

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI ASTRONOMIA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay
in cosmologia**

Studente: **Carlo Rizza**

Relatore: **Prof. Sabino Matarrese**

Anno Accademico 2018-2019

18 Luglio 2019

Indice

1	Introduzione	4
2	La Rete Cosmica	6
2.1	Gli elementi della Rete Cosmica	6
2.2	Impatto dello studio della Rete Cosmica	8
2.3	Origine delle strutture	8
2.4	Il ruolo fondamentale dei vuoti	9
3	Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay	10
3.1	Il concetto di tassellazione	10
3.2	La tassellazione di Voronoi	10
3.3	La tassellazione di Delaunay	12
3.4	I vicini naturali	13
3.5	I vantaggi delle tassellazioni	13
4	Le tassellazioni in ambito cosmologico	14
4.1	L'interpolazione dei vicini naturali	14
4.2	Proprietà delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay	16
4.3	L'adattività spaziale delle tassellazioni	18
5	DTFE: the Delaunay Tessellation Field Estimator	20
5.1	Il campione di punti	20
5.2	Condizioni al contorno	20
5.3	L'interpolazione lineare	21
5.4	Fase di elaborazione	23
5.5	Fase di post-elaborazione	24
6	Proprietà del DTFE	25
6.1	Media pesata del volume	25
6.2	Stima del campo di densità	26
6.3	Conservazione della massa	28
6.4	Il campo di velocità	29
6.5	Rumore associato e costo computazionale	30
7	Applicazione del DTFE alla Rete Cosmica	32
7.1	La natura gerarchica delle strutture	32
7.2	La morfologia delle strutture	34
7.3	I modelli cinematici di Voronoi	36
7.4	Evoluzione dei campi di densità e di velocità	37
8	Estensioni ed applicazioni	40
8.1	Multiscale Morphology Filter	40
8.2	Watershed Void Finder	41
8.3	SpineWeb Method	43
8.4	Alpha Shapes	44
9	Conclusioni e considerazioni	46

Elenco delle figure

1	La distribuzione di galassie rivelata dalla <i>2dF Galaxy Redshift Survey</i> . . .	5
2	La distribuzione di materia oscura	7
3	La tassellazione di Voronoi	11
4	Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay di un insieme di punti	12
5	Cella di Voronoi del primo e del secondo ordine	15
6	Interpolazione dei vicini naturali	15
7	Interpolazione dei vicini naturali: creazione di un campo continuo	16
8	L'adattività spaziale della tassellazione di Delaunay	18
9	Ricostruzione del campo tramite il DTFE	22
10	Schema della procedura attuata dal DTFE	24
11	Relazione tra il campo di densità ed il volume della cella di Voronoi contigua	27
12	Campi di densità ricostruiti dai metodi TSC, SPH, DTFE	33
13	Campi di densità ricostruiti di tre modelli di elementi di Voronoi	34
14	Misura dell'anisotropia dei modelli di Voronoi	36
15	Illustrazione del modello cinematico di Voronoi [2]	37
16	Campo di velocità, di densità e divergenza della velocità	38

Sommario

Questa tesi intende trattare le tassellazioni di Voronoi e Delaunay in ambito cosmologico. Prendendo spunto in particolare dal lavoro di Rien van de Weygaert e Willem Shaap, *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, cercherà di definire il concetto di Rete Cosmica, principale oggetto di applicazione delle tassellazioni in questione, di motivare la necessità del loro utilizzo ed ovviamente di definire le proprietà delle suddette tassellazioni. Si procederà quindi ad esaminare loro varie applicazioni, affrontando innanzitutto la nozione di DTFE, fondamentale tecnica di stima di un campo di densità basata sulle tassellazioni di Voronoi e Delaunay e alla base di tutte le estensioni successive di questi concetti, che verranno infine velocemente presentate.

1 Introduzione

La distribuzione di materia nell'Universo su scale macroscopiche è molto diversa rispetto a quella a cui siamo abituati. Osservando nell'ordine dei Megaparsec, essa mostra un aspetto singolarmente schiumoso, una fitta e complessa rete che prende il nome di *Rete Cosmica* (Cosmic Web).

Analizzando il lavoro svolto da Rien van de Weygaert e Willem Shaap nel loro *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, opera alla base di tutto il seguente lavoro, si possono osservare tre principali caratteristiche associabili a questa Rete Cosmica. Esse consistono nella distribuzione delle galassie e della materia in lunghi filamenti, estesi muri e densi ammassi compatti; nell'esistenza di enormi regioni semivuote e nella natura gerarchica di tale distribuzione di massa, caratterizzata dalla presenza di sottostrutture su un'ampia gamma di scale e densità.

Si ritiene che tale schema cellulare assunto dalla materia sia una naturale conseguenza della formazione di strutture cosmiche a partire da un'iniziale instabilità gravitazionale: l'attuale aspetto dell'Universo è il risultato della crescita gravitazionale di piccole perturbazioni del campo di densità, e conseguentemente del campo di velocità, dell'Universo primordiale in seguito ad una fase inflazionistica che ha portato alla nascita di piccole anisotropie iniziali. Nelle regioni a più alta densità queste anisotropie sono collassate più rapidamente sotto l'azione della gravità, dando luogo ad una graduale condensazione di corpi sempre più grandi a partire dalla fusione di strutture più piccole. Il carattere di questa perturbazione dei campi di densità e velocità primordiali è quella di un processo Gaussiano spazialmente omogeneo ed isotropico, che ha portato su grande scala alla formazione di una struttura per l'appunto simile a schiuma o ad una ragnatela di vuoti e filamenti.

La natura gerarchica della distribuzione di massa nell'Universo impone allo studio della Rete Cosmica un approccio basato su rappresentazioni discrete dei campi di densità e velocità, generalmente trattati invece come campi continui nelle teorie cosmologiche. Le galassie sono individuate come i principali costituenti e traccianti della Rete Cosmica e la misura del loro redshift consente la mappatura di quest'ultima. Fondamentale diventa allora la traduzione di queste distribuzioni discrete, ottenute per osservazione diretta di un campione di galassie o per simulazione di un insieme di N particelle, nei relativi campi continui. Questo passaggio viene eseguito grazie all'utilizzo di adeguati filtri che riescono a ricostruire il campo continuo associato, le cui caratteristiche saranno dipendenti dal tipo di filtro applicato.

Essendo qualsiasi genere di filtro basato su una serie di funzioni dipendenti direttamente

dall'utente, la qualità di un determinato filtro sarà allora definita dalla sua versatilità ed adattabilità ad un particolare campione di galassie o di punti. È in questo contesto che entrano in gioco le tassellazioni di Voronoi e Delaunay, il cui potenziale in termini di stima e interpolazione di un insieme discreto di punti è attualmente la migliore risposta al problema della traduzione di un campione in un campo continuo.

Su di esse è basato il DTFE (Delaunay Tessellation Field Estimator), un filtro completamente auto adattivo per campi discreti che utilizza le tassellazioni come intervalli di interpolazione multidimensionali. Questa tecnica è in grado di delineare la natura gerarchica ed anisotropa delle distribuzioni spaziali di punti e di individuare la presenza e la forma dei vuoti, il tutto caratterizzato da un'ottima corrispondenza con i risultati delle simulazioni al computer e con le indagini osservative del redshift di distribuzioni di galassie su larga scala (2dFGRS e SDSS surveys).

La vera forza del DTFE sta però nella fase finale di elaborazione, dove il campo di densità stimato viene processato ed analizzato per la produzione di immagini o per la misura di proprietà geometriche e topologiche della distribuzione di materia. Il risultato consiste in un'identificazione ed in una misura obiettiva di vuoti, muri, filamenti ed ammassi in una distribuzione di galassie, e svela la complessa struttura della Rete Cosmica.

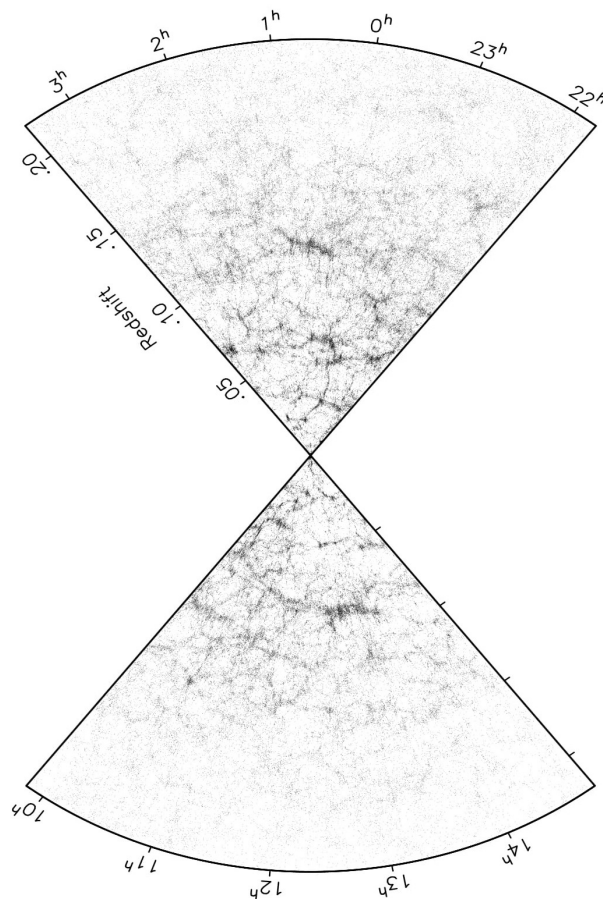


Figura 1: La distribuzione di galassie rivelata dalla *2dF Galaxy Redshift Survey*

2 La Rete Cosmica

Come detto in precedenza, la distribuzione delle galassie e della materia in generale su scale macroscopiche tende a formare un'intricata struttura a schema cellulare o schiumoso. Ciò è testimoniato dalle mappature del redshift di oltre centomila galassie effettuate negli ultimi anni, le più famose delle quali sono la 2dFGRS (2-degree Field Galaxy Redshift Survey, Figura 1) e la SDSS (Sloan Digital Sky Survey). L'Universo appare infatti caratterizzato da una distribuzione di massa ben lontana dall'essere omogenea, nella quale le galassie sono localizzate in densi e compatti ammassi, in filamenti meno densi ed in muri che circondano estese regioni semivuote. Questa struttura assunta dalla materia non è semplicemente casuale e indipendente, al contrario, le sue singole componenti si sono organizzate influenzandosi mutualmente sino a formare un'intricata Rete Cosmica che permea l'intero Universo.

2.1 Gli elementi della Rete Cosmica

Analizzando più nel dettaglio, per vuoto si intende un'enorme regione delle dimensioni di $20\text{-}50 h^{-1}$ Mpc di forma generalmente sferica, nella quale la densità di materia è estremamente bassa in confronto a quella osservata mediamente nell'Universo. I vuoti non sono perciò completamente privi di corpi al loro interno, ma sono popolati da poche ed isolate galassie o nubi di gas. Queste strutture occupano circa il 95% del volume totale delle distribuzioni di galassie osservate, e la loro singola dimensione è inversamente proporzionale alla luminosità della popolazione di galassie che li circonda (i.e. alla densità dell'area in cui sono localizzati). Quindi vuoti situati in aree dell'Universo ad alta densità risultano più piccoli di quelli collocati in aree a bassa densità.

Queste vaste regioni sono delimitate dai filamenti, gigantesche strutture allungate di dimensioni variabili (possono raggiungere anche i $100 h^{-1}$ Mpc), che costituiscono una delle componenti fondamentali della distribuzione di materia su scale macroscopiche. Essi si presentano come delle concentrazioni anisotrope di materia che possono essere identificate con ricchi ammassi di galassie ed una moltitudine di gruppi più piccoli. I filamenti rappresentano le strutture su cui si riunisce gradualmente la materia ed i canali attraverso cui essa viene trasportata verso i densi nodi della Rete Cosmica. Sono caratterizzati da una natura gerarchica: formati inizialmente da una moltitudine di piccoli segmenti, tendono col passare del tempo ad unirsi per formare enormi canali allungati. In genere, si ha che i filamenti più pronunciati sono localizzati in prossimità degli ammassi più massivi; inoltre, i filamenti più corti tendono ad essere più rettilinei rispetto agli altri.

Di caratteristiche simili sono i muri, estesi sistemi planari che circondano i vuoti ed intervallano tra loro i vari filamenti. All'intersezione di questi ultimi si trovano i superammassi di galassie, gli oggetti più densi dell'intero Universo, del quale occupano circa il 4% della massa totale. Essi si concentrano vicino alle intersezioni della Rete Cosmica, formando dei nodi che possono contenere diverse migliaia di galassie in un volume ristretto di soli pochi Megaparsec. Essendo le strutture più massive dell'intero Universo, gli ammassi risultano essere gli agenti dominanti riguardo la generazione di un campo di forza mareale su larga scala. Dal momento che tale campo agisce sulla distribuzione della materia nel cosmo, aumentandone considerevolmente l'anisotropia, gli ammassi appaiono come i primi tessitori della Rete Cosmica.

La particolarità degli ammassi sta nel fatto che rappresentano la principale concentrazione

di materia oscura nell'Universo, tanto che al loro interno la quantità di materia barionica occupa solo una minima percentuale. In questo contesto le galassie e le stelle negli ammassi appaiono intrappolate nelle profonde buche di potenziale gravitazionale generate dalla presenza di materia oscura. Quando delle particelle di gas cadono in queste buche di potenziale, esse vengono portate repentinamente a temperature superiori a $T = 10^7 K$, il che comporta conseguentemente l'emissione di intensi raggi X dovuti alla radiazione per bremsstrahlung¹ degli elettroni del gas ionizzato. Considerando che la quantità di gas interstellare presente negli ammassi è comparabile a quella intrappolata all'interno delle stelle, ne segue che queste strutture compatte si presentano come delle luminose fonti di raggi X, la cui emissione sarà direttamente proporzionale alla massa totale dell'ammasso. Grazie a ciò questi oggetti possono essere osservati fino alle più remote distanze cosmiche, consentendo uno studio accurato delle loro caratteristiche e distribuzioni (in Figura 2 è possibile osservare la distribuzione di materia oscura, e quindi anche barionica, a quattro diverse epoche cosmiche: 600 Myr, 1 Gyr, 4.7 Gyr e 13.6 Gyr).

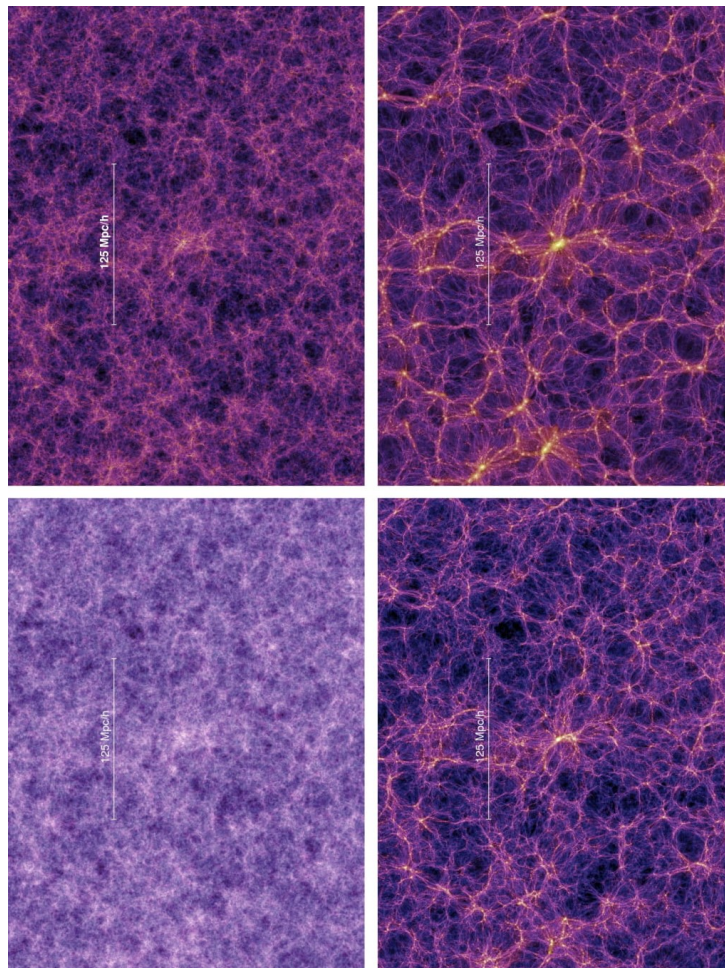


Figura 2: La distribuzione di materia oscura

¹La bremsstrahlung è una radiazione elettromagnetica che viene prodotta a causa dell'accelerazione o decelerazione di una particella carica, tipicamente un elettrone. La particella in moto, quando è deviata, perde energia cinetica e, per soddisfare il principio di conservazione dell'energia, emette una radiazione sotto forma di fotone caratterizzata da una distribuzione continua.

2.2 Impatto dello studio della Rete Cosmica

La Rete Cosmica rappresenta un esempio di come le strutture macroscopiche in natura siano spesso dovute all'azione collettiva di processi fisici semplici e basilari, e lo studio della sua ricca morfologia rappresenta un'importante fonte di informazione della fisica che ne sta alla base.

Una conferma di quanto detto, consiste nell'osservazione di come i vuoti sembrino mostrare un legame intrinseco con la temperatura della radiazione cosmica di fondo (CMB) a causa dell'effetto Sachs-Wolfe, per il quale i fotoni subiscono un redshift gravitazionale che pone in correlazione le regioni più fredde dell'Universo con i vuoti e le regioni più calde con i filamenti. Dato che l'effetto Sachs-Wolfe è teorizzato per descrivere un Universo dominato da radiazioni o energia oscura, l'esistenza dei vuoti può rappresentare significative prove fisiche sulla presenza di quest'ultima.

