Modelli a tempo discreto per la copertura tramite futures

Tommaso Ercole

anno accademico 2006/2007

Indice

Capitolo 1

Introduzione

I contratti futures sono dei contratti derivati a termine, il cui valore varia in funzione di un altro valore quotato per contanti chiamato sottostante (Underlying), e delle aspettative che questo suscita negli operatori. Il sottostante di un contratto futures può essere sia di carattere strettamente finanziario (titoli del tesoro, valute, azioni, indici azionari, ecc.) sia di carattere mercantile (petrolio, rame, cotone, caffè, zucchero, ecc.). I futures nascono da esigenze commerciali, come strumenti finanziari per limitare il rischio d'impresa di soggetti economici che operano in un determinato settore, assicurando in anticipo il prezzo futuro di un bene o di un valore.

Per capire come si stabilisce il prezzo dei futures sono necessarie alcune conoscenze relative alla valutazione dei flussi di cassa futuri, che saranno esposte nel Capitolo 3. Prima di trattare i futures, è inoltre utile consuetudine illustrare i contratti forward, che presentano molte similitudini con i contratti futures. La differenza pratica principale è che con il forward l'esecuzione del contratto avviene quasi sempre con la consegna materiale, mentre con i futures l'esecuzione è quasi sempre regolata tramite un pagamento di denaro. I contratti futures, poi, a differenza dei contratti forward, sono scambiati sui mercati regolamentati. Per la loro forte liquidità i contratti futures sono utilizzati anche con finalità speculative. A causa dell'effetto leva intrinseco al contratto derivato, una strategia basata su contratti futures tesa alla speculazione presenta però un'elevata rischiosità, ed è pertanto totalmente sconsigliabile all'investitore medio-piccolo. La grande utilità dei contratti futures è quindi quella originaria, cioè la copertura del rischio. In questo testo verranno esposti due metodi per stabilire l'entità delle operazioni di copertura finalizzate a ridurre al minimo il rischio. Il primo utilizza le deviazioni standard del prezzo dell'attività da assicurare e del prezzo del contratto futures che l'assicura e la loro correlazione. Il secondo sfrutta la duration dell'attività da assicurare e del contratto futures che l'assicura.

Questa tesi è coordinata con quella di Daniele Fiorotto 'Modelli a tempo discreto per il mercato dei futures'; nelle due tesi saranno quindi presenti vicendevoli richiami per ulteriori spiegazioni ed approfondimenti.

Capitolo 2

Ipotesi e conoscenze preliminari

- B sta per bond (titolo non rischioso). Il valore di B indica come varia il valore del denaro nel tempo. B_t indica il valore del titolo al tempo t. $B_t > 0 \; \forall \; t$
- Il tasso d'interesse viene indicato con r. $r \geq 0 \; \forall \; t$

  $$r = \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}}$$

  quindi $B_t = B_0(1 + r)^t$
- S sta per security (titolo rischioso). $S_t^{(k)}$ è il prezzo del k-esimo titolo rischioso al tempo t ($k \neq 0$). $S_t^{(k)} \geq 0 \; \forall \; t$ e $\forall$ k

  $S_t^{(k)}(\omega)$ è una variabile aleatoria. Lo spazio di probabilità Ω è formato da M punti

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_M\}$$

$P(\omega_i)$ è la probabilità associata all'i-esimo evento. $P(\omega_i) > 0$.

$S_t^{(k)}(\omega_i)$ è il prezzo, al tempo t, del titolo k, quando si verifica l'evento ω_i.

- Portafoglio o strategia: è il possesso di una certa quantità di titoli (rischiosi e non rischiosi). $H_t^{(k)}$ = quantità del titolo k-esimo detenuto tra l'istante $t-1$ e t. $H_t^{(0)}$ = quantità del titolo non rischioso detenuto tra l'istante $t-1$ e t.

- V_t = valore del portafoglio all'istante t.

$$V_t = H_t^{(0)} B_t + H_t^{(1)} S_t^{(1)} + ... + H_t^{(N)} S_t^{(N)}$$

- SCONTO

  Prezzo del titolo k-esimo al tempo t, scontato:

$$S_t^{(k)*} = \frac{S_t^{(k)}}{B_t}$$

  Valori di portafoglio scontati:

$$V_t^* = H_t^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} H_t^{(k)} S_t^{(k)*} = \frac{V_t}{B_t}$$

- Legge del prezzo unico:

  se $\hat{H}, \tilde{H}$ sono tali che $\hat{V}_T(\omega) = \tilde{V}_T(\omega) \ \forall \ \omega \Rightarrow \hat{V}_0 = \tilde{V}_0$

- Esiste opportunità di arbitraggio se esiste un portafoglio H tale che:

  $V_0 = 0$ e $V_t \geq 0$ per $\forall \ \omega$, con la disuguaglianza stretta per almeno un ω

- Una misura neutrale al rischio è una misura di probabilità Q con $Q(\omega) > 0 \ \forall \ \omega$ tale che:

$$E_Q[S_T^*] = S_0^*$$

- $\exists$ almeno una misura neutrale al rischio $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ opportunità di arbitraggio
- Una martingala è un processo stocastico $(S_1, S_2, ..., S_n, ...)$ con associata una struttura informativa $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n, ...)$ tale che:

$$E(S_{t+s}|\mathcal{P}_t) = S_t \text{ per } s > 0$$

Capitolo 3

Valutazione dei flussi di cassa

Per studiare i futures è necessario prima di tutto riuscire a valutare i flussi di cassa futuri.
In questo capitolo spiegheremo brevemente come si può operare tale valutazione.

