UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA
"Galileo Galilei"

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

Il diavoletto di Maxwell, tra meccanica classica e meccanica statistica

RELATORE: **Giulio Peruzzi**

LAUREANDA: **Cecilia Turozzi**

Anno accademico 2014/2015
Sessione di Laurea Primaverile

Indice

Introduzione

«La legge secondo cui l'entropia cresce sempre, il secondo principio della termodinamica, detiene a mio avviso il primato tra le leggi della Natura... Se scoprite una teoria che contraddice il secondo principio della termodinamica, per voi non c'è speranza: sprofonderete nell'umiliazione più nera.» [1, p. 87]

Con queste parole l'astronomo Arthur Eddington nel 1928 parla dell'importanza del secondo principio della termodinamica. Esso è stato per molti secoli ritenuto uno dei principi inviolabili della Fisica. Ma nella seconda metà dell'Ottocento James Clerk Maxwell formulò un esperimento mentale, il c.d. «diavoletto di Maxwell», che ha messo e mette tuttora a dura prova la validità del secondo principio.

In questa tesi partendo dalla prima formulazione di tale principio, passando poi dal concetto di entropia in termodinamica e in meccanica statistica, considerando tipi diversi di reazione, reversibile e non, si arriverà a spiegare in cosa consiste questo famoso "diavoletto".

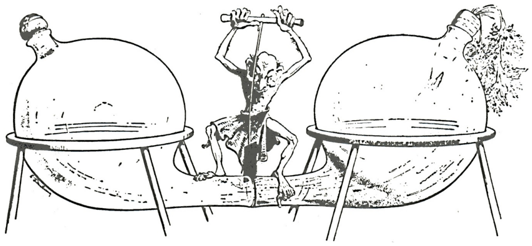

Figura 1: Il diavoletto di Maxwell all'opera. [9]

Si discuterà quindi della possibilità della sua esistenza in scale macroscopiche e in scale microscopiche, arrivando ad escluderla quando essa porta ad una violazione del secondo principio. Si analizzerà la prima «esorcizzazione» data dallo stesso Maxwell, poi si passerà a quella di Marian Smoluchowski (1912), dove il diavoletto è di natura meccanica e si arriverà alla trattazione data dal fisico Leó Szilárd (1929) che ha introdotto nella sua analisi il concetto di informazione e che ha sottolineato l'importanza del concetto di memoria. Partendo da quest'ultima formulazione, in alcuni punti debole, si andrà a vedere l'analisi di L. Brillouin (seconda metà del '900) basata sulla teoria quantistica della radiazione. Anche questa trattazione non risulta essere soddisfacente perché di natura non generale. Più generale e fondamentale sarà invece la risoluzione di R. Landauer e di C. H. Bennett (1982). Con quest'ultima trattazione, estesa a scale nanometriche, alla luce di recenti esperimenti che hanno permesso la verifica sperimentale del principio di Landauer (2012) in accordo con il teorema di fluttuazione (2009) [2] il diavoletto risulta, come si vedrà, esorcizzato.

Capitolo 1

Secondo Principio della Termodinamica. Entropia

R. Clausius e William Thomson (futuro Lord Kelvin), tra il 1850 e il 1851, formularono due enunciati tra loro equivalenti:

Enunciato di Rudolf Clausius. È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il passaggio di calore da un corpo più freddo ad uno più caldo. (1850) [3, p. 477]

Enunciato di William Thomson (Lord Kelvin). È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro (positivo) di calore tratto da un unica sorgente (a temperatura uniforme). (1851) [3, p. 478]

Entrambi gli enunciati sottolineano l'impossibilità di costruire delle macchine, frigorifera nel primo caso, termica nel secondo, perfette, in grado cioè di trasferire semplicemente calore da un corpo più freddo a uno più caldo (Clausius) o di convertire tutto il calore fornito alla macchina in lavoro (Thomson).

Un'altra formulazione più utile per comprendere il diavoletto è quella in termini di entropia. Tale termine fu introdotto per la prima volta da Clausius nel 1864 [4]. L'entropia è una funzione di stato che può essere definita in termini generali come la misura del grado di disordine dell'universo. Il secondo principio asserisce che l'entropia di un sistema termicamente isolato può crescere se il sistema sta eseguendo una trasformazione spontanea (irreversibile) o, rimanere costante, se il sistema sta eseguendo una trasformazione reversibile. Come avviene per altre variabili di stato, l'entropia viene definita a meno di una costante additiva arbitraria, in altri termini vengono definite per essa solo le variazioni:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ}{T} \,. \tag{1.1}$$

