodotto tensoriale. Lo stesso diagramma vuoto rappresenta l'unità tensoriale. Si fornisce un esempio di equivalenza:

$$\begin{array}{c} | \\ A \\ | \\ \text{ } \\ | \\ \boxed{f} \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ E \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ F \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ \boxed{g} \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ D \\ | \\ \text{ } \\ | \\ \boxed{h} \\ | \\ C \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad f^{AB} h_C^D g_{BD}^{EF} \quad (1.6)$$

È possibile capire sin da ora quindi la potenza del calcolo diagrammatico che ci consente, con una serie di figure, di rappresentare complesse operazioni tensoriali.

Vista tale equivalenza con i tensori è facile ora inserire il concetto di stati entangled e di sistemi composti anche in una teoria diagrammatica; per farlo è necessario introdurre il concetto di separabilità e di non separabilità all'interno dei sistemi fisici. Inoltre, per poter ritrovare un'analogia tra stati ed effetti che compare in meccanica quantistica, è necessario introdurre anche il concetto di aggiunto.

Definizione 1.1.2. Uno stato bipartito ψ è uno stato di due sistemi ed è detto \otimes – separabile se esistono due stati ψ_1 e ψ_2 tali che:

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ \triangle \psi \\ | \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \triangle \psi_1 \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ \triangle \psi_2 \\ | \end{array} \quad \psi^{AB} = \psi_1^A \otimes \psi_2^B \quad (1.7)$$

Un processo è detto \circ – separabile se esistono un effetto Π e uno stato ψ tali che:

$$\begin{array}{c} | \\ \square f \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \triangle \psi \\ | \\ \triangle \Pi \\ | \end{array} \quad f_B^A = \psi^A \Pi_B \quad (1.8)$$

L'oggetto centrale del nostro studio saranno gli *string diagrams* ovvero dei circuiti a cui viene aggiunto uno speciale stato e uno speciale effetto chiamati rispettivamente *cup* e *cap* definiti come:

$$\text{cup} := \begin{array}{c} | \\ | \\ \triangle \cup \\ | \\ | \end{array} \quad \text{cap} := \begin{array}{c} \triangle \cap \\ | \\ | \end{array} \quad (1.9)$$

che soddisfano la seguente equazione:

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ \triangle \cap \\ | \\ \triangle \cup \\ | \\ | \end{array} = | = \begin{array}{c} | \\ \triangle \cap \\ | \\ \triangle \cup \\ | \\ | \end{array} \quad (1.10)$$

Nella notazione di Penrose i *cup* e i *cap* sono stati utilizzati per rappresentare i tensori metrici e le equazioni qui introdotte possono essere riscritte nel seguente modo:

$$g^{\mu\nu} := \cup^{AB} \quad g_{\mu\nu} := \cap_{AB} \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu = g_{\rho\nu} g^{\nu\mu} \quad (1.11)$$

Grazie ai *cups* e ai *caps* possiamo convertire stati bipartiti in processi e viceversa con le seguenti operazioni:

$$\begin{array}{c} | \\ \square f \\ | \end{array} \xrightarrow{(*)} \begin{array}{c} | \\ | \\ \square f \\ | \\ \triangle \cup \\ | \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ \triangle \psi \\ | \\ | \end{array} \xrightarrow{(+)} \begin{array}{c} \triangle \cap \\ | \\ | \\ \triangle \psi \\ | \\ | \end{array} \quad (1.12)$$

Teorema 1.1.1. Se vale l'uguaglianza definita nell'equazione (1.10) i processi con input un tipo A e output un tipo B sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli stati bipartiti di tipo $A \otimes B$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{B} \\ \square f \\ \text{A} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \\ \triangle \psi \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

Prima di effettuare la dimostrazione al fine di rendere il linguaggio più semplice possiamo rappresentare in modo più sintetico *cup* e *cap* con:

In questo modo l'eq. (1.10) diventa la prima delle *yanking equations*:

$$\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} = | = \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \quad \begin{array}{c} \cap \\ \cap \end{array} = | = \begin{array}{c} \cap \\ \cap \end{array} \quad \begin{array}{c} \cap \\ \cup \end{array} = \cup \quad (1.14)$$

Dimostriamo ora il teorema sfruttando le equazioni appena introdotte: Possiamo innanzitutto convertire un processo in uno stato (*), e poi nuovamente in un processo (+), A partire da questo possiamo tornare al processo iniziale (a) sfruttando l'equazione (1.10):

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \xrightarrow{(*)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \xrightarrow{(+)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \xrightarrow{(a)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \quad (1.15)$$

Similmente, iniziando con uno stato possiamo convertirlo in un processo (+) e poi nuovamente in uno stato (*) e possiamo poi tornare allo stato di partenza (b) utilizzando ancora una volta l'equazione (1.10):

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \xrightarrow{(+)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \xrightarrow{(*)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \xrightarrow{(b)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \quad (1.16)$$

Questo dimostra la corrispondenza biunivoca. \square

A livello tensoriale questo è equivalente ad usare il tensore metrico per alzare o abbassare gli indici:

$$f_B^A \rightarrow f_B^A \cup^{BB'} =: \psi^{AB'} \quad \psi^{AB} \rightarrow \psi^{AB} \cap_{BB'} =: f_B^A \quad (1.17)$$

ed è possibile dimostrare analogamente il teorema usando questo formalismo.

Tuttavia in questa trattazione è stata fatta una semplificazione.

In generale ci aspettiamo che per ogni tipo di sistema A , esista un tipo di sistema A^* detto duale di A se esiste uno stato *cup* e un effetto *cap* che soddisfano le *yanking equations*:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \cap \\ \uparrow A \quad \uparrow A^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \cup \\ \downarrow A^* \quad \downarrow A \end{array} \quad t.c. \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \cap \\ \downarrow A^* \quad \downarrow A \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ \cap \\ \downarrow A^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \cup \\ \downarrow A \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ \cup \\ \downarrow A \end{array} \quad (1.18)$$

Noi abbiamo assunto implicitamente che A sia auto-duale ovvero che $A = A^*$. Se così non fosse infatti non potremmo definire tali equazioni come fatto all'interno della tesi (eq. (1.14)). Andremo a considerare spazi di Hilbert finito-dimensionali, ovvero spazi vettoriali dotati di prodotto scalare e per essi esiste un isomorfismo tra uno spazio V e il suo duale V^* e tra V e V^{**} che ci permette di fare l'assunzione che i nostri spazi siano auto-duali. Nel resto della trattazione quindi continueremo ad assumere che i *cup* e i *cap* siano auto-duali e cioè che tutti i tipi di sistema utilizzati siano auto-duali. Prima di procedere è necessario rendere il linguaggio più complesso per poter definire altri elementi, si modifica quindi la forma di stati, effetti e processi nel modo seguente:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \cap \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \triangle \\ \cap \\ \downarrow \end{array} \quad (1.19)$$

A questo punto possiamo usare le *yanking equations* per definire la **trasposta** di un processo f^T come il processo che va nella direzione opposta (a), nel caso di uno stato la definizione diventa quella espressa nel punto (b):

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} := \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \quad (a) \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} := \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \quad (b) \quad (1.20)$$

Diagrammaticamente essa viene rappresentata con una rotazione di 180° del processo f e dello stato ψ . Similmente è possibile sfruttare le *yanking equations* (*) e la definizione di trasposta (#) per osservare che possiamo far scorrere i nostri box attorno ai *cup* e ai *cap* come se fossero le *perle di una collana*.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \xrightarrow{(*)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \xrightarrow{(\#)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \xrightarrow{(*)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \xrightarrow{(\#)} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{f} \end{array} \quad (1.21)$$

In una teoria processuale che ammette *string diagrams* inoltre esiste una corrispondenza biunivoca non solo tra stati ed effetti di uno stesso tipo ma anche tra processi con input e output opposti. In altre parole la trasposta della trasposta mi porta al processo originale, questa è la proprietà di involuzione. Gli *string diagrams* forniscono un modo semplice per definire la traccia di un processo f avente stesso tipo di input e output A e più in generale per prendere la traccia parziale di un processo g con un input dello stesso tipo di uno dei suoi output:

$$\text{tr} \left(\begin{array}{c} |A \\ \hline \text{f} \\ \hline |A \end{array} \right) := A \quad \text{tr}_A \left(\begin{array}{cc} |A & |C \\ \hline \text{g} \\ \hline |A & |B \end{array} \right) := A \quad (1.22)$$

La richiesta successiva è quella di trovare un *test* che verifichi se un sistema si trova in un particolare stato ψ . Per farlo definiamo l'**aggiunto** di uno stato ψ come l'effetto ottenuto riflettendo verticalmente ψ e analogamente definiamo l'aggiunto di un processo f come la sua riflessione verticale:

$$\begin{array}{c} | \\ \hline \psi \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\dagger} \begin{array}{c} \psi \\ \hline | \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} |B \\ \hline \text{f} \\ \hline |A \end{array} \xrightarrow{\dagger} \begin{array}{c} |A \\ \hline \text{f} \\ \hline |B \end{array} \quad (1.23)$$

È facile verificare come l'aggiunto preservi la composizione in parallelo, inverta la composizione in serie e invii *cups* in *caps*. È possibile poi definire il **coniugato** di un processo come la trasposta del suo aggiunto e lo indichiamo diagrammaticamente con una riflessione orizzontale.

$$\begin{array}{c} | \\ \hline \text{f} \\ \hline \end{array} := \begin{array}{c} \text{f} \\ \hline \text{f} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \text{f} \\ \hline \text{f} \\ \hline \end{array} \quad (1.24)$$

L'aggiunto è la procedura con cui trasformiamo uno stato in un effetto e viceversa. La composizione in serie di uno stato ψ per un effetto Φ è chiamato **prodotto interno** $\begin{array}{c} \Phi \\ \hline \psi \end{array}$, e verifica le seguenti proprietà:

1. È coniugato simmetrico;
2. È definito positivo:

$$\begin{array}{c} \overline{\begin{array}{c} \Phi \\ \hline \psi \end{array}} \\ (1) \end{array} = \begin{array}{c} \Phi \\ \hline \psi \end{array} \begin{array}{c} \psi \\ \hline \Phi \end{array} \begin{array}{c} \psi \\ \hline \Phi \end{array} \begin{array}{c} \Phi \\ \hline \psi \end{array} \begin{array}{c} \psi \\ \hline \psi \end{array} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} | \\ \hline \psi \\ \hline \end{array} = 0 \quad (2) \quad (1.25)$$

dove al punto (*) si è usata la definizione di trasposta (eq. (1.20)) e al punto (#) si è usata la prima delle *yanking equations*. (eq. (1.14)).