O ancora, è rilevante notare come le buche di potenziale generate dalla materia oscura negli ammassi agiscano sui fotoni di passaggio. L'osservazione delle immagini delle galassie retrostanti distorte dal fenomeno delle lenti gravitazionali fornisce una prova diretta della presenza di materia oscura al loro interno.

Poiché su scala macroscopica le strutture dell'Universo risiedono in uno stato di notevole evoluzione dinamica, esse conservano ancora un legame diretto con la distribuzione di materia primordiale e forniscono un'importante fonte di informazioni riguardo al processo di formazione delle strutture cosmiche. A tal proposito assume un ruolo cruciale lo studio dei vuoti: queste vaste regioni sottopopolate rappresentano la componente complementare allo scheletro della Rete Cosmica e possono essere viste come le principali responsabili dell'organizzazione spaziale dei suoi elementi.

2.3 Origine delle strutture

Ricordando le teorie cosmologiche espone da van de Weygaert & Shaap in *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, si ha che la formazione di strutture cosmiche è il risultato della crescita gravitazionale di una perturbazione del campo di densità e velocità dell'Universo primordiale. Essa coincide con una perturbazione Gaussiana spazialmente omogenea ed isotropica che, accentuata dalla gravità, ha portato alla creazione di regioni più dense, dove la materia è riuscita a vincere l'iniziale forza di espansione cosmica e ha iniziato a condensare. Fintantoché la forza di pressione non era sufficiente a contrastare la caduta di materia, quest'ultima ha continuato a crescere per accrezione, sino a collassare e formare degli oggetti legati gravitazionalmente. Una volta passata la fase di iniziale crescita lineare, è emersa la complessa struttura del campo di densità che oggi possiamo osservare. Tale struttura può essere descritta da tre caratteristiche principali: una condensazione gerarchica dei corpi, in cui le strutture più grandi si sono formate gradualmente a partire da quelle più piccole; una geometria spaziale a ragnatela, che nasce dalla tendenza intrinseca al collasso gravitazionale delle regioni più dense ad aumentare la propria anisotropia²; infine, la presenza al suo interno di vuoti.

²Questo fenomeno è amplificato dall'anisotropia del campo gravitazionale indotto dalla distribuzione di materia esterna (i.e. dalle forze mareali generate principalmente dagli ammassi).

2.4 Il ruolo fondamentale dei vuoti

L'Universo su scale macroscopiche è dominato dalla presenza di queste enormi regioni sottopopolate, le quali appaiono essere localizzate esattamente attorno ai minimi del campo di densità primordiale. L'origine dei vuoti può allora essere spiegata a partire da queste iniziali depressioni, la cui distribuzione spaziale dipende dallo specifico scenario di formazione della struttura cosmologica e che vengono individuati come loro centri di espansione. Dal momento che l'interno dei vuoti è caratterizzato da una minor forza gravitazionale, essi sono cresciuti più velocemente rispetto al resto dell'Universo. In questo processo la loro densità di materia è decresciuta rapidamente a seguito dell'espulsione della materia stessa dal loro interno, tramite un flusso che l'ha portata ad accumularsi nelle zone di contatto tra due o più vuoti in espansione. Man mano che i vuoti si sono espansi, hanno iniziato ad occupare una frazione sempre maggiore del cosmo, con una crescita accompagnata da una tendenza ad assumere una geometria sferica [2].

La loro evoluzione è dettata da due processi fondamentali: il primo consiste nel fatto che i vuoti siano inclini a fondersi e mescolarsi l'un l'altro per formare dei vuoti più grandi; il secondo, invece, nel fatto che essi possano essere eventualmente distrutti se immersi in una regione molto densa ed in collasso. Si osserva, inoltre, che i vuoti tendono ad evolvere mostrando una popolazione marcata da una distribuzione di volume auto simile³, con picco centrato attorno alla dimensione caratteristica dei vuoti. Ciò si traduce nel fatto che ad ogni epoca cosmica tale popolazione sia dominata da vuoti aventi circa le stesse dimensioni, come peraltro testimoniato dalle osservazioni effettuate negli ultimi anni [2]. Assumendo quindi i vuoti come principale componente dinamica dell'Universo, è possibile allora studiare la distribuzione della materia a partire da una popolazione di vuoti di forma sferica aventi stesse dimensioni e velocità di espansione. Essi sono i responsabili dell'organizzazione delle strutture cosmiche su scale macroscopiche: conseguentemente alla loro evoluzione la materia viene portata ad accumularsi lungo le intersezioni delle superfici dei vuoti in espansione, formando i filamenti, i muri e tutto lo scheletro della Rete Cosmica. La distribuzione di materia risultante può essere descritta da un'asintotica configurazione geometrica che prende il nome di tassellazione di Voronoi [2].

³Con auto simile si intende un'oggetto che è esattamente o approssimativamente simile a una sua parte, ovvero almeno una delle sue parti è internamente omotetica al tutto.

3 Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay

La tassellazione di Voronoi rappresenta un modello matematico molto versatile per la descrizione di distribuzioni spaziali a struttura cellulare o schiumosa. Poiché un tale schema di organizzazione della materia può essere visto come il risultato di un'evoluzione dettata dall'espansione di un insieme di vuoti, il modello di Voronoi coincide allora con il limite asintotico per cui questa popolazione di vuoti è caratterizzata da una specifica dimensione d e da un'unica velocità di espansione \mathbf{v} . In un contesto cosmologico, dunque, la tassellazione di Voronoi permette di studiare lo scheletro della distribuzione di materia nell'Universo macroscopico per ogni scenario di formazione delle strutture cosmiche (i.e. per ogni geometria della perturbazione primordiale), individuando le singole strutture attorno a cui la materia tende a concentrarsi [2].

3.1 Il concetto di tassellazione

Ricorrendo al procedimento descritto da van de Weygaert & Shaap in *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, al fine di comprendere meglio il reale potenziale dell'utilizzo di questo tipo di tassellazione, cominciamo con l'analizzarne l'aspetto matematico. Innanzitutto, per tassellazione si intende una disposizione di politopi⁴ tale da coprire l'intero spazio d -dimensionale \mathbb{R}^d senza che essi siano mai sovrapposti l'uno all'altro. Formalmente, si ha che una tassellazione su \mathbb{R}^d consiste in un insieme $\mathcal{T} = \{\mathbf{X}_i\}$ di celle d -dimensionali $\mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^d$ caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j = \emptyset$,
- $\bigcup_i X_i = \mathbb{R}^d$,
- $\{X_i \in \mathcal{T} : X_i \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\} < \infty \quad \forall \text{ sottoinsieme } \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$.

La prima proprietà implica che le parti interne a due celle diverse siano tra loro disgiunte, mentre la seconda che l'unione di tutte le celle riempia completamente lo spazio \mathbb{R}^d . La terza, infine, afferma che l'insieme delle celle \mathcal{T} sia numerabile.

Generalmente queste celle vengono assunte compatte e convesse, il che comporta che tutte le facce di separazione tra due politopi distinti siano planari e che tutti gli spigoli in comune a tre o più politopi siano lineari.

3.2 La tassellazione di Voronoi

Seguendo questo formalismo, la tassellazione di Voronoi di un insieme di punti \mathcal{P} risulta essere una divisione dello spazio in poliedri mutualmente disgiunti, ognuno dei quali è descritto dalla parte di spazio più vicina al punto considerato rispetto a tutti gli altri punti. Dunque, la cella di Voronoi \mathcal{V}_i relativa ad un nucleo i è definita da tutti i punti \mathbf{x} tali che

$$\mathcal{V}_i = \{\mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)\} \quad \forall j \neq i. \quad (1)$$

Ogni cella, da un punto di vista geometrico, è data dall'intersezione dei semispazi aperti delimitati dalle bisettrici perpendicolari ai segmenti di linea che congiungono il nucleo i ed

⁴Un politopo d -dimensionale o d -politopo è l'analogo di un poligono nel piano ($d=2$) e di un poliedro nello spazio usuale ($d=3$) generalizzato ad uno spazio euclideo reale \mathbb{R}^d .

uno qualsiasi degli altri punti. Il risultato finale consiste in un insieme di poliedri convessi, la cui unione genera una configurazione dello spazio nominata tassellazione di Voronoi relativa all'insieme di punti \mathcal{P} (esempi di tassellazioni di Voronoi in 2 e 3 dimensioni sono dati dalla Figura 3).

Prendendo in considerazione il caso tridimensionale, quale oggetto di maggior interesse per la rappresentazione delle strutture cosmiche, la tassellazione di Voronoi appare composta da quattro elementi costitutivi: le celle, i muri, gli spigoli ed i vertici. Riguardo alle celle di Voronoi si è già discusso, esse consistono in poliedri definiti da un determinato nucleo $i \in \mathcal{P}$. I muri di Voronoi sono composti invece da poligoni; ognuno di questi è definito da due nuclei $(i, j) \in \mathcal{P}$ e comprende tutti i punti \mathbf{x} con uguale distanza da (i, j) e distanza minore rispetto a tutti gli altri nuclei $m \in \mathcal{P}$. Gli spigoli di Voronoi si presentano come dei segmenti lineari determinati da tre diversi nuclei $(i, j, k) \in \mathcal{P}$ e sono formati da tutti e soli i punti con uguale distanza da (i, j, k) , di nuovo con condizione aggiuntiva che tale distanza sia inferiore rispetto a quella relativa ad un qualsiasi altro nucleo $m \in \mathcal{P}$. Infine, i vertici di Voronoi si riferiscono a quattro nuclei distinti $(i, j, k, l) \in \mathcal{P}$ e sono costituiti da singoli punti, caratterizzati dal fatto di essere equidistanti da (i, j, k, l) e più vicini ad essi che a qualsiasi altro nucleo $m \in \mathcal{P}$.

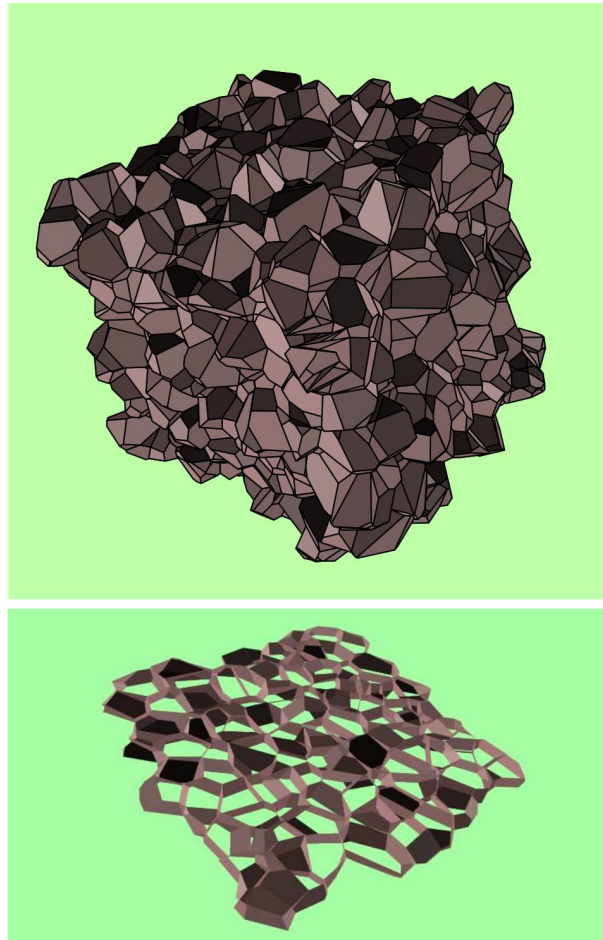


Figura 3: La tassellazione di Voronoi

3.3 La tassellazione di Delaunay

La tassellazione di Voronoi, così definita, conserva un legame molto profondo con un altro tipo di tassellazione, quella di Delaunay. Questi due modelli infatti sono tra loro duali⁵, perciò la geometria di uno si ripercuote direttamente nell'altro, consentendone un'immediata ed univoca deduzione (Figura 4)

Considerando quanto detto precedentemente, si ha che ogni insieme di nuclei (i, j, k, l) corrispondente ad un determinato vertice di Voronoi, definisce un unico tetraedro, che viene chiamato tetraedro di Delaunay. Ogni tetraedro di Delaunay è definito quindi come l'insieme dei quattro nuclei la cui sfera circoscritta non contiene nessuno degli altri nuclei. Ciò si traduce formalmente come

$$\mathcal{D}_M = \mathbf{T}(\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i(d+1)}) \quad \text{con } d(\mathbf{C}_m, \mathbf{x}_j) > \mathbf{R}_m \quad \forall j \neq i1, \dots, i(d+1). \quad (2)$$

L'unione mutualmente disgiunta di tutti i tetraedri di Delaunay genera un'unica tassellazione in grado di coprire completamente lo spazio \mathbb{R}^d , detta appunto tassellazione di Delaunay. La sua dualità con la tassellazione di Voronoi può essere apprezzata notando come il centro della sfera circoscritta ad un determinato tetraedro di Delaunay coincida con uno dei vertici delle celle di Voronoi. Ciò deriva dalla definizione stessa di vertice di Voronoi quale punto equidistante dai quattro nuclei (i, j, k, l) ; dovendo inoltre essere tale vertice più vicino a (i, j, k, l) rispetto a qualsiasi altro nucleo, è chiaro perché la sfera circoscritta ad un tetraedro di Delaunay debba essere obbligatoriamente vuota.

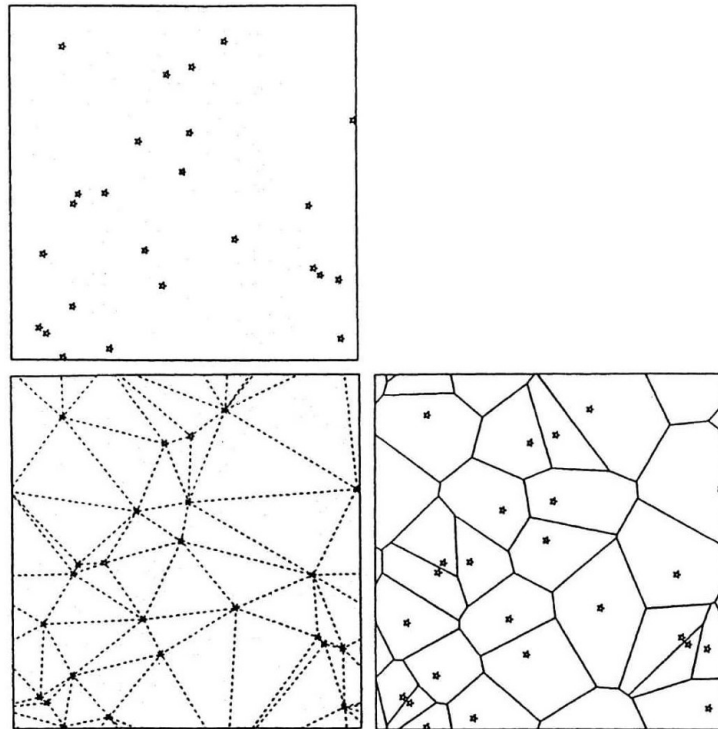


Figura 4: Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay di un insieme di punti

⁵Nella teoria dei grafi, il grafo duale di un grafo planare \mathcal{G} è un nuovo grafo \mathcal{G}' che ha un nodo per ogni regione di \mathcal{G} ed un arco per ogni arco di \mathcal{G} (due nodi di \mathcal{G}' sono connessi da un arco se e solo se le due corrispondenti regioni di \mathcal{G} sono separate da un arco).

3.4 I vicini naturali

Un concetto fondamentale legato ad una partizione dello spazio come quella appena introdotta consiste nei cosiddetti *vicini naturali* (Natural Neighbours).

Si definisce *coppia contigua* una coppia di nuclei i e j i cui poliedri di Voronoi presentano una faccia in comune. Allora coppie contigue di nuclei sono tra loro dei vicini naturali e l'insieme di tutti i vicini naturali di un determinato punto rappresenta la miglior definizione dell'ambiente in cui esso è localizzato.

3.5 I vantaggi delle tassellazioni

Il grande vantaggio dell'utilizzo di questi modelli in ambito cosmologico consiste nel fatto che la struttura cellulare della Rete Cosmica possa essere studiata e descritta senza dover affrontare restrizioni dovute alla risoluzione o al numero di particelle in questione [2].

Sebbene questo genere di metodologia non fornisca informazioni sulla distribuzione di materia su piccola scala, essa si rivela altresì un utile strumento per la previsione della distribuzione spaziale di strutture macroscopiche quali i filamenti ed i muri.

È immediato infatti notare come esista un'evidente analogia tra gli elementi costitutivi della tassellazione di Voronoi e le varie strutture che compongono la Rete Cosmica. Le celle di Voronoi corrispondono idealmente con i vuoti e come questi ultimi sono circondati da sottili muri planari ricchi di galassie, allo stesso modo le celle sono avvolte dai muri di Voronoi. Gli spigoli, che delineano i bordi di ciascun muro e sono formati dalle loro intersezioni, si identificano con i filamenti di galassie, mentre i vertici corrispondono ai densi e compatti ammassi che occupano i nodi della Rete Cosmica [2].

4 Le tassellazioni in ambito cosmologico

Come già illustrato, mentre le teorie cosmologiche descrivono lo sviluppo delle strutture nell'Universo per mezzo di campi di densità e di velocità continui, le informazioni alla base della nostra conoscenza ci arrivano sotto forma di campionamenti discreti di tali campi. Nella realtà osservativa infatti, le galassie rappresentano i principali traccianti della Rete Cosmica ed è solo grazie alla misurazione del loro redshift che siamo in grado di mapparne la distribuzione spaziale. Sia le distribuzioni di galassie che le simulazioni ottenute al computer per N-particelle sono esempi di ripartizioni spazialmente irregolari di campioni discreti e la loro traduzione nei relativi campi continui è complicata dalla natura altamente disomogenea di questo tipo di distribuzioni.

