



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Corso di laurea in ingegneria dell'informazione

Tesi di laurea triennale

Analisi e controllo del modello dinamico del lanciatore a razzo Falcon 9

Candidato

Alessia Garbo

1226143

Relatrice

Prof.ssa Maria Elena Valcher

ANNO ACCADEMICO 2022/2023

16 marzo 2023

Sommario

In questa tesi ci si pone l'obiettivo di studiare ed approfondire il modello del lanciatore a razzo Falcon 9, il primo razzo orbitale riutilizzabile al mondo della nota azienda aerospaziale Space X, il cui primo volo è datato 4 giugno 2010. In questo elaborato verrà proposto un modello dinamico del sistema del razzo Falcon 9, facendo riferimento al suo moto nel piano di pitch: si otterranno dunque equazioni differenziali del secondo ordine, che si sfrutteranno per ottenere i valori necessari a mantenere una data configurazione di equilibrio. Successivamente si procederà con la linearizzazione del sistema attorno alla condizione di equilibrio appena citata, ed infine si progetterà un controllore stabilizzante che consenta di soddisfare alcune specifiche di progetto. Per tale studio, inoltre, si è fatto uso del software di programmazione e calcolo numerico MATLAB, utilizzato per ottenere grafici e diagrammi ed evidenziare i risultati ottenuti durante le varie fasi dello studio, in particolare ci si è concentrati sui diagrammi di Bode nelle varie fasi del progetto.

Indice

1	Introduzione	7
1.1	SpaceX	7
1.2	Il Falcon 9	7
1.2.1	La descrizione progettuale e le varie versioni sviluppate	7
1.2.2	Il primo successo del Falcon 9 e gli ultimi lanci registrati nel 2022	9
1.2.3	Utilizzo ad oggi e gli impegni futuri	10
2	Il modello del sistema	11
2.1	Descrizione del modello	11
2.2	La dinamica del modello in esame	12
2.2.1	Parametri	12
2.2.2	Equazioni del sistema	12
3	La linearizzazione del sistema	15
3.1	Linearizzazione attorno alla configurazione di equilibrio	15
3.2	Modello linearizzato	17
4	La funzione di trasferimento e la stabilità del sistema	19
4.1	La funzione di trasferimento	19
4.2	La stabilità del sistema	20
5	Sintesi di un controllore stabilizzante	23
5.1	Introduzione al problema di controllo	23
5.2	Il controllore stabilizzante $C_1(s)$	24
5.3	Il secondo controllore	26
5.3.1	Specifiche di progetto	26
5.3.2	Controllore per prestazioni $C_2(s)$	26
6	Conclusioni	33

Elenco delle figure

1.1	Le varie fasi dalla partenza all'atterraggio	8
1.2	Le varie versioni del razzo Falcon 9	8
1.3	La piattaforma-drone autonoma OCISLY	9
1.4	Il razzo vettore Falcon 9 durante la fase di lancio	10
2.1	Modello semplificato del lanciatore a razzo Falcon 9	11
2.2	La legge fondamentale della dinamica rotazionale	13
4.1	20
4.2	20
4.3	20
4.4	Conidzioni necessarie e sufficienti per il verificarsi di uno dei tre casi	20
5.1	Retroazione unitaria negativa	23
5.2	Schema a doppio anello di controllo	24
5.3	Luogo delle radici di $G(s)$	25
5.4	Luogo delle radici di $C_1(s)G(s)$	26
5.5	Schema a blocchi con disturbi	28
5.6	Diagramma di Bode di $G_d(s)$	29
5.7	Diagramma di Bode di $\frac{1}{s}G_c(s)$	29
5.8	Diagramma di Bode finale di $C_2(s)G_c(s)$	30
5.9	Risposta al gradino del sistema in anello chiuso	31

Elenco delle tabelle

2.1	Grandezze note	12
-----	----------------	----

Capitolo 1

Introduzione

1.1 SpaceX

La Space Exploration Technology Corporation, conosciuta comunemente come SpaceX, è un'azienda privata aerospaziale con sede negli Stati Uniti. È stata fondata da Elon Musk nel 2002, con l'obiettivo di ridurre i costi dei lanci spaziali ma anche di rendere la specie umana multiplanetaria: infatti il 16 settembre 2021 fu proprio il razzo Falcon 9 che, per la prima volta, partì con a bordo 4 civili, aprendo così di fatto l'era dello sfruttamento commerciale dello spazio [1].

Per quanto riguarda il risparmio a livello di costi invece, la rivoluzione portata avanti dall'azienda consiste nella standardizzazione delle parti, nella costruzione modulare ma soprattutto nella riutilizzabilità dei componenti. Il Falcon 9, razzo vettore analizzato in questa tesi, è di fondamentale importanza proprio per quest'ultimo aspetto: una volta arrivato in orbita, dopo il distacco fra i 2 stadi, il primo di essi è in grado di raggiungere nuovamente la terra ed atterrare su una piattaforma predisposta.

Il primo lancio riuscito di Space X risale al 2008, effettuato con il Falcon 1, che vanta il titolo di essere il primo razzo in grado di raggiungere l'orbita finanziato completamente da un'azienda privata, mentre è il Falcon Heavy che si deve prendere in considerazione se si è interessati a quello più potente in servizio.

1.2 Il Falcon 9

1.2.1 La descrizione progettuale e le varie versioni sviluppate

La famiglia dei lanciatori a razzo Falcon 9 segue l'era del Falcon 1 e successivamente del Falcon 5. Esso si compone di due stadi, il primo, progettato per essere totalmente riutilizzato, è spinto da 9 motori Merlin (per un ulteriore approfondimento si rimanda al seguente link [MerlinMotoreRazzo](#)), disposti in tre file, in modo da lasciarne uno al centro circondato dagli altri 8; il secondo stadio invece funziona tramite un solo motore. Al contrario dei razzi più comuni, che utilizzano un sistema di bulloni che esplodono per effettuare la separazione degli stadi, SpaceX fa uso di un metodo interamente pneumatico. I due stadi si collegano tramite l'interstadio, dove si trova peraltro il motore del secondo stadio. Il payload del Falcon 9 poi è costituito da un materiale composito di fibre di carbonio grazie al quale il lancio avviene dopo circa 3 minuti di volo [4]. Come già anticipato, la grande novità di questo razzo vettore riguarda l'atterraggio [Figura 1.1](#): nel momento in cui il primo stadio comincia a cadere attraverso l'atmosfera, raggiungendo una velocità di 4700 km/h, si attivano i propulsori che fanno girare il razzo in modo da portarlo in posizione verticale. Da questo momento si attiva il motore, che rallenta la caduta, le quattro gambe in fibra di carbonio presenti al primo stadio si dispiegano ed avviene la fase del *boostback burn*, dove i tre dei nove motori Merlin si accendono ancora una volta per invertire la direzione di marcia e rallentare abbastanza lo stadio affinché sopravviva al rientro in atmosfera ed effettui un atterraggio relativamente morbido. La prima fase dell'atterraggio del razzo è completamente automatizzata e molti componenti sono in grado di reagire in tempo reale quando vengono soddisfatte determinate condizioni. Si noti anche che il veicolo di lancio presenta un sistema autonomo di terminazione del volo. Inoltre, questo razzo ha tre processori dual-core x86 che gli permettono di prendere decisioni in totale sicurezza, sfruttando la ridondanza.

Il Falcon 9 è in grado di portare a termine la sua missione anche in caso di avaria di uno dei 9 motori, questa caratteristica prende il nome di *engine out*.

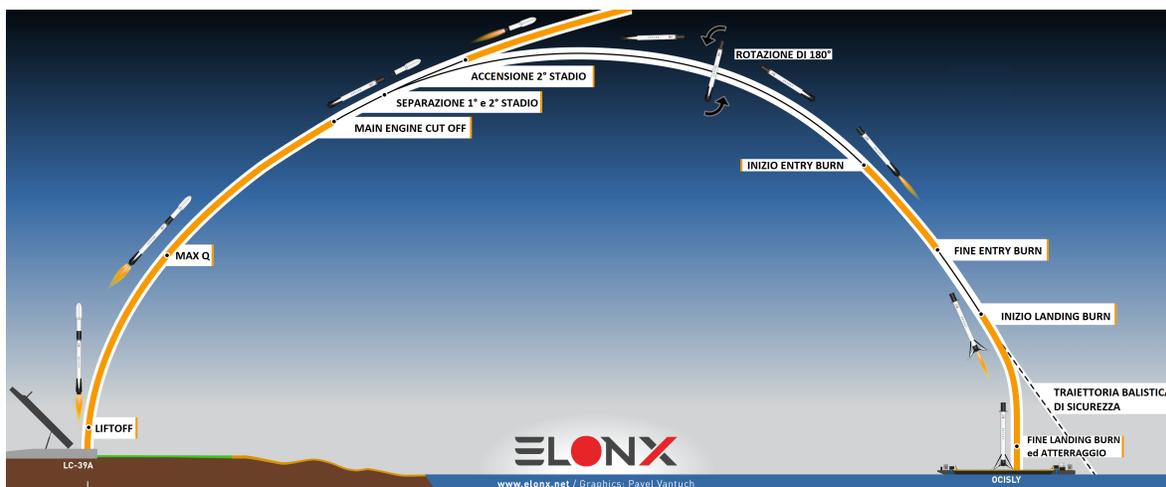


Figura 1.1: Le varie fasi dalla partenza all'atterraggio

Analizziamo adesso alcuni dati tecnici: il Falcon 9 è il primo razzo riutilizzabile di classe orbitale al mondo, raggiunge un'altezza di 70 metri ed ha un diametro di 3.7 metri, mentre una massa di 549,054 kg. Attualmente le versioni prodotte da SpaceX sono tre [Figura 1.2](#): la prima versione è la v1.0 e il suo sviluppo risale agli anni 2005-2010. L'azienda lo ritirò dal mercato già nel 2013, dopo la realizzazione di 5 missioni, e si concentrò sullo sviluppo della versione successiva, la v1.1, più alta, più pesante ed equipaggiata con nuovi motori Merlin. Essa è stata sviluppata fra il 2010 ed il 2013 ed ha svolto ben 15 missioni, di cui una rappresenta un fallimento: un'esplosione in volo. Venne ritirato nel gennaio 2016. Nel frattempo, in parallelo alle missioni spaziali portate a termine dalla versione v1.1, fra il 2014 ed il 2015 si progettò il Falcon 9 Full Thrust, conosciuto anche come Falcon 9 v1.2, che è la terza ed ultima versione esistente ad oggi. Questo fu il primo lanciatore che riuscì con successo a far atterrare il primo stadio verticalmente presso il sito di lancio dopo aver svolto la propria missione. Ad oggi il Falcon 9 conta un totale di 197 lanci, 155 atterraggi e ben 134 reflight. SpaceX propone un prezzo competitivo per il servizio di lancio del Falcon 9 che si aggira attorno ai \$67M [7].