3. Preserva i numeri nella seconda componente;
4. Coniuga i numeri nella prima componente:

$$\begin{array}{c} \Phi \\ \hline \lambda \cdot \psi \end{array} = \begin{array}{c} \Phi \\ \hline \psi \end{array} \begin{array}{c} \lambda \end{array} \quad \begin{array}{c} \lambda \cdot \Phi \\ \hline \psi \end{array} = \left(\begin{array}{c} \lambda \\ \hline \Phi \end{array} \right)^\dagger \circ \begin{array}{c} | \\ \hline \psi \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \bar{\lambda} \\ \hline \Phi \\ \hline \psi \end{array} \quad (3) \quad (4) \quad (1.26)$$

Come in meccanica quantistica, il prodotto scalare di uno stato ψ per un effetto ϕ indica, se gli stati sono normalizzati, l'ampiezza di transizione da ψ a ϕ .

Vogliamo poi andare a definire anche in una teoria diagrammatica i processi che lasciano invariata tale quantità ovvero le isometrie e i processi unitari.

Definizione 1.1.3. Un processo U è un'isometria se vale (a) e in tal caso preserva il prodotto scalare come mostrato in (b):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ | \\ \text{U} \\ | \\ B \\ | \\ \text{U} \\ | \\ A \end{array} = \begin{array}{c} | \\ A \end{array} \\
 (a)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \phi \\ | \\ \text{U} \circ \phi \\ | \\ \text{U} \circ \psi \\ | \\ \psi \end{array} = \begin{array}{c} \phi \\ | \\ \text{U} \\ | \\ \text{U} \\ | \\ \psi \end{array} = \begin{array}{c} \phi \\ | \\ \psi \end{array} \\
 (b)
 \end{array}
 \qquad (1.27)$$

Si può poi definire un processo U con input A e output B **unitario** come un processo per cui vale:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ | \\ \text{U} \\ | \\ B \\ | \\ \text{U} \\ | \\ A \end{array} = \begin{array}{c} | \\ A \end{array} \qquad
 \begin{array}{c} B \\ | \\ \text{U} \\ | \\ A \\ | \\ \text{U} \\ | \\ B \end{array} = \begin{array}{c} | \\ B \end{array} \\
 U^\dagger \circ U = \mathbb{1}_A \qquad U \circ U^\dagger = \mathbb{1}_B \\
 (1.28)
 \end{array}$$

Per terminare la descrizione degli *string diagrams* è necessario fornire le ultime definizioni:

Definizione 1.1.4. Un processo f da A in A è detto positivo se esiste un processo g tale per cui vale (c). Tali processi sono invarianti per riflessioni verticali e perciò auto-aggiunti come mostrato al punto (d):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ | \\ f \\ | \\ A \end{array} = \begin{array}{c} A \\ | \\ g \\ | \\ A \\ | \\ g \\ | \\ A \end{array} \\
 (c)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} | \\ f \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ f \\ | \end{array} \\
 (d)
 \end{array}
 \qquad (1.29)$$

Per la corrispondenza biunivoca tra stati bipartiti e processi (Teorema 1.1.1) possiamo ora collegare processi auto-aggiunti con stati auto-coniugati ovvero invarianti per riflessioni orizzontali. Si dimostra infatti che uno stato ψ è auto-coniugato se e solo se il processo f corrispondente ad esso è auto-aggiunto.

Definizione 1.1.5. uno stato bipartito è ψ \otimes -positivo se esiste un processo g tale per cui:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \quad A \\ | \quad | \\ \psi \end{array} = \begin{array}{c} A \quad A \\ | \quad | \\ g \quad g \end{array} \\
 (1.30)
 \end{array}$$

Si dimostra inoltre sfruttando le *yanking equations* che uno stato ψ è \otimes -positivo se e solo se il processo f corrispondente ad esso è positivo e perciò ogni qualvolta si abbia a che fare con uno stato bipartito auto-coniugato si può sempre associare ad esso un processo auto-aggiunto. Possiamo poi estendere la definizione di \otimes -positività anche ai processi: un processo f è \otimes -positivo se esiste un processo g oppure un processo g' tale che:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} B \quad B \\ | \quad | \\ f \\ | \quad | \\ A \quad A \end{array} = \begin{array}{c} B \quad B \\ | \quad | \\ g \quad g \end{array} \text{ oppure } \begin{array}{c} B \quad B \\ | \quad | \\ f \\ | \quad | \\ A \quad A \end{array} = \begin{array}{c} B \quad B \\ | \quad | \\ g' \quad g' \end{array} \\
 (1.31)
 \end{array}$$

e uno stato \otimes -positivo non è altro che un processo \otimes -positivo dove A è il sistema triviale. Come si può notare questi processi sono invarianti per riflessioni orizzontali.

Concludiamo questa introduzione al formalismo dando la definizione di *proiettore*:

Definizione 1.1.6. *Un proiettore è un processo P positivo e idempotente cioè:*

$$\text{Diagram of } P = \text{Diagram of } P \circ P = \text{Diagram of } P \circ P \quad (1.32)$$

1.2 Cenni alla teoria delle categorie

Il formalismo diagrammatico qui introdotto non è altro che una rappresentazione pittografica della teoria matematica delle categorie monoidali strette.

Definizione 1.2.1. *Una categoria C consiste di:*

1. *Una collezione $ob(C)$ di oggetti: A, B, C ;*
2. *per ogni coppia di oggetti A, B , un insieme $C(A, B)$ di morfismi $f, g, h : A \rightarrow B$;*
3. *per ogni oggetto A , uno speciale morfismo identità: $1_A \in C(A, A)$;*
4. *un oggetto identità: $I \in ob(C)$;*
5. *un'operazione di composizione in serie per morfismi:*

$$\circ : C(B, C) \times C(A, B) \rightarrow C(A, C) \quad \text{ad es se } f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C \quad g \circ f : A \rightarrow C \quad (1.33)$$

la quale è associativa e unitale sui morfismi:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad 1_B \circ f = f = f \circ 1_A \quad (1.34)$$

Alcuni esempi di categorie sono:

- **Sets** che ha insiemi come oggetti $A, B, C..$ e i cui morfismi sono funzioni tra essi $f : A \rightarrow B$ e la composizione è la composizione di funzioni;
- **Vect $_{\mathbb{C}}$** che ha come oggetti spazi vettoriali complessi $V, W, Z..$ e i cui morfismi sono omomorfismi $f : V \rightarrow W$;
- **FHilb** che ha spazi di Hilbert finito-dimensionali come oggetti $H, K, ...$ e i cui morfismi sono isometrie lineari tra essi $f : H \rightarrow K$.

Conviene introdurre anche il concetto di funtore:

Definizione 1.2.2. *Un funtore F tra due categorie C e D $F : C \rightarrow D$ consiste di una funzione F_0 che mappa gli oggetti di C negli oggetti di D :*

$$F_0 : ob(C) \rightarrow ob(D) \quad (1.35)$$

e per ogni coppia di oggetti A, B in C esiste una funzione F_a che mappa i morfismi di C nei morfismi di D :

$$F_a : C(A, B) \rightarrow D(F(A), F(B)) \quad (1.36)$$

tale che F_0 sia unitale e che F_a preservi la composizione in serie tra morfismi e il morfismo identità:

$$F_0(I) = I \quad F_a(g \circ f) = F_a(g) \circ F_a(f) \quad F(1_A) = 1_{F_0(A)} \quad (1.37)$$

Possiamo ora definire una categoria monoidale stretta:

Definizione 1.2.3. Una categoria monoidale stretta è costituita da una terna (C, \otimes, I) in cui:

1. C è una categoria

2. $\otimes : C \times C \rightarrow C$ è un funtore ed è formato da:

- Un'operazione di composizione in parallelo per oggetti:

$$\otimes : ob(C) \times ob(C) \rightarrow ob(C)$$

- Un'operazione di composizione in parallelo per morfismi:

$$\otimes : C(A, B) \times C(C, D) \rightarrow C(A \otimes C, B \otimes D)$$

e soddisfa le seguenti condizioni:

- \otimes è associativa e unitale sugli oggetti:

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \quad A \otimes I = A = I \otimes A \quad (1.38)$$