Il processo di ricostruzione del campo continuo coinvolge processi di selezione e di interpolazione dei dati, fondamentali per ottenerne un'adeguata analisi e comprensione. Una classe particolare di distribuzione di punti è rappresentata da quei processi che riflettono spazialmente la natura del campo di densità o intensità sottostante. Ne consegue che la distribuzione spaziale dei punti possa essere utilizzata direttamente per dedurre il campo di densità, essendo quest'ultimo proporzionale al numero di densità di galassie misurato. Lo studio della Rete Cosmica, caratterizzata da una geometria spaziale molto complessa e da grandi variazioni di densità, richiede l'utilizzo di una tecnica che non perda informazioni sull'alta disomogeneità dello sfondo cosmico e che sia in grado di tracciare la molteplicità delle strutture conservando il loro carattere gerarchico ed anisotropo.

I tentativi fatti finora hanno fornito solo descrizioni costruite ad-hoc, influenzate da nozioni e preconcetti riguardanti il tipo di analisi, la morfologia dell'oggetto in questione o la sua scala. Nessuna misura della distribuzione spaziale di materia è riuscita a descrivere contemporaneamente tutte le componenti e le proprietà della Rete Cosmica; al contrario, ogni ritratto di un suo particolare aspetto esclude la possibilità di raggiungere un analogo risultato su un altro elemento.

4.1 L'interpolazione dei vicini naturali

Una possibile strada consiste in un metodo di interpolazione e ricostruzione locale, dove il valore del campo in ogni punto dipende solo dai dati misurati nel suo intorno. In questo contesto le regioni analizzate vengono discretizzate per formare una maglia adattiva, operazione che si traduce in un approccio più realistico e che generalmente porta ad un'interpolazione che tende ad essere indipendente dalle assunzioni dello specifico modello.

A tal proposito assume un ruolo di fondamentale importanza una classe di metodi d'interpolazione interamente locale, denominata *interpolazione dei vicini naturali* (Natural Neighbour Interpolation). Come testimoniato da van de Weygaert & Shaap in *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, questo genere di formalismo utilizza il concetto di vicini naturali tipico delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay per ottenere una misura localmente ottimizzata delle caratteristiche del sistema. Ne consegue la produzione di un risultato privo di artifici, trovato effettuando per ogni punto d'interpolazione la media pesata dei valori dell'area relativa al sottoinsieme di dati che sono vicini naturali del punto in questione. Il valore interpolato in una posizione \mathbf{x} è allora dato da

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_i \phi_{nn,i}(\mathbf{x}) f_i \quad (3)$$

dove appunto la sommatoria è eseguita su tutti i vicini naturali del punto \mathbf{x} , ovvero su tutti quei punti j per cui la cella di Voronoi del secondo ordine $\mathcal{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ è non vuota⁶ (in Figura 5 ed in Figura 6 è possibile vedere un'esempio di interpolazione dei vicini naturali in due dimensioni).

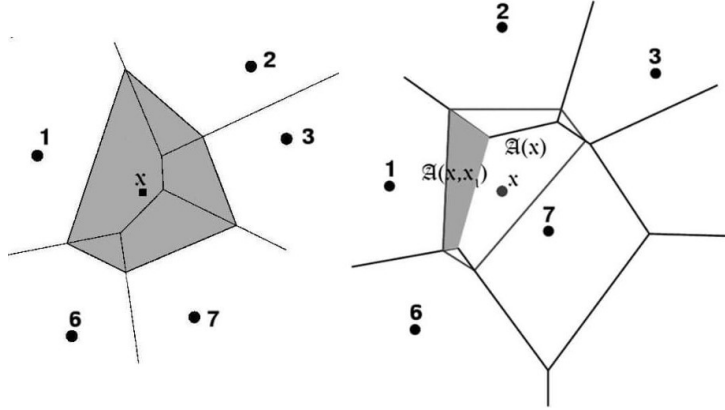


Figura 5: Cella di Voronoi del primo e del secondo ordine

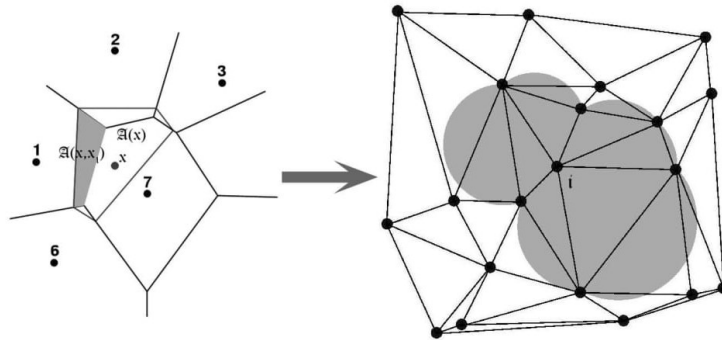


Figura 6: Interpolazione dei vicini naturali

La funzione d'interpolazione $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ è invece posta essere uguale alla cella di Voronoi del secondo ordine normalizzata

$$\phi_{nn,i}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{\mathcal{A}(\mathbf{x})} \quad (4)$$

dove $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_j \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ è il volume dell'ipotetica cella di Voronoi del punto \mathbf{x} se quest'ultimo venisse aggiunto al campione di punti \mathcal{P} , mentre $\mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ riguarda la cella di Voronoi del secondo ordine, data dalla regione di spazio in cui i punti \mathbf{x} e \mathbf{x}_i sono i più vicini. Si noti infine che le funzioni d'interpolazione ϕ sono sempre positive e hanno somma unitaria. Il campo risultante è continuo ovunque all'interno dell'involucro convesso dei

⁶Generalizzando la tassellazione di Voronoi si ottiene un'estensione della definizione di cella di Voronoi: da quella \mathcal{V}_i generata da un nucleo i si passa alla cella di Voronoi di ordine superiore $\mathcal{V}_k(i_1, \dots, i_k)$ generata da un insieme di k nuclei $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}$. Ogni cella di Voronoi di ordine k consiste di tutte quelle parti dello spazio i cui punti \mathbf{x} presentano i k nuclei $\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{P}$ come loro vicini naturali.

dati⁷ e mantiene una pendenza continua su ogni punto eccetto che sui dati stessi (vedasi a proposito la Figura 7).

In confronto con altri metodi, l'interpolazione dei vicini naturali appare essere l'approccio più naturale; ciò nondimeno, essa rappresenta anche il metodo che contiene meno artifici, sia come numero sia come gravità. Questa metodologia, grazie alla sua solidità e generalità d'impiego, può quindi essere considerata la migliore per quanto riguarda l'interpolazione multidimensionale di un insieme di dati ed essendo basata sulle tassellazioni di Voronoi e Delaunay, fornisce un'evidente prova della loro importanza in ambito cosmologico.

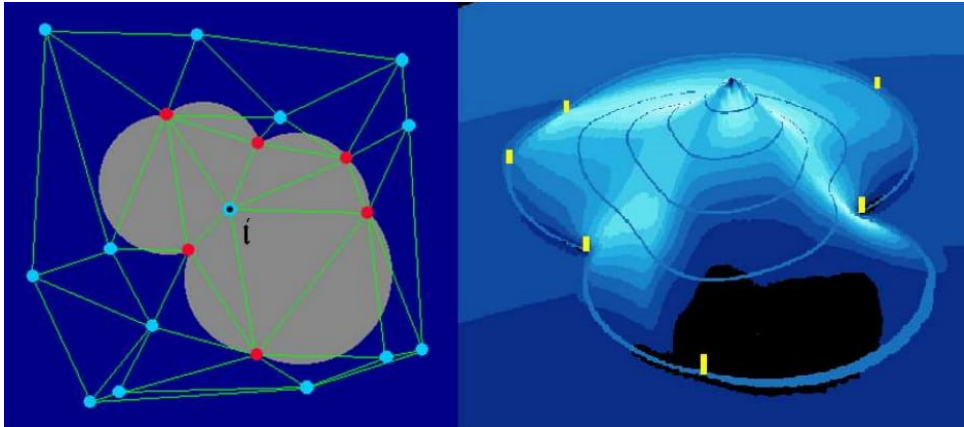


Figura 7: Interpolazione dei vicini naturali: creazione di un campo continuo

4.2 Proprietà delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay

Generalmente, quasi tutte le applicazioni delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay coinvolgono campioni di punti in spazi d -dimensionali generati da distribuzioni poissoniane ed omogenee. Nonostante la nostra conoscenza statistica su tale ambito sia particolarmente esaustiva, dei risultati analitici sono comunque piuttosto rari. Solo poche funzioni di distribuzione sono conosciute, mentre la maggior parte dei risultati statistici viene fornita principalmente da valutazioni numeriche ottenute con il metodo Monte Carlo⁸.

In particolare, definita una determinata tecnica d'interpolazione, si individuano due caratteristiche che assumono una notevole importanza: il numero di vicini naturali di un dato nucleo ed il volume delle celle di Voronoi e Delaunay. In due dimensioni, si ha che ogni nucleo possiede in media esattamente 6 vicini naturali, indipendentemente dalla natura della distribuzione spaziale dei punti. Passando invece al caso tridimensionale, il carattere della tassellazione cambia sostanzialmente: il numero medio di vicini naturali non è più indipendente dal tipo di distribuzione sottostante e inoltre non assume più un valore

⁷Si definisce inviluppo convesso di un qualsiasi sottoinsieme \mathcal{I} di uno spazio vettoriale reale, l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono \mathcal{I} . Poiché l'intersezione di insiemi convessi è a sua volta convessa, una definizione alternativa di inviluppo convesso è "il più piccolo insieme convesso contenente \mathcal{I} ". Evidentemente, se \mathcal{I} è convesso, il suo inviluppo convesso è \mathcal{I} stesso.

⁸Il metodo Monte Carlo consiste in un'ampia classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici. Questo metodo viene usato per trarre stime attraverso simulazioni e si basa su un algoritmo che genera una serie di numeri tra loro incorrelati, che seguono la distribuzione di probabilità che si suppone abbia il fenomeno da indagare. L'incorrelazione tra i numeri è assicurata da un test chi quadrato.

intero, essendo per una distribuzione di Poisson circa uguale a 13,4. In aggiunta, mentre nel caso bidimensionale il numero di vertici contenuti in una cella di Voronoi assume lo stesso valore del numero di vicini naturali, in tre dimensioni ciò è completamente diverso, dal momento che, sempre per una distribuzione di Poisson, il numero di vertici per una cella di Voronoi equivale circa a 27,07.

Poiché, come appena enunciato, il numero di vicini naturali di un determinato nucleo dipende dal tipo di distribuzione spaziale, è stato impossibile finora derivare un'espressione analitica per le funzioni di distribuzione dei volumi delle celle di Voronoi e Delaunay. Tuttavia, per una distribuzione poissoniana, una buona approssimazione è fornita dalla formula di Kiang [6], secondo cui la probabilità di distribuzione del volume di un poliedro di Voronoi nello spazio d -dimensionale \mathfrak{R}^d segue una distribuzione gamma⁹,

$$f_V(V_V)dV_V = \frac{q}{\Gamma(q)} \left(q \frac{V_V}{\langle V_V \rangle} \right)^{(q-1)} \exp\left(-q \frac{V_V}{\langle V_V \rangle} \right) d\left(\frac{V_V}{\langle V_V \rangle} \right) \quad (5)$$

dove V_V è la dimensione della cella di Voronoi, $\langle V_V \rangle$ è la dimensione media delle celle e l'indice assume un valore arbitrario corrispondente a $q = 2d$, con d la dimensione dello spazio.

Mentre quindi la distribuzione dei volumi delle celle di Voronoi coinvolge una congettura sul valore assunto dall'indice q , per le celle di Delaunay \mathcal{D} è invece possibile derivare direttamente una distribuzione ergodica¹⁰. Sia \mathbf{c} la posizione di un nucleo ed R il relativo raggio circoscritto, allora i vertici sono i punti individuati da $\{\mathbf{c} + R\mathbf{u}_i\}$, essendo $\{\mathbf{u}_i\}$ ($i = 0, \dots, d+1$) i vettori unitari diretti verso i vertici e che determinano la forma del tetraedro di Delaunay. Detto Δ_d il volume del simpleso¹¹ unitario $\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_d\}$, il volume $V_{\mathcal{D}}$ del tetraedro di Delaunay è

$$V_{\mathcal{D}} = \Delta_d R^d. \quad (6)$$

Per una distribuzione poissoniana di punti di intensità n nello spazio d -dimensionale \mathfrak{R}^d , la distribuzione dei volumi delle celle di Delaunay equivale a

$$f_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}) = f_{\mathcal{D}}(\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_d\}, R) = a(n, d) \Delta_d R^{d^2-1} \exp(-n\omega_d R^d) \quad (7)$$

dove ω_d è il volume della sfera unitaria nello spazio d -dimensionale e $a(n, d)$ è una costante dipendente dal numero di densità n e dalla dimensione d . È fondamentale allora notare come il raggio circoscritto R di un tetraedro di Delaunay sia indipendente dalla sua forma, essendo quest'ultima incorporata nel termine δ_d .

Altrimenti si può osservare che la legge di distribuzione di $n\omega_d R^d$ è proprio una distribuzione $\chi_{2d}^2/2^{12}$,

$$f(R)dR = \frac{(n\omega_d R^d)^{d-1}}{(d-1)!} \exp(-n\omega_d R^d) d(n\omega_d R^d). \quad (8)$$

⁹La distribuzione gamma è una distribuzione di probabilità continua, che comprende, come casi particolari, anche le distribuzioni esponenziale e chi quadrato. Essa consiste nella distribuzione di probabilità della variabile aleatoria definita come la somma di variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione esponenziale ed è definita sui numeri reali positivi

¹⁰Con ergodico si intende un processo statistico che si suppone assumere, nella sua evoluzione dinamica, tutti gli stati microscopici possibili.

¹¹Il simpleso n -dimensionale equivale al politopo n -dimensionale contenente il minor numero di vertici.

¹²La distribuzione χ^2 è la distribuzione di probabilità della somma dei quadrati delle variabili aleatorie normali indipendenti. Essa consiste nella distribuzione di probabilità della variabile aleatoria definita come $\chi_k^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2$ sono variabili aleatorie indipendenti con distribuzione normale standard $N(0, 1)$. Il parametro k è detto numero di gradi di libertà.

È importante infine realizzare che, per una data distribuzione discreta di punti di intensità n , sia la tassellazione di Voronoi che quella di Delaunay inducono sempre una distribuzione di volumi caratterizzata da un'asimmetria e da una dispersione mai eccessivamente marcate.

4.3 L'adattività spaziale delle tassellazioni

Il grande pregio dell'utilizzo delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay si riscontra osservando come la distribuzione delle loro celle riesca ad adattarsi alle caratteristiche delle varie distribuzioni di punti. Esse sono in grado di formare una griglia d'interpolazione multidimensionale adattiva che riflette la potenziale anisotropia della distribuzione di punti sottostante, mostrando ad esempio una distanza elevata tra i vicini naturali di un determinato nucleo qualora esso si trovi in una regione di spazio scarsamente popolata (Figura 8).

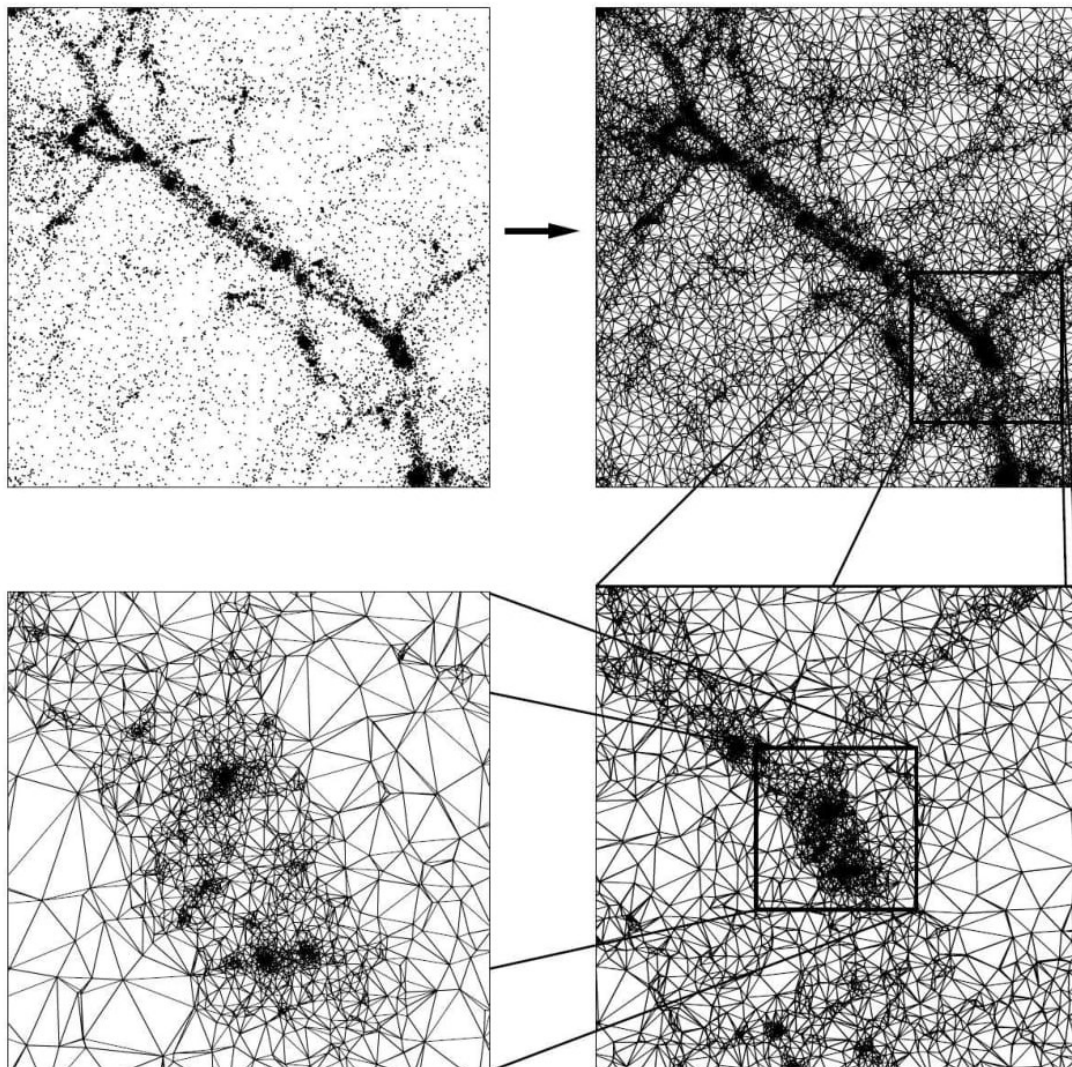


Figura 8: L'adattività spaziale della tassellazione di Delaunay

La geometria e la densità locale di una distribuzione spaziale di punti determinano completamente sia la dimensione che la forma delle celle di Voronoi e Delaunay, dettando ovunque la risoluzione dell'interpolazione cercata.