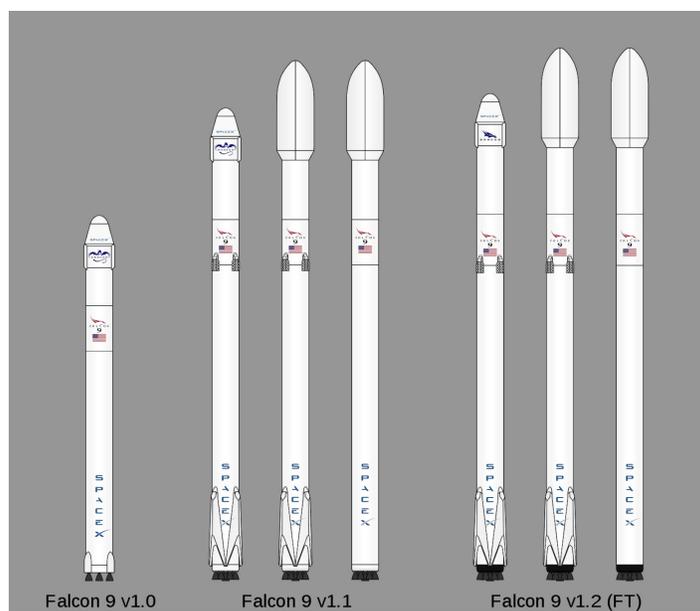


Figura 1.2: Le varie versioni del razzo Falcon 9

1.2.2 Il primo successo del Falcon 9 e gli ultimi lanci registrati nel 2022

La data che segna la prima vittoria del Falcon 9 è l'8 aprile 2016: dopo essere decollato dalla base dell'Air Force Cape Canaveral, il primo stadio del vettore riesce a rientrare sulla piattaforma-drone autonoma, guidata da un Gps, situata nel mezzo dell'oceano Atlantico a cui l'imprenditore Elon Musk dette il nome di *Of Course I Still Love You (OCISLY)* [Figura 1.3](#). Ma perché Elon Musk sceglie il mare? Effettivamente la SpaceX era già riuscita nel 2015 a riportare il primo stadio sulla terraferma; il problema da risolvere però riguardava l'insufficienza di propellente per il rientro a Terra, ecco perché la soluzione risultava essere il mare. Il raggiungimento di questo obiettivo portò un risparmio del 30% dei costi di produzione per l'azienda.

La rivoluzione continua nel 2017, precisamente a marzo si registra il primo lancio del razzo vettore Falcon 9 di seconda mano, il primo stadio aveva già volato ed è stato riciclato. La prima parte del vettore era stata usata nel lancio dell'aprile 2016 della capsula Dragon verso la Stazione Spaziale Internazionale, in una missione di rifornimento [5]. Inizia così l'era dell'economia circolare spaziale: riutilizzando i razzi si possono offrire prezzi più bassi alle aziende che vogliono portare in orbita i propri prodotti ed inoltre si può aumentare la frequenza dei lanci. In questo modo si estende il ciclo di vita dei vettori, contribuendo a ridurre al minimo gli sprechi.

Il 2022 segna un'ulteriore annata vincente per SpaceX: l'azienda ha continuato a sfruttare i suoi vantaggi ed ha aumentato sempre più la frequenza dei lanci, tanto da terminare il 2022 con una frequenza di circa una missione ogni sei giorni, concludendo l'anno con il 60° lancio, datato 28 Dicembre[3]. Questo metodo di lavoro permette di portare in orbita un elevato numero di carichi, rispetto alla concorrenza, per molte società o agenzie governative ed inoltre l'azienda è premiata anche per la sua alta affidabilità.

Per effettuare le sue operazioni SpaceX impiega diversi siti di lancio. Attualmente ne possiede 3: due in Florida ed uno in California. Per l'atterraggio invece utilizza, come già citato precedentemente, la Cape Canaveral Space Force Station.



Figura 1.3: La piattaforma-drone autonoma OCISLY

1.2.3 Utilizzo ad oggi e gli impegni futuri

Nel 2023 l'azienda continua, e continuerà, a progredire, tanto che il primo lancio dell'anno è stato svolto il 3 gennaio, si tratta tra l'altro del Falcon 9 più volte riutilizzato, ben 15 volte.

Ad oggi l'utilizzo del razzo è principalmente legato al lancio in orbita di satelliti e alla spedizione di rifornimenti verso la Stazione Spaziale Internazionale, (ISS). Uno degli obiettivi futuri sarà proprio quello di trasportare anche gli astronauti fino all'ISS [Figura 1.4](#).

Un'importante accordo che SpaceX si impegnerà poi a portare avanti nel 2023 è quello con l'azienda francese Eutelsat (per maggiori dettagli si rimanda a [Eutelsatinfo](#)). Questa nuova collaborazione è dovuta principalmente ad un fattore: la guerra in Ucraina; infatti Eutelsat aveva scelto come di consueto la compagnia russa RSC Energia ed il suo lanciatore Soyuz per la spedizione dei nuovi satelliti in orbita, ma l'azienda non voleva rischiare ritardi troppo elevati, per questo si rivolse ad Elon Musk.

Diverse aziende del settore spaziale, sia pubbliche che private hanno pensato di prendere accordi con SpaceX proprio a causa della guerra e delle conseguenti sanzioni verso la Russia e la maggior parte di loro hanno scelto come nuovo vettore il Falcon 9, una scelta quasi obbligata se si vogliono effettuare operazioni in tempi brevi, dato che ad oggi le più grandi aziende del settore spaziale stanno attraversando un periodo di transizione, passando da un vecchio modello di lanciatore ad uno nuovo e più performante[2].

Resta un'ultima domanda, quella più gettonata: il Falcon 9 andrà sulla luna? La risposta più probabile è sì. Firefly Aerospace, un'azienda aerospaziale privata americana, ha scelto proprio il razzo vettore di Elon Musk per la prima missione commerciale di atterraggio lunare, predisposta nel 2023[4].



Figura 1.4: Il razzo vettore Falcon 9 durante la fase di lancio

Capitolo 2

Il modello del sistema

2.1 Descrizione del modello

Come già specificato nel capitolo precedente, il lanciatore a razzo Falcon 9 è stato progettato per poter essere riutilizzato, infatti è il primo ad avere un primo stadio capace di atterrare verticalmente sulla Terra dopo essersi separato dal suo secondo stadio. Per fare ciò è quindi necessario poterne controllare l'atterraggio.

L'immagine sottostante di [Figura 2.1](#) rappresenta quindi il sistema che si intende analizzare: si vuole studiare il moto che compie il razzo vettore durante la sua fase di ritorno. Si utilizza pertanto un sistema di riferimento che sfrutta gli assi convenzionali, l'asse x come orizzontale e l'asse y come verticale, a cui si aggiunge poi quello di pitch, chiamato anche di beccheggio, identificato in figura dall'asse z , entrante rispetto al centro di massa. Quest'ultimo coincide con l'origine del sistema di riferimento considerato. Ovviamente il modello preso in considerazione è semplificato rispetto al sistema fisico reale, ma ci permette in egual modo di ottenere i risultati desiderati. Ci si concentra ora sulle grandezze fisiche che descrivono il lanciatore a razzo in esame: il modello del Falcon 9 ha massa M e momento di inerzia J , calcolato rispetto all'asse di pitch z , ed è costituito da un cilindro alla cui base è presente il propulsore di bordo che fornisce la forza T di propulsione, la cui inclinazione rispetto all'asse longitudinale può essere regolata tramite l'angolo φ . Da ultimo, con l'angolo θ si indica l'inclinazione del razzo rispetto all'asse y e con l si rappresenta la distanza tra il centro di massa e il centro di rotazione del propulsore.