Supponiamo di voler acquistare un flusso di cassa futuro (relativo al tempo τ) offrendo in cambio il pagamento di una certa somma al tempo iniziale t; oppure di accordarci, sempre al tempo t, per acquisire al tempo τ un titolo pagandolo al tempo τ con una cifra concordata al tempo t.

In un mercato completo questi derivati possono essere valutati, sotto le ipotesi dell'arbitrage pricing theory, attraverso l'utilizzo di strategie di replicazione.

Consideriamo un flusso di cassa ΔD_s dollari incassati al tempo s, con $t < s \leq T$. Questo è un contingent claim al tempo s, e il suo valore al tempo t è $E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t]$. Nel caso in cui ΔD_s sia deterministico, oppure se è $\mathcal{F}_t$ misurabile la formula si semplifica in $\Delta D_s E_Q[B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t]$. Se poi il tasso d'interesse r è costante si arriva ad una formula ancora più semplice: $\Delta D_s \left(1+r\right)^{t-s}$.

Passiamo ora a considerare un flusso di cassa $\Delta D_{t+1}, ..., \Delta D_\tau$ che potrebbe rappresentare i dividendi di un titolo S. Il valore attuale dei dividendi riflette la differenza tra il valore al tempo t del titolo e il valore attuale della previsione del valore al tempo τ del titolo stesso, cioè:

$$S_t - E_Q[S_\tau B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t] \tag{3.1}$$

Estendendo la formula sul valore attuale al flusso multiplo, relativo ai dividendi, otteniamo:

$$\sum_{s=t+1}^{\tau} E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t] \tag{3.2}$$

Eguagliando le due formule troviamo che

$$S_t - E_Q[S_\tau B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t] = \sum_{s=t+1}^{\tau} E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t]$$

La grande importanza di questa espressione del valore attuale è dovuta alla possibilità che fornisce di confrontare flussi differenti per tempi ed entità. Grazie a ciò due parti possono valutare la convenienza di scambiarsi i flussi di cassa. Infatti potrebbero trovare vantaggioso scambiare i flussi previa una transazione monetaria pari alla differenza dei valori attuali di tali flussi. L'operazione appena descritta prende il nome di swap.

Capitolo 4

Prezzo dei Forward

Prima di arrivare al nocciolo del discorso, cioè i futures, ci occupiamo, in questo capitolo, di un derivato un po' più semplice: i forward.
Tale contratto è il predecessore logico del future, ed è quindi utile analizzarlo, nonostante sia assai poco diffuso nel mercato moderno.

Il contratto forward è un derivato che consiste in un accordo per comprare o vendere un bene a un certo tempo futuro a un determinato prezzo. Una delle parti assume una posizione long e si accorda per comprare il bene sottostante, alla data futura concordata, al prezzo stabilito. La controparte assume una posizione short e deve vendere il bene alla stessa data e allo stesso prezzo. Il prezzo specificato nel contratto forward è detto prezzo del forward (lo indicheremo con O_t). O_t è il prezzo, concordato al tempo t, da pagare al tempo τ per acquistare il bene sottostante al futures.

Si pone quindi il problema di stabilire il corretto valore di tale O_t. Per fare questo distinguiamo tra titoli che pagano o non pagano dividendi. In questo capitolo vengono esposti solo i risultati finali; per spiegazioni e approfondimenti si rimanda alla tesi 'Modelli a tempo discreto per il mercato dei futures' capitolo 3 di Daniele Fiorotto.

4.1 Il titolo sottostante non paga dividendi

$$O_t = \frac{S_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1} | \mathcal{F}_t]} \tag{4.1}$$

La formula appena descritta è valida nell'assunzione che S/B sia una Q-martingala, condizione che è violata nel caso di un titolo che paga dividendi.

4.2 Il titolo sottostante paga dividendi

$$O_t = \frac{S_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1} | \mathcal{F}_t]} - \sum_{s=t+1}^{\tau} \frac{E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t]}{E_Q[B_t B_\tau^{-1} | \mathcal{F}_t]}$$

Capitolo 5

Introduzione ai futures

Il contratto futures è un accordo tra due parti per comprare o vendere un bene, a un certo tempo futuro, ad un dato prezzo. Diversamente dai contratti forward quelli futures sono scambiati sul mercato regolamentato. Ai fini di rendere possibile questi scambi il mercato stabilisce alcune caratteristiche standard per il contratto. Questo meccanismo implica che le parti non si debbano necessariamente conoscere e che il mercato garantisca alle parti che il contratto venga onorato. Diversamente dai forward la posizione in un contratto futures può essere chiusa prima della scadenza del contratto acquisendo una posizione inversa nel mercato. Questo implica la possibilità di ottenere un profitto dato dalla differenza del prezzo del futures nei due tempi. Il mercato per garantire il rispetto degli impegni contrattuali impone al venditore o al compratore un margine di garanzia, tale da impedire che questi si ritirino da una posizione perdente. L'ammontare di tale margine cambia continuamente a seguito delle fluttuazioni del prezzo del titolo sottostante, fino alla chiusura del contratto.