- \otimes è associativa e unitale sui morfismi:

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) \quad f \otimes 1_I = f = 1_I \otimes f \quad (1.39)$$

- \otimes e \circ possono essere scambiati tra loro:

$$(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ g_2) \otimes (g_2 \circ f_2) \quad (1.40)$$

3. $I \in ob(C)$ è un oggetto che fa da identità per \otimes

Definizione 1.2.4. Una categoria monoidale stretta simmetrica invece è una categoria monoidale stretta con un morfismo di scambio:

$$\sigma_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A \quad (1.41)$$

definito per tutti gli oggetti A, B , e che soddisfa:

$$\begin{aligned} \sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} &= 1_{A \otimes B} & \sigma_{A,I} &= 1_A \\ (f \otimes g) \circ \sigma_{A,B} &= \sigma_{B,A} \circ (g \otimes f) & (1_B \otimes \sigma_{A,C}) \circ (\sigma_{A,B} \otimes 1_C) &= \sigma_{A,B \otimes C} \end{aligned}$$

Un esempio di categoria monoidale è $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$, ove \otimes è il prodotto tensore tra due spazi vettoriali e $I = \mathbb{C}$. L'aggettivo stretta indica che \otimes è associativo e unitale, se la categoria non fosse stretta i corrispettivi oggetti non sarebbero identici ma isomorfi. Molte categorie monoidali non sono strette, tuttavia esiste un teorema che garantisce un'equivalenza tra categorie monoidali simmetriche e categorie monoidali simmetriche strette.

Una teoria processuale altro non è che una categoria monoidale stretta simmetrica la quale ha processi come morfismi e tipi di sistema come oggetti. Le operazioni di composizione in serie e parallelo non sono altro che le operazioni di composizione definite tra morfismi e oggetti.

Se poi vogliamo definire gli *string diagrams* all'interno delle categorie monoidali è necessario introdurre il concetto di *dagger* ed estendersi alle categorie chiuse e compatte:

Definizione 1.2.5. Una categoria chiusa e compatta è una categoria monoidale simmetrica C dove per ogni oggetto $A \in Ob(C)$ esiste un oggetto $A^* \in Ob(C)$ detto duale di A e due morfismi:

$$\epsilon_A : A \otimes A^* \rightarrow I \quad \eta_A : I \rightarrow A^* \otimes A$$

tali che:

$$(\epsilon_A \otimes I_A) \circ (I_A \otimes \eta_A) = 1_A \quad (1_{A^*} \otimes \epsilon_A) \circ (\eta_A \otimes I_{A^*}) = 1_{A^*}$$

L'aggettivo chiuso indica che tutti i morfismi tra due oggetti A e B in una categoria C sono raccolti in un altro oggetto $[A \rightarrow B]$ i cui stati $\psi : I \rightarrow [A \rightarrow B]$ rappresentano dei morfismi in $C(A, B)$. Ad esempio nei **Sets** $[A \rightarrow B]$ è l'insieme delle funzioni da A a B mentre in **Vect $_{\mathbb{C}}$** $[V \rightarrow W]$ rappresenta lo spazio vettoriale delle mappe lineari da V a W detto $hom_{\mathbb{C}}(V, W)$.

Se C è una categoria chiusa e compatta invece ogni oggetto A è compatto, ovvero per ogni oggetto $B \in C$ vale $[A \rightarrow B] := A^* \otimes B$, condizione che coincide con il richiedere la corrispondenza biunivoca tra stati bipartiti e processi.

Un esempio di categoria chiusa e compatta è **FVect $_{\mathbb{C}}$** , che ha come oggetti spazi vettoriali finito-dimensionali V, W, U, \dots , come morfismi mappe lineari tra esse, come unità $I = \mathbb{C}$ e \otimes rappresenta il prodotto tensore tra due spazi vettoriali. È una categoria chiusa infatti infatti per ogni coppia di spazi vettoriali V, W l'oggetto $[V \rightarrow W]$ è $hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ ovvero l'insieme delle mappe lineari da V a W ed è compatta poiché esiste un isomorfismo canonico che garantisce: $hom_{\mathbb{C}}(V, W) \cong V^* \otimes W$. Ciò significa che lo spazio delle mappe lineari da V a W , ovvero lo spazio delle matrici $dim(V) \times dim(W)$, è canonicamente isomorfo allo spazio vettoriale ottenuto dal prodotto tensore dello spazio duale $V^* = Hom(V, \mathbb{C})$ con lo spazio dei vettori colonna V . Un'ultima caratteristica che deve avere una categoria chiusa e compatta per essere completa per gli *string diagrams* è avere un *funtore dagger*.

Definizione 1.2.6. *Un funtore dagger per una categoria monoidale simmetrica C è un'operazione $\dagger : C \rightarrow C$ che non altera gli oggetti: $A^\dagger := A$, rovescia i morfismi: $(f : A \rightarrow B)^\dagger := f^\dagger : B \rightarrow A$, è involutiva: $(f^\dagger)^\dagger = f$ e rispetta la struttura di categoria monoidale simmetrica:*

$$(g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger \quad (f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger \quad \sigma_{A,B}^\dagger = \sigma_{B,A} \tag{1.42}$$

Una categoria chiusa, compatta e dagger è caratterizzata da un funtore dagger che soddisfa $\epsilon_A = \eta_{A^*}$. Un esempio di categoria chiusa compatta dagger è **FHilb**: dati due spazi di Hilbert H, K e una mappa lineare $f : H \rightarrow K$ esiste un'unica mappa lineare $f^\dagger : K \rightarrow H$ (aggiunto di f) tale che $\forall \psi \in H, \phi \in K \langle f^\dagger(\phi) | \psi \rangle = \langle \phi | f(\psi) \rangle$. Gli *string diagrams* rappresentano un formalismo chiaro e completo per le categorie chiuse compatte dagger, ciò significa che due morfismi f e g si possono dimostrare essere equivalenti usando le equazioni di una categoria chiusa compatta dagger se e solo se sono equivalenti usando le equazioni degli *string diagrams*.

1.3 Mappe lineari

Prima di arrivare a definire i processi quantistici, ovvero il nostro linguaggio di alto livello, dobbiamo definire la teoria processuale delle **mappe lineari**. Consideriamo una teoria processuale che ammette *string diagrams*: due processi generici f e g con stesso input e stesso output rappresentano lo stesso processo se agiscono allo stesso modo su tutti gli stati; un processo è quindi univocamente definito dal modo in cui agisce sugli stati. Una base ortonormale (ONB) di un certo tipo A è il più piccolo insieme di stati che soddisfa:

$$\begin{array}{c} \triangleup \\ | \\ j \\ | \\ \triangle \\ | \\ i \end{array} = \delta_i^j \quad e \quad \left(\forall \begin{array}{c} \triangle \\ | \\ i \end{array} : \begin{array}{c} \triangle \\ | \\ f \\ | \\ \triangle \\ | \\ i \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ | \\ g \\ | \\ \triangle \\ | \\ i \end{array} \right) \implies \begin{array}{c} \triangle \\ | \\ f \\ | \\ \triangle \\ | \\ i \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ | \\ g \\ | \\ \triangle \\ | \\ i \end{array} \tag{1.43}$$

dove j sono gli effetti corrispondenti agli stati della ONB j per dualità. La dimensione $dim(A)$ del tipo A è la dimensione minima della base di A .

Grazie al concetto di aggiunto possiamo poi associare ad ogni base una corrispondente base di effetti, questo ci consente di attribuire ad ogni processo una matrice. Data una base \mathcal{B} per A e una base \mathcal{B}'

per B è possibile assegnare ad ogni processo f una matrice con elementi f_i^j nel modo seguente:

$$\mathbf{f} := \left(f_i^j := \begin{array}{c} \triangleup_j \\ | \\ \square_f \\ | \\ \triangle_i \end{array} \mid \triangle_i \in \mathcal{B} \quad \triangle_j \in \mathcal{B}' \right) \quad (1.44)$$

Una volta associata una matrice ad un processo è possibile dimostrare che essa soddisfa tutte le proprietà del calcolo matriciale. Una matrice con input A e output B avrà $\dim(A)$ colonne e $\dim(B)$ righe. Uno stato sarà perciò un vettore colonna mentre un effetto un vettore riga. Si possono definire poi le matrici trasposte, coniugate, e l'aggiunto di una matrice.

Vogliamo poter fare anche l'operazione inversa, ovvero capire sotto quali condizioni data una qualsiasi matrice $n \times m$ e fissate due ONB \mathcal{B} e \mathcal{B}' , possiamo associare un processo g ad essa. Innanzitutto possiamo per ogni $i=1, \dots, n$ $j=1, \dots, m$ costruire il processo \tilde{g}_{ij} la cui matrice valga g_i^j nell'elemento di input i -esimo elemento di \mathcal{B} e di output il j -esimo elemento di \mathcal{B}' e valga zero altrove. Vogliamo capire poi sotto quali condizioni possiamo definire g come somma di tutti questi processi, ovvero quando una teoria processuale ammette somme.