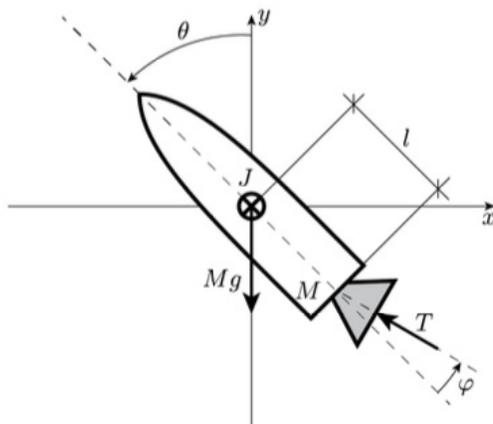


Figura 2.1: Modello semplificato del lanciatore a razzo Falcon 9

2.2 La dinamica del modello in esame

2.2.1 Parametri

Prima di passare allo studio delle equazioni fisiche del sistema si elencano di seguito le grandezze note a priori che si adopereranno nell'intero elaborato. Tali valori sono riportati nella [Tabella 2.1](#) sottostante:

Grandezza Fisica	Simbolo	Valore	Unità di misura
Massa	M	$5 \cdot 10^4$	kg
Momento di inerzia	J	$225 \cdot 10^3$	Nms^2
Distanza centro di massa - centro di rotazione del propulsore	l	15	m
Attrito dinamico lungo x	b_x	5000	$\frac{Ns}{m}$
Attrito dinamico lungo y	b_y	4790	$\frac{Ns}{m}$
Propulsione iniziale	T_0	354650	N
Coefficiente di proporzionalità	K_x	0.1	$\frac{rads}{m}$
Coefficiente di proporzionalità	K_y	-50	$\frac{Ns}{m}$

Tabella 2.1: Grandezze note

Indichiamo con K_x e K_y i coefficienti di proporzionalità associati alle velocità \dot{x} e \dot{y} . Essi verranno utilizzati nelle espressioni della propulsione e dell'angolo φ . Infatti tramite i parametri forniti si esprime la propulsione T rispetto all'asse solidale al corpo in esame (indicato dalla linea tratteggiata in [Figura 2.1](#)) secondo la legge (2.1). T è somma di una componente proporzionale alla velocità lungo y , con costante di proporzionalità K_y , e di un termine costante T_0 :

$$T = T_0 + K_y \dot{y} \quad (2.1)$$

Si definisce inoltre anche l'angolo di inclinazione del propulsore φ :

$$\varphi = K_x \dot{x} + u \quad (2.2)$$

Come in precedenza si utilizza la costante di proporzionalità K_x , mentre con u si indica la variabile d'ingresso disponibile al progettista per controllare il sistema. Si noti come la variazione dell'angolo non dipenda esclusivamente dalla direzione della propulsione T , ma risulti essere proporzionale anche alla velocità lungo x .

2.2.2 Equazioni del sistema

Il lanciatore a razzo Falcon 9 è rappresentabile tramite un modello differenziale del secondo ordine. Usando il secondo principio della dinamica, conosciuto anche come principio di proporzionalità o seconda legge di Newton, si possono descrivere i moti del Falcon 9 rispetto ai vari assi del sistema di riferimento considerato; infatti il principio afferma che la forza che agisce su un corpo segue la legge $\vec{F}_{tot} = M\vec{a}$, ovverosia essa è una grandezza vettoriale direttamente proporzionale all'accelerazione e ha la sua stessa direzione e il suo stesso verso, mentre la massa M è la costante di proporzionalità.

La prima equazione da cui dipende la dinamica del sistema è quella che descrive il moto del razzo rispetto all'asse x ed è la seguente:

$$M\ddot{x} = -T \sin(\theta - \varphi) - b_x \dot{x} \quad (2.3)$$

Si eguaglia, come richiesto dalla legge di Newton, il prodotto scalare fra la massa M e l'accelerazione \vec{a} alla somma delle proiezioni lungo l'asse x delle forze applicate al corpo, che sono la propulsione T e

l'attrito dinamico, calcolato come prodotto fra il corrispondente coefficiente di attrito b_x e la velocità lungo la direzione d'interesse (in questo caso x). Ad entrambe le forze è stato assegnato segno negativo poichè rivolte in verso contrario al moto.

Allo stesso modo si studia la dinamica del sistema lungo l'asse y :

$$M\ddot{y} = T\cos(\theta - \varphi) - Mg - b_y\dot{y} \quad (2.4)$$

In questo caso alla forza di propulsione T e all'attrito dinamico, si aggiunge anche la forza peso esercitata dal corpo espressa come $F_p = Mg$, in cui g indica l'accelerazione di gravità. Per convenzione si è assegnato segno positivo alle forze rivolte verso l'alto e negativo a quelle rivolte verso il basso.

Le equazioni (2.3) e (2.4) nella loro totalità descrivono il moto traslatorio del lanciatore a razzo Falcon 9. Esse sono state formulate considerando il corpo concentrato completamente nel suo centro di massa, dal momento che questa approssimazione non comporta alcun cambiamento dato che tutti i punti del razzo si possono considerare alla stessa velocità.

Per il sistema in esame, non ci si può però accontentare solo dell'analisi del moto appena citato. Risulta necessario studiare anche il moto rotatorio effettuato dal razzo vettore Falcon 9, nonché quello rispetto all'asse di pitch z . Quest'ultima tipologia di moto non assume l'approssimazione di un corpo rigido come punto materiale, dal momento che ogni punto di esso è caratterizzato da una velocità differente che varia in base alla distanza dall'asse di rotazione. La legge che descrive ciò che si è appena spiegato prende il nome di *legge fondamentale della dinamica rotazionale* ed è l'equivalente del secondo principio della dinamica, in cui però si sostituisce all'accelerazione l'accelerazione angolare α , alla massa il momento di inerzia J , ed infine alla somma delle forze la somma dei loro momenti, così facendo si ottiene l'equazione generale $M = \alpha J$. La figura [Figura 2.2](#) funge da riassunto illustrativo.

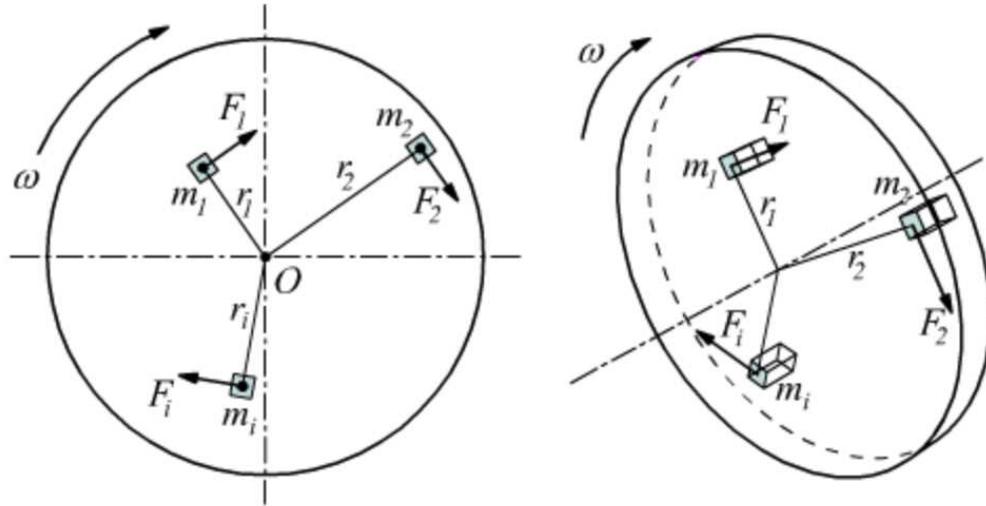


Figura 2.2: La legge fondamentale della dinamica rotazionale

Applicando quindi il caso generale appena mostrato al caso particolare in esame l'equazione risultante risulta essere:

$$J\ddot{\theta} = Tlsin(\varphi) \quad (2.5)$$

L'unico momento a non essere uguale a zero è quello della forza di propulsione, poichè il suo punto di applicazione risulta essere distante l dal centro di massa del corpo.

Avendo quindi definito la dinamica generale del sistema in esame, si possono sfruttare le tre equazioni (2.3), (2.4), (2.5) per ottenere risultati numerici sotto specifiche condizioni. In questo caso si è interessati a determinare i valori della velocità lungo gli assi x e y , indicate dai simboli v_x e v_y , e la variabile d'ingresso u , assumendo di avere la forza di propulsione costante $T \neq 0$, di essere in condizione di equilibrio e di voler mantenere il sistema con un'inclinazione di $\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}$ rispetto all'asse di pitch. Si ricorda che un corpo rigido si trova nella sua condizione di equilibrio nel momento in cui la risultante di tutte le forze esterne ad esso applicate è nulla (equilibrio del moto traslatorio) e la somma di tutti i momenti torcenti delle forze ad esso applicati è uguale a zero (equilibrio del moto rotatorio). Per avere quindi il sistema in equilibrio le equazioni della dinamica presentate in precedenza devono diventare:

$$0 = -Tsin(\theta - \varphi) - b_x\dot{x} \quad (2.6)$$

$$0 = Tcos(\theta - \varphi) - Mg - b_y\dot{y} \quad (2.7)$$

$$0 = Tlsin(\varphi) \quad (2.8)$$

Dalla (2.8) si ricavano due condizioni affinché il moto rotatorio risulti in equilibrio: l'equazione si annulla nel momento in cui si ha $T = 0$, che è stato escluso per ipotesi, oppure quando $\varphi = 0$. Si sostituisca quindi il valore appena trovato per φ nelle altre equazioni rimanenti e si scriva T per esteso (formula (2.1)); è immediato ricavare dalla (2.7) la formula per calcolare v_y :

$$v_y = \frac{Mg - T_0cos\bar{\theta}}{K_ycos\bar{\theta} - b_y} \quad (2.9)$$

Facendo uso della [Tabella 2.1](#) e sostituendo alle variabili i loro corrispondenti valori numerici, si trova che il valore della velocità lungo l'asse y è $v_y = -49.6802$ m/s.

Una volta nota v_y , dall'equazione (2.6) si è in grado di trovare la formula matematica che permette di effettuare il calcolo di v_x , ovvero:

$$v_x = \frac{T_0b_y - K_yMg}{(K_ycos\bar{\theta} - b_y)b_x}sin\bar{\theta} \quad (2.10)$$

Svolgendo i calcoli il valore della velocità lungo l'asse x risulta essere pari a $v_x = -50.5064$ m/s. Infine il valore della variabile d'ingresso u si trova grazie alla formula matematica assegnata al calcolo di φ (2.2):

$$\bar{u} = -K_xv_x \quad (2.11)$$

Il valore numerico assegnato a \bar{u} affinché si soddisfino tutte le condizioni richieste è quindi:

$$\bar{u} = 5.05 \text{ rad.}$$

Capitolo 3

La linearizzazione del sistema

3.1 Linearizzazione attorno alla configurazione di equilibrio

Affinché sia possibile studiare il sistema del lanciatore a razzo Falcon 9, si deve effettuare una linearizzazione del modello dinamico presentato nel capitolo precedente. Essendo il sistema in esame un sistema dinamico reale, non ci si troverà mai nel caso in cui esso risulti essere perfettamente lineare, per cui ci si concentra su una sua approssimazione in un intorno preciso, in questo caso il punto d'equilibrio ad ingresso costante. L'obiettivo che ci si pone in questo capitolo è pertanto quello di costruire un modello dinamico lineare in grado di fornire una buona approssimazione del comportamento non lineare nell'intorno del punto d'equilibrio prefissato.