Gli operatori dei futures non possono utilizzare denaro preso a prestito per depositarlo nei conti di garanzia. Il mercato inoltre ha diritto a richiedere ulteriori fondi e a chiudere le posizioni degli operatori nel caso che i loro fondi siano esauriti. Pertanto gli operatori, per trattare i futures, devono avere una ricchezza positiva. Gli operatori però possono impegnare titoli all'interno del conto di garanzia. Questo dà la possibilità a chi ha un portafoglio azionario di impegnarlo in parte per evitare di costituire fondi specifici dedicati ai conti di garanzia. L'operatore inoltre ha diritto a riscuotere gli interessi del suo fondo di garanzia.

Riprendiamo il nostro modello per il mercato dei titoli ed inseriamo i processi relativi ai prezzi dei futures. Indichiamo con U_t il prezzo del futures di un titolo o bene scambiato al tempo τ e con $\hat{H}_t$ la posizione del contratto futures U mantenuta dal tempo $t-1$ al tempo t. La strategia complessiva è un processo predicibile di questa forma:

$$(H, \hat{H}) = (H_0, H_1, ..., H_N, \hat{H}_1, ..., \hat{H}_J)$$

Dopo ogni transazione il valore della strategia è la stessa del modello senza futures:

$$H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t)$$

La formula del valore del portafoglio al tempo t (V_t) appena prima di ogni transazione sarà diversa perchè è necessario considerare il profitto netto dovuto allo scambio di futures nell'ultimo periodo.

Proviamo ora a descrivere la relazione che intercorre tra il prezzo del futures e il prezzo del titolo sottostante. Per fare ciò sfruttiamo l'imposizione di assenza di arbitraggio. Dato che però per poter scambiare futures bisogna avere una ricchezza positiva dobbiamo ridefinire l'arbitraggio in quanto non è più ammissibile una strategia che parta da un valore iniziale nullo. Il concetto è comunque lo stesso in quanto basta spostare il punto di partenza verso un livello iniziale di ricchezza positivo.

Definiamo quindi un'opportunità di arbitraggio per un portafoglio autofinanziante nel modello di mercato con i futures come segue:

$$V_T(\omega) \geq V_0 B_T(\omega), \text{ per ogni } \omega \text{ e } V_T(\omega) > V_0 B_T(\omega), \text{ per qualche } \omega$$

Intuitivamente si può dire che un'opportunità di arbitraggio non sia sicuramente peggiore rispetto ad investire i soldi in un titolo non rischioso ed è possibile che sia strettamente migliore.

$$V_1 \geq V_0(B_1 B_0^{-1}) \Longleftrightarrow$$

$$H_0(1)B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)$$

$$\geq [H_0(1)B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)](B_1 B_0^{-1}) \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1) \geq B_1 \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)B_0^{-1} \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1} \geq \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(0) \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)\Delta S_n^*(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1} \geq 0$$

Abbiamo trovato che esiste un'opportunità di arbitraggio se e solo se l'ultima disequazione è vera per ogni ω ed è stretta per almeno uno di questi.

Quindi, analogamente a quanto avviene nel modello per il mercato privo di futures, non ci sono opportunità di arbitraggio, nel modello uniperiodale se e solo se esiste una misura di probabilità strettamente positiva Q, tale che:

$$\sum_{n=1}^{N} E_Q[H_n(1)\Delta S_n^*(1)] + \sum_{j=1}^{J} E_Q[\hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0 \, \forall \, (H_n, \, \hat{H}_j)$$

che è equivalente a:

$$E_Q[H_n(1)\Delta S_n^*(1)] + E_Q[\hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0 \; \forall \text{ n e } \forall \text{ j} \quad (5.1)$$

Sappiamo che (vedi 'conoscenze preliminari'), per un mercato uniperiodale composto da un titolo non rischioso ed un solo titolo rischioso, la condizione di assenza di arbitraggio è: $S_n^*(0) = E_Q[S_n^*(1)]$, con $n = 1, ..., N$ (vedi conoscenze preliminari). Tale condizione è equivalente a: $E_Q \Delta S_n^* = 0$.