La tecnica che meglio rappresenta un approccio basato su questo tipo di partizione dello spazio è la già citata interpolazione dei vicini naturali, la quale però, pur essendo ottimale per quanto riguarda la qualità della ricostruzione del campo continuo sottostante, comporta uno sforzo computazionale molto importante. In ambito astronomico e cosmologico, dove è comune avere a che fare con campioni formati da milioni di punti, è stata allora introdotta una versione lineare del primo ordine dell'interpolazione dei vicini naturali, chiamata *DTFE* (Delaunay Tessellation Field Estimator).

Si noti che la grande adattabilità spaziale delle celle di Voronoi e Delaunay rispetto alla densità locale dei punti può essere sfruttata per misurare il valore della densità locale stessa, il che costituisce una caratteristica cruciale del formalismo del *DTFE*.

5 DTFE: the Delaunay Tessellation Field Estimator

Si è visto che per campioni di punti molto consistenti, soprattutto in spazi tridimensionali o superiori, si preferisce utilizzare una tecnica basata sull'interpolazione dei vicini naturali ma limitata al caso puramente lineare del primo ordine, il Delaunay Tessellation Field Estimator. Questo metodo, invece di coinvolgere dei filtri definiti dall'utente e caratterizzati da funzioni d'interpolazione artificiali e rigide, sfrutta le tassellazioni di Voronoi e Delaunay e le loro proprietà auto-adattive. Il DTFE si serve quindi di funzioni d'interpolazione definite direttamente dalla densità e geometria locale della distribuzione di punti, ottenendo un'ottima risoluzione spaziale, nonché delle eccellenti stime del campo di densità sottostante. In questo contesto, i tetraedri della tassellazione di Delaunay vengono usati come intervalli multidimensionali per l'interpolazione lineare dei valori assunti dal campo nei valori campionati. Il DTFE permette quindi di usufruire delle stesse proprietà adattive tipiche del metodo di ordine superiore dei vicini naturali, consentendo però allo stesso tempo di analizzare grandi insiemi di dati.

5.1 Il campione di punti

Seguendo il formalismo descritto da van de Weygaert & Shaap nel loro lavoro *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, si osserva che questa tecnica interpolativa implica lo sviluppo di alcuni passaggi. Il primo di essi consiste nel delineare il campione discreto di punti \mathcal{P} nello spazio d -dimensionale \mathbb{R}^d ,

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}. \quad (9)$$

In ognuno dei punti appartenenti all'insieme numerabile \mathcal{P} , è definito il valore assunto dal campo $\{f(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N\}$, o può perlomeno essere stimato sulla base della distribuzione spaziale dei punti stessa. Più precisamente, l'approccio generale è dato da una diretta interpolazione dei valori del campo misurati sfruttando l'utilizzo della tassellazione di Delaunay.

Alternativamente, se la distribuzione spaziale di punti è formata da un campione che rispecchia il campo di densità continuo sottostante, ovvero se costituisce una rappresentazione poissoniana del campo di densità, allora il DTFE è caratterizzato dall'abilità di ricostruire il campo di densità sottostante a partire direttamente dall'insieme discreto di punti. Si noti che una distribuzione spaziale mostra tale proprietà se il campione di punti risulta diffuso su tutto il volume campionato; è dunque fornita un'opportuna ricostruzione del campo cercato.

5.2 Condizioni al contorno

Un importante problema consiste nel determinare le condizioni al contorno, sulle quali le tassellazioni di Voronoi e Delaunay si baseranno per creare le celle dei punti localizzati al confine del volume campionato. Relativamente al tipo di campione preso in considerazione, esistono diverse possibilità nella scelta delle condizioni al contorno:

- *Condizioni al contorno di vuoto*: all'esterno del volume campionato non si trovano punti, il che porta alla formazione di celle di Voronoi infinitamente estese attorno ai punti localizzati al confine del volume campionato. Queste celle non possono essere utilizzate nel calcolo del campo di densità e nel processo di interpolazione, portando

ad un volume del campo ricostruito dal DTFE minore rispetto al volume iniziale del campione.

- *Condizioni al contorno periodiche*: il campione di punti viene ripetuto periodicamente nelle celle di confine, definendo una topologia toroidale per il volume campionato. Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay risultanti appaiono essere anch'esse periodiche e caratterizzate da un volume uguale a quello iniziale del campione. Tale scelta risulta essere la migliore per quanto riguarda le analisi delle simulazioni di N-particelle.
- *Condizioni tampone*: il volume campionato è circondato da una zona tampone riempita con un insieme sintetico di punti, la cui densità sarà proporzionale alla densità delle adiacenti celle di confine. La profondità di questa regione cuscinetto dipende dalla densità dell'insieme sintetico di punti, dovendo essere sufficientemente ampia affinché le celle di Voronoi e Delaunay relative al campione tassellato non superino la zona tampone¹³.

5.3 L'interpolazione lineare

Affrontiamo ora la metodologia da seguire per quanto riguarda un campo generale f diverso dalla densità, dove i valori del campo sono misurati per ogni punto del campione. La tecnica del DTFE basa la propria procedura di interpolazione lineare del campione discreto di punti sull'utilizzo della tassellazione di Delaunay come griglia interpolativa multidimensionale e spazialmente adattiva. Una volta determinata, essa viene usata per ricavare il campo $f(\mathbf{r})$, supponendo che ogni tetraedro di Delaunay coincida con una regione caratterizzata da un gradiente del campo ∇f costante.

Le stesse proprietà adattive tipiche delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay si riscontrano quindi nello schema del DTFE similmente a quanto constatato con il metodo dei vicini naturali. In questo caso però, la funzione d'interpolazione $\phi_{dt,i}(\mathbf{x})$ è data da un'interpolazione lineare limitata al tetraedro di Delaunay in cui \mathbf{x} è localizzato,

$$\widehat{f}_{dt}(\mathbf{x}) = \sum_i \phi_{dt,i}(\mathbf{x}) f_i \quad (10)$$

dove la sommatoria è estesa ai quattro punti che definiscono il particolare tetraedro.

Le funzioni d'interpolazione ϕ_i valgono uno nei punti \mathbf{x}_i del campione con $i = j$ e zero in tutti gli altri punti dove $i \neq j$.

L'equazione precedente può essere riscritta tramite l'espressione equivalente che esplicita il gradiente lineare del campo $\widehat{\nabla}f|_m$ all'interno del simpleso di Delaunay m ,

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \widehat{f}(\mathbf{x}_i) + \widehat{\nabla}f|_m (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (11)$$

Il valore del gradiente $\widehat{\nabla}f|_m$ può essere unicamente determinato a partire dagli $(1 + D)$ valori del campo f_i assunti nei punti che costituiscono i vertici del simpleso di Delaunay. Detti $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ e \mathbf{r}_3 i vettori che individuano le posizioni dei vertici e f_0, f_1, f_2 e f_3 i valori del campo assunti in tali punti, si definiscono le seguenti quantità:

¹³Quando si ha a che fare con analisi del campo di velocità, i valori assunti dal campo nei punti tampone devono seguire la distribuzione di velocità del campione e rispettare l'equazione di continuità.

- $\Delta x_n = x_n - x_0$
- $\Delta y_n = y_n - y_0$
- $\Delta z_n = z_n - z_0$
- $\Delta f_n = f_n - f_0$

con $n = 1, 2, 3$. Evidentemente, un'interpolazione lineare del campo f ha senso solo se i valori del campo non variano troppo repentinamente. Ne segue che il gradiente ∇f vale

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} \quad \text{con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta z_2 \\ \Delta x_3 & \Delta y_3 & \Delta z_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Una volta calcolato il valore del gradiente ∇f per ogni tetraedro di Delaunay, è immediato determinare il valore del campo $\hat{f}(\mathbf{x})$ in ogni punto \mathbf{x} , interpolando linearmente i risultati ottenuti all'interno del tetraedro di Delaunay in cui \mathbf{x} è localizzato (i.e. per mezzo dell'equazione 11).

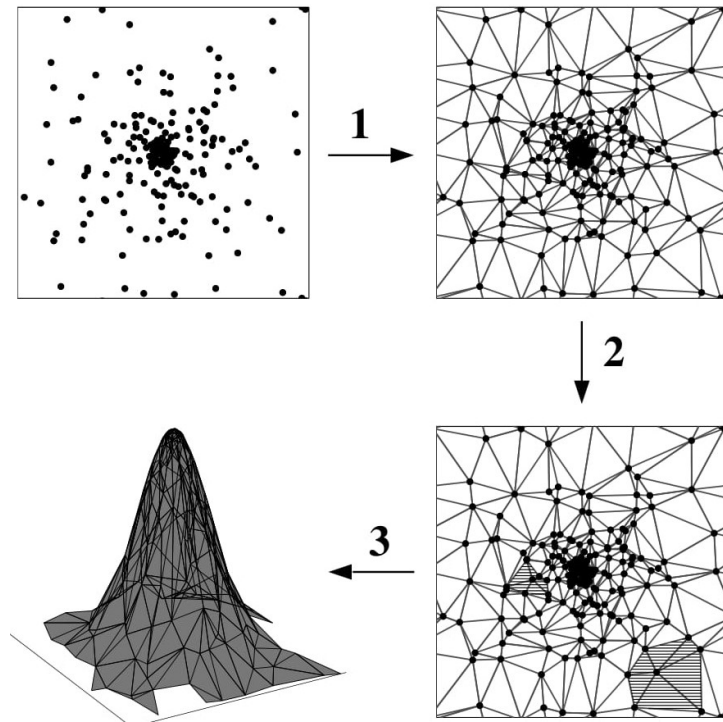


Figura 9: Ricostruzione del campo tramite il DTFE

L'ultimo ostacolo consiste nell'individuare il tetraedro di Delaunay \mathcal{D}_m in cui risiede il punto \mathbf{x} in questione, il che consiste in un problema non banale in quanto il nucleo più vicino al suddetto punto \mathbf{x} non occupa per forza uno dei vertici del tetraedro cercato¹⁴.

¹⁴Fortunatamente è stato sviluppato un metodo molto efficiente a tal proposito, il *walking triangle algorithm*.

Dal momento che il DTFE distribuisce la massa m_i relativa ad un punto i sulla corrispondente cella di Voronoi contigua, il particolare punto i contribuirà allora solamente alla massa del semplice di Delaunay di cui occupa un vertice. Questo carattere di selezione spaziale sta alla base del principio di località proprio dello schema di ricostruzione del DTFE.

5.4 Fase di elaborazione

La fase di elaborazione comprende tutti i processi semplici e diretti che agiscono sull'insieme dei dati, quali la produzione di immagini e le operazioni di *smoothing*¹⁵ (ammorbidente, levigatura) tramite l'applicazione di filtri.

Analizzandoli nel dettaglio, si sovrapponga una griglia alla sottostante tassellazione di Voronoi/Delaunay. Si osserva allora che la ricostruzione dell'immagine consiste nel determinare, per un insieme di *punti immagine*, i relativi *valori immagine*, generalmente forniti dalla media dei valori assunti dal campo nella cella¹⁶ corrispondente al particolare punto. A tal proposito possono essere seguite diverse strategie:

- *Approccio geometrico formale*: si integrano i valori del campo all'interno di ogni cella. Ciò comporta di dover calcolare i valori assunti dal campo nelle zone di intersezione tra diversi tetraedri di Delaunay, i quali verranno poi mediati sui volumi delle relative celle e aggiunti nel calcolo degli integrali.
- *Approccio di Monte Carlo*: si approssimano gli integrali prendendo in considerazione la media di un certo numero di valori assunti dal campo in punti casualmente distribuiti nelle celle attorno al particolare punto immagine. Infine, si effettua la media dei valori ottenuti all'interno di una cella.
- *Approccio di interpolazione singolare*: si limita il calcolo del valore del campo a quello assunto nella sola cella in cui è localizzato il punto immagine. Tale metodo offre un'approssimazione ragionevole per tutte le celle di dimensioni minori o comparabili alle celle di Delaunay ad esse associate, a condizione che il gradiente del campo non sia particolarmente accentuato.

Riguardo invece allo smoothing, si incontrano tre diverse metodologie:

- *Smoothing lineare*: consiste nella convoluzione¹⁷ del campo \hat{f} con una funzione $W_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ agente da filtro, solitamente specificata dall'utente,

$$f_s(\mathbf{x}) = \int \hat{f}(\mathbf{x}') W_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}) d\mathbf{x}'. \quad (13)$$

¹⁵Lo smoothing di un insieme consiste nell'applicazione di una funzione di filtro il cui scopo è evidenziare i pattern significativi, attenuando il rumore generato da artefatti ambientali, elettrici, elettronici, informatici o fisiologici oppure altri fenomeni di disturbo legati a fattori di scala molto piccoli o a fenomeni ad alta velocità. Praticamente si tratta di fare una media tra valori contigui oppure molto vicini nello spazio (2D, 3D, 4D) o nel tempo. Per realizzare lo smoothing sono stati sviluppati diversi algoritmi matematici.

¹⁶In questo paragrafo si intenda con *cella* un riquadro della griglia applicata alla tassellazione. Verrà altrimenti specificato quando si farà riferimento alle celle di Voronoi e Delaunay.

¹⁷La convoluzione è un'operazione tra due funzioni di una variabile che consiste nell'integrare il prodotto tra la prima e la seconda traslata di un certo valore.

- *Smoothing mediano*: il campo di densità viene filtrato sulla base del valore mediano delle densità assunte nelle celle di Voronoi contigue.
- *Smoothing di diffusione*: le strutture maggiormente definite vengono filtrate attraverso l'utilizzo di particolari equazioni di diffusione.

5.5 Fase di post-elaborazione

La fase di post-elaborazione comprende tutti i processi più complessi e rappresenta il vero potenziale della tecnica del DTFE. Alcuni esempi notevoli sono:

- Operazioni avanzate di smoothing.
- Rilevamento di ammassi, filamenti e muri grazie al *Multiscale Morphology Filter*.
- Identificazione dei vuoti per mezzo del *Cosmic Watershed Algorithm*.

Inoltre, il DTFE consente l'analisi simultanea e combinata del campo di densità e di altri campi fisici rilevanti. Poichè quindi permette di conoscere sia il campo di densità che quello di velocità, può quindi essere utilizzato per studiare la dinamica della formazione delle strutture cosmologiche.

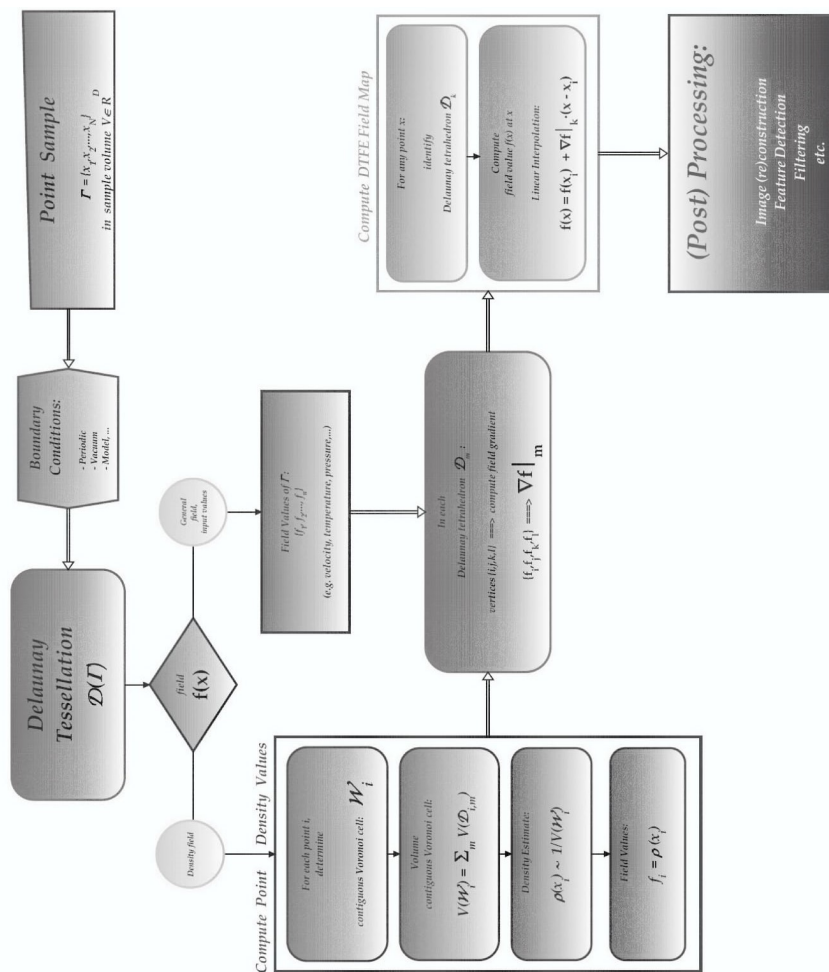


Figura 10: Schema della procedura attuata dal DTFE

6 Proprietà del DTFE

Sappiamo che il DTFE consiste in una versione ridotta al primo ordine del metodo di interpolazione dei vicini naturali. Come quest'ultimo, presenta un'interpolazione spaziale multidimensionale e adattiva, una caratteristica derivante dall'utilizzo delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay per la costruzione della griglia interpolativa.