La prima cosa da fare è individuare il vettore \mathbf{x} delle variabili di stato, ovvero quello in grado di fornire lo stato in cui si trova il sistema ad un certo istante. In generale questo si compone di 12 elementi quando si è interessati allo stato di un sistema dinamico reale: tre identificano i movimenti effettuati dal corpo lungo i tre assi del sistema di riferimento, seguiti dalla terna delle velocità lungo gli stessi; i rimanenti sei elementi riguardano le tre orientazioni rispetto ai medesimi assi e le rispettive tre velocità angolari. In definitiva il vettore \mathbf{x} ha tipicamente la forma:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})$$

ovvero

$$\mathbf{x} = (x, y, z, \theta, \varphi, \gamma, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\gamma})$$

Le variabili di stato d'interesse si ricavano dalle equazioni della dinamica (2.3), (2.4), (2.5). È evidente che queste equazioni non dipendono né dalla posizione verticale del razzo né da quella orizzontale, si ha quindi un sistema bidimensionale, pertanto ci si trova nel caso in cui le uniche variabili di interesse sono quelle dell'angolo θ , delle velocità lungo gli assi x e y (identificate rispettivamente da \dot{x} e \dot{y}) ed infine della velocità angolare $\dot{\theta}$. D'ora in poi si scriverà, per semplicità di notazione, il vettore delle variabili di stato \mathbf{x} come segue:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$$

Si passa adesso alla scrittura del sistema in forma di stato. Il modello di stato del sistema di partenza è ricavabile dalle equazioni della dinamica (2.3), (2.4), (2.5) tramite la sostituzione di θ, \dot{x}, \dot{y} e $\dot{\theta}$ con x_1, x_2, x_3 e x_4 , a cui si aggiunge l'equazione associata alla variabile d'uscita y , ed è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = -\frac{T}{M} \sin(x_1 - kx_2 - u) - \frac{b_x}{M} x_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{T}{M} \cos(x_1 - kx_2 - u) - g - \frac{b_y}{M} x_3 \\ \dot{x}_4 = \frac{T}{J} l \sin(kx_2 + u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

dove abbiamo sostituito (si veda capitolo 2) φ con $kx_2 + u$. Si tratta dunque di un modello di stato non lineare, la cui espressione può essere riportata alla forma generale:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ y = g(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \end{cases} \quad (3.2)$$

Per prima cosa andiamo ad individuare i punti di equilibrio del sistema ad ingresso costante. Uno stato x_{eq} viene detto punto di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ se $x(0) = x_{eq}$ e $u(t) = \bar{u}$ per ogni $t \geq 0$ implicano che $x(t) = x_{eq}$ per ogni $t \geq 0$. Si ha che x_{eq} è punto di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ se e solo se $f(x_{eq}, \bar{u}) = 0$, ovvero se vale:

$$\begin{cases} 0 = x_4 \\ 0 = -\frac{\bar{T}}{M} \sin(x_1 - \bar{u} - k_x x_2) - \frac{b_x}{M} x_2 \\ 0 = \frac{\bar{T}}{M} \cos(x_1 - \bar{u} - k_x x_2) - g - \frac{b_y}{M} x_3 \\ 0 = \frac{\bar{T}}{J} l \sin(k_x x_2 + \bar{u}) \end{cases} \quad (3.3)$$

Se cerchiamo di determinare solo i punti di equilibrio corrispondenti a $\bar{T} \neq 0$ e con componente all'equilibrio $x_1 = \bar{\theta} = \pi/4$, otteniamo la famiglia di equazioni

$$\begin{cases} 0 = x_4 \\ 0 = -\frac{\bar{T}}{M} \sin \bar{\theta} - \frac{b_x}{M} x_2 \\ 0 = \frac{\bar{T}}{M} \cos \bar{\theta} - g - \frac{b_y}{M} x_3 \\ 0 = k_x x_2 + \bar{u} \end{cases} \quad (3.4)$$

da cui segue

$$x_{eq} = \left(\bar{\theta}, -\frac{\bar{T} \sin \bar{\theta}}{b_x}, \frac{\bar{T} \cos \bar{\theta}}{b_y} - \frac{Mg}{b_y}, 0 \right)$$

e

$$\bar{u} = \frac{k_x \bar{T} \sin \bar{\theta}}{b_x}.$$

i quali rappresentano i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza ad un ingresso costante. Si definisce adesso lo scostamento del vettore di stato come la differenza fra il vettore di stato \mathbf{x} e x_{eq} , e lo si indica come δx . Allo stesso modo si definisce lo scostamento degli ingressi come $\delta u = u - \bar{u}$. Queste due quantità hanno il compito di indicare quanto dista l'intero sistema dal punto di equilibrio.

Il passo successivo è quello di scrivere l'approssimazione del primo ordine del sistema rispetto a δx e δu . Si ottengono dunque quattro matrici Jacobiane, A, B, C e D :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq}, \bar{u}) & B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq}, \bar{u}) \\ C &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_{eq}, \bar{u}) & D &= \frac{\partial g}{\partial u}(x_{eq}, \bar{u}) \end{aligned}$$

In particolare la matrice D sarà nulla, il che sta ad indicare che il sistema sarà strettamente proprio. Inoltre è immediato rendersi conto che la matrice A avrà dimensione 4×4 , poiché sono presenti quattro variabili di stato, B sarà una matrice colonna 4×1 , poiché c'è un unico ingresso δu , e C una matrice riga 1×4 . Tenendo conto di tutte le considerazioni fatte qui sopra e svolgendo le derivate richieste dalla matrice jacobiana, si ottengono le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\bar{T}}{M} \cos \bar{\theta} & \frac{K_x}{M} \bar{T} \cos \bar{\theta} - \frac{b_x}{M} & -\frac{K_y}{M} \sin \bar{\theta} & 0 \\ -\frac{\bar{T}}{M} \sin \bar{\theta} & \frac{K_x}{M} \bar{T} \sin \bar{\theta} & \frac{K_y}{M} \cos \bar{\theta} - \frac{b_y}{M} & 0 \\ 0 & \frac{K_x}{J} \bar{T} l & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{T}}{M} \cos \bar{\theta} \\ \frac{\bar{T}}{M} \sin \bar{\theta} \\ \frac{\bar{T}}{J} l \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.7)$$

Per cui il sistema linearizzato diventa, sostituendo i vari valori appena trovati:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\bar{T}}{M} \cos(\bar{\theta})x_1 + \left(\frac{K_x}{M}\bar{T} \cos(\bar{\theta}) - \frac{b_x}{M}\right)x_2 - \frac{K_y}{M} \sin(\bar{\theta})x_3 + \frac{\bar{T}}{M} \cos(\bar{\theta})\bar{u} \\ \dot{x}_3 = -\frac{\bar{T}}{M} \sin(\bar{\theta})x_1 + \frac{K_x}{M}\bar{T} \sin(\bar{\theta})x_2 + \left(\frac{K_y}{M} \cos(\bar{\theta}) - \frac{b_y}{M}\right)x_3 + \frac{\bar{T}}{M} \sin(\bar{\theta})\bar{u} \\ \dot{x}_4 = \frac{K_x}{J}\bar{T}lx_2 + \frac{\bar{T}}{J}l\bar{u} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

Per concludere, è possibile adesso scrivere il modello linearizzato del lanciatore nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.9)$$

Il risultato finale è descritto tramite le due equazioni sottostanti, le quali sono in grado di fornire una descrizione compatta del sistema in esame tramite notazioni matriciali come segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\bar{T}}{M} \cos \bar{\theta} & \frac{K_x}{M}\bar{T} \cos \bar{\theta} - \frac{b_x}{M} & -\frac{K_y}{M} \sin \bar{\theta} & 0 \\ -\frac{\bar{T}}{M} \sin \bar{\theta} & \frac{K_x}{M}\bar{T} \sin \bar{\theta} & \frac{K_y}{M} \cos \bar{\theta} - \frac{b_y}{M} & 0 \\ 0 & \frac{K_x}{J}\bar{T}l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \\ y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{T}}{M} \cos \bar{\theta} \\ \frac{\bar{T}}{M} \sin \bar{\theta} \\ \frac{\bar{T}}{J} l \end{bmatrix} u \quad (3.10)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta \\ x \\ y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.2 Modello linearizzato

Si vogliono adesso sfruttare i valori numerici presentati nella tabella 2.1 costruita nel capitolo 2 al fine di ottenere un modello numerico linearizzato del sistema. Per fare ciò basta sostituire agli elementi delle matrici A , B e C presentate nelle (3.5), (3.6) e (3.7) i corrispondenti valori numerici.