Sfruttando quest'ultimo risultato nella (4.1) troviamo che $E_Q[H_n(1)\Delta S_n^*(1)] = 0$, quindi la (4.1) diventa:

$$E_Q[\hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0$$

ma essendo $\hat{H}_j$ uno scalare si può eliminare dall' equazione:

$$E_Q[\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0$$

$$E_Q[(U_j(1) - U_j(0))B_1^{-1}] = 0$$

dato che, al tempo 0, $U_j(0)$ è noto, allora

$$U_j(0)E_Q[B_1^{-1}] = E_Q[U_j(1)B_1^{-1}]$$

e quindi

$$U_j(0) = \frac{E_Q[U_j(1)B_1^{-1}]}{E_Q[B_1^{-1}]}, \text{ con } j = 1, ..., J.$$

Se poi il tasso di interesse è costante l'equazione si semplifica in $U_j(0) = E_Q U_j(1)$.

Estendiamo ora questi risultati al modello multiperiodale.

Consideriamo il modello uniperiodale associato al tempo t e all'evento A in $\mathcal{P}_t$. Nel modello uniperiodale esistono opportunità di arbitraggio se e solo se esiste una strategia al tempo t tale che $V_{t+1}1_A \geq 1_A V_t B_{t+1} B_t^{-1}$. Un mercato multiperiodale è privo di opportunità di arbitraggio se e solo se tutti i modelli uniperiodali sono a loro volta privi di opportunità di arbitraggio. Di conseguenza esiste opportunità di arbitraggio se e solo se :

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)\Delta S_n^*(t+1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(t+1)\Delta U_j(t+1)B_{t+1}^{-1} \geq 0 \text{ per ogni } \omega \in A$$

e con disuguaglianza stretta per ogni $\omega \in A$

In analogia al modello uniperiodale possiamo concludere che un modello di mercato multiperiodale per i futures non ha opportunità di arbitraggio se e solo se esiste una probabilità strettamente positiva Q che rende il processo dei prezzi dei titoli scontati una martingala e che soddisfa:

$$U_j(t) = \frac{E_Q[U_j(t+1)B_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t]}, \text{ con } j = 1, ..., J$$

Altrimenti esprimibile come:

$$E_Q[\Delta U_j(t+1)B_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t] = 0 \text{ per ogni } t \geq 0 \text{ e } j = 1, ..., J$$

Se assumiamo che il processo B sia predicibile, cioè che B_1 sia costante all'interno del singolo periodo, l'equazione diventa più semplice ed utilizzabile perdendo relativamente poco in termini di affidabilità. Sotto questa ipotesi la condizione per assenza di arbitraggio si semplifica: i processi dei prezzi dei titoli scontati e dei prezzi dei futures non scontati devono essere martingale sotto Q.

Per quanto riguarda i futures ciò vuol dire che:

$$U_t = E_Q[U_\tau|\mathcal{F}_t]$$

Ma sapendo che $U_\tau = S_\tau$ troviamo che:

$$U_t = E_Q[S_\tau|\mathcal{F}_t] \tag{5.2}$$

Esempio

Consideriamo l'evoluzione di un titolo con $T = 2$ e $M = 4$ come segue: $S_0(\omega_1) = S_0(\omega_2) = S_0(\omega_3) = S_0(\omega_4) = 5, S_1(\omega_1) = S_1(\omega_2) = 8, S_1(\omega_3) = S_1(\omega_4) = 4, S_2(\omega_1) = 9, S_2(\omega_2) = S_2(\omega_3) = 6, S_2(\omega_4) = 3$.

Supponiamo inoltre $B_1 = 1, B_2(\omega_1) = B_2(\omega_2) = 17/16, B_2(\omega_3) = B_2(\omega_4) = 9/8$.

L'unica misura di probabilità che rende S^* una martingala é: $Q(\omega_1) = 5/24, Q(\omega_2) = 1/24, Q(\omega_3) = Q(\omega_4) = 3/8$.

Quindi, per la (4.2) si ha $U_0 = E_Q[S_2] = 5/24 * 9 + 1/24 * 6 + 3/8 * 6 + 3/8 * 3 = 5/2$. Per la (3.1) si ha $O_0 = \frac{S_0}{E_Q[B_2^{-1}]} = 5/((16/17 * 5/24) + (16/17 * 1/24) + (8/9 * 3/8 * 2)) = 255/46$.

Abbiamo mostrato come il prezzo di un forward e il prezzo di un futures, con la stessa attività sottostante e uguale data di consegna, possano essere diversi. Nel prossimo capitolo chiariremo il perchè.

Capitolo 6

Prezzi forward e prezzi futures

Finora abbiamo mostrato come, nel caso in cui il tasso d'interesse privo di rischio sia costante, il prezzo del forward e del futures siano uguali per contratti con la stessa data di scadenza. Nel caso in cui, invece, i tassi d'interesse varino in modo imprevedibile come nel mondo reale, i prezzi forward e futures sono diversi. Prendiamo infatti il caso di un forward su un titolo che non paga dividendi:

$$O_t = \frac{S_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]} = \frac{E_Q[S_\tau B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]} = \frac{E_Q[S_\tau B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}$$

Facendo il confronto con $U_t = E_Q[S_\tau|\mathcal{F}_t]$ si capisce come i due valori siano uguali se il processo B è deterministico, e diversi altrimenti.