Definizione 1.3.1. *Una teoria processuale ammette somme se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. Per ogni processo f e g con stesso input e output $f + g$ è un processo dove '+' è un'operazione associativa, commutativa ed ha un'unità data dal processo nullo. Dato un insieme $\{f_i\}_i$ di processi di uno stesso tipo esiste un processo dello stesso tipo definito come:

$$\square_f = \sum_i \square_{f_i} \quad (1.45)$$

2. Le somme possono essere distribuite sui diagrammi e possono sempre essere portate all'esterno:

$$\left(\sum_i \square_{h_i} \right) \square_f \square_g = \sum_i \left(\square_{h_i} \square_f \square_g \right) \quad (1.46)$$

3. Le somme preservano gli aggiunti e quindi l'aggiunto di una somma di processi è pari alla somma di processi aggiunti.

All'interno di una teoria processuale che ammette *string diagrams*, che ha una ONB per ogni tipo di sistema e che ammette somme è sempre possibile quindi associare un processo ad una matrice e viceversa e possiamo quindi definire il processo g come:

$$\square_{\tilde{g}_i^j} = \diamond_{g_i^j} \triangle_j \triangle_i \rightarrow \square_g := \sum_{ij} \square_{\tilde{g}_i^j} = \sum_{ij} \diamond_{g_i^j} \triangle_j \triangle_i \quad (1.47)$$

È possibile a questo punto dimostrare che valgono tutte le regole del calcolo matriciale: la composizione in serie di due processi può essere rappresentata col prodotto matriciale di essi, la composizione in parallelo invece rappresenta il prodotto di Kroneker tra matrici. Anche al processo identico è possibile

associare una matrice (a) e questa è la matrice identità, prendendo poi la traccia di esso otteniamo un numero che rappresenta la dimensione del tipo di sistema che stiamo considerando (b). Anche i *cups* e *caps* (c), fondamentali per definire gli *string diagrams*, presentano una forma matriciale (per semplicità la si rappresenta con basi auto-coniugate):

$$\left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \downarrow i \\ \uparrow i \end{array} \\ \text{(a)} \end{array} \right) \circlearrowleft = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow i \\ \uparrow i \end{array} \circlearrowleft = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow i \\ \uparrow i \end{array} \circlearrowleft = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow i \\ \uparrow i \end{array} \circlearrowleft = \text{diamond } D \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \quad \text{cups and caps} \end{array} \right) \quad (1.48)$$

Dato un certo insieme X di numeri che forma quello che in algebra viene detto un anello possiamo costruire la teoria processuale delle **matrici(X)** dove i tipi di sistema sono i numeri naturali \mathbb{N} , i processi con input un tipo $m \in \mathbb{N}$ e output in $n \in \mathbb{N}$ sono matrici $n \times m$ con entrate in X . Si può dimostrare che ogni teoria processuale in cui ogni tipo di sistema ha una ONB finita, esiste un tipo di sistema per ogni dimensione $D \in \mathbb{N}$, i processi di uno stesso tipo ammettono somme e se i numeri sono X , è equivalente alla teoria processuale delle **matrici(X)**. Siamo pronti a questo punto a dare la definizione di **mappe lineari**:

Definizione 1.3.2. *Le **mappe lineari** sono una teoria processuale che ammette string diagrams e che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *Ogni tipo ammette una base ortonormale finita (ONB)*
2. *Esiste un tipo di sistema per ogni dimensione $D \in \mathbb{N}$*
3. *I processi di uno stesso tipo ammettono somme*
4. *I numeri sono i numeri complessi \mathbb{C}*

Un tipo di sistema nelle mappe lineari è uno spazio di Hilbert e denotiamo il sistema D -dimensionale come \mathbb{C}^D . Si può dimostrare che esse sono equivalenti alla teoria processuale delle **matrici(\mathbb{C})**. Un esempio di spazio di Hilbert è \mathbb{C}^2 che ha una base di due elementi detta base computazionale $\{ \downarrow 0, \downarrow 1 \}$.

Prima di proseguire vale la pena rimarcare che quanto introdotto fino ad ora non funziona più andando a considerare spazi di Hilbert infinito-dimensionali. Prendiamo in esame *cups* e *caps*, in prima approssimazione procedendo in modo naïf e assumendo che tutte le somme infinite siano ben definite le cose sembrano funzionare:

$$\text{cup} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{array}{c} \downarrow i \\ \uparrow i \end{array} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \begin{array}{c} \downarrow i \\ \uparrow j \end{array} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{array}{c} \downarrow i \\ \uparrow i \end{array} \quad (1.49)$$

Tuttavia se andiamo a considerare il cerchio introdotto in precedenza (eq. (1.48)) troviamo una divergenza:

$$\text{circle} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \begin{array}{c} \downarrow j \\ \uparrow i \end{array} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \begin{array}{c} \downarrow j \\ \uparrow i \end{array} = \sum_{i=0}^{\infty} \text{divergent} = \infty \quad (1.50)$$

Questo è dovuto al fatto che i *cups* e i *caps* non sono operatori limitati. Gli spazi di Hilbert infinito dimensionali e gli operatori limitati formano una teoria processuale, ma poichè non hanno *cups* e *caps* essi non ammettono *string diagrams* e perciò per essi sono ben definiti solamente i diagrammi a circuito.

Capitolo 2

Processi quantistici e formalismo di Von Neumann

A partire dalla teoria processuale delle **mappe lineari** vogliamo ora costruire la teoria processuale dei **processi quantistici**, che costituisce un linguaggio di alto livello che rende molto facile la comprensione di processi quantistici. Per farlo e per rendere evidente l'utilità di tutto ciò partiamo dagli assiomi della meccanica quantistica e andiamo a costruire per passi successivi questa teoria.

2.1 Sistemi quantistici, stati del sistema, sistemi composti

Postulato 2.1.1. *Ad un sistema quantistico è associato uno spazio di Hilbert. Lo stato di un sistema quantistico corrisponde a una classe di equivalenza di vettori normalizzati definiti a meno di una fase. I sistemi composti sono rappresentati dal prodotto tensore degli spazi di Hilbert dei sottosistemi.*

Nella teoria processuale delle **mappe lineari** uno spazio di Hilbert H è un tipo di sistema e possiamo ricollegarci alla definizione tradizionale di Spazio di Hilbert andando a definire \tilde{H} come:

$$\tilde{H} := \left\{ \begin{array}{c} |H \\ \psi \end{array} \right\} \mid \psi \text{ stato di tipo H} \quad (2.1)$$

Si può dimostrare che lo spazio così definito è uno spazio vettoriale complesso finito dimensionale dotato di prodotto scalare, ovvero uno spazio di Hilbert. Per farlo basta applicare direttamente la definizione di spazio vettoriale e poi ricordare che uno spazio di Hilbert finito-dimensionale è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare, dato dal prodotto interno tra stati appartenenti a \tilde{H} .

Gli stati ψ del sistema sono in corrispondenza biunivoca con i ket $|\psi\rangle$ di Dirac e la composizione di uno stato ψ con un effetto ϕ costituisce l'analogo del braket $\langle\phi|\psi\rangle$. Se gli stati sono normalizzati quindi tale composizione fornisce l'ampiezza di transizione da ψ a ϕ , ovvero un numero complesso.

$$\begin{array}{c} \phi \\ \psi \end{array} \in \mathbb{C} \quad (2.2)$$

Come noto stati ed effetti sono definiti a meno di una fase globale che non è osservabile sperimentalmente, inoltre vorremmo che la composizione in serie tra uno stato ed un effetto (1.5) fornisca una probabilità vera e propria e non un numero complesso. Nel formalismo tradizionale degli spazi di Hilbert la probabilità di transizione tra uno stato e l'altro è data dal modulo quadro del prodotto scalare di ϕ e ψ : $\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$. Ad ogni stato puro ψ è possibile associare un proiettore unidimensionale, o operatore densità per stati puri, definito come $P_{|\psi\rangle} = \rho_{|\psi\rangle} := |\psi\rangle\langle\psi|$ e con questa definizione possiamo esprimere la probabilità di transizione tra i due stati come $\text{tr}(P_{|\phi\rangle}\rho_{|\psi\rangle})$. Questo ci suggerisce un modo più semplice ed elegante per trattare processi quantistici. Possiamo comporre

orizzontalmente ogni stato, effetto e processo con il suo complesso coniugato, andando a eliminare così ogni fase globale, questa operazione è chiamata *doubling*. Componendo poi uno stato normalizzato ψ con un effetto normalizzato ϕ e moltiplicando questo prodotto per il suo complesso coniugato, si ottiene:

$$0 \leq \begin{array}{c} \triangle \phi \\ | \\ \nabla \psi \end{array} \begin{array}{c} \triangle \phi \\ | \\ \nabla \psi \end{array} \leq 1 \quad (2.3)$$

ovvero la probabilità di transizione tra i due stati.