Al termine dei calcoli si ottengono le seguenti tre matrici numeriche del sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.0506 & 0.4051 & 0.0007 & 0 \\ -5.0506 & 0.5051 & -0.0965 & 0 \\ 0 & 2.3809 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.0506 \\ 5.0506 \\ 23.8089 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Capitolo 4

La funzione di trasferimento e la stabilità del sistema

4.1 La funzione di trasferimento

Per il calcolo della funzione di trasferimento, in questa tesi denotata come $G(s)$, si utilizza la trasformata di Laplace, la quale converte una funzione reale di variabile reale, ovvero il tempo, in una funzione di variabile complessa s . Data una funzione a valori reali $f(t)$ si definisce la sua trasformata di Laplace come:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Per trovare ora la funzione di trasferimento $G(s)$, definita come il rapporto fra le trasformate di Laplace dell'input e dell'output del sistema, si hanno a disposizione due strade differenti: la prima consiste nell'applicare le trasformate di Laplace alle equazioni descrittive del sistema (3.8) per trovare, tramite delle sostituzioni, la trasformata dell'output in funzione di quella dell'input e la conseguente $G(s)$; la seconda invece, molto più rapida, sfrutta il modello lineare trovato precedentemente e descritto nella (3.9).

Ricordando che la matrice D è nulla ed applicando al modello lineare la proprietà di linearità della trasformata di Laplace, si ottengono le seguenti trasformate:

$$\begin{cases} sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases} \quad (4.1)$$

Assumendo poi stato iniziale nullo, ovvero $X(0) = 0$, dal sistema (4.1) si trova:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (4.2)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B]U(s) \quad (4.3)$$

Di conseguenza è immediato scrivere:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.4)$$

Arrivati a questo punto, si devono solamente svolgere i calcoli utilizzando le matrici numeriche calcolate nella sezione 3.2. Fatto ciò si ottiene la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{23.809(s + 0.1)(s + 0.09651)}{(s + 2.163)(s + 0.09721)(s^2 - 2.569s + 5.558)} \quad (4.5)$$

4.2 La stabilità del sistema

La stabilità di un sistema è una caratteristica molto importante nel caso in cui si voglia ottenere un sistema di controllo che operi in maniera corretta e non produca malfunzionamenti ed eventuali danni. Se si suppone di avere a che fare con un sistema lineare e che il sistema si trovi in uno stato di quiete all'istante iniziale e che esso subisca una perturbazione finita, allora nel momento in cui la condizione iniziale subisce una perturbazione, la risposta a tale perturbazione, ovvero l'evoluzione libera $y_l(t)$, può:

- Convergere asintoticamente a zero, allora il sistema si dice **asintoticamente stabile**.
- Essere limitata, allora il sistema si dice **semplicemente stabile**.
- Essere divergente, allora il sistema si dice **instabile**.

La stabilità (asintotica o semplice), o la conseguente instabilità, di un sistema si valuta tramite lo studio degli zeri del suo polinomio caratteristico $d(s)$. Le condizioni necessarie e sufficienti, illustrate nella [Figura 4.4](#) sottostante, per il verificarsi di uno dei casi precedentemente presentati, sono rispettivamente:

- Affinchè un sistema sia **asintoticamente stabile** il polinomio $d(s)$ deve avere tutti gli zeri a parte reale negativa. [Figura 4.1](#)
- Affinchè un sistema sia **semplicemente stabile** il polinomio $d(s)$ deve avere uno o più zeri semplici sull'asse immaginario e tutti gli altri a parte reale negativa. [Figura 4.2](#)
- Affinchè un sistema sia **instabile** il polinomio $d(s)$ deve avere uno o più zeri multipli sull'asse immaginario o almeno uno zero a parte reale positiva. [Figura 4.3](#)

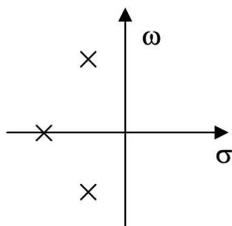


Figura 4.1:
Asintoticamente stabile

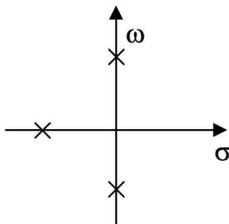


Figura 4.2:
Semplicemente stabile

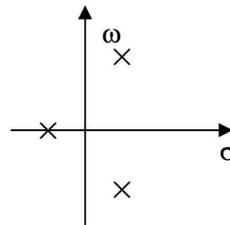


Figura 4.3:
Instabile

Figura 4.4: Condizioni necessarie e sufficienti per il verificarsi di uno dei tre casi

A queste nozioni di stabilità se ne aggiunge un'altra, ovvero la stabilità BIBO (acronimo di Bounded Input-Bounded Output). Un sistema si dice BIBO stabile se esso risponde ad ogni ingresso causale e limitato con un'uscita forzata $y_f(t)$ causale e limitata. Lo studio della BIBO stabilità di un sistema lineare si effettua tramite l'analisi dei poli della funzione di trasferimento $G(s)$, essi devono essere tutti a parte reale negativa. Una conseguenza molto importante ottenibile da queste definizioni è che la stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, perciò nel caso in cui si abbia un sistema asintoticamente stabile non si deve verificare nessuna condizione per comprovarne anche la sua BIBO stabilità.

La verifica della stabilità asintotica o BIBO di un sistema si riduce essenzialmente allo studio di un polinomio (quello caratteristico nel primo caso e il denominatore di $G(s)$ in una rappresentazione irriducibile nel secondo) e alla conseguente verifica che esso abbia tutte le radici a parte reale negativa.

Un polinomio di questo tipo è detto *polinomio di Hurwitz* e la verifica di tale proprietà, ad eccezione di casi banali, si effettua tramite il *Criterio di Routh-Hurwitz*, un criterio che, tramite la costruzione di una tabella, permette di stabilire se un dato polinomio $p(s) \in \mathbb{R}[s]$ è di Hurwitz oppure no, senza calcolarne esplicitamente le radici.

Nel caso in esame la funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{23.809(s+0.1)(s+0.09651)}{(s+2.163)(s+0.09721)(s^2-2.569s+5.558)}$$

Ci si chiede allora se sia BIBO stabile, per cui si vuole analizzare il polinomio $\bar{d}(s)$, corrispondente al denominatore di $G(s)$, che è:

$$\bar{d}(s) = (s + 2.163)(s + 0.09721)(s^2 - 2.569s + 5.558) \quad (4.6)$$

Ci si trova nel caso in cui è immediato capire tramite una semplice osservazione di $\bar{d}(s)$ che la condizione di Hurwitz viene soddisfatta. Complessivamente la funzione avrà quattro poli, conseguenza diretta del fatto che, pur essendo $\bar{d}(s)$ costituito da tre termini moltiplicativi, uno di questi è di secondo grado ed ammetterà quindi due radici. Si vede immediatamente che il primo termine moltiplicativo di $\bar{d}(s)$ si annulla nel momento in cui s assume un valore reale negativo, nello specifico $s = -2.163$. Passando poi al secondo termine, si nota che anche in questo caso ci si trova davanti ad una radice reale negativa, cioè $s = -0.09721$. Per quanto riguarda l'ultimo termine di $\bar{d}(s)$, ovvero il polinomio di secondo grado $(s^2 - 2.569s + 5.558)$ si utilizza la regola dei segni di Cartesio (valida solo per polinomi di secondo grado), che afferma:

Dato un polinomio $p(s) = p_2s^2 + p_1s + p_0 \in \mathbb{R}[s]$, con $p_2 \neq 0$
 esso è di Hurwitz se e solo se p_2, p_1, p_0 sono non nulli e di ugual segno.

Perciò osservando l'ultimo termine moltiplicativo del denominatore della funzione di trasferimento è chiaro che non è di Hurwitz. Questo compromette quindi la stabilità BIBO del sistema. In conclusione quindi si può affermare che il sistema risulta instabile a causa della presenza di due poli complessi coniugati a parte reale positiva derivanti proprio dall'ultimo termine moltiplicativo del polinomio $\bar{d}(s)$. Per quanto riguarda l'analisi della stabilità asintotica del modello di stato, non è necessario effettuare lo studio, in quanto, avendo già dimostrato la non BIBO stabilità si può affermare direttamente che il modello non sarà di certo asintoticamente stabile.

Per poter controllare il comportamento del sistema è necessario procedere quindi con la progettazione di un controllore in cascata: il primo controllore avrà la funzione di stabilizzare il sistema, mentre il secondo avrà come obiettivo quello di soddisfare le specifiche richieste.

Capitolo 5

Sintesi di un controllore stabilizzante

5.1 Introduzione al problema di controllo

In generale noi disponiamo di un processo di funzione di trasferimento $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ propria e attraverso l'azione di un controllore, a sua volta descritto da una funzione di trasferimento $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ propria e collegato al processo come nello schema in retroazione unitaria negativa di [Figura 5.1](#), vogliamo attribuire al risultante sistema retroazionato, soggetto a un ingresso a gradino, determinate specifiche di regime e di transitorio.

Con riferimento alla [Figura 5.1](#), $r(t)$ rappresenta l'ingresso di riferimento del sistema, $y(t)$ la sua uscita, ed infine $e(t) = r(t) - y(t)$ l'errore di inseguimento. I due blocchi rappresentano il controllore $C(s)$, che risulta sconosciuto ed è proprio quello da progettare, e il processo $G(s)$ noto.