Un esempio di diversità tra i due prezzi è quello di un titolo sottostante che è correlato positivamente col tasso d'interesse. Se il prezzo dell'attività sottostante cresce, l'investitore con una posizione lunga nel futures ottiene un guadagno. Tale guadagno è immediato a causa della procedura di liquidazione giornaliera e può essere investito ad un tasso d'interesse più alto della media poichè l'aumento del prezzo del titolo sottostante è legato ad un aumento di tasso.

Viceversa se il prezzo dell'attività sottostante diminuisce l'investitore subisce una perdita immediata, finanziata ad un tasso d'interesse più basso della media.

Un'investitore che ha stipulato un contratto forward su questa attività, invece, non subisce in tal modo l'influenza dei tassi d'interesse perchè, non essendoci nel contratto forward la procedura di liquidazione giornaliera, non ha la possibilità di investire ad un tasso più elevato della media gli eventuali guadagni né di finanziare ad un tasso più basso della media le eventuali perdite. In questo caso è quindi preferibile una posizione long sul futures rispetto a quella long sul forward.

Proponiamo ora un piccolo esempio chiarificatore.

Supponiamo di avere la possibilità di stipulare un contratto forward o futures con lo stesso prezzo (10 \$) su un bene il cui prezzo è correlato positivamente con i tassi d'interesse. Supponiamo inoltre che il tasso d'interesse tra il tempo 0 e il tempo 1 sia $r = 0.05$ e che il prezzo del bene sottostante rimanga pari a 10 \$ nel medesimo periodo. Tra il tempo 1 e il tempo 2, con probabilità 1/2, il prezzo del bene sottostante diventerà 11 \$ e $r = 0.06$ e, sempre con probabilità 1/2, il prezzo del bene sottostante diventerà 9 ed $r = 0.04$. Se stipuliamo il contratto forward il nostro guadagno atteso sarà nullo; infatti con probabilità 1/2 guadagneremo 11 \$ -10 \$ $=1$ \$ e con probabilità $1/2$ perderemo 10 \$ -9 \$ $=1$ \$. Supponiamo che un'istante dopo il tempo 1, si conosca già se il prezzo del titolo evolverà verso 11 o 9, e che quindi la liquidazione avvenga istantaneamente. Se stipuliamo il contratto futures, il dollaro guadagnato o perso sarà disponibile già al tempo 1 e quindi sarà rispettivamente investito ad un $r = 0.06$ o finanziato ad un $r = 0.04$ per un tempo pari a 1. Il guadagno atteso sarà pari a $1/2 * 1.06 - 1/2 * 1.04 = 0.01$ che è maggiore di quello atteso per il contratto forward. Quindi, in questo esempio, è preferibile il contratto futures.

Dalle considerazioni precedenti segue che il prezzo di un contratto per la posizione lunga sul futures con sottostante un titolo correlato positivamente con i tassi è più alto dell'equivalente forward. Analogamente se l'attività è correlata negativamente sarà più alto il prezzo forward. Solitamente le differenze tra prezzo forward e futures teorici sono trascurabili; le differenze possono diventare più significative e quindi più difficilmente trascurabili all'aumentare delle scadenze.

Capitolo 7

Copertura mediante Futures

I futures nascono dall' esigenza di società con interessi commerciali di assicurarsi contro le perdite dovute a oscillazioni del prezzo di beni che prevedono dovranno acquistare o vendere in futuro. Questa pratica prende il nome di copertura.

Supponiamo che una società sappia che in una certa data futura possiederà un'attività da vendere. Questa società potrebbe ritenere utile utilizzare una copertura corta (short hedge), per ridurre il rischio e ottenere un risultato più certo. Infatti se il prezzo dell'attività scende la società perde sulla vendita ma guadagna sulla posizione short nel futures, mentre se il prezzo dell'attività sale la società guadagna sulla vendita ma perde sulla posizione short. Allo stesso modo una società che dovrà comprare una certa attività ad un dato tempo futuro potrebbe assumere una posizione long sul futures (long hedge).

Il meccanismo di copertura appena esposto non è nella pratica facilmente attuabile. Possono infatti esserci alcune difficoltà:

- L'attività soggetta a copertura può non essere esattamente la stessa rispetto alla quale sono sottoscritti i futures.
- Può esserci incertezza sulla data in cui l'attività dovrà essere comprata o venduta.

7.1 Rapporto di copertura a varianza minima

Il rapporto tra la dimensione della posizione sui futures e la dimensione dell'esposizione è il rapporto di copertura (hedger ratio). Nel paragrafo precedente abbiamo posto tale rapporto pari a 1. In molti casi però un rapporto di copertura uguale a 1 non è ottimale ai fini della minimizzazione del rischio.

La variazione del valore dalla strategia durante la vita della copertura è:

- $\Delta S - h\Delta U$ per l'hedger lungo sull'attività e corto sul futures
- $h\Delta U - \Delta S$ per l'hedger corto sull'attività e lungo sul futures

La varianza del valore della strategia è in entrambi i casi:

$$v = \sigma_S^2 + h^2\sigma_U^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_U$$

Cerchiamo quindi di minimizzare la varianza utilizzando la derivata prima.

$$\frac{\partial v}{\partial h} = 2h\sigma_U^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_U$$

Dato che la derivata seconda è positiva il valore di h che minimizza la varianza è:

$$h = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}.$$

Se $\rho = 1$ un rapporto di copertura pari a 1, è ottimale solo se la varianza del prezzo futures e la varianza del prezzo spot sono uguali; ciò è banale in quanto il prezzo futures in tal caso è uguale a quello spot.