Cionondimeno, facendo riferimento a quanto riportato da van de Weygaert & Shaap in *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, si osserva che il DTFE possiede ulteriori aspetti ed estensioni, due delle quali hanno una rilevante importanza cosmologica:

- I valori interpolati sono pesati relativamente ai volumi, al contrario delle convenzionali griglie interpolative che presentano una media pesata della massa.
- L'adattività spaziale delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay ad una distribuzione di punti viene sfruttata per stimarne il campo di densità sottostante, nel caso in cui tale distribuzione ne rifletta le proprietà in modo obiettivo.

6.1 Media pesata del volume

Un aspetto essenziale del processo di stima di un campo proprio del DTFE riguarda il fatto che ne media i valori pesandoli rispetto al volume

$$\hat{f}_{vol}(\mathbf{x}) = \frac{\int f(\mathbf{y})W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}}{\int W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}} \quad (14)$$

invece che rispetto alla massa, come viene più comunemente fatto,

$$\hat{f}_{mass}(\mathbf{x}) = \frac{\int f(\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}}{\int \rho(\mathbf{y})W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}} \quad (15)$$

dove $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è la funzione filtro scelta che definisce il peso di un elemento di massa in modo che quest'ultimo dipenda dalla sua posizione \mathbf{y} rispetto alla posizione \mathbf{x} .

Calcoli analitici di sistemi fisici in stadi avanzati di evoluzione molto spesso implicano un'analisi delle perturbazioni, dovute ad esempio all'evoluzione non lineare dei campi di velocità e densità. L'utilizzo di quantità pesate rispetto al volume piuttosto che rispetto alla massa consente di evitare ulteriori complicazioni matematiche.

Bisogna però prestare attenzione al fatto che, nel paragonare questi risultati alle quantità osservate attraverso tecniche convenzionali, si ha solitamente a che fare con medie pesate rispetto alla massa.

Una ragionevole approssimazione di grandezze pesate per il volume si può ottenere mediando rispetto al volume delle quantità precedentemente filtrate attraverso una funzione dipendente dalla massa. Questa tecnica ha portato all'elaborazione di uno schema per l'analisi dei campi di velocità, consistente in una prima fase di interpolazione dei valori del campo in una griglia ed in una seguente fase in cui la griglia risultante viene utilizzata per determinare le medie dei volumi (tramite l'equazione 14).

Si noti che il limite asintotico di questo procedimento, usando un filtro di lunghezza infinitamente piccola, porta a

$$f_{mass}(\mathbf{x}_0) = \frac{\sum_i w_i f(\mathbf{x}_i)}{\sum_i w_i} = \frac{f(\mathbf{x}_1) + \sum_{i=2}^N \frac{w_i}{w_1} f(\mathbf{x}_i)}{1 + \sum_{i=2}^N \frac{w_i}{w_1}} \longrightarrow f(\mathbf{x}_1) \quad (16)$$

ovvero si trova che la stima della media pesata rispetto al volume coincide con il valore del campo assunto nel punto più vicino \mathbf{x}_1 . Ciò significa che è possibile dividere lo spazio in regioni formate dalla porzione di spazio più vicina ad un particolare punto rispetto a tutti gli altri e prendere poi come valore del campo in quella regione il valore assunto dal campo nel punto stesso. Questa procedura non è altro che la divisione dello spazio operata dalla tassellazione di Voronoi su un certo insieme di punti \mathcal{P} e motiva l'introduzione delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay quali tecniche interpolative per i campi di velocità. È interessante notare come il risultato ottenuto derivi dall'applicazione della tassellazione di Voronoi e, così costruito, produca un campo propriamente discontinuo. Il passaggio per ricavare un campo continuo consiste nell'introdurre la tassellazione duale di Delaunay come griglia adattiva di interpolazione lineare. Ciò riconduce allo schema interpolativo proprio del DTFE.

Si veda infine che l'utilizzo di quantità mediate per il volume anziché per la massa comporta la correzione di alcuni errori legati alla stima dei momenti dei campi di velocità di ordine maggiore.

6.2 Stima del campo di densità

Nel caso in cui si abbia a che fare con un campione di punti che rispecchi il campo di densità sottostante, i valori ivi assunti da tale campo sono determinati dalla corrispondente tassellazione di Voronoi. La ricostruzione del campo di densità tramite il DTFE si suddivide in due passaggi: la stima di ordine zero $\hat{\rho}_0$ dei valori assunti nei singoli punti appartenenti all'insieme \mathcal{P} e la seguente interpolazione lineare di queste stime sulla corrispondente cella di Delaunay. Ciò fornisce il valore cercato del campo di densità $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ (Figura 11).

Si noti che se la stima di ordine zero della densità fosse data dall'inversa del volume della cella di Voronoi, la condizione di conservazione della massa non sarebbe rispettata. Invece, la procedura indotta dal DTFE assume che la densità stimata in un dato punto i coincida con l'inversa normalizzata del volume della cella di Voronoi contigua \mathcal{W}_i ad esso associata, dove per cella contigua si intende l'unione di tutti i tetraedri di Delaunay di cui il punto i occupa uno dei quattro vertici.

In base al tipo di campione, si riconoscono due differenti situazioni:

- *Processo di campionamento uniforme*: il campione di punti consiste in una rappresentazione obiettiva del campo di densità sottostante. Questa tipologia è tipica delle simulazioni di N-particelle e, per uno spazio D -dimensionale, il valore della densità è dato da

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}_i) = (1 + D) \frac{w_i}{V(\mathcal{W}_i)} \quad (17)$$

dove w_i indica il peso del singolo punto i ¹⁸.

¹⁸Solitamente si considera che tutti i punti abbiano la stessa massa.

- *Processo di campionamento sistematico non uniforme*: il campione di punti è sottoposto ad uno specifico processo di selezione, quantificato da una funzione di selezione $\Psi(\mathbf{x})$ conosciuta a priori che varia in funzione della posizione nel cielo (α, δ) e del redshift. Si tratta di una situazione tipica per quanto riguarda le mappature delle galassie e per uno spazio D -dimensionale, la stima della densità è

$$\widehat{\rho}(\mathbf{x}_i) = (1 + D) \frac{w_i}{\Psi(\mathbf{x}_i)V(\mathcal{W}_i)}. \quad (18)$$

Il gradiente del campo di densità $\widehat{\nabla}\rho|_m$ è fornito seguendo il formalismo descritto nel paragrafo 5.3 (*L'interpolazione lineare*) ed è univocamente e direttamente determinato dalla posizione $\mathbf{r} = (x, y, z)$ dei quattro punti occupanti i vertici del particolare tetraedro di Delaunay, $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ e \mathbf{r}_3 , e dal valore assunto dalla densità in tali punti, $\widehat{\rho}_0, \widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2$ e $\widehat{\rho}_3$. Si ha quindi che, posto $\Delta\rho_n = \rho_n - \rho_0$ (con $n = 1, 2, 3$),

$$\nabla\rho = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} \\ \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\rho}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

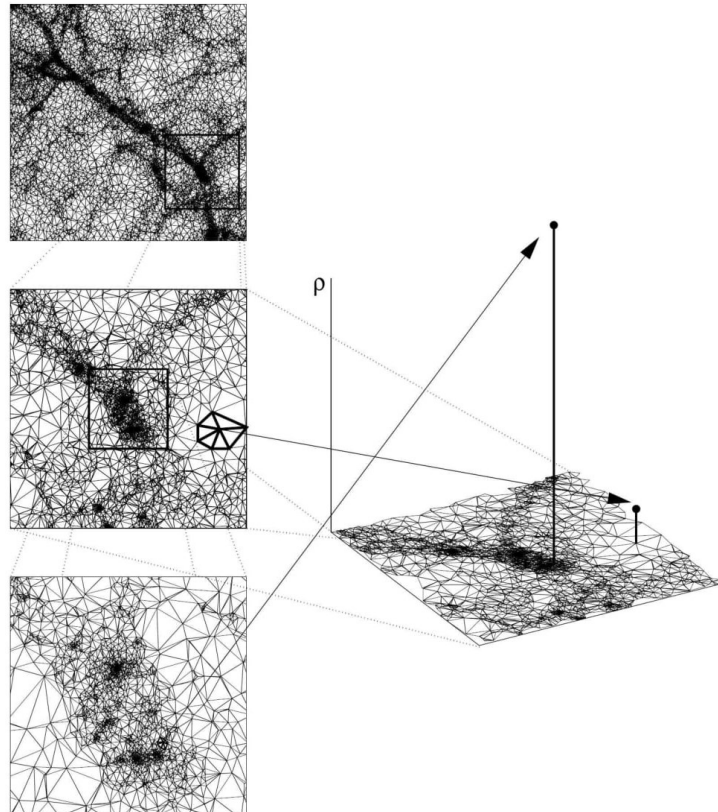


Figura 11: Relazione tra il campo di densità ed il volume della cella di Voronoi contigua

6.3 Conservazione della massa

Un requisito essenziale consiste nel fatto che il campo di densità ricostruito dal DTFE garantisca la conservazione della massa, ovvero che la massa totale corrispondente al campo di densità sia uguale a quella associata all'insieme discreto di punti.

Sappiamo che la massa M è data dall'integrale del campo di densità $\rho(\mathbf{x})$ sullo spazio,

$$\widehat{M} = \int \widehat{\rho}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N m_i = M = \text{cost.} \quad (20)$$

dove $m_i = m$ è la massa di un singolo punto. L'integrale appena calcolato risulta essere equivalente al volume sotteso dalla $\widehat{\rho}$ -superficie nello spazio $(\mathbf{x}, \widehat{\rho})$, nel quale ogni tetraedro di Delaunay m forma l'iperpiano di base di un poliedro \mathcal{D}_m^+ .

La massa totale relativa al campo di densità può allora essere espressa come somma dei volumi di questi poliedri,

$$M = \sum_{m=1}^{N_T} V(\mathcal{D}_m^*) \quad (21)$$

dove N_T è il numero totale di tetraedri di Delaunay e $V(\mathcal{D}_m^*)$ il volume del poliedro \mathcal{D}_m^+ . Dal momento che questo volume equivale al prodotto tra la densità media dei vertici $\{m_1, m_2, \dots, m(D+1)\}$ del tetraedro di Delaunay \mathcal{D}_m ed il volume $V(\mathcal{D}_m)$ si ha che

$$M = \frac{1}{D+1} \sum_{m=1}^{N_T} (\widehat{\rho}_{m1} + \widehat{\rho}_{m2} + \dots + \widehat{\rho}_{m(D+1)}) V(\mathcal{D}_m). \quad (22)$$

La massa totale è quindi data dalla somma di tutti i tetraedri di Delaunay contenuti nel volume campionato e riordinandone i termini si ottiene

$$M = \frac{1}{D+1} \sum_{m=1}^N \widehat{\rho}_i \sum_{m=1}^{N_{D,i}} V(\mathcal{D}_{m,i}) \quad (23)$$

dove $\mathcal{D}_{m,i}$ è uno degli $N_{D,i}$ tetraedri di Delaunay di cui il nucleo i occupa un vertice. L'insieme dei $\mathcal{D}_{m,i}$ tetraedri costituisce la ben conosciuta cella di Voronoi contigua \mathcal{W}_i del nucleo i . Dunque possiamo scrivere

$$M = \frac{1}{D+1} \sum_{i=1}^N \widehat{\rho}_i V(\mathcal{W}_i). \quad (24)$$

Si ottiene che M è uguale alla massa totale associata al campione di punti se il valore della densità assunta nei singoli punti vale

$$\widehat{\rho}(\mathbf{x}_i) = (D+1) \frac{m_i}{V(\mathcal{W}_i)}. \quad (25)$$

Dunque si è dimostrato che il valore della densità introdotto dal DTFE (equazione 14) soddisfa la conservazione della massa, essendo uguale all'inversa del volume della cella di Voronoi contigua, normalizzata per un fattore $(1+D)$ che sta per il numero di punti del campione che occupano i vertici del tetraedro di Delaunay di riferimento.

Se invece si ha a che fare con un processo di campionamento non uniforme, bisogna tenere conto della selezione indotta dalla funzione di selezione $\Psi(\mathbf{x})$. Tale funzione può comprendere differenze nella densità di campionamento dipendenti da:

- *Posizione nel cielo* (α, δ): vari generi di fattori, come le caratteristiche della mappatura, le condizioni di osservazione, gli aspetti strumentali o gli errori accidentali, possono portare ad una copertura del cielo non uniforme. Tutto ciò può essere incorporato in una maschera $\Psi(\alpha, \delta)$.
- *Distanza/Redshift*: mappature limitate relativamente ai flussi o alle magnitudini inducono una selezione sistematica del redshift, mostrando a grandi distanze solo galassie con luminosità maggiore di un certo livello minimo $L(z)$. La corrispondente funzione di selezione è data da

$$\Psi_z(z) = \frac{\int_{L(z)}^{\infty} \Phi(L) dL}{\int_{L_0}^{\infty} \Phi(L) dL} \quad (26)$$

dove $\Phi(L)$ è la funzione di luminosità della galassia.

Entrambi gli effetti di selezione portano ad una sottostima del campo di densità e per correggere tale variazione si pesa il valore assunto dalla densità in un determinato punto i per l'inversa della funzione di selezione

$$\Psi(\mathbf{x}_i) = \Psi_s(\alpha_i, \delta_i) \Psi_z(r_i) \quad (27)$$

ottenendo quindi

$$\widehat{\rho}(\mathbf{x}_i) = (1 + D) \frac{m_i}{\Psi(\mathbf{x}_i) V(\mathcal{W}_i)}. \quad (28)$$

6.4 Il campo di velocità

Il gradiente del campo di velocità $\widehat{\nabla} \mathbf{v}|_m$ è fornito anch'esso seguendo il formalismo descritto nel paragrafo 5.3 (*L'interpolazione lineare*) ed è quindi univocamente e direttamente determinato a partire dalla posizione $\mathbf{r} = (x, y, z)$ dei quattro punti occupanti i vertici del tetraedro di Delaunay in questione, $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ e \mathbf{r}_3 , e dal valore assunto dalla velocità in tali punti, $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 .

Ricordiamo che i quattro vertici del tetraedro di Delaunay sono sia necessari che sufficienti per il calcolo del tensore del gradiente della velocità $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Si ha quindi che, posto $\Delta \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0$ (con $n = 1, 2, 3$), il gradiente del campo di velocità nel tetraedro di Delaunay m è dato da

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta v_{1x} & \Delta v_{1y} & \Delta v_{1z} \\ \Delta v_{2x} & \Delta v_{2y} & \Delta v_{2z} \\ \Delta v_{3x} & \Delta v_{3y} & \Delta v_{3z} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Dalle nove componenti del gradiente della velocità $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ si possono determinare le tre relative modalità di deformazione, ovvero la divergenza della velocità $\nabla \cdot \mathbf{v}$, il taglio¹⁹ σ_{ij} e la vorticità ω :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (30)$$

¹⁹Lo sforzo di taglio è quella forza che si oppone al moto di uno strato di fluido sull'altro.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (31)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} \quad (32)$$

dove $\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \epsilon^{kij} \omega_{ij}$ (con ϵ^{kij} tensore completamente antisimmetrico).

L'interpolazione del campo di velocità tramite la procedura propria del DTFE è eseguibile solamente in regioni prive di flussi multipli²⁰. Infatti, in presenza di tale fenomeno, il metodo fallisce e non può essere applicato. La ricostruzione del campo di velocità può essere quindi eseguita solo quando i flussi sono laminari e in tale regime, secondo la teoria di instabilità gravitazionale, non ci può essere un contributo dato dalla vorticità.

Queste complicazioni possono essere aggirate filtrando le velocità su una regione sufficientemente ampia e imponendo un ulteriore vincolo al campo di velocità, operazione che viene già in parte eseguita dal DTFE durante il processo di linearizzazione del suddetto campo.

6.5 Rumore associato e costo computazionale

Al fine di apprezzare il lavoro svolto dal DTFE, è necessario osservare il rumore associato a questo metodo. Essendo basato sulle tassellazioni di Voronoi e Delaunay, il DTFE comincia la propria procedura a partire da un campo formato da un insieme discreto di punti ed è questo carattere discreto a introdurre rumore ed errori. Se poi il campione di punti viene utilizzato per costruire il campo di densità ad esso associato tramite il DTFE, la propagazione del rumore sarà ancora più accentuata.