È conveniente ora andare a trattare stati, effetti e processi *doubled* con una nuova notazione:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \hat{\psi} \\ \nabla \end{array} := \begin{array}{c} \psi \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \hat{\phi} \\ \triangle \\ \uparrow \end{array} := \begin{array}{c} \phi \\ \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \hat{f} \\ \nabla \end{array} := \begin{array}{c} f \\ f \end{array} \quad (2.4)$$

stato quantistico puro
effetto quantistico puro
processo quantistico puro

E in tal caso il prodotto tra uno stato e un effetto diventa semplicemente:

$$\begin{array}{c} \hat{\phi} \\ \triangle \\ \downarrow \\ \hat{\psi} \\ \nabla \end{array} := \begin{array}{c} \phi \\ \phi \\ \psi \\ \psi \end{array} \quad (2.5)$$

In questo modo quindi è possibile dare una visione più geometrica dei processi quantistici. Definiamo ora una nuova teoria processuale:

Definizione 2.1.1. *La teoria processuale delle **mappe quantistiche pure** ha come tipi di sistema \hat{A} per ogni spazio di Hilbert A nelle **mappe lineari** e come processi le mappe lineari *doubled* \hat{f} per ogni processo f nelle mappe lineari.*

Questo nuovo tipo \hat{A} altro non è che la composizione in parallelo di A con sè stesso ($A \otimes A$) e se A ha dimensione D allora \hat{A} avrà dimensione D^2 . Ogni diagramma visto fino ad ora si può riscrivere nella sua versione *doubled* e mantiene tutte le sue proprietà. È importante tuttavia andare ad osservare le caratteristiche che distinguono questa teoria processuale da quella delle **mappe lineari**. Nella teoria processuale delle **mappe lineari** i numeri sono complessi, esistono somme di processi ed esiste una ONB per ogni tipo di sistema. Nessuna di queste tre caratteristiche è preservata all'interno delle **mappe quantistiche pure** infatti:

- I numeri sono reali positivi
- Prendendo il *doubled* di una somma di processi non ottengo semplicemente la somma di tutti i processi *doubled* ma ho anche termini di sovrapposizione o *mixing*:

$$\text{double} \left(\sum_i f_i \right) = \sum_i \hat{f}_i + \sum_{i \neq j} \begin{array}{c} f_i \\ f_j \end{array} \quad (2.6)$$

- Data una ONB B nelle **mappe lineari**, prendendone il *doubled* non ottengo una base delle **mappe quantistiche pure**. Tuttavia posso estendere questo insieme di stati a una base nelle **mappe lineari** di $A \otimes A$ e questa è anche una base all'interno delle **mappe quantistiche pure** del tipo di sistema \hat{A} .

È possibile dimostrare inoltre che il prodotto tensore tra spazi di Hilbert coincide con la composizione orizzontale di processi. Dopo aver fatto questa osservazione è quasi naturale dare la definizione di *stato entangled*.

Definizione 2.1.2. *Uno stato entangled è uno stato quantistico puro di più sistemi che è \otimes -non separabile.*

Quindi uno stato entangled puro è uno stato bipartito $\widehat{\psi}$ di due tipi di sistema A e B nelle **mappe quantistiche pure** che non è fattorizzabile in stati di singoli sistemi $\widehat{\psi}_1$ e $\widehat{\psi}_2$.

Andiamo adesso a definire un effetto che ci consente di prendere il modulo quadro di uno stato puro quantistico $\widehat{\psi}$ in termini diagrammatici. Questo effetto viene chiamato *discarding* ed è indicato con:

$$\overline{\text{I}} := \cap \quad (2.7)$$

Per ogni stato puro quantistico $\widehat{\psi}$ normalizzato vale infatti:

$$\overline{\text{I}} \circ \widehat{\psi} = \text{I} \circ \widehat{\psi} = \text{I} \circ \widehat{\psi} = \text{I} \quad (2.8)$$

Bisogna notare tuttavia che il *discarding* non è affatto un effetto quantistico puro in quanto è rappresentato da due componenti connesse e non disconnesse come nell'eq (2.4). Tale effetto coincide col prendere la traccia dell'operatore densità $\rho_{|\psi\rangle}$. A questo punto occorre fare una digressione e allargare la nostra teoria anche a stati misti, ovvero a sistemi fisici di conoscenza non massimale.

Nel linguaggio tradizionale della meccanica quantistica gli stati misti sono rappresentati da matrici densità, ovvero combinazioni convesse di stati puri scritti come proiettori:

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{Tr}(\rho) = \sum_i p_i = 1 \quad (2.9)$$

Le matrici densità sono operatori Hermitiani, non negativi e a traccia 1. La purità di uno stato quantistico ρ è definita come $\text{tr}(\rho^2)$ ed essa è compresa tra 0 e 1, vale 1 se lo stato è puro.

Andando a considerare un sistema bipartito con spazio di Hilbert: $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ una generica funzione d'onda in H si scrive come:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,\alpha}^{dim H_{A,B}} c_{i,\alpha} |i\rangle \otimes |\alpha\rangle \quad \text{con} \quad \sum_{i,\alpha}^{dim H_{A,B}} |c_{i,\alpha}|^2 = 1 \quad (2.10)$$

ove $|i\rangle_A$ e $|\alpha\rangle_B$ sono ONB di H_A e H_B . Possiamo scrivere la matrice densità associata allo stato come:

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,\alpha} \sum_{j,\beta} c_{i,\alpha} c_{j,\beta}^* |i\rangle\langle j| |\alpha\rangle\langle\beta| = \sum_{i,\alpha} \sum_{j,\beta} \rho_{i\alpha}^{j\beta} |i,\alpha\rangle\langle j,\beta| \quad (2.11)$$

Prendendo la traccia parziale, ovvero calcolando la matrice densità usando la ONB di un solo sistema, otteniamo una matrice densità ridotta:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_{\alpha}^{dim H_B} \langle\alpha|_B \rho_{AB} |\alpha\rangle_B = \sum_{ij\alpha} \rho_{i\alpha}^{j\alpha} |i\rangle\langle j| \quad (2.12)$$

Tale operazione non conserva in generale la purezza dello stato, a meno che lo stato di partenza sia separabile.

Andando a comporre le **mappe quantistiche pure** con il *discarding* si ottiene la teoria processuale delle **mappe quantistiche**, che ci consente di trattare stati misti e successivamente ci permetterà di allargarci ai sistemi aperti. Componendo un processo quantistico puro con la trasposizione del *discarding* otteniamo uno *stato quantistico*:

$$\text{I} \circ \rho := \widehat{f} \circ \rho = \text{I} \circ \rho = \text{I} \circ \rho \quad (2.13)$$

Come appare evidente tali stati sono \otimes -positivi nelle **mappe lineari** ed è possibile apprezzare diagrammaticamente la differenza tra uno stato quantistico puro come quello definito all'eq. (2.4) e uno stato quantistico perché mentre i primi sono formati da due componenti connesse collegate tra loro i secondi non lo sono. L'equivalente al prendere la traccia di uno stato quantistico ρ nella teoria diagrammatica che stiamo definendo consiste nel comporre uno stato quantistico col *discarding* e il numero ottenuto viene detto *peso* di uno stato quantistico:

Uno stato quantistico rappresenta uno stato misto ρ se e solo se il suo peso è 1, e in tal caso esso viene detto **causale**. Allora, grazie alla corrispondenza biunivoca tra stati bipartiti e processi, è possibile associare allo stato quantistico un operatore densità che indichiamo con $\tilde{\rho}$:

A questo punto possiamo andare a definire anche in una teoria diagrammatica il concetto di purezza di uno stato. Per ogni stato quantistico ρ vale:

e ottengo un'uguaglianza se e solo se lo stato ρ è puro.

Nel caso di stati quantistici causali la disuguaglianza diventa: $tr(\tilde{\rho}^2) \leq 1$ e vale 1 se lo stato è puro. È possibile ricollegarsi alla definizione tradizionale di stato misto osservando che ρ è uno stato \otimes -positivo, e dalla corrispondenza biunivoca tra stati ed effetti è possibile perciò associarci un processo positivo ovvero autoaggiunto come evidenziato all'eq. (1.29). Per il teorema spettrale tutte le mappe autoaggiunte sono diagonalizzabili ed esiste perciò una ONB e dei numeri reali positivi r_i tali che è possibile scrivere $\tilde{\rho}$ come descritto al punto (a). Sfruttando la corrispondenza biunivoca (*) si può dimostrare che lo stato bipartito auto-coniugato ρ è scrivibile come al punto (b):

Se ρ è causale si ha che quindi $\sum_i r_i = 1$, ovvero r_i sono probabilità.

Consideriamo a questo punto un sistema bipartito e andiamo ad applicare il *discarding* ad un output di uno stato quantistico puro $\hat{\psi}$ bipartito, operazione che coincide col prendere la traccia parziale dello stato. Lo stato ridotto che otteniamo in generale non è più puro, ma lo è solo se lo stato è \otimes -separabile, ovvero non entangled. Abbiamo ora tutti gli ingredienti necessari a definire la teoria processuale delle **mappe quantistiche**, la quale ha come tipi spazi di Hilbert $\hat{A} = A \otimes A$ e come processi tutti i diagrammi ottenuti combinando le mappe quantistiche pure col *discarding*. Per comprendere il significato delle mappe quantistiche dobbiamo analizzare i processi di evoluzione temporale di un sistema quantistico.