Esempio

Una società sa di dover acquistare tra sei mesi 2 milioni di galloni di combustibile areonautico. E' nota la deviazione standard delle variazioni semestrali del prezzo per gallone del combustibile areonautico: $\sigma_S = 0.018$. La società decide di coprirsi comprando futures sul combustibile da riscaldamento. La deviazione standard delle variazioni semestrali del prezzo del futures è: $\sigma_F = 0.027$; il coefficiente di correlazione tra le variazioni semestrali del prezzo del combustibile areonautico e le variazioni semestrali del prezzo del futures è: $\rho = 0.9$.

Il rapporto di copertura ottimale è: $h = 0.9 * \frac{0.018}{0.027} = 0.6$

La dimensione del contratto futures sul riscaldamento è di 50000 galloni.

La società dovrebbe comprare il seguente numero di contratti: $N = 0.6 * \frac{2000000}{50000} = 24$.

7.2 Strategie di copertura basate sulla duration

Un metodo alternativo all'utilizzo della varianza, per stabilire l'entità di un'operazione di copertura, è quello basato sulla duration.
Prima di introdurre la duration è però necessario fornire una definizione di yield curve.

7.2.1 Yield curve

Il rendimento alla scadenza (yield to maturity) è un processo stocastico, indicato con $Y^\tau = \{Y_t^\tau; t = 0, ..., \tau - 1\}$, che è associato ad ogni zero cupon bond. Il valore di Y_t^τ è il tasso d'interesse al quale bisogna investire una cifra pari al prezzo corrente dello zero cupon bond (Z_t^τ) per ottenere al tempo τ esattamente una cifra pari a $Z_\tau^\tau = 1$.

7.2.2 Duration

La duration di un'obbligazione è una misura del tempo medio che il portatore di un titolo deve attendere, per ricevere capitale e interessi. Uno zero cupon bond con scadenza ad n anni ha un duration di n anni, mentre un cupon bond con la stessa scadenza ha una duration inferiore in quanto parte dei pagamenti vengono fatti prima della scadenza. Supponiamo di essere all'istante 0 e consideriamo un titolo che garantisca al portatore i pagamenti c_i all'istante t_i $(1 \leq i \leq n)$ e indichiamo il prezzo del bond con B, il tasso di rendimento (composto continuamente) con y e con D la duration.

La duration del titolo è quindi:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}}{B} \tag{7.1}$$

Tale espressione può essere riscritta nel seguente modo:

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{c_i e^{-yt_i}}{B}$$

Come si vede dall'ultima espressione la duration è una media ponderata dei tempi in cui i pagamenti vengono effettuati, con pesi le quote del valore attuale del titolo dovute all'i-esimo pagamento.

La duration è utile per trovare la sensibilità, alle variazioni dei tassi, del valore del titolo. Per spiegarlo partiamo dal prezzo del bond. Il prezzo del titolo è la somma dei valori attuali dei pagamenti: $B = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i}$. Derivando, si ottiene che:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}$$

Ma anche $-BD = -\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}$ quindi possiamo affermare che:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -BD$$

Se avviene un piccolo spostamento parallelo Δy della yield curve, cioè se tutti i tassi d'interesse subiscono un leggero aumento Δy, anche i tassi di rendimento dei titoli aumenteranno di Δy. Possiamo quindi dire che $\frac{\Delta B}{\Delta Y} = -BD$ da cui:

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \tag{7.2}$$

Questo risultato è importante in quanto stabilisce che la variazione relativa del prezzo del titolo è pari alla sua duration moltiplicata per l'entità dello spostamento parallelo della yield curve.

Se l'oggetto del nostro interesse non è un semplice bond, ma un portafoglio di obbligazioni, possiamo definire la sua duration come la media ponderata delle duration dei titoli in portafoglio, con pesi uguali alla quota del valore attuale relativa al singolo titolo.

Esempio

Si consideri un titolo a tre anni con tasso cedolare del 10% e valore nominale di 100 \$. Si supponga che il tasso di rendimento effetivo del titolo sia del 12 % annuo composto continuamente, cioè $y = 0.12$. Le cedole di 5 \$ vengono pagate semestralmente.

Per calcolare la duration il primo passo è calcolare i valori attuali dei diversi flussi $VA = ce^{-yt}$. Per esempio per la prima cedola (5 \$ al tempo $t = 0.5$) il valore attuale è: $5 * e^{-0.12*0.5} = 4.709$ \$. La somma dei valori attuali costituisce il prezzo del titolo, cioè B.