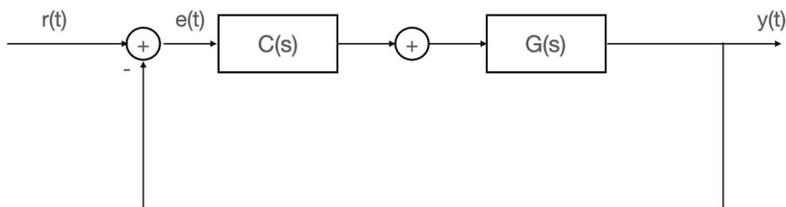


Figura 5.1: Retroazione unitaria negativa

Per poter applicare la sintesi per tentativi però il processo non può essere descritto da una qualsiasi funzione propria appartenente a $\mathbb{R}(s)$, si vuole infatti che esso abbia tutti i poli a parte reale negativa, ad eccezione di un eventuale polo in zero, e che sia privo di zeri in zero. Ci si rende facilmente conto di un dettaglio però: l'ipotesi che $G(s)$ debba avere tutti i poli a parte reale negativa ad eccezione di un eventuale polo in zero risulta restrittiva. Nel caso in cui non ci si trovasse inizialmente in queste condizioni, è necessario dunque progettare preliminarmente un controllore $C_1(s)$, il cui unico compito è proprio quello di rendere il risultante sistema retroazionato caratterizzato da soli poli a parte reale negativa ad eccezione di un eventuale polo in zero. Si deve in tal caso ricorrere al seguente schema a blocchi a “doppio anello”:

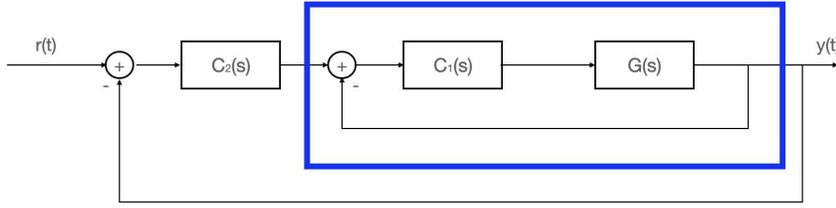


Figura 5.2: Schema a doppio anello di controllo

Applicando tutto ciò al sistema in esame, ci si rende conto come sia necessario ricondursi al caso della [Figura 5.2](#), poiché come si è potuto vedere nel capitolo precedente, ci si trova nel caso in cui la funzione di trasferimento $G(s)$, scritta nella (4.5), non ha tutti i poli a parte reale negativa o nulli. È necessario dunque, dividere il lavoro in due parti distinte: la prima si occuperà della progettazione di un controllore $C_1(s)$ che renderà il sistema stabile, la seconda si concentrerà sulle specifiche di progetto da rispettare.

5.2 Il controllore stabilizzante $C_1(s)$

Il primo obiettivo da conseguire è la stabilità del sistema in anello chiuso, per poi assicurarsi che sia margine di fase sia margine di ampiezza garantiscano che il sistema in retroazione sia sufficientemente lontano dalla condizione di instabilità.

In questa sezione ci si occupa quindi del progetto di un controllore C_1 il cui compito è quello di rendere stabile il sistema in anello chiuso caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$G_c(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)} \quad (5.1)$$

Si utilizza ora il luogo delle radici come metodo per progettare il controllore. Il luogo delle radici positivo di $G(s)$ è illustrato nella [Figura 5.3](#). Da qui si nota come due dei tre rami presenti, nello specifico quelli che partono dai poli instabili, si trovino completamente nel semipiano positivo. L'obiettivo del controllore $C_1(s)$ è quello di spostare questi due, perlomeno in parte, nel semipiano negativo. A tale scopo si introduce una coppia di zeri in $-2 \pm j2$ ed inoltre, per rendere il controllore proprio si inserisce una coppia di poli in $-8 \pm j$. Il controllore stabilizzante così definito risulta:

$$C'_1(s) = \frac{s^2 + 4s + 8}{s^2 + 16s + 65} \quad (5.2)$$

Ponendo $C'_1(s)$ in cascata alla funzione di trasferimento $G(s)$, si evince che la nuova funzione di trasferimento in catena aperta è:

$$C'_1(s)G(s) = \frac{23.81s^4 + 99.91s^3 + 209.4s^2 + 38.35s + 1.838}{s^6 + 15.69s^5 + 60.02s^4 - 8.661s^3 + 191s^2 + 800.1s + 75.96} \quad (5.3)$$

Tuttavia il sistema non risulta ancora stabilizzato, infatti sono presenti ancora due poli a parte reale positiva. Una soluzione a ciò può essere quella di introdurre il guadagno del controllore K : se si considerano i punti di intersezione dei rami del luogo delle radici di $C'_1(s)G(s)$ in [Figura 5.4](#), si determina l'intervallo dei valori di K che assicurano la stabilità del sistema, in questo caso l'intervallo $K > 2.51$. Se assumiamo $K = 100$, si ottiene il controllore $C_1(s)$:

$$C_1(s) = KC'_1(s) = 100 \frac{s^2 + 4s + 8}{s^2 + 16s + 65} \quad (5.4)$$

Infine, mettendo in retroazione unitaria negativa la cascata definita da $C_1(s)G(s)$ (si veda la (5.1)), si ottiene la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita ad anello chiuso:

$$G_c(s) = \frac{2381s^4 + 9991s^3 + 2.094e04s^2 + 3835s + 183.8}{s^6 + 15.69s^5 + 2441s^4 + 9983s^3 + 2.113e04s^2 + 4635s + 259.8} \quad (5.5)$$

Infatti, applicando il comando `roots` di Matlab al denominatore di $G_c(s)$:

```
roots([1, 15.69, 2441, 9983, 2.113 · 104, 4635, 259.8])
```

si ha la conferma che tutti i poli presenti sono effettivamente a parte reale negativa. Il risultato ritornato è il seguente:

```
ans =
-5.7734 +48.4868i
-5.7734 -48.4868i
-1.9521 + 2.0236i
-1.9521 - 2.0236i
-0.1419 + 0.0000i
-0.0972 + 0.0000i
```

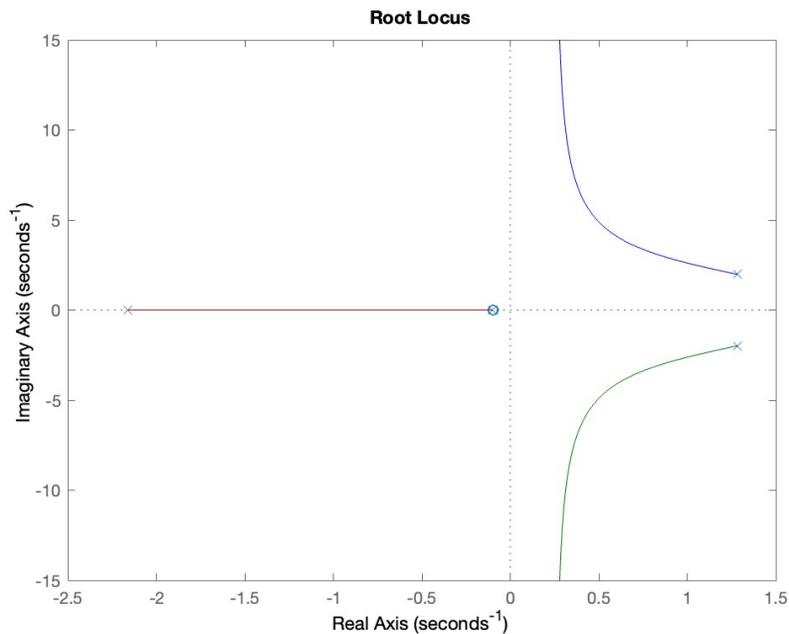


Figura 5.3: Luogo delle radici di $G(s)$

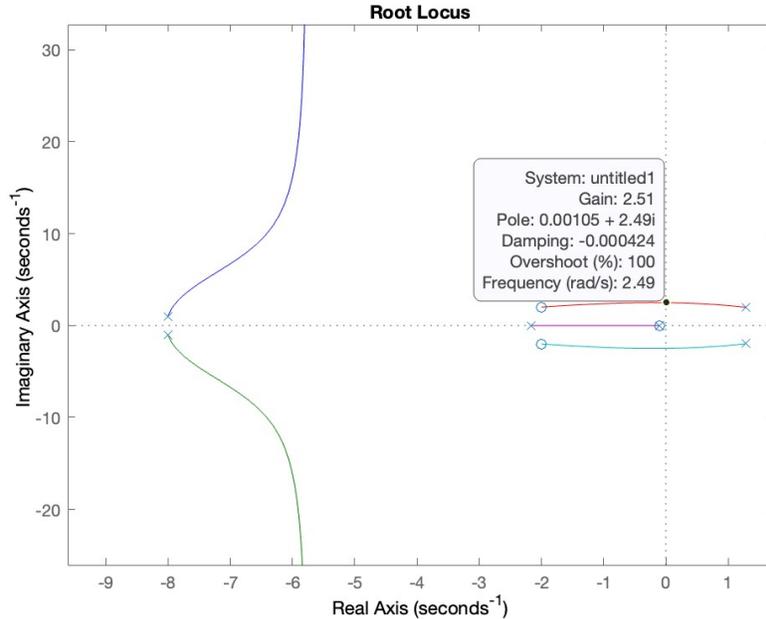


Figura 5.4: Luogo delle radici di $C_1(s)G(s)$

5.3 Il secondo controllore

5.3.1 Specifiche di progetto

Ci si è riportati al caso descritto dalla [Figura 5.1](#), per cui l'obiettivo corrente è quello di progettare un controllore $C_2(s)$ in grado di soddisfare determinate specifiche di progetto. La prima specifica richiesta è quella di rendere il sistema BIBO stabile, proprietà di cui si è ampiamente parlato nel capitolo precedente. Si vuole poi che il controllore, agendo sull'angolo del propulsore tramite l'ingresso u , possa, partendo dalla condizione di equilibrio, portare il lanciatore a razzo esattamente nella posizione verticale senza mai superarla e si vuole inoltre che esso si porti nell'intervallo $[-0.0393, 0.0393]$ radianti entro un tempo $t = 5s$.

Si ricorda adesso come ogni sistema reale sia soggetto a rumori e disturbi di varia origine. Nel caso in esame, data $\nu(t) = 5 \cdot 10^{-1} \sin(\omega_\nu t)$, che identifica un rumore di misura nella lettura dell'angolo di beccheggio del razzo Falcon 9, e data una $\omega_\nu \geq 50 \text{ rad/s}$, si desidera che il controllore $C_2(s)$ sia in grado di attenuarne gli effetti sull'uscita ad almeno lo 0.5% del valore di partenza. In caso invece di un disturbo avente forma $d(t) = \sin(10^{-2}t)$, capace di agire sull'uscita del sistema, si vuole infine che il controllore riesca ad attenuarne gli effetti sull'uscita ad almeno l'1%.