2.2 Evoluzioni temporali, evoluzioni generalizzate

Postulato 2.2.1. I processi deterministici e reversibili in meccanica quantistica sono rappresentati da operatori unitari che agiscono sullo spazio di Hilbert

All'interno di un sistema aperto tuttavia esistono processi di evoluzione generalizzati descritti da operatori non unitari. Considerando un sistema composto di due sistemi $H_{AB} = H_A \otimes H_B$, che inizialmente si trova in un generico stato ρ_{AB} , e detto $U(t)$ l'operatore di evoluzione temporale associato al sistema, lo stato al tempo t è: $\rho_{AB}(t) = U(t)\rho_{AB}U^\dagger(t)$. Considerando uno stato della forma $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |0\rangle_B\langle 0|_B$ e andando ad osservare come evolve le matrice densità ridotta si trova che:

$$\rho'_A(t) = Tr_B(\rho_{AB}) = Tr_B[U(\rho_A \otimes |0\rangle_B\langle 0|_B)U^\dagger] = \sum_{k=1}^{dimH_B} \langle k|_B U|0\rangle \rho_A \langle 0|_B U^\dagger|k\rangle = \sum_{k=1}^{dimH_B} E_k \rho_A E_k^\dagger \tag{2.18}$$

Gli operatori $E_k = \langle k|_B U|0\rangle_B$, detti **operatori di Kraus**, agiscono sugli stati di H_A e soddisfano la seguente relazione di normalizzazione:

$$\sum_{k=1}^{dimH_B} E_k^\dagger E_k = \sum_{k=1}^{dimH_B} \langle 0|_B U^\dagger|k\rangle_B \langle k|_B U|0\rangle_B = \langle 0|_B U^\dagger U|0\rangle_B = \langle 0|_B \mathbb{1}_{AB}|0\rangle_B = \mathbb{1}_A \tag{2.19}$$

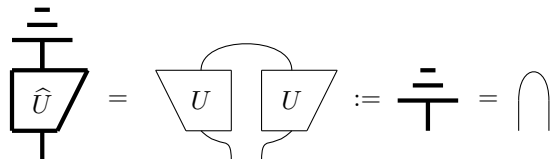
La mappa $S : \rho_A \longrightarrow \rho'_A$ è detta operazione quantistica o **superoperatore**. La rappresentazione in termini degli E_k è detta rappresentazione di Kraus. Tale S soddisfa le seguenti proprietà:

1. S mappa ρ_A hermitiana in ρ'_A hermitiana: $(\rho_A)^\dagger = (\rho_A) \Rightarrow (\rho'_A)^\dagger = (\rho'_A)$
2. S conserva la traccia: $Tr(\rho'_A) = Tr(\rho_A)$
3. Se ρ_A è non-negativa anche S lo è;

dunque S mappa operatori densità in operatori densità e per questo è chiamata superoperatore. Più in generale un'evoluzione generalizzata $S : \rho_A \rightarrow \rho'_A$ che: è lineare, manda matrici Hermitiane in matrici Hermitiane, conserva la traccia ed è completamente positiva si può scrivere in rappresentazione di Kraus, cioè nella somma di M termini:

$$S : \rho_A \longmapsto \rho'_A = \sum_{k=1}^M E_k \rho_A E_k^\dagger \qquad \sum_{k=1}^M E_k^\dagger E_k = \mathbb{1} \tag{2.20}$$


Le evoluzioni unitarie all'interno delle **mappe quantistiche pure** sono descritte da processi quantistici unitari già definiti nell'eq (1.28), ovvero da mappe quantistiche pure che soddisfano la versione *doubled* della definizione data all'eq. (1.28). Una mappa quantistica pura \widehat{U} che va da un sistema \widehat{A} in sé stesso è detta causale se soddisfa la seguente condizione:



$$\widehat{U} = \text{two boxes } U \text{ with doubling lines} := \widehat{U} = \cap \tag{2.21}$$

ovvero se preserva la causalità degli stati. È facile notare, osservando i termini scritti senza doubling all'interno di questa catena di uguaglianze, che tale condizione è equivalente al fatto che U è un operatore unitario e poiché il doubling preserva l'unitarietà anche \widehat{U} è unitaria. Le mappe quantistiche pure causali altro non sono quindi che processi deterministici e reversibili e sono perciò descritti da processi unitari.

Per descrivere invece a livello diagrammatico i super-operatori, che rappresentano evoluzioni generalizzate, bisogna considerare mappe quantistiche generiche. Un mappa lineare qualsiasi Φ è una mappa quantistica se e solo se mappa stati quantistici in stati quantistici ovvero se per ogni stato quantistico

ρ :  è uno stato quantistico.

Se così non fosse vero infatti le **mappe quantistiche** non formerebbero una teoria processuale. Ogni mappa quantistica Φ inoltre può essere ottenuta da una mappa quantistica pura scartando un output:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \Phi \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \hat{f} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ f \quad f \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ f \quad f \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (2.22)$$

Il processo \hat{f} che appare nell'eq. (2.22) viene detto purificazione di Φ ed è possibile osservare inoltre che i processi quantistici sono processi \otimes -positivi come definiti nell'equazione (1.31).

Possiamo modificare un po' la scrittura sfruttando le proprietà dei *cups* e *caps* ottenendo:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \Phi \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ f \quad f \\ | \\ \text{---} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ f \quad f \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ f \\ | \\ \text{---} \\ f \\ | \\ \text{---} \end{array} =: \tilde{\Phi}() \quad \text{or} \quad \tilde{\Phi}() = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ g \\ | \\ \text{---} \\ g \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (c) \quad (2.23)$$

e $\tilde{\Phi}$ così definito è un super-operatore. Esso è una mappa completamente positiva per il fatto che preserva la positività degli stati quantistici a cui viene applicato e viene indicato in modo equivalente come al punto (c) dell'eq. (2.23). Una mappa quantistica inoltre è detta causale se soddisfa la seguente condizione:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \Phi \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (2.24)$$

È facile vedere che essa è causale se e solo se manda stati quantistici causali in stati quantistici causali e in termini di super-operatori ciò è equivalente a dire che $\tilde{\Phi}$ preserva la traccia: $tr(\tilde{\Phi}(\tilde{\rho})) = tr(\tilde{\rho})$. Una mappa quantistica causale quindi è una mappa che manda stati quantistici causali in stati quantistici causali, essa soddisfa le ipotesi dell'eq. (2.20) e dunque ammette una decomposizione di Kraus. Per ottenere tale rappresentazione notiamo innanzitutto che il *discarding* può essere decomposto in una ONB sfruttando la definizione di *cups* e *caps* sotto forma di ONB data nell'eq. (1.48):

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \text{---} = \sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ i \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ i \\ | \\ \text{---} \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ i \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (2.25)$$

Sfruttando questa proprietà è possibile decomporre ogni mappa quantistica in una somma di mappe quantistiche pure:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \Phi \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \hat{f} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ i \\ | \\ \text{---} \\ \hat{f} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \hat{f}_i \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \text{ove} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \hat{f}_i \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ i \\ | \\ \text{---} \\ \hat{f} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (2.26)$$

Tale rappresentazione è la decomposizione di Kraus della mappa quantistica.

Per una mappa completamente positiva la decomposizione di Kraus diventa la seguente:

$$\tilde{\Phi}() = \sum_i \text{diagram} \quad (2.27)$$

che è equivalente alla forma tradizionale: $\tilde{\Phi}(\tilde{\rho}) := \sum_i f_i \tilde{\rho} f_i^\dagger$.

Abbiamo visto nel formalismo tradizionale che nel caso dell'evoluzione temporale la rappresentazione di Kraus dell'evoluzione del sottosistema A deriva dall'evoluzione unitaria del sistema composto H_{AB} . Questo è un fatto del tutto generale: ogni evoluzione generalizzata, descritta da una qualsiasi classe di operatori di Kraus, è indotta dall'evoluzione unitaria di un sistema più grande.

Immaginiamo di avere il sottosistema A che evolve in modo non unitario tramite un processo che può essere rappresentato da operatori di Kraus $\{E_k\}_{k=1, \dots, M}, E_k : H_A \rightarrow H_A$:

$$\rho'_A = \sum_{k=1}^M E_k \rho_A E_k^\dagger \quad \sum_{k=1}^M E_k^\dagger E_k = \mathbb{1} \quad (2.28)$$

Questa evoluzione è quindi descritta da un super-operatore $S : H_A \rightarrow H_A$ che è una mappa completamente positiva che preserva la traccia e per esso vale il teorema della *Stinespring's dilation*: esiste uno spazio di Hilbert H_B e un operatore unitario U_{AB} in H_{AB} dato da:

$$U_{AB} |\psi\rangle_A |0\rangle_B = \sum_{k=1}^M (E_k \otimes \mathbb{1}_B) |\psi\rangle_A |k\rangle_B \quad (2.29)$$

dove $\{|k\rangle_B\}_{k=1}^M$ è una qualsiasi ONB di H_B con $M = \dim H_B$. Tale operatore così definito è unitario e l'evoluzione dello stato ρ_{AB} del sistema composto secondo U induce l'evoluzione di ρ_A data dagli operatori di Kraus $\{E_k\}$, ovvero:

$$S\rho = \text{Tr}_B(U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger) \quad (2.30)$$

All'interno di una teoria diagrammatica continua a valere la *Stinespring's dilation*. Ogni mappa quantistica causale Φ sorge da un operatore unitario \hat{U} con due tipi di input e due tipi di output, definita aggiungendo uno stato quantistico causale $\hat{\psi}$ in uno dei suoi ingressi e scartando uno degli output:

$$\Phi = \text{diagram} \quad (2.31)$$

Siamo quindi in grado di descrivere evoluzioni generalizzate in termini di evoluzioni unitarie in spazi di dimensione maggiore anche nella teoria delle **mappe quantistiche**. Questa trattazione risulta particolarmente utile nel momento in cui si vanno a considerare sistemi quantistici che interagiscono con l'ambiente esterno. Andiamo ora ad analizzare il postulato più delicato da riportare all'interno della teoria diagrammatica ovvero quello riguardante i processi di misura.