Il passo successivo consiste nel calcolare i pesi: $\frac{c*e^{-yt}}{B}$; per la prima cedola il peso è $\frac{5*e^{-0.12*0.5}}{94.213} = 0.050$

Infine calcoliamo la duration sommando i prodotti dei pesi per i relativi tempi.

La tabella sottostante mostra tutti i calcoli necessari a trovare il valore della duration, che in questo esempio è 2.654.

Tempo(anni)	Pagamento ($)	Valore attuale($)	Peso	Tempo * Peso
0.5	5	4.709	0.050	0.025
1.0	5	4.435	0.047	0.047
1.5	5	4.176	0.044	0.066
2.0	5	3.933	0.042	0.084
2.5	5	3.704	0.039	0.098
3.0	105	73.256	0.778	2.334
Totale	130	94.213	1.000	2.654

7.2.3 Copertura

Spieghiamo ora l'utilità della duration nelle strategie di copertura.

Supponiamo di voler proteggere una posizione su un'attività che dipende dai tassi d'interesse (ad esempio un portafoglio obbligazionario), tramite un futures sui tassi d'interesse.

Sempre nell'ipotesi che gli spostamenti della yield curve siano paralleli possiamo affermare, come esposto nella (7.2), che:

$$\frac{\Delta S}{S} = -D\Delta y$$

Quindi:

$$\Delta S = -SD_S\Delta y$$

E' anche ragionevolmente assumibile che:

$$\Delta F = -FD_F\Delta y$$

Per coprirsi dalle variazioni del prezzo dell'attività bisognerà utilizzare un numero N^* di contratti futures tale che:

$$\Delta S = N^*\Delta F$$

Quindi:

$$N^* = \frac{\Delta S}{\Delta F} = \frac{-SD_S\Delta y}{-FD_F\Delta y} = \frac{SD_S}{FD_F} \tag{7.3}$$

N^* è chiamato rapporto di copertura basato sulla duration.

Esempio

Il 20 maggio, il tesoriere di una società apprende che il 5 agosto verranno incassati 3.3 milioni di dollari. L'importo sarà necessario per un importante investimento finanziario nel successivo mese di febbraio. Il tesoriere decide quindi di investire i fondi in treasury bills a 6 mesi non appena saranno disponibili. Il tasso di rendimento corrente dei treasury bills a 6 mesi, composto semestralmente, è pari all'11.2 %. Il tesoriere teme che questo tasso, tra il 20 maggio e il 5 agosto, possa scendere e decide di coprirsi usando i futures sui treasury bills. La quotazione del contratto futures su t-bills per settembre è di 89.44 $. In questo caso, la società perderà denaro se i tassi d'interesse scenderanno. La copertura deve pertanto consentire un profitto nel caso in cui i tassi d'interesse scendano, ossia se i prezzi dei treasury bills salgono. Ciò vuol dire che è necessaria una copertura lunga.

Per calcolare il numero di contratti futures su treasury bills che si dovrebbero acquistare, notiamo innanzitutto che l'attività sottostante in contratto futures ha una vita residua di 3 mesi. Poichè si tratta di uno strumento a sconto anche la sua duration è di 3 mesi, ossia 0.25 anni. Analogamente, l'investimento in treasury bills a 6 mesi previsto dal tesoriere ha una duration di 6 mesi, ossia 0.5 anni. Ogni contratto futures su treasury bills riguarda la consegna di titoli con valore nominale di 1 milione. Il prezzo contrattuale è

$$10000 * [100\$ - 0.25 * (100\$ - 89.44\$)] = 973600.$$

Usando l'equazione (6.3), il numero di contratti che si dovrebbe acquistaree è pari a

$$\frac{3300000\$}{973600\$} * \frac{0.5}{0.25} = 6.78$$

Arrotondando al più vicino numero intero, il tesoriere dovrebbe acquistare 7 contratti.

7.2.4 Limiti della duration

Le strategie legate alla duration non sono del tutto rigorose. Il primo problema è la fragilità dell'assunzione che gli spostamenti della yield curve siano paralleli; il secondo è legato a un fenomeno chiamato 'convexity'.

Spostamenti non paralleli della yield curve

Nel mondo reale i tassi d'interesse a breve termine sono spesso più volatili di quelli a lungo termine e non sono perfettamente correlati con questi. Infatti può addirittura succedere che i tassi a breve termine subiscano variazioni di segno opposto rispetto a quelli a lungo termine.

A causa di queste differenze le istituzioni finanziarie, al momento di stabilire la copertura, suddividono la curva dei tassi zero cupon in più segmenti e cercano di limitare l'esposizione alle variazioni di ciascun segmento.

Convexity

Quando avvengono spostamenti molto piccoli e paralleli della yield curve la variazione del valore del portafoglio può essere correttamente calcolata utilizzando la duration. Nel caso di spostamenti di entità media o grande la validità delle stime fatte secondo la duration è compromessa da un fattore detto convexity (convessità).

La figura 7.1 mostra la variazione relativa del valore di due titoli, X e Y, in relazione della variazione del tasso di rendimento. Si può notare che per piccole variazioni dei tassi, le differenze nelle variazioni relative del valore dei due portafogli sono trascurabili. Non sono invece trascurabili per grandi variazioni dei tassi di rendimento.