5.3.2 Controllore per prestazioni $C_2(s)$

In questa sezione si analizzeranno una ad una le specifiche di progetto necessarie alla costruzione del controllore $C_2(s)$.

La prima richiesta da soddisfare riguarda la risposta al gradino. Affinché l'uscita del sistema assuma un determinato valore e non lo superi, c'è bisogno che l'errore a regime sia nullo e non ci sia sovraelongazione. Questo ultimo parametro non è altro che la differenza fra il valore massimo dell'uscita e il valore finale e spesso si misura in percentuale. Qui si chiede che il razzo non superi mai la posizione verticale, infatti nel caso in esame è immediato affermare che:

$$S\% = 100 \frac{G_{max} - G_0}{G_0} = 0\%$$

Questo valore implica un coefficiente di smorzamento pari a 1, indicato con $\delta = 1$. Il coefficiente di smorzamento dipende dalla posizione dei poli complessi coniugati, e dal momento che qui vale 1,

significa che si vogliono ottenere solo poli reali stabili, e non complessi coniugati, per il sistema. Inoltre la specifica sulla sovraelongazione implica una approssimazione dell'anello chiuso con un sistema del primo ordine, corrispondente quindi ad un margine di fase pari a 90° .

Per quanto riguarda l'errore a regime, la specifica è verificata se il sistema in catena aperta $C_2(s)G_c(s)$ presenta un polo nell'origine: essendo $G_c(s)$ nota e senza questo requisito, significa che il controllore $C_2(s)$ dovrà possedere questo polo. Si può quindi affermare che l'errore al gradino di $C_2(s)$ sia nullo. Inoltre si sa che l'ampiezza di questo gradino corrisponde a $+\frac{\pi}{4}$, poiché in precedenza si è considerata una inclinazione iniziale del razzo di $\frac{\pi}{4}$ e si vuole raggiungere adesso la posizione verticale $\frac{\pi}{2}$. Come richiesto dalla stessa specifica si vuole infine che l'angolo θ si trovi nell'intervallo $[-0.0393, 0.0393]$ entro $5s$. Questo sta a significare che l'andamento dell'angolo non deve uscire da una banda del 5% dal valore di regime con un tempo di assestamento $T_a = 5s$. Essendo nel caso in cui la funzione di trasferimento in anello chiuso sia circa di primo ordine vale la relazione approssimata per il calcolo della pulsazione di taglio:

$$\omega_c = \frac{3}{8T_a} = 0.6 \text{ rad/s}$$

La seconda specifica da analizzare riguarda invece l'attenuazione degli effetti del rumore di misura. Spesso l'uscita $y(t)$ è soggetta a rumore ad alta frequenza il quale può compromettere il buon funzionamento del sistema in anello chiuso. La richiesta da soddisfare impone, tramite il controllore $C_2(s)$, di attenuare questi rumori, definiti dalla funzione sinusoidale nel tempo $\nu(t) = 5 \cdot 10^{-1} \sin(\omega_\nu t)$ di almeno lo 0.5%, per pulsazioni $\omega_\nu \geq 50 \text{ rad/s}$. Si consideri adesso che agisca solo il disturbo $\nu(t)$ nel sistema, pertanto la funzione di trasferimento da considerarsi è $\frac{Y(s)}{\nu(s)}$. Le specifiche a disposizione impongono che le oscillazioni in uscita abbiano un'ampiezza al più di 0.005 per pulsazioni $\omega_\nu \geq 50 \text{ rad/s}$. Per cui deve valere la relazione:

$$\left| \frac{Y}{\nu} \right| = \left| \frac{C_2(j\omega)G_c(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_c(j\omega)} \right| \leq \frac{0.005}{5 \cdot 10^{-1}} = 10^{-2}$$

Inoltre in questo caso specifico vale l'approssimazione delle alte frequenze che semplifica la relazione precedente:

$$\left| \frac{C_2(j\omega)G_c(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_c(j\omega)} \right| \approx |C_2(j\omega)G_c(j\omega)| \leq 10^{-2}$$

ciò permette di semplificare la specifica dal momento che ci si limita a considerare il modulo della funzione di trasferimento di anello aperto. Passando in dB, per pulsazioni superiori a 50 rad/s si ha:

$$|C_2(j\omega)G_c(j\omega)|_{dB} \leq -20 \log_{10}(10^{-2}) = -40 \text{ dB}$$

Infine per l'ultima specifica in esame si vuole che il controllore sia capace di attenuare gli effetti sull'uscita di un disturbo $d(t) = \sin(10^{-2}t)$, agente sull'uscita del sistema, ad almeno l'1% del suo valore. Lo schema a blocchi a cui si fa riferimento è presentato in [Figura 5.5](#):

Ci si trova adesso a lavorare a basse frequenze. Dopo la chiusura del primo anello di controllo la funzione di trasferimento tra disturbo e uscita risulta:

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + C_1(s)G(s)} = \frac{s^6 + 15.69s^5 + 60.02s^4 - 8.661s^3 + 191s^2 + 800.1s + 75.96}{s^6 + 15.69s^5 + 2441s^4 + 9983s^3 + 2.113 \cdot 10^4s^2 + 4635s + 259.8} \quad (5.6)$$

ed il suo diagramma di Bode è visibile in [Figura 5.6](#).

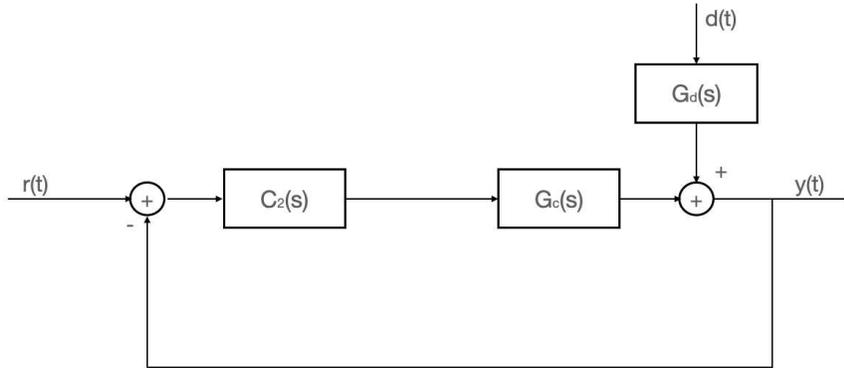


Figura 5.5: Schema a blocchi con disturbi

Considerando la funzione di trasferimento $\frac{Y(s)}{G_d(s)}$, affinché il controllore possa attenuare il disturbo sinusoidale $d(t)$ per pulsazioni inferiori a 10^{-2} deve valere la relazione:

$$\left| \frac{G_d(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_c(j\omega)} \right| \leq 0.01$$

Essendo nel campo delle basse frequenze vale l'approssimazione: $\left| \frac{1}{1+C_2(j\omega)G_c(j\omega)} \right| \approx |C_2(j\omega)G_c(j\omega)|$. Per cui si ha la condizione:

$$|C_2(j\omega)G_c(j\omega)| \geq \frac{|G_d(j\omega)|}{0.01}$$

Si nota come la $G_d(s)$ risulti più grande di $-2dB = 0.7943$ per pulsazioni inferiori a 10^{-2} rad/s. In conclusione si ha:

$$|C_2(j\omega)G_c(j\omega)| \geq -2dB + 40dB = 38dB$$

Inserendo infine un ulteriore polo dopo la frequenza di taglio, si verifica anche la specifica sull'attenuazione del disturbo. Il diagramma di bode è presentato in figura [Figura 5.7](#)