2.3 Osservabili, processi di misura

Postulato 2.3.1. *Le osservabili sono rappresentate da operatori auto-aggiunti che agiscono sullo spazio di Hilbert. Se una misura di prima specie di un'osservabile f nello stato del sistema $|\psi\rangle$ dà come risultato il valore i -esimo, lo stato del sistema subito dopo la misura è descritto da $P_i|\psi\rangle$, dove P_i è il proiettore sull'auto-spazio relativo all'autovalore i -esimo. La probabilità di ottenere il valore i -esimo è data dalla regola di Born: $\langle\psi|P_i|\psi\rangle$, oppure per uno stato misto è data da $\text{tr}(P_i\tilde{\rho})$.*

Essendoci ristretti a spazi di Hilberti finito-dimensionali le osservabili hanno spettro discreto e limitato. Data quindi un'osservabile f e detti $\lambda_n \in \sigma(f)$ l'insieme dei suoi autovalori, ciascuno con degenerazione $d(\lambda_n)$, possiamo trovare una base ortonormale dello spazio di Hilbert \mathbb{C}^D fatta di autovettori di f :

$$\{|\lambda_{n,i}\rangle \text{ t.c. } i = 1, \dots, d(\lambda_n)\}, \quad \text{con} \quad \langle\lambda_{n,i}|\lambda_{n,j}\rangle = \delta_{ij}\delta_{mn} \quad (2.32)$$

A partire da ciò possiamo definire una completezza di Dirac:

$$\sum_{\lambda_n \in \sigma(A)} \sum_{i=1}^{d(\lambda_n)} |\lambda_{n,i}\rangle \langle\lambda_{n,i}| = \mathbb{1}_H \quad (2.33)$$

È possibile scrivere ogni osservabile anche in termini dei suoi proiettori come:

$$f = \sum_{\lambda_n \in \sigma(f)} \lambda_n \sum_{r=1}^{d(\lambda_n)} |\lambda_{n,r}\rangle \langle\lambda_{n,r}| = \sum_{\lambda_n \in \sigma(f)} \lambda_n P_n \quad (2.34)$$

indicando con P_n il proiettore sull'auto-spazio relativo all'autovalore λ_n . Per poter trovare diagrammaticamente un analogo di ciò dobbiamo innanzitutto capire come inserire all'interno della nostra teoria diagrammatica il concetto di non-determinismo, per poi andare a definire un processo di misura. Estendiamo il linguaggio delle **mappe quantistiche** andando ad introdurre il concetto un processo quantistico non controllato:

Definizione 2.3.1. *Un processo quantistico non controllato è una collezione di mappe quantistiche che sommate insieme soddisfano il postulato di causalità:*

$$\left(\begin{array}{c} | \\ \square \Phi_i \\ | \end{array} \right)^i \text{ t.c. } \sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \square \Phi_i \\ | \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ | \end{array} \quad (2.35)$$

Ciascun elemento Φ_i dell'insieme è una *diramazione* di esso, se ci fosse un unico ramo il processo sarebbe deterministico. Applicando l'elemento i -esimo di un processo quantistico ad uno stato ρ e prendendone poi il discarding otteniamo la probabilità di ottenere tale risultato:

$$P(\Phi_i|\rho) := \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \square \Phi_i \\ | \\ \triangle \rho \end{array} \quad (2.36)$$

I processi quantistici sono quindi una generalizzazione delle mappe quantistiche causali e un processo quantistico deterministico consiste di un'unica mappa quantistica. Prima di introdurre i processi di misura in linguaggio diagrammatico dobbiamo distinguere tra misure di demolizione e misure di non demolizione [1]: con misura di non demolizione si intende un processo in cui siamo interessati a conoscere lo stato finale del sistema dopo la misura, in una misura di demolizione invece non siamo interessati allo stato finale del sistema e il sistema potrebbe venire distrutto in seguito alla misura. A questo punto possiamo fornire un esempio di processi quantistici che sono le *misure di von Neumann di non demolizione*.

Definizione 2.3.2. Una misura di von Neumann di non demolizione, detta anche misura proiettiva, è un processo quantistico della forma:

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \hat{P}_i \\ | \\ \text{---} \end{array} \right)^i \text{ t.c. } \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \hat{P}_j \\ | \\ \hat{P}_i \\ | \\ \text{---} \end{array} = \delta_i^j \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \hat{P}_i \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (2.37)$$

dove le mappe quantistiche \hat{P}_i così definite sono dei proiettori ortogonali.

In questo caso l'espressione per la causalità definita nell'equazione (2.35) si può semplificare nel seguente modo:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \hat{P}_i \\ | \\ \text{---} \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ \text{---} \end{array} = \bigcap \Rightarrow \sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ | \\ P_i \\ | \\ \text{---} \end{array} \stackrel{(*)}{=} \boxed{\sum_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ | \\ \text{---} \end{array}} = \text{---} \quad (2.38)$$

dove al punto (*) si è sfruttato il fatto che P_i è un proiettore.

Per trovare un collegamento tra misure di Von Neumann e osservabili f è sufficiente assegnare ad ogni proiettore un numero reale r_i e farne la somma, così da ottenere un'unica mappa f rappresentata nel punto (a) dell'eq. (2.39). La mappa così ottenuta è auto-aggiunta poiché lo sono i proiettori definiti nell'equazione (1.32). Il teorema spettrale già discusso in precedenza ci garantisce l'esistenza di una ONB di autovettori tale che essa sia scrivibile come al punto (b) dell'eq. (2.39):

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ f \\ | \\ \text{---} \end{array} = \sum_i r_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (a) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ f \\ | \\ \text{---} \end{array} = \sum_i r_i \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ i \\ | \\ i \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (b) \quad (2.39)$$

dove in generale alcuni indici r_i possono essere ripetuti. Questo induce una partizione $\{I_1, \dots, I_N\}$ degli stati di base dove ogni auto-stato r_i corrisponde a un auto-spazio I_i .

La regola di Born nel nostro linguaggio diagrammatico diventa:

$$P(i|\hat{\psi}) := \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \hat{P}_i \\ | \\ \hat{\psi} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \psi \\ | \\ P_i \\ | \\ \psi \\ | \\ \text{---} \end{array} \stackrel{(*)}{=} \begin{array}{c} \psi \\ | \\ P_i \\ | \\ \psi \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad P(i|\rho) := \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \hat{P}_i \\ | \\ \rho \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} g \\ | \\ g \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ | \\ \tilde{\rho} \\ | \\ \text{---} \end{array} \stackrel{(*)}{=} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ P_i \\ | \\ \tilde{\rho} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (2.40)$$

dove al punto (*) si è usato il fatto che P_i è un proiettore. L'equazione sulla destra rappresenta la regola per stati misti, dove abbiamo indicato con $\tilde{\rho} := g \circ g^\dagger$ l'operatore densità associato a ρ .

Nel caso in cui i valori r_i dell'equazione (2.39) siano tutti diversi tra loro, ovvero nel caso in cui tutti gli auto-stati abbiano degenerazione 1, possiamo scrivere f come somma di proiettori 1-dim e i processi associati a tali osservabili sono chiamati *measure ONB*. Data infatti una ONB nelle mappe lineari gli effetti *doubled* formano un processo quantistico detto appunto *misura ONB di demolizione*(a). Le

coppie stato-effetto *doubled* (b) ovvero i proiettori 1-dim sono dette *misure ONB di non demolizione*.

$$B = \left\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{\scriptsize } i \\ \downarrow \end{array} \right\}_i \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{\scriptsize } i \\ \uparrow \\ \text{\scriptsize } i \\ \uparrow \end{array} \right)_i \quad \left(\begin{array}{c} \text{\scriptsize } i \\ \downarrow \\ \text{\scriptsize } i \\ \downarrow \end{array} \right)_i \quad (2.41)$$

(a) (b)

Un problema delle misure di Von Neumann però è che esse non formano una teoria processuale perché non sono chiuse sotto composizioni in parallelo e in serie di processi.

Questo in meccanica quantistica è dovuto al fatto che posso misurare simultaneamente due osservabili se e solo se esse sono compatibili. Nel caso di spettro discreto e limitato come quello finito-dimensionale due osservabili si dicono compatibili se e solo se commutano tra loro. A livello diagrammatico perciò quando compongo in serie due misure di Von Neumann $(\hat{P}_i)^i$ e $(\hat{Q}_j)^j$ esse formano una misura di Von Neumann se e solo se commutano tra loro $\forall i, j$. È necessario pertanto considerare processi di misura più generali, che siano chiusi per composizione, che abbiano risultato incerto e il cui stato finale sia un elemento $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,N}$ scelto con una certa probabilità p_i . Al posto di proiettori queste misure utilizzano una classe più ampia di operatori $\{M_i\}$, non necessariamente auto-aggiunti, che mappano uno stato puro $|\psi\rangle$ in varie possibilità $|\psi_i\rangle$:

$$|\psi_i\rangle = \frac{M_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle}} \quad p_i = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle \quad i = 1, \dots, N \quad \sum_{i=1}^N M_i^\dagger M_i = \mathbb{1} \quad (2.42)$$

dove l'ultima equazione è conseguenza della richiesta che le p_i abbiano somma 1.