Anche se una distribuzione di Poisson uniforme costituisce una rappresentazione discreta di un campo di densità uniforme, la natura stocastica del campione di punti generato produrrà una distribuzione dei volumi delle celle di Voronoi e Delaunay non uniforme. Poichè tali volumi sono necessari per stimare il campo di densità tramite il DTFE, la loro distribuzione non uniforme si tradurrà in una fluttuazione nel campo di densità ricostruito. Ricordando la formula di Kiang (equazione 5) [6] per la distribuzione gamma dei volumi delle celle di Voronoi, si può trovare un'espressione analitica per la distribuzione di densità associata all'ordine zero del campo ricostruito dal DTFE:

$$f(\tilde{\rho}) = \begin{cases} \frac{128}{3} \tilde{\rho}^{-6} \exp\left(-\frac{4}{\tilde{\rho}}\right) & \text{per uno spazio } 2D \\ \frac{1944}{5} \tilde{\rho}^{-8} \exp\left(-\frac{6}{\tilde{\rho}}\right) & \text{per uno spazio } 3D \end{cases} \quad (33)$$

dove il valore della densità normalizzata $\tilde{\rho}$ è la stima della densità ρ in termini della densità media $\langle \rho \rangle$.

Queste due distribuzioni sono chiaramente di carattere non gaussiano e mostrano una coda che si estende verso i valori di densità più alti. La distribuzione relativa allo spazio tridimensionale cade più velocemente di quella associata allo spazio bidimensionale; inoltre entrambe risultano più strette rispetto ad una distribuzione gaussiana regolare, essendo la varianza²¹ uguale a $1/3$ per $d = 2$ e ad $1/5$ per $d = 3$. A dimostrare ciò si osserva

²⁰La presenza di flussi multipli è comune negli ammassi ad alta concentrazione di densità o nelle strutture più dense della Rete Cosmica. Con flussi multipli si intende avere più valori della velocità in singolo punto.

²¹La varianza definisce la misura di quanto i valori assunti dalla variabile si discostino quadraticamente dalla media aritmetica o dal valore atteso.

infatti un elevato valore positivo di curtosi²².

Oltre a questo genere di rumore di origine naturale e dovuto prevalentemente alla statistica legata all'osservazione ed al processo di formazione delle galassie, bisogna considerare una fonte addizionale di rumore. Essa è dovuta al fatto che la posizione delle galassie viene proiettata in un piano bidimensionale: poichè il DTFE collega le galassie che si trovano vicine in base alla loro proiezione, è possibile che in realtà coinvolga oggetti molto distanti tra loro. Dunque, è necessario prestare attenzione al problema, sapendo di poterlo risolvere ricorrendo ad una ricostruzione tridimensionale della distribuzione. Si può infine osservare come il costo computazionale associato alla procedura del DTFE non sia assolutamente eccessivo. La maggior parte dello sforzo è rivolto al calcolo della tassellazione di Delaunay del campione di punti N e richiede un tempo di utilizzo della CPU dell'ordine di $O(N \log N)$.

²²L'indice di curtosi è uno degli indici che descrivono la forma di una distribuzione e costituisce una misura dello spessore delle code di una funzione di densità, ovvero il grado di appiattimento di una distribuzione. In sostanza, la curtosi definisce il grado di allontanamento dalla normalità distributiva.

7 Applicazione del DTFE alla Rete Cosmica

Per dimostrare la grande abilità del DTFE di tracciare le strutture della Rete Cosmica ci si deve concentrare su due particolari aspetti:

- La sua abilità nel tracciare la distribuzione gerarchica della materia.
- La sua abilità nel riprodurre la forma delle strutture anisotrope della Rete Cosmica.

7.1 La natura gerarchica delle strutture

Facendo riferimento a quanto riportato da van de Weygaert & Shaap in *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, si introduca il modello frattale²³ di Soneira-Peebles [9]. Esso consiste in una distribuzione spaziale di punti analitica ed auto-simile, definita con lo scopo di modellare la distribuzione di galassie in modo che le sue proprietà statistiche siano in linea con la realtà osservativa.

Il modello di Soneira-Peebles viene utilizzato per verificare fino a che punto il DTFE sia in grado di tracciare l'estensione del range di scale coperto dal campo di densità. Il punto di partenza nella costruzione di tale schema è dato da una sfera di raggio R posta al livello zero. Ad ogni livello m , un numero η di sotto-sfere viene posto casualmente all'interno della corrispondente sfera di livello m . La costruzione viene eseguita assegnando alle sfere di livello $(m + 1)$ un raggio di valore R/λ , dove $\lambda > 1$ corrisponde al rapporto tra le dimensioni delle sfere e delle relative sottosfere.

Questo processo viene ripetuto per L successivi livelli, portando alla formazione nel livello L di η^L sfere di raggio R/λ^L . Al centro di ognuna delle sfere generate è localizzato un punto, il che comporta la creazione di un campione formato da η^L punti. Infine, per produrre un modello il più realistico possibile, vengono sovrapposti l'uno all'altro diversi modelli di Soneira-Peebles.

L'auto-similarità di questo genere di distribuzioni è chiaramente osservabile attraverso la legge di potenza della relativa *funzione di correlazione a due punti*²⁴, che, per M dimensioni, è data da

$$\xi(r) \sim r^{-\gamma} \quad \text{con} \quad \gamma = M - \left(\frac{\log \eta}{\log \lambda} \right), \quad \frac{R}{\lambda^{L-1}} < r < R \quad (34)$$

dove i parametri η e λ devono essere aggiustati per fornire il valore desiderato della pendenza γ della funzione di correlazione.

La condizione di auto-similarità implica che la *funzione di probabilità della densità* (PDF, Probability Density Function) corrispondente al campo di densità $\rho(\mathbf{x})$ all'interno della sfera di livello n di raggio R/λ^n sia uguale alla PDF associata al cerchio di riferimento di raggio R , dopo che il primo campo di densità $\rho(\mathbf{x})$ sia stato scalato di un fattore λ^{Mn} .

In realtà, deve essere incluso un ulteriore fattore λ^{Mn} per normalizzare la PDF, il che

²³Con frattale si intende una struttura che si ripete nella sua forma allo stesso modo su scale diverse; dunque ingrandendo una qualunque sua parte si ottiene una figura simile all'originale.

²⁴Le funzioni di correlazione, in ambito astronomico, descrivono la distribuzione di galassie nell'Universo. In particolare, la funzione di correlazione a due punti (the two-point correlation function) è una funzione ad una variabile, la distanza, che descrive la probabilità di trovare due galassie separate da questa distanza. Può essere pensata come un fattore di ammassamento: più grande è il suo valore per una certa distanza, più l'Universo risulterà ammassato a tale distanza.

porta ad un incremento totale di un fattore λ^{2Mn} .

Si noti che il concetto di auto-similarità deriva direttamente dal carattere a legge di potenza delle PDFs a diversi livelli e porta ad avere delle distribuzioni che appaiono essere le stesse a diversi gradi di risoluzione, ammesso che venga il tutto scalato opportunamente. In tutto ciò, la particolarità del DTFE consiste nel fatto che sia l'unico metodo attualmente sviluppato a mostrare una corrispondenza perfetta con la legge di potenza su più scale. Inoltre, rispetto agli altri metodi, il DTFE risulta essere anche quello che copre un range di densità considerevolmente maggiore. Ciò dimostra la grande abilità del DTFE di trattare la distribuzione gerarchica dei campi di densità (in Figura 12 è possibile notare la qualità del DTFE rispetto ad altri metodi).

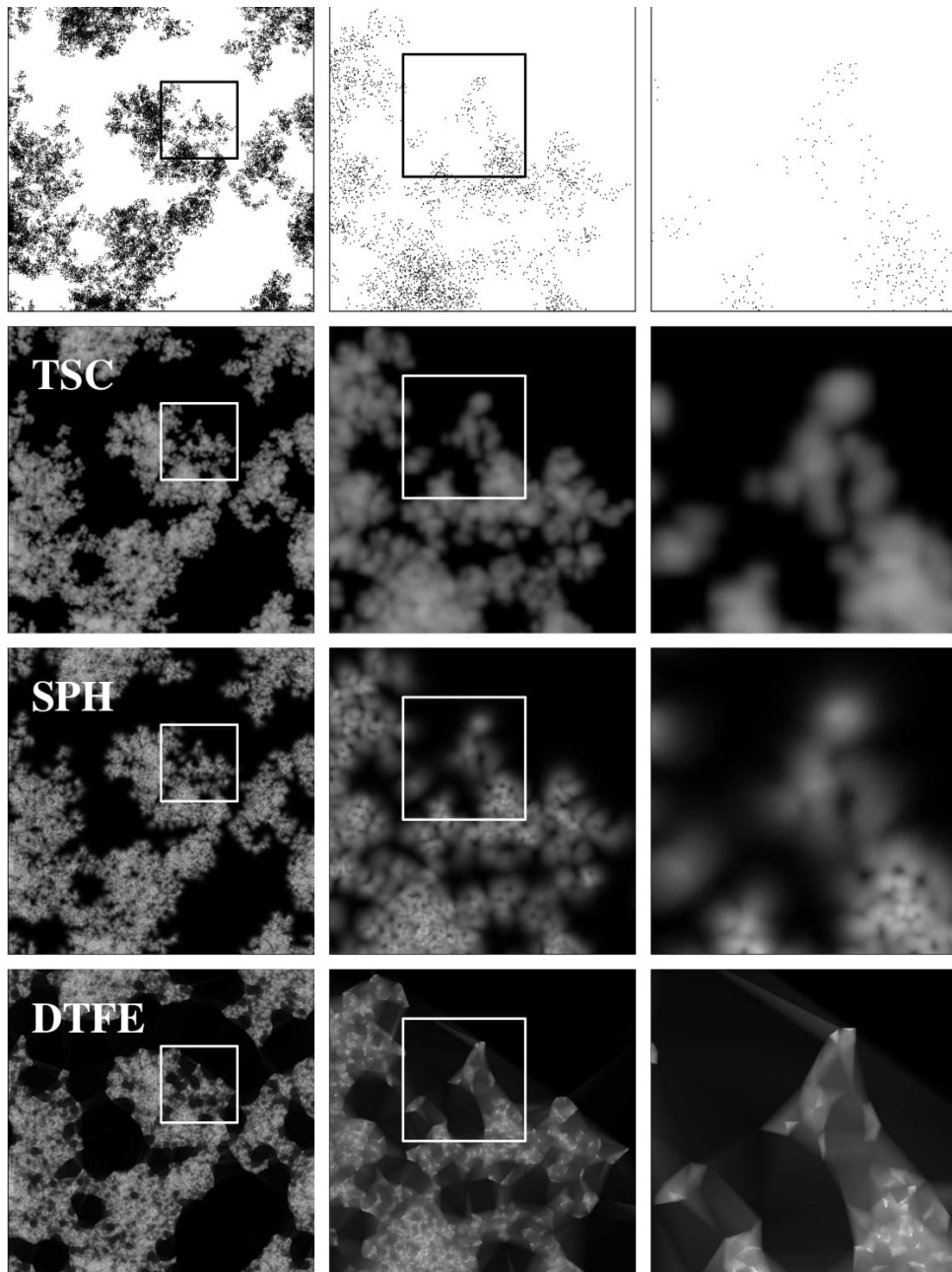


Figura 12: Campi di densità ricostruiti dai metodi TSC, SPH, DTFE

7.2 La morfologia delle strutture

L'abilità del DTFE nel tracciare la molteplicità delle strutture della Rete Cosmica è determinata da una classe di modelli euristici utilizzati per descrivere la natura cellulare della distribuzione di materia, *i modelli di ammassamento di Voronoi* (Voronoi Clustering Models) [2]. Questo genere di modelli si basa sull'applicazione della tassellazione di Voronoi quale scheletro della distribuzione di galassie nel cosmo, identificando le strutture attorno a cui la materia tenderà gradualmente a condensare durante la propria evoluzione.

Ricordando l'analogia espressa nel paragrafo 3.5 (*I vantaggi delle tassellazioni*), gli elementi strutturali della Rete Cosmica vengono associati a quelli costitutivi della tassellazione di Voronoi, ottenendo che i vuoti coincidono con le celle di Voronoi, i muri di galassie con i muri di Voronoi, i filamenti con gli spigoli di Voronoi ed infine gli ammassi con i vertici [4].

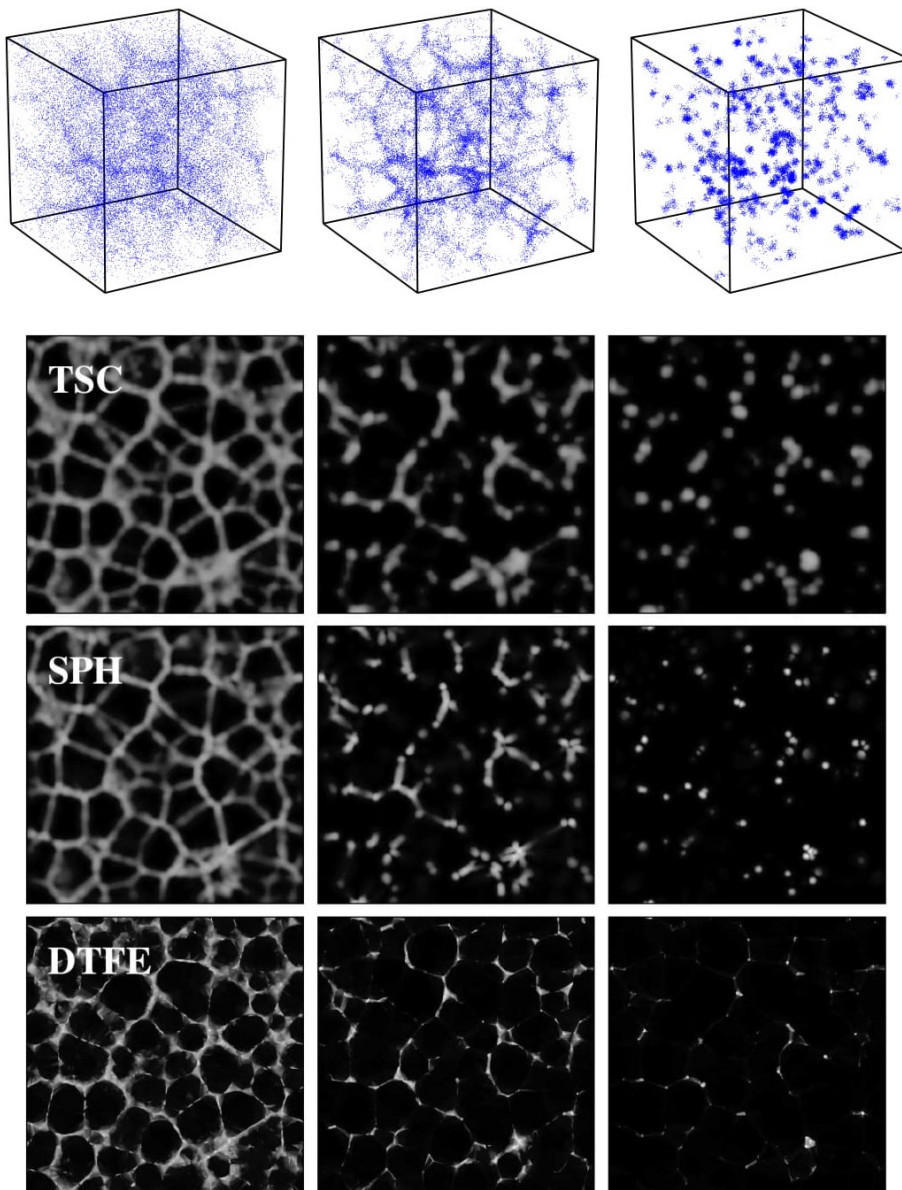


Figura 13: Campi di densità ricostruiti di tre modelli di elementi di Voronoi

I modelli di ammassamento di Voronoi offrono un'indagine accurata e flessibile degli schemi cellulari propri delle distribuzioni di galassie e sono facilmente regolabili per lo studio di un particolare tipo di struttura. A tal proposito è necessario distinguere tra due diversi approcci, tra loro complementari [4]:

- *I modelli di elementi di Voronoi* (Voronoi Element Models).
- *I modelli di evoluzione di Voronoi* (Voronoi Evolution Models).

Entrambi i modelli citati si ottengono proiettando una distribuzione inizialmente casuale di galassie N nelle strutture morfologiche della tassellazione di Voronoi definita da m nuclei. La differenza principale sta nel fatto che il primo tipo lo fa attraverso un insieme di proiezioni specificate dall'utente, mentre il secondo lo realizza tramite un graduale moto delle galassie dalla loro posizione iniziale all'interno della cella di Voronoi verso la direzione radialmente opposta al nucleo della suddetta cella [4].

In particolare, i modelli di elementi di Voronoi sono particolarmente adatti a studiare le proprietà delle distribuzioni spaziali di galassie confinate in uno specifico elemento strutturale della Rete Cosmica. Si osserva dunque che la ricostruzione di *modelli di ammassi di Voronoi* (Voronoi Cluster Models) tramite il DTFE riesce ad identificare quasi tutti gli ammassi campionati, nonostante alcuni artifici indotti dalla tecnica stessa del DTFE si propaghino nell'elaborazione degli ammassi più densi generando attorno ad essi delle regioni a bassa densità di materia simili a delle ali triangolari (in Figura 13 si può osservare come la ricostruzione tramite il DTFE dei modelli di elementi di Voronoi sia migliore rispetto agli altri metodi).

Ma il vero banco di prova per stabilire l'abilità del DTFE di tracciare la complessa morfologia di un campo di densità tridimensionale è fornito dai *modelli di filamenti di Voronoi* (Voronoi Filament Models). Osservando i risultati ottenuti si nota come le ricostruzioni operate dal DTFE rappresentino la miglior riproduzione del complesso carattere filamentoso della Rete Cosmica, riuscendo a tracciare i dettagli più sottili della distribuzione di galassie che gli altri metodi non riescono ad identificare. La struttura evidenziata dal campo di densità del DTFE presenta un aspetto più intricato, anche in qualche modo più tenue, grazie ad una ricchezza legata al contrasto ed al dettaglio strutturale.