Il portafoglio X ha una convexity più elevata rispetto al portafoglio Y. Ciò vuol dire che il suo aumento relativo di valore è maggiore rispetto a quello di Y quando i tassi diminuiscono, mentre la sua diminuzione relativa è minore di quello del portafoglio Y quando i tassi aumentano.

La convexity di un portafoglio è bassa quando i pagamenti sono concentrati nelle vicinanze di una certa data, viceversa è alta se i pagamenti sono distribuiti in modo unforme nel periodo di tempo.

Una espressione della convexity è data dalla curvatura della relzione tra ΔX e ΔY:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 c_i e^{-y t_i}$$

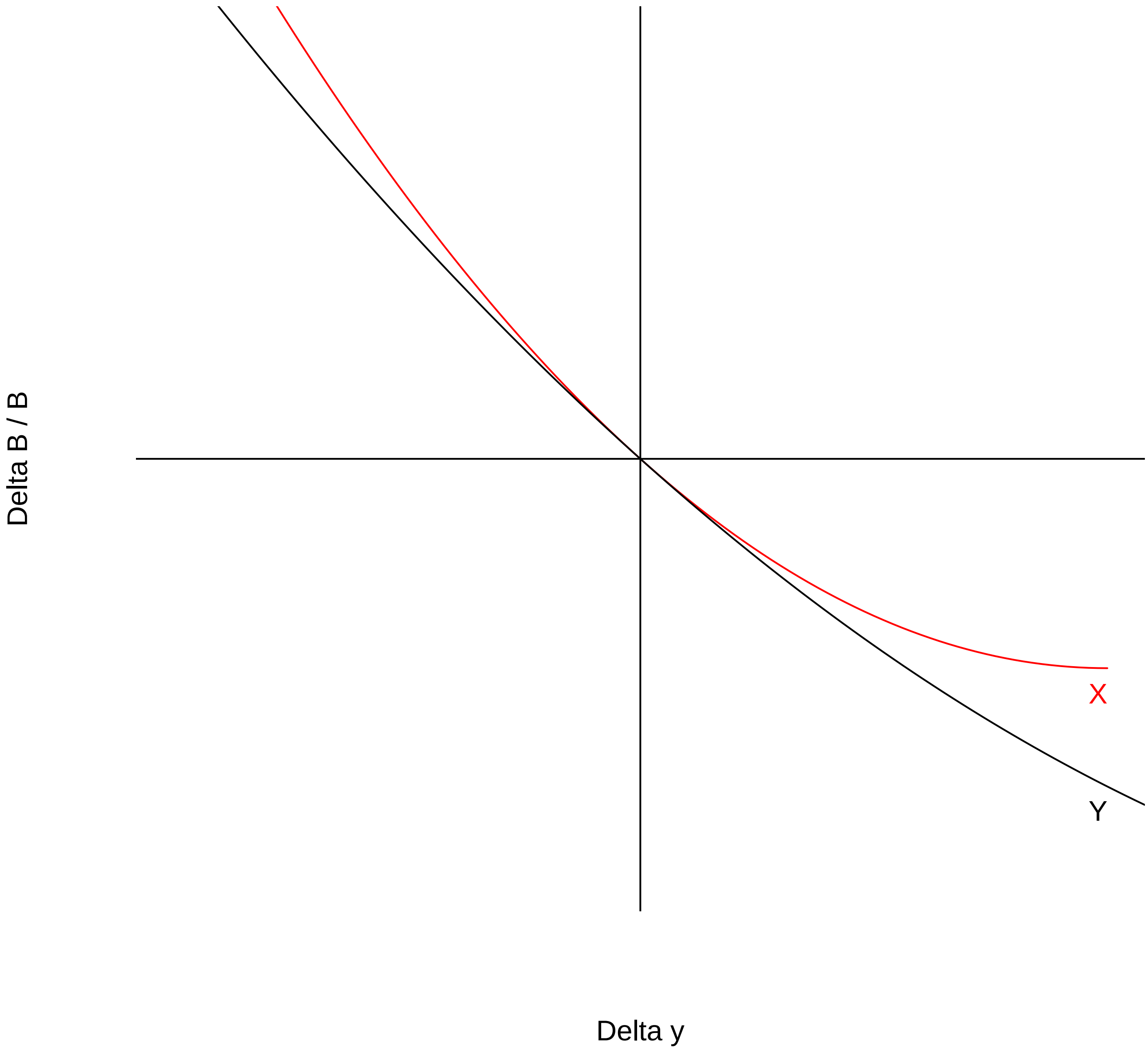

Figura 7.1: Portafogli obbligazionari con diversa convexity.

In conclusione, alcune istituzioni finanziarie, alla luce delle considerazioni su duration e convexity, utilizzano come copertura strategie che tendono a pareggiare duration e convexity relative all'attivo e al passivo.

Bibliografia

[1] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives.* Prentice Hall, Inc., 1997.

[2] Stanley R. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance.* Blackwell Publishers, Inc., 2001.