Analogamente a quanto visto nel caso di operatori densità ed evoluzioni generalizzate, i quali si potevano ottenere prendendo la traccia parziale rispettivamente di stati puri ed evoluzioni unitarie definite in uno spazio più grande, così accade per le misure generalizzate. Per il teorema di Neumark infatti le misure generalizzate sono equivalenti a misure proiettive definite in uno spazio più grande, dopo aver effettuato una certa evoluzione unitaria. Consideriamo ad esempio l'evoluzione unitaria U_{AB} definita all'equazione (2.29), costruita attraverso la *Stinespring dilation* a partire da un'evoluzione generalizzata caratterizzata da operatori di Kraus $\{E_k\}$. Dato uno stato puro $|\psi(0)\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |0\rangle_B$ esso evolve come:

$$|\psi(t)\rangle_{AB} = U_{AB}|\psi\rangle_A |0\rangle_B = \sum_{k=0}^M E_k |\psi\rangle_A |k\rangle_B \quad \Rightarrow \quad \rho_{AB}(t) = |\psi(t)\rangle_{AB} \langle\psi(t)|_{AB}. \quad (2.43)$$

Consideriamo ora una misura proiettiva sul sottosistema B che verifichi se esso si trova nello stato $|i\rangle_B$, descritta da un proiettore $\tilde{P}_i = \mathbb{1}_A \otimes |i\rangle_B \langle i|_B$. Calcolando la probabilità di ottenere i dalla misura si trova:

$$P_i = \text{Tr}(\rho_{AB} \tilde{P}_i) = \text{Tr}\left(\sum_{k,k'}^M (E_k |\psi\rangle_A) |k\rangle_B (\langle\psi|_A E_{k'}^\dagger) \langle k'|_B (\mathbb{1}_A \otimes |i\rangle_B \langle i|_B)\right) = \langle\psi|_A E_i^\dagger E_i |\psi\rangle_A = \text{Tr}(\rho_A M_i^\dagger M_i). \quad (2.44)$$

Dove riconosciamo in E_i gli operatori M_i che descrivono l'evoluzione unitaria.

Un tipo ancora più generale di misure sono le misure POVM (*Positive-Operator Valued Measurement*) in cui non sono interessato a conoscere lo stato del sistema dopo la misura.

Esse sono descritte da un set di operatori non-negativi $\{F_i\}_{i=1,\dots,M}$ che soddisfano: $\sum_{i=1}^M F_i = \mathbb{1}$.

Ogni F_i descrive un possibile esito della misura che avviene con probabilità $p_i = \langle\psi|F_i|\psi\rangle$. Nel caso di stato misto ρ ovviamente $p_i = \text{Tr}(\rho F_i)$. Essendo F_i operatore positivo posso sempre decomporlo in $F_i = M_i^\dagger M_i$, ritrovando il caso di misure generalizzate.

All'interno dei **processi quantistici** una misura POVM di demolizione è un qualsiasi processo quan-

tistico fatto di effetti: $\left(\begin{array}{c} \text{\scriptsize } \Phi_i \\ \uparrow \end{array} \right)_i$.

All'interno delle **mappe lineari** esso viene infatti rappresentato da uno stato bipartito \otimes -positivo (a) ovvero da un operatore positivo (b):

$$\begin{array}{c} \hat{\phi}_i \end{array} = \begin{array}{c} f_i \\ f_i \end{array} = \left(\begin{array}{c} f_i \\ f_i \end{array} \right) \text{ t.c. } \sum_i \left(\begin{array}{c} f_i \\ f_i \end{array} \right) \stackrel{(*)}{=} \sum_i \left(\begin{array}{c} f_i \\ f_i \end{array} \right) = \quad (2.45)$$

(a) (b)

Come nel formalismo tradizionale inoltre, esiste una misura di probabilità P_i che assegna ad ogni i una mappa positiva e se sommate insieme tra loro queste mappe restituiscono l'identità come mostrato nel punto (*), che segue direttamente dalla definizione di processo quantistico.

La probabilità di misurare il valore i -esimo in un qualsiasi stato ρ è data da:

$$P(i|\rho) = \begin{array}{c} \hat{\phi}_i \\ \rho \end{array} = \left(\begin{array}{c} E_i \\ \tilde{\rho} \end{array} \right) \text{ con } E_i := \left(\begin{array}{c} f_i \\ f_i \end{array} \right) \quad (2.46)$$

Posso inoltre andare a considerare misure POVM di non demolizione. Esse sono dei processi quantistici puri in cui scartando un output ottengo una misura di demolizione:

$$\left(\begin{array}{c} \hat{f}_i \end{array} \right) \text{ t.c. } \left(\begin{array}{c} \hat{f}_i \\ \hat{\psi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_i \end{array} \right) \quad (2.47)$$

Effettuando dunque una misura POVM di non demolizione lo stato dopo la misura è descritto da:

$$\begin{array}{c} \hat{\psi}_i \end{array} = \left(\begin{array}{c} \hat{f}_i \\ \hat{\psi} \end{array} \right) \quad (2.48)$$

Analogamente a quanto visto in precedenza le misure POVM di non demolizione possono essere viste come misure proiettive in uno spazio più grande, dopo aver applicato una certa isometria \tilde{U} .

Questo risultato è noto come *Naimark dilation*(a):

$$\left(\begin{array}{c} \hat{f}_i \end{array} \right) \stackrel{(a)}{=} \left(\begin{array}{c} \hat{i} \\ \hat{U} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_i \end{array} \right) \stackrel{(b)}{=} \left(\begin{array}{c} \hat{i} \\ \hat{U} \end{array} \right) \quad (2.49)$$

Come conseguenza quindi ogni misura POVM di demolizione(b) può essere ottenuta da quest'ultima scartando l'altro output ovvero prendendone la traccia.

Conclusioni

Il linguaggio introdotto permette di descrivere a livello diagrammatico un qualsiasi protocollo quantistico che coinvolga sistemi finito-dimensionali, così da averne una visualizzazione diretta e immediata. Utilizzando tale formalismo è facile descrivere le interazioni tra sistemi come dei semplici collegamenti tra essi e come si è visto è del tutto naturale la sua estensione al caso di evoluzioni generalizzate e a processi di misura generalizzati. Nello sviluppo del linguaggio viene poi introdotto il concetto di *spider* [1], una sorta di generalizzazione dei *cups* e dei *caps* che permette di eliminare indici, parentesi e altri simboli non puramente diagrammatici e di rendere quindi più fluida la rappresentazione. Grazie all'introduzione di tale concetto si può poi specializzare il linguaggio diagrammatico al campo della computazione quantistica, andando ad analizzare tecniche di calcolo quantistico, vari algoritmi quantistici e diverse tecniche di computazione basata sui processi di misura [1]. Utilizzando la rappresentazione diagrammatica si possono anche studiare a fondo i fondamenti della teoria quantistica come la non località e l'entanglement. Lo sviluppo degli *string diagrams* ha permesso inoltre di porsi nuove domande e nuovi problemi fisici che sarebbero stati difficili da affrontare col formalismo tradizionale degli spazi di Hilbert nel campo dell'informazione quantistica e della computazione quantistica. Sono già stati ottenuti diversi risultati affidandosi al calcolo diagrammatico, ad esempio: ha permesso di descrivere metodi di computazione quantistica basati su cluster di stati entangled [9], un fenomeno estremamente complesso da comprendere utilizzando il linguaggio tradizionale della meccanica quantistica; ha consentito di dimostrare che determinate sequenze di operatori quantistici che commutano tra loro possono essere parallelizzati utilizzando l'entanglement [10] e sono stati sviluppati anche metodi che permettono di verificare la correttezza dei protocolli di computazione quantistica basata sui processi di misura [11]. È stato realizzato anche un software chiamato *Quantomatic* [12] basato sugli *string diagrams*, che permette di risolvere in modo automatizzato complessi problemi di computazione quantistica, estremamente difficili da trattare manualmente. Il linguaggio diagrammatico infine si adatta bene anche ad altri contesti ben diversi da quello preso in esame e permette di dare una rappresentazione pittografica di qualsiasi categoria che ammetta *string diagrams*.

Bibliografia

- [1] Coecke, B., & Kissinger, A. (2017) *Picturing Quantum Processes: A First Course in Quantum Theory and Diagrammatic Reasoning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] Nielsen, M., & Chuang, I. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] K. Konishi, G. Paffuti (2012). *Meccanica quantistica: nuova introduzione*. Pisa: Pisa University Press
- [4] Penrose, R. (1971). Applications of negative dimensional tensors. Pagine 221-244 di *Combinatorial Mathematics and Its Applications*. Academic Press.
- [5] Coecke, B. (2009). Quantum Pictorialism in *Contemporary Physics*, Pagine 59-83. arXiv:0908.1787 [**quant-ph**]
- [6] Coecke, B., and Paquette, É. O. (2011). Categories for the practising physicist. Pagine 167-271 di Coecke, B. (ed), *New Structures for Physics*. Lecture Notes in Physics, Springer. arXiv:0905.3010 [**quant-ph**]
- [7] Braedley T.D. (2018). *What is Applied Category Theory?*. arXiv:1809.05923 [**math.CT**]
- [8] M. Abate, F. Tovena, (2011). *Geometria differenziale*. Springer, Italia.
- [9] Horsman, C. (2011). Quantum pictorialism for topological cluster-state computing. *New Journal of Physics* **13**, 095011. arXiv:1101.4722 [**quant-ph**]
- [10] Boixo, S., and Heunen, C. (2012). Entangled and sequential quantum protocols with dephasing. *Physical review Letters* **108**, 120402. arXiv:1108.3569 [**quant-ph**]
- [11] Duncan, R. (2012). *A graphical approach to measured-based quantum computing*. arXiv:1203.6242 [**quant-ph**]
- [12] Dixon, L., Duncan, R., Merry, A., Kissinger, A., Soloviev, M., e Zamzhiev, V. (2011). *Quantomatic*. <http://quantomatic.github.io>.