In ultima analisi, è notevole osservare come il DTFE si comporti relativamente alla forma delle strutture analizzate. In figura 14 è descritta la capacità misurativa dell'anisotropia per vari modelli di Voronoi tramite la rappresentazione del rapporto tra gli assi²⁵ relativi al tensore di inerzia di una serie di sfere concentriche centrate in una determinata struttura in funzione del raggio R della sfera stessa.

Si nota che per quanto riguarda i modelli di ammassi di Voronoi, tutte le tecniche forniscono delle ricostruzioni in accordo con la distribuzione delle galassie osservate. Passando invece ai modelli di Voronoi di muri e di filamenti, si può osservare come la forma delle singole strutture diventi più pronunciata con l'aumento del valore del raggio R . Questa tendenza di crescita uniforme del rapporto degli assi $a1/a3$ in funzione del raggio R è un riflesso della larghezza intrinseca dei muri e dei filamenti: per piccoli raggi la distribuzione di massa attorno al centro di una di queste strutture è confinata all'interno del muro o del filamento di riferimento e quindi presenta un carattere strettamente isotropico. All'aumentare del valore del raggio R , la forma delle strutture diventa invece analizzabile,

²⁵Il rapporto tra gli assi è dato da $a1/a3$, dove $a1$ coincide con l'asse più lungo e $a3$ con quello più corto.

rivelandosi in modo via via più accurato in funzione di R .

Il risultato di tale tipo di analisi mostra come il DTFE sia l'unico metodo ad essere sorprendentemente in accordo con la distribuzione di materia osservata su tutto il range di raggi R , essendo capace di descrivere accuratamente la forma di muri, filamenti ed ammassi.

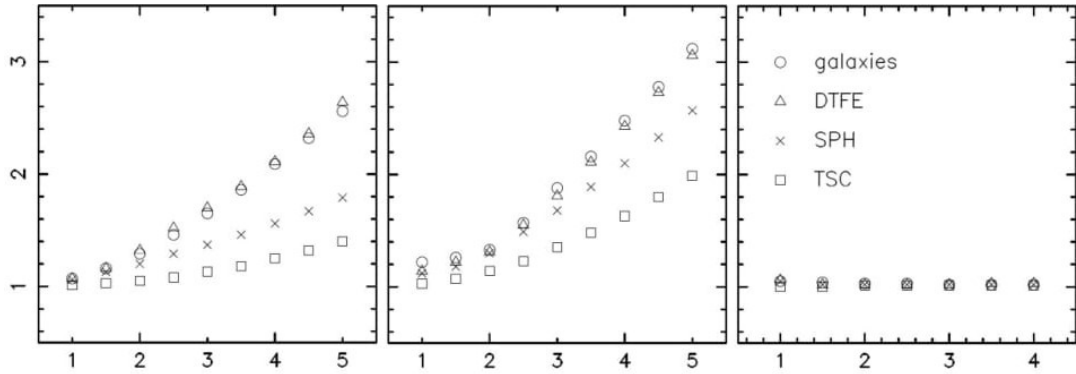


Figura 14: Misura dell'anisotropia dei modelli di Voronoi

7.3 I modelli cinematici di Voronoi

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la seconda classe dei modelli di ammassamento di Voronoi è data dai modelli di evoluzione di Voronoi. Essi forniscono una distribuzione di galassie che riflette realisticamente gli scenari di formazione di strutture cosmiche e sono basati sulla nozione che i vuoti occupano un ruolo fondamentale nello sviluppo degli elementi della Rete Cosmica [2].

All'interno di questa classe, i modelli più rappresentativi ed utilizzati sono i *modelli cinematici di Voronoi* (Voronoi Kinematic Models). Questi ultimi costituiscono il limite asintotico per cui il processo di formazione gerarchico delle strutture gravitazionali sia dettato dall'espansione di una popolazione di vuoti caratterizzati da un'unica dimensione d ad un tempo cosmico t a partire da delle iniziali perturbazioni del campo di densità primordiale.

Ciò si traduce in uno schema per lo spostamento delle galassie nella Rete Cosmica da una posizione inizialmente casuale. Si ha che, all'interno di un vuoto, la distanza media tra le galassie cresce uniformemente nel tempo accompagnata dall'espansione stessa del vuoto. Quando una galassia cerca di entrare in una cella di Voronoi adiacente, essa perde la propria componente della velocità perpendicolare al muro della cella in questione. Di conseguenza, la galassia continua il suo moto all'interno del muro, finché non cerca di entrare nella cella successiva: a questo punto perde la componente della propria velocità diretta verso tale cella e continua a muoversi lungo il filamento. Infine, il moto della galassia termina quando essa si ferma in un nodo, dopo aver provato ad entrare nell'ultimo vuoto adiacente [2].

Il risultato di questo processo nasce quindi da una distribuzione casuale e la sua evoluzione è accompagnata da un graduale mutamento nella natura topologica della distribuzione. Il campo di densità tende infatti ad evolvere in una distribuzione dominata prima da muri,

poi da filamenti ed per ultimo da ammassi. Alla fine tutta la materia risulterà concentrata nei nodi della Rete Cosmica [2].

Si noti che la determinazione della *traiettoria di Voronoi*²⁶ per ogni galassia n porta al calcolo diretto della posizione di una qualsiasi galassia ad ogni epoca cosmica t , se si conosce lo spostamento \mathbf{x}_n che la galassia ha compiuto lungo il suo cammino. È quindi possibile determinare la distribuzione di massa relativa ad ogni epoca cosmica t .

La possibilità di studiare la dinamica del processo di formazione degli elementi della Rete Cosmica deriva dal fatto, già citato nel paragrafo 5.5 (*Fase di post-elaborazione*), che il DTFE permette di analizzare contemporaneamente i campi di densità e di velocità corrispondenti ad una determinata popolazione di galassie, ammesso che la regione sia priva di flussi multipli.

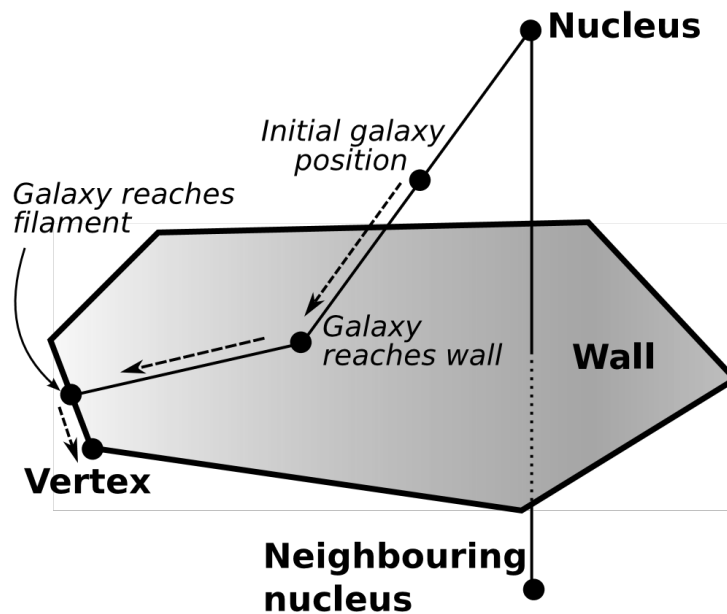


Figura 15: Illustrazione del modello cinematico di Voronoi [2]

7.4 Evoluzione dei campi di densità e di velocità

Analizzando meglio la dinamica appena introdotta, si osserva che la procedura attuata dal DTFE riesce a trattare i vuoti come delle regioni poco dense, al cui interno si possono distinguere una serie di vuoti più piccoli separati gli uni dagli altri da strutture planari o filamentose di bassa densità. Tale carattere gerarchico rispecchia le attuali teorie sull'evoluzione dei vuoti, per cui i grandi vuoti si formano dalla fusione di quelli più piccoli situati al loro interno.

Il campo di velocità vicino ad un vuoto è dominato dal flusso di materia uscente da esso e culmina nella velocità di espansione del vuoto stesso nei pressi del suo contorno esterno. Poiché le regioni meno dense del cosmo tendono ad espandersi più velocemente delle altre, gli strati interni di un vuoto, essendo i primi a liberarsi dalla materia al loro interno, saranno caratterizzati da una velocità di espansione maggiore rispetto agli strati più esterni. Ciò genera una sovrapposizione di strati di varia densità lungo il confine esterno del vuoto

²⁶Determinare la traiettoria di Voronoi di una galassia consiste nel calcolare il suo moto all'interno del modello cinematico di Voronoi.

e conseguentemente un contorno decisamente marcato.

Si osserva quindi che la velocità di espansione di un vuoto è maggiore rispetto a quella del resto delle strutture cosmiche, con una divergenza di velocità netta data da

$$\theta = \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{H} = 3(\alpha - 1) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{H_{vuoto}}{H} \quad (35)$$

dove α è il rapporto tra il tasso di super espansione di Hubble del vuoto ed il tasso di espansione dell'Universo. Il valore massimo di α si ha ovviamente per vuoti completamente privi di materia, mentre per un Universo dominato dalla materia senza costante cosmologica, il massimo valore di θ raggiungibile per un vuoto è

$$\theta_{max} = 1.5\Omega_m^{0.6} \quad (36)$$

dove Ω_m è il parametro cosmologico di densità di massa.

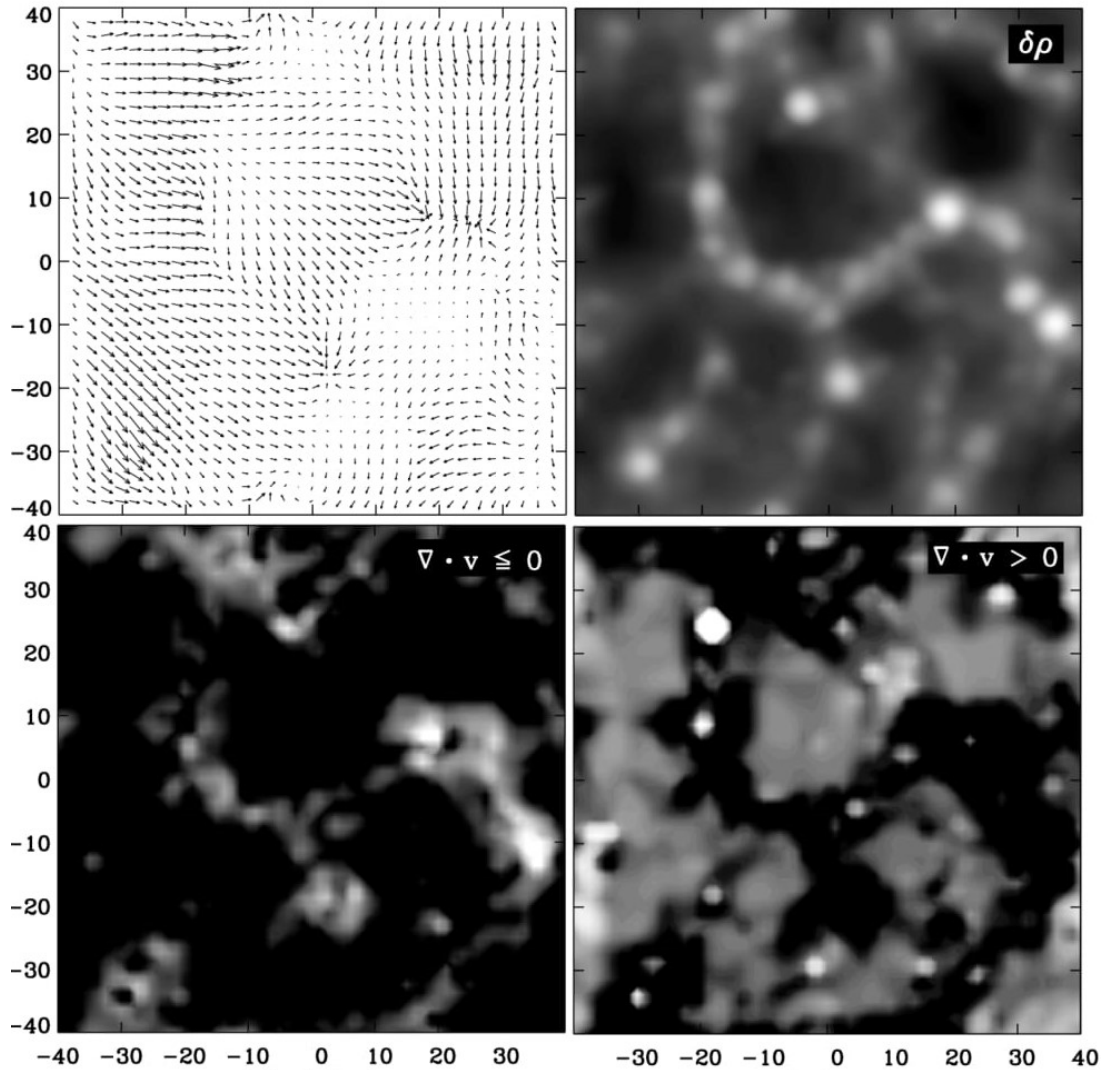


Figura 16: Campo di velocità, di densità e divergenza della velocità

Il campo di velocità vicino ad un vuoto è quindi strettamente collegato con la distribuzione di materia. Tale legame è espresso tramite la relazione tra il campo di densità $\delta(\mathbf{x})$

e la divergenza della velocità: le regioni con divergenza negativa tendono a contrarsi e si identificano con le strutture massive della Rete Cosmica come i filamenti o gli ammassi. Invece, le zone con divergenza positiva sono caratterizzate da un tasso di espansione e coincidono con i vuoti, occupando la frazione maggiore del volume cosmico.

La relazione tra il campo di densità e la divergenza della velocità è una diretta manifestazione dell'equazione di continuità e, in un regime lineare, è data da

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{H} = -a(t) f(\Omega_m, \Omega_\Lambda) \delta(\mathbf{x}, t) \quad (37)$$

collegando i campi di densità e di velocità attraverso il fattore $f(\Omega_m)$. Questa relazione lineare spiega il fatto per cui la mappa della divergenza della velocità sia l'immagine perfettamente negativa della mappa della densità, come mostrato in figura 16.

In un regime quasi-lineare o moderatamente non-lineare tale relazione rimane valida, pur coinvolgendo dei termini di ordine maggiore. In particolare, esistono due approssimazioni del secondo ordine che legano la divergenza con la perturbazione della densità:

$$\frac{1}{H} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{2} f(\Omega_m) [1 - (1 + \delta(\mathbf{x}))^{2/3}] & \text{formula di Bernardeau [7]} \\ -f(\Omega_m) \frac{\delta(\mathbf{x})}{1 + 0.18\delta(\mathbf{x})} & \text{formula di Nusser [8]} \end{cases} \quad (38)$$

entrambe formulate per un Universo con parametro di Hubble $H(t)$ e parametro di densità della materia Ω_m .

Si noti che la funzione di distribuzione di probabilità (pdf, Probability Distribution Function) della divergenza della velocità è fortemente sensibile al parametro cosmologico di densità della materia Ω_m . Esso non solo influenza la forma complessiva della pdf, ma cambia anche sia la posizione del picco θ_{max} che quella del punto di caduta della coda della distribuzione. È dunque possibile determinare il parametro Ω_m studiando le caratteristiche delle pdfs associate alla velocità di espansione dei vuoti più distanti.

8 Estensioni ed applicazioni

Si è visto nei capitoli precedenti come la procedura insita nel DTFE porti alla costruzione di campi di densità e di velocità ottimali nel definire una rappresentazione continua dei dati, pur conservando tutte le informazioni relative ai singoli punti del campione iniziale. Nonostante la determinazione del campo di densità sia uno degli obiettivi primari del DTFE, la sua abilità sta nell'estendere i pregi delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay, su cui si basa il suo processo di interpolazione spaziale, a tutte le quantità fisiche alle quali viene collegato.

Il vero potenziale di questo metodo consiste quindi nelle successive tecniche costruite a partire dalla tassellazione adattiva del DTFE, delle quali ora esprimeremo delle brevi descrizioni.

8.1 Multiscale Morphology Filter

La maggiore applicazione del DTFE riguarda il suo potenziale nel rivelare le strutture morfologiche della Rete Cosmica ed un esempio è dato dal *Multiscale Morphology Filter* (MMF). Questo metodo è utilizzato appunto per identificare e caratterizzare differenti elementi morfologici della distribuzione di materia su grande scala [3].

Esso si basa sull'analisi multiscala dell'hessiana associata al campo di densità di una distribuzione di galassie: tenendo conto della natura gerarchica della distribuzione di materia, il MMF isola le strutture appartenenti ad un determinato genere in un modo indipendente dalla loro scala di riferimento [3].

I dati vengono filtrati per produrre una mappa a diverse risoluzioni ed in ogni punto viene individuato il parametro dominante che presenta il valore più alto per determinarne ivi la natura morfologica. Questo processo di selezione in scala prende dunque il nome di Multiscale Morphology Filter [3].

Analizzando più nel dettaglio, affinché il metodo riesca ad identificare strutture anisotrope come filamenti e muri, è necessario l'utilizzo di un campo di densità continuo, che conservi tutte le caratteristiche dei singoli punti e che sia morfologicamente obiettivo. È naturale allora ricorrere al DTFE quale strumento di traduzione di una distribuzione discreta di galassie in un campo di densità continuo f_{DTFE} [3].