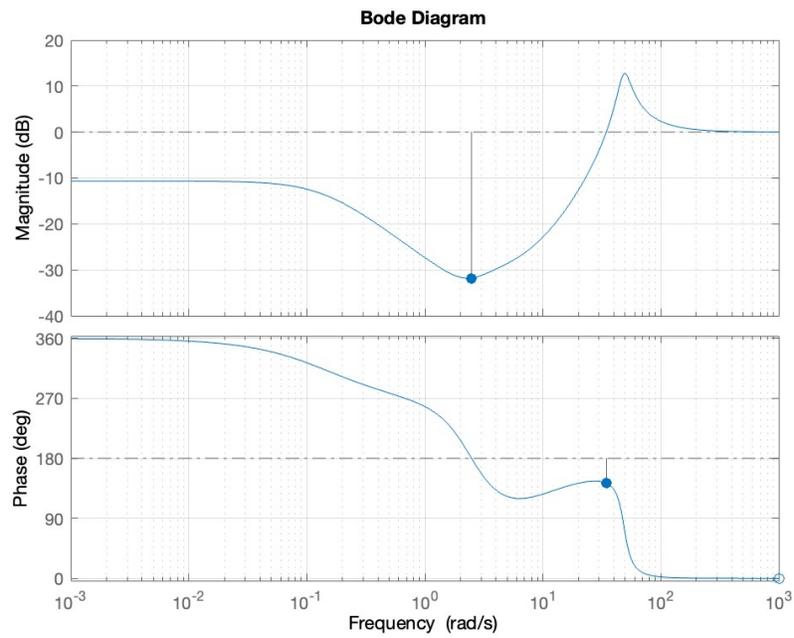


Figura 5.6: Diagramma di Bode di $G_d(s)$

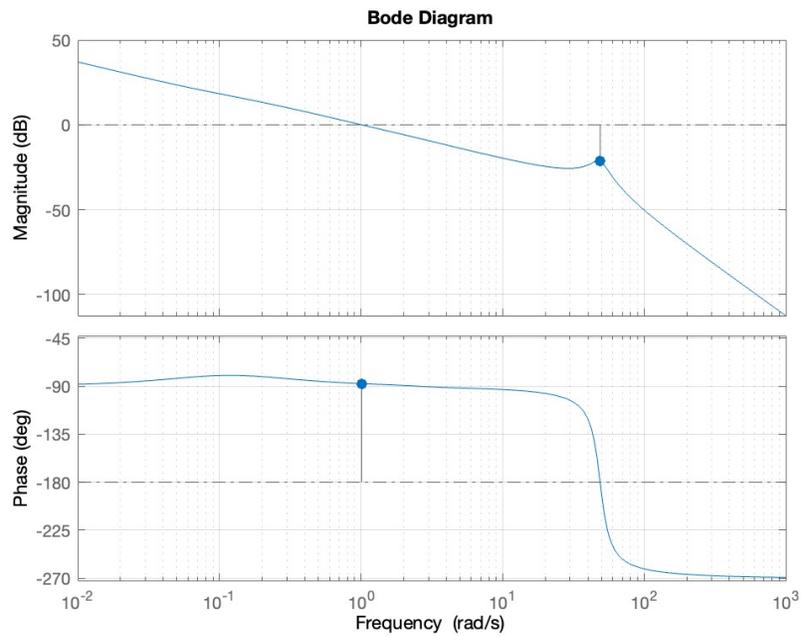


Figura 5.7: Diagramma di Bode di $\frac{1}{s}G_c(s)$

Si può ad esempio prendere adesso in considerazione un controllore della forma

$$C_2(s) = \frac{0.9}{s(1 + 0.17s)} \quad (5.7)$$

La [Figura 5.8](#) illustra il diagramma di Bode di $C_2(s)G_c(s)$ in cui si hanno soddisfatto tutte le specifiche richieste.

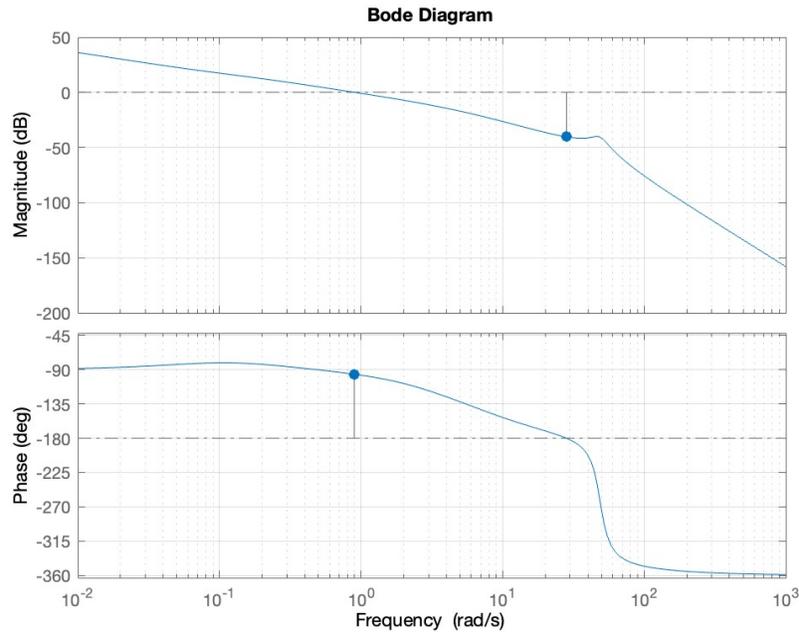


Figura 5.8: Diagramma di Bode finale di $C_2(s)G_c(s)$

Per concludere, si presenta il grafico della risposta al gradino del sistema in anello chiuso nella [Figura 5.9](#). É evidente di come le richieste riguardanti la sovralongazione e il tempo di assestamento vengano soddisfatte, infatti la sovralongazione risulta essere nulla e il tempo di assestamento al 5% è inferiore a 4s.

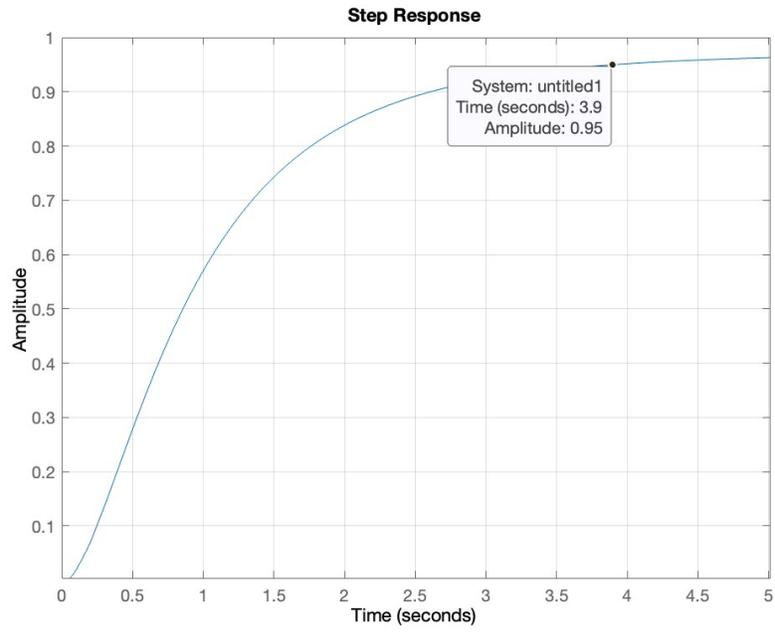


Figura 5.9: Risposta al gradino del sistema in anello chiuso

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi di laurea si è analizzato il controllo del modello dinamico del lanciatore a razzo Falcon 9. In particolare, ci si è concentrati sulla determinazione delle equazioni che governano la dinamica del sistema, semplificando dove necessario, e si è determinata una rappresentazione linearizzata del sistema in forma di stato attorno ad una traiettoria di equilibrio ad ingresso costante. Successivamente, si è progettato un controllore stabilizzante in grado di soddisfare determinate specifiche di progetto. Questo controllore ha lo scopo di mantenere la stabilità del sistema durante la fase di atterraggio del Falcon 9, riducendo gli effetti di eventuali disturbi e mantenendo il razzo sulla traiettoria desiderata. Si sono poi effettuate diverse simulazioni per valutare le prestazioni del controllore, verificando che le specifiche di progetto fossero rispettate e che il sistema rimanesse stabile. In conclusione, questa tesi ha evidenziato l'importanza del controllo nel modello dinamico del Falcon 9, e ha mostrato come un controllore stabilizzante ben progettato sia fondamentale per garantire la sicurezza e il successo delle missioni.

Questo studio ha inoltre dimostrato l'utilità dei software Matlab e Simulink per l'analisi e la simulazione del sistema in esame. L'ambiente di calcolo Matlab, che offre una vasta gamma di funzionalità per l'analisi e la manipolazione di dati, la modellizzazione e la simulazione di sistemi, la creazione di algoritmi e l'implementazione di algoritmi di controllo, ha permesso di eseguire operazioni matematiche avanzate con facilità. Infine tramite Simulink, un ambiente di simulazione basato su Matlab, si è potuto simulare il sistema utilizzando diagrammi a blocchi: infatti Simulink permette di creare modelli di sistemi dinamici utilizzando blocchi funzionali predefiniti e di connetterli tra loro per formare il modello completo del sistema. Una volta creato il modello, Simulink consente di eseguire simulazioni del sistema e di visualizzare i risultati in tempo reale.

È importante notare che il problema affrontato in questo elaborato è stato semplificato per renderlo più gestibile dal punto di vista accademico, infatti l'obiettivo principale della tesi è quello di approfondire la materia dei Controlli Automatici attraverso un esempio specifico di controllo. Tuttavia, è importante riconoscere che questa semplificazione può aver reso il problema meno realistico, poiché alcuni aspetti del sistema originale sono stati ignorati o semplificati.

Grazie alla stesura di questa tesi, ho avuto l'opportunità di esplorare in modo approfondito diversi aspetti e argomenti riguardanti i Controlli Automatici e l'utilizzo dei software Matlab e Simulink precedentemente citati. In questo modo, ho acquisito una maggiore comprensione e conoscenza di questi argomenti, i quali hanno stimolato la mia curiosità e la mia passione per questo campo.

Bibliografia

- [1] Spazio: partito SpaceX, primo volo di soli civili.
https://www.ansa.it/sito/notizie/topnews/2021/09/16/spazio-partito-spacex-primo-volo-di-soli-civili_5f1adf31-31e9-4e93-9db6-94d373e1abf0.html, sep 2021.
- [2] L'Europa sta facendo sempre più affidamento sul Falcon 9 di SpaceX.
<https://www.astrospace.it/2022/10/19/leuropa-sta-facendo-sempre-piu-affidamento-sul-falcon-9-di-spacex/>.
- [3] SpaceX completa il 60° lancio di un razzo Falcon nel 2022, il primo della nuova generazione di Starlink.
https://www.hwupgrade.it/news/scienza-tecnologia/spacex-completa-il-60-lancio-di-un-razzo-falcon-nel-2022-il-primo-della-nuova-generazione-di-starlink_112869.html.
- [4] Come è stato costruito il razzo riutilizzabile SpaceX Falcon 9.
<https://knowhow.distrelec.com/it/difesa-aerospaziale-e-marina/come-e-stato-costruito-il-razzo-riutilizzabile-spacex-falcon-9/>.
- [5] SpaceX: è un successo il lancio del razzo riciclato.
http://www.repubblica.it/scienze/2017/03/31/news/lancio_space_x_razzo_riciclato-161887199/.
- [6] Mauro Bisiacco, Gianluigi Pillonetto. *Sistemi e modelli*. Società Editrice Esculapio, 2020.
- [7] Falcon 9.
<https://www.spacex.com/vehicles/falcon-9/>.
- [8] Mauro Bisiacco, M. Elena Valcher. *Controlli Automatici*. Libreria Progetto, second edition, 2015.