Determinato tale campo, esso viene filtrato per mezzo di una serie gerarchica di filtri gaussiani simmetricamente sferici aventi larghezze diverse:

$$f_S(\vec{x}) = \int f_{DTFE}(\vec{y}) W_G(\vec{y}, \vec{x}) d\vec{y} \quad (39)$$

dove W_G è un filtro gaussiano di larghezza R :

$$W_G(\vec{y}, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi R^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\vec{y} - \vec{x}|^2}{2R^2}\right). \quad (40)$$

L'utilizzo del filtro seleziona le strutture, limitando la distribuzione solamente a quelle caratterizzate da una scala minore rispetto a quella del filtro stesso. La procedura del MMF coinvolge una serie di $N + 1$ livelli: la scala di base R_0 è assunta essere uguale alla dimensione dei pixel del campo di densità costruito dal DTFE, mentre i raggi R_n degli altri livelli sono scelti in modo da risolvere le sottostrutture della distribuzione di materia.

Si ottiene così una famiglia di campi di densità f_n [3]:

$$\Phi = \bigcup_{n \text{ livelli}} f_n. \quad (41)$$

Un punto del campione potrà allora essere studiato su ognuna delle mappe generate, assumendo diversi vicini naturali ad ogni scala. La matrice hessiana $\nabla_{ij}f(\mathbf{x})$ del campo di densità in ogni mappatura della distribuzione di materia è data da

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_S(\vec{x}) = f_{DTFE} \otimes \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} W_G(R_S) = \int f(\vec{y}) \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j) - \delta_{ij} R_S^2}{R_S^4} W_G(\vec{y}, \vec{x}) d\vec{y} \quad (42)$$

ovvero la matrice hessiana riferita ad un livello n è rappresentata per mezzo di una convoluzione con le derivate secondo del filtro gaussiano [3].

In ogni punto del nostro campione è possibile determinare la forma assunta dal campo di densità nelle sue vicinanze calcolando gli autovalori $\lambda_a(\vec{x})$ della matrice hessiana corrispondente:

$$\left| \frac{\partial^2 f_n(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda_a(\vec{x}) \delta_{ij} \right| = 0 \quad \text{con } a = 1, 2, 3 \quad (43)$$

e disponendo gli autovalori come $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Tali autovalori descrivono quindi il comportamento del campo di densità nel punto \vec{x} e possono essere combinati per determinarne il segnale morfologico locale, con i corrispondenti autovettori che ne individuano l'orientazione [3].

In base al valore ed al segno assunti dagli autovalori, è possibile classificare una regione, a qualsiasi scala, in ammasso, filamento o muro per mezzo del seguente criterio:

- *Ammasso* $\rightarrow \lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda_3$ con $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$
- *Filamento* $\rightarrow \lambda_1 \simeq \lambda_2 \ll \lambda_3$ con $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$
- *Muro* $\rightarrow \lambda_1 \ll \lambda_2 \simeq \lambda_3$ con $\lambda_1 < 0$

Per ognuna di queste componenti cosmologiche, il MMF definisce un filtro di risposta la cui forma è dettata dal particolare tipo di struttura cercata. Il segnale morfologico in ogni punto viene allora a coincidere con l'autovalore λ_i di valore massimo lungo l'intero range di scale. Come risultato, ogni componente cosmologica viene differenziata e occupa, per costruzione, regioni mutualmente esclusive [3].

Si noti che l'abilità del MMF nell'identificare le strutture della Rete Cosmica a differenti scale può essere dedotta dalla varietà di dimensione degli ammassi. Per quanto riguarda invece gli artifici associati, sorgono delle perplessità riguardo la scelta di adottare filtri a simmetria sferica e di raggio non in sintonia con le fluttuazioni della materia, bensì rigido e dipendente dall'utente [3].

Infine, è lecito chiedersi se non sia meglio basare l'analisi del MMF sull'hessiana associata al campo gravitazionale piuttosto che su quella del campo densità, noto il fondamentale ruolo che ricopre il campo di forze mareali sulla formazione della Rete Cosmica [3].

8.2 Watershed Void Finder

Sappiamo che i vuoti sono delle enormi regioni di forma più o meno sferica caratterizzate da una bassa densità di materia e circondate da filamenti, muri ed ammassi. Il fatto che

siano quasi privi di galassie al loro intorno significa che il campo di densità occupa un ruolo chiave nel determinare che cosa sia un vuoto e quali siano i suoi confini, posto che non esiste una definizione univoca per questo tipo di strutture morfologiche [3].

Esistono una moltitudine di procedure per individuare i vuoti, solitamente attraverso la costruzione di celle cubiche o sferiche; tuttavia, la maggior parte di esse si basa su un principale algoritmo, denominato *Voidfinder Algorithm*. Quest'ultimo costituisce un approccio di grande successo, nonostante non riesca ad analizzare configurazioni spaziali complesse dove i vuoti assumono forme arbitrarie e contengono una varietà di sottostrutture [3].

Il *Watershed Void Finder* (WVF) è un algoritmo che si basa sul campo di densità costruito dal DTFE per sezionare in modo autoconsistente il carattere multiscala proprio della rete di vuoti, cercando di marcare i confini. Il WVF trae ispirazione dal *Watershed Transform*, un metodo comunemente utilizzato nell'analisi delle immagini, in particolare in geofisica. L'idea di base consiste, in quel caso, nel riempire con un livello crescente d'acqua una certa superficie, al fine di delinearne i confini di separazione tra i vari domini (i.e. i bacini in cui si raccoglie l'acqua), essendo la superficie forata in corrispondenza delle posizioni dei minimi. Seguendo tale procedura si ottiene che i bacini si incontreranno nelle creste coincidenti con i punti di sella del campo di densità [3].

Analogamente, in ambito cosmologico si ha che la superficie da allagare è fornita dal campo di densità e la struttura matematica da utilizzare per l'analisi topologica di questo genere di superficie è fornita dalla teoria di Morse²⁷. Si noti che una funzione di Morse permette di trattare i punti critici come non degeneri, associando ad essi valori diversi [3]. Ad ogni punto singolare, che sia di minimo, di massimo o di sella, corrisponde una linea integrale $\vec{s}(x)$ nel campo di densità che ne indica la pendenza:

$$\vec{s}(x) = \nabla f(x). \quad (44)$$

Ciò crea una segmentazione dello spazio, che coinvolge regioni collegate con i minimi, regioni collegate con i massimi o regioni che connettono un massimo ad un particolare minimo tramite l'integrale di linea. Si esprime con *watersheds* (letteralmente spartiacque) le linee integrali che definiscono il confine tra due bacini adiacenti, mentre con *watershed lines* (linee spartiacque) l'insieme delle linee integrali che collegano i punti di sella con i punti di massimo e di minimo [3].

Come risultato si ottiene dunque una segmentazione dell'immagine in regioni d'influenza, definite da un minimo y e da tutti i punti x la cui distanza topografica²⁸ $\mathcal{T}(x, y)$ da qualsiasi minimo nel campo di densità $f(x)$ è minima, ovvero

$$\mathcal{T}(x, y) = \inf \int_{\Gamma} |\nabla(\gamma(s))| ds. \quad (45)$$

L'integrale individua quindi la lunghezza minima del cammino tra tutti quelli possibili all'interno dell'insieme Γ [3].

Per fare chiarezza, si può osservare come, relativamente alla distribuzione di materia

²⁷La teoria di Morse permette di dedurre la topologia di varietà differenziabili (o lisce) attraverso lo studio di opportune funzioni a valori reali definite su di essa, che prenderanno il nome di funzioni di Morse.

²⁸Per distanza topografica si intende la distanza tra due punti A e B appartenenti ad una superficie curva, data dalla lunghezza del segmento minimo che congiunge le proiezioni dei due punti sulla superficie di riferimento.

nella Rete Cosmica, i bacini rappresentino i vuoti ed i loro confini identifichino la rete di filamenti, muri ed ammassi. È evidente come il WVF si concentri specificamente nell'individuazione dei bacini (i.e. dei vuoti), mostrando notevoli vantaggi rispetto agli altri metodi [3]:

- Per un campo di densità ideale, cioè senza rumore associato, il WVF riesce ad identificare i vuoti in un modo libero dai parametri: non devono essere quindi introdotti dei valori predefiniti.
- Il WVF opera direttamente sulla topologia del campo in questione, senza fare riferimento ad una particolare geometria di base: di conseguenza i vuoti possono assumere qualsiasi tipo di forma.
- Il WVF pone in modo naturale le linee di divisione tra bacini adiacenti sulla relativa cresta del campo di densità.
- Il WVF produce intrinsecamente dei contorni chiusi: fintantoché i minimi siano scelti in modo appropriato, il metodo non sarà sensibile ad eventuali sporgenze locali tra due vuoti adiacenti.

Dal momento che tutte le immagini scientifiche sono caratterizzate da una natura discreta che induce complicazioni nell'identificare i punti di sella e nell'esprimere accuratamente le linee integrali, è necessario e fondamentale ricorrere al DTFE per definire il campo di densità continuo su cui successivamente lavorare [3].

8.3 SpineWeb Method

Lo *SpineWeb Method* è un metodo basato sulla segmentazione di un campo di densità imposta dal WVF e si presenta come uno strumento utilizzabile per identificare le strutture della Rete Cosmica, in particolare i vuoti, i filamenti ed i muri. Esso si rivolge quindi alle strutture topologiche del campo di densità, definito dalle sue singolarità, ovvero dai punti di massimo, di minimo e di sella, e dalle loro reciproche connessioni [3] (a tal proposito, si veda il paragrafo precedente, *Watershed Void Finder*).

Tale metodo sfrutta le proprietà locali di adiacenza delle regioni di confine dei bacini introdotti dal WVF per tracciare i punti critici del campo di densità e le linee separatrici da essi definite. Queste ultime vengono classificate in muri ed in *spine* (letteralmente colonna vertebrale), inteso come lo scheletro della distribuzione di materia formato dalla rete di filamenti ed ammassi [3].

Da un punto di vista teorico, il formalismo introdotto dallo SpineWeb è strettamente collegato con la teoria di Morse e si basa sui seguenti aspetti che caratterizzano le strutture topologiche della Rete Cosmica [5]:

- La Rete Cosmica consiste in un sistema interconnesso di muri, filamenti ed ammassi. Studiando la distribuzione di massa a diverse scale risolutive, si possono osservare i collegamenti tra strutture che altrimenti sembrerebbero isolate.
- I muri definiscono i confine tra vuoti adiacenti.
- I filamenti corrono tra gli ammassi e attraverso le intersezioni dei muri, i quali occupano lo spazio tra filamenti adiacenti.

La procedura dello SpineWeb fornisce un'implementazione del codice del WVF: essa comincia identificando tutti i minimi del campo di densità e prosegue tracciando iterativamente i cammini di gradiente massimo fino a quando essi non convergono ai rispettivi punti di minimo locale [3]. Si ottiene così la tipica segmentazione del campo di densità in regioni poco dense e localmente interconnesse, propria del WVF. Successivamente, in un secondo passaggio, vengono identificati i punti localizzati nelle zone di confine tra due o più bacini tramite l'utilizzo di un *algoritmo di immersione locale* (Local Immersion Algorithm); quindi tale sottoinsieme di punti viene differenziato in base al valore della densità ivi assunto [3].

Il vantaggio nell'usufruire di un processo diviso in due macro passaggi consiste nel fatto che non vengono differenziati tutti i punti appartenenti al campo, bensì solo quelli appartenenti ai bordi dei bacini. Ad ognuno di questi ultimi, infine, viene assegnato un carattere morfologico quale vuoto, muro o filamento, in base alla natura locale dei punti ad esso vicini. Tale assegnazione segue un criterio basato sul numero di vuoti (i.e. bacini) \mathcal{N}_{vuoti} adiacenti al particolare punto [5]:

$$\mathcal{N}_{vuoti} \begin{cases} = 1 \longrightarrow & vuoto \\ = 2 \longrightarrow & muro \\ \geq 2 \longrightarrow & filamento \end{cases} \quad (46)$$

È importante notare come questo criterio di identificazione si basi esclusivamente sulla topologia del campo di densità. Analizzando i risultati ottenuti, si osserva che il far coincidere i muri con le regioni caratterizzate dall'aver due vuoti adiacenti è banale: essi rappresentano le membrane su cui si raccoglie la materia espulsa dai vuoti circostanti. L'identificazione dei filamenti invece dipende dalla risoluzione della struttura cellulare, venendo tracciati con successo quando collegati a vuoti aventi confini ben definiti [3].

Un aspetto notevole dello SpineWeb Method consiste nel fatto che esso opera liberamente dal tipo di scala, a partire da una ricostruzione continua del campo di densità ottenuta attraverso l'utilizzo del DTFE. Per questo motivo lo SpineWeb fornisce un preziosissimo strumento per studiare la natura gerarchica delle strutture [3].

8.4 Alpha Shapes

Facendo ancora una volta riferimento a quanto riportato da van de Weygaert & Schaap in *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, vediamo che il metodo delle *alpha shapes* fornisce una descrizione della forma assunta da un insieme discreto di punti. Esse costituiscono una generalizzazione del concetto di involucro convesso di un campione di punti, nozione legata all'interpolazione dei vicini naturali e conseguentemente alle tassellazioni di Voronoi e Delaunay (vedasi paragrafo 4.1, *L'interpolazione dei vicini naturali*), e rappresentano degli oggetti geometrici concreti unicamente determinati dal particolare insieme di punti. Preso un insieme S e determinata la corrispondente tassellazione di Delaunay, è possibile identificare direttamente tutti i semplici di Delaunay della triangolazione. Allora, per un valore non negativo di α , il *complesso di alpha* (Alpha Complex) dell'insieme è dato da tutti i semplici aventi una sfera circoscritta ad essi vuota e di raggio al quadrato minore o uguale ad α , ovvero $R^2 \leq \alpha$. Si noti che per vuota si intende che la sfera non comprenda al suo interno altri punti di S [4].

È importante osservare che nel caso in cui $\alpha = 0$, il complesso di alpha si riduce ai vertici

dell'insieme di punti. Inoltre, l'insieme definisce anche, in base alle sue proprietà distributive, un valore massimo α_{max} , tale per cui per $\alpha \geq \alpha_{max}$ l'alpha shape coincida con l'involuppo convesso del campione.

Si definisce *alpha shape* l'insieme di tutti i semplici del complesso di alpha e coincide con un politopo in senso generale, ossia può essere concavo e addirittura disconnesso. Nonostante essa sia definita per tutti gli $0 \leq \alpha < \infty$, esiste solo un numero finito di alpha shapes per un dato insieme di punti [4].

Partendo dall'involuppo convesso e diminuendo gradualmente il valore di α , la forma del campione si contrae e inizia a sviluppare delle cavità, le quali possono unirsi per formare gallerie e vuoti. Infine, per valori di α abbastanza piccoli, l'alpha shape risulta vuota.

Una descrizione quantitativa della topologia viene eseguita ricorrendo all'utilizzo dei *numeri di Betti* (Betti Numbers) β_k che possono essere dedotti direttamente dall'alpha shape. Il primo numero di Betti, β_0 , definisce il numero di componenti indipendenti di un oggetto; β_1 è associato al numero di gallerie indipendenti, mentre β_2 al numero di vuoti indipendenti [4].

Il metodo delle alpha shapes fornisce quindi un interessante strumento per analizzare la topologia di una distribuzione di galassie: essendo intimamente collegato con essa, permette di abbandonare l'utilizzo di filtri definiti dall'utente.

9 Conclusioni e considerazioni

Questa tesi ha voluto approfondire il concetto di tassellazioni di Voronoi e Delaunay, studiandone l'applicazione in ambito cosmologico.

Basandosi sul lavoro di Rien van de Weygaert e Willem Schaap, *The Cosmic Web: Geometric Analysis*, si è osservato come la distribuzione di materia, su scale macroscopiche, tenda a formare una struttura filamentosa denominata Rete Cosmica. Tale schema consiste in una composizione di strutture e sottostrutture interconnesse tra loro, suddivise in muri, filamenti ed ammassi di galassie a circondare enormi regioni vuote.

Si è poi passato a definire la nozione di tassellazione e le relative proprietà. Grazie ad esse, si è potuto costruire un formidabile strumento, il DTFE, che ci ha permesso di determinare i campi continui associati ad un insieme discreto di punti.

Tali campi sono infine stati sfruttati in diversi modi, per esempio per tracciare la distribuzione gerarchica della materia, o ancora per riprodurre la forma delle strutture anisotrope della Rete Cosmica.

Infine, sono state presentate brevemente alcune estensioni e applicazioni di questo genere di metodologia, per sottolinearne la duttilità e l'importanza in ambito cosmologico.

Si può perciò concludere, dopo tutte le considerazioni fatte, che il DTFE, e conseguentemente l'applicazione generale delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay, costituisce lo strumento attualmente più efficace per studiare la distribuzione della materia nell'Universo macroscopico, nonché la dinamica dei processi di formazione delle strutture cosmiche.

Riferimenti bibliografici

- [Rien van de Weygaert & Willem Schaap, 2004] The Cosmic Web: Geometric Analysis
- [Rien van de Weygaert, 2007] Voronoi Tessellations and the Cosmic Web: Spatial Patterns and Clustering across the Universe
- [Rien van de Weygaert, Bernard J.T. Jones, Erwin Platen & Miguel A. Aragon-Calvo, 2009] Geometry and Morphology of the Cosmic Web: Analyzing Spatial Patterns in the Universe
- [Rien van de Weygaert, Erwin Platen, Gert Vegter, Bob Eldering & Nico Kruithof, 2010] Alpha Shape Topology of the Cosmic Web
- [Miguel A. Aragon-Calvo, Erwin Platen, Rien van de Weygaert & Alexander S. Szalay, 2009] The Spine of the Cosmic Web
- [T. Kiang, 1966] Z. Astrophys. 64, 433
- [F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga & R. Scoccimarro, 2002] Physics reports 367, 1
- [A. Nusser, A. Dekel, E. Bertschinger & G.R. Blumenthal, 1991] Astrophys. J. 379, 6
- [R.M. Soneira & P.J.E. Peebles, 1977] Astrophys. J. 211, 1