Da un punto di vista macroscopico, se si considera un processo irreversibile o spontaneo, si può affermare che l'evoluzione di tale funzione di stato segua quella del tempo. L'entropia totale dell'universo, che per sua natura è isolato, non può mai decrescere. Nella vita di tutti i giorni si ha un'ampia evidenza che l'universo non è immutabile e che la maggior parte dei cambiamenti è irreversibile. Si può dedurre che l'entropia dell'universo è in costante aumento e porterà infine alla morte termica dello stesso, cioè allo stato di massima entropia. Ma è veramente questo il suo destino? Se si rimanesse in un mondo in cui vale in termini assoluti la seconda legge la risposta sarebbe affermativa. In realtà le leggi che governano l'universo sono di natura molecolare. Queste leggi sono invarianti per inversione temporale e ciò impedisce l'esistenza di ogni fenomeno naturale che sia in grado di distinguere in modo assoluto tra passato e futuro [5, p. 19]. Le seconda legge della termodinamica non può essere quindi una legge rigorosa della natura. La domanda a questo punto sorge spontanea: «fino a che punto la seconda legge è corretta?». La risposta a questa domanda viene data dalla teoria cinetica e quindi dalla meccanica statistica. Essa è soddisfatta soltanto in media, ma nei fenomeni macroscopici le deviazioni da questa legge sono così rare che ai fini pratici, è come se non avvenissero mai.

Per capire meglio questo concetto è utile considerare un classico esempio di trasformazione irreversibile: l'espansione libera. Si suppone che un recipiente, con pareti adiabatiche, sia diviso in due parti di volume uguale da un setto e che una delle due parti sia riempita da un gas. Se si pratica un forellino nel setto, il gas si espande liberamente, distribuendosi equamente tra le due parti. La causa maggiore per la quale le molecole del gas si diffondono fino a riempire le due parti equamente, è dovuta sostanzialmente alle collisioni reciproche e con le pareti, che ne provocano la distribuzione casuale in tutto lo spazio disponibile e non, come si potrebbe essere portati a pensare, alla tendenza delle molecole, in seguito agli urti reciproci, di allontanarsi. Se la diffusione quindi ha una natura casuale, esiste una possibilità che tutte le molecole ritornino nella parte del recipiente dal quale sono venute; ma la probabilità che ciò avvenga con n molecole equivale alla probabilità di ottenere tutte teste nel lancio di n monete: $(\frac{1}{2})^n$. [6, p. 82]

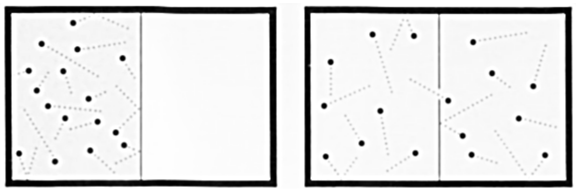

Figura 1.1: Espansione libera di un gas all'interno di un recipiente dove è stato praticato un foro nel setto che divide le due parti. [6]

Se si considera quindi un numero di molecole elevato, tale processo è irreversibile, ossia una trasformazione la cui reversibilità, per quanto possibile, è talmente improbabile da affermare che non verrà mai vista. Lo stato con il gas in entrambe le parti del recipiente, considerato uno stato disordinato, è più probabile dello stato ordinato in cui le molecole si trovano in una parte sola del recipiente. Questo sta a significare che lo stato in cui le

molecole riempiono l'intero recipiente ha un numero maggiore di configurazioni rispetto allo stato di partenza, o in altri termini ha maggiore entropia. Per esprimere il legame tra entropia e il numero di modi in cui uno stato si può realizzare, si deve distinguere, per un dato sistema, il suo stato macroscopico (macrostato) da un lato, definito dalle variabili termodinamiche e lo stato microscopico, meccanico (microstato) dall'altro.
Ad un determinato macrostato corrisponde un certo numero di microstati che lo realizzano. Questo numero si chiama probabilità termodinamica (chiamata così perché non è esattamente una probabilità dato che è sempre maggiore o uguale all'unità) del macrostato. Tale numero viene indicato con Γ.

I sistemi si evolvono verso (macro)stati di maggiore Γ e di maggiore entropia S. Le due quantità sono legate dalla relazione trovata da Ludwig Boltzmann nel 1877 nell'articolo *Fondamenti probabilistici della teoria del calore*:

$$S = k_B \ln \Gamma. \tag{1.2}$$

In meccanica statistica [5, p. 132], questo Γ viene indicato con $\Gamma(E)$ e rappresenta il volume occupato dall'ensemble nello spazio Γ detto spazio delle fasi del sistema. Si ha così:

$$\Gamma(E) = \int_{E<\mathcal{H}(p,q)<E+\Delta} d^{3n}p d^{3n}q, \tag{1.3}$$

$$S = k_B \ln \Gamma(E). \tag{1.4}$$

Dove $\mathcal{H}$(p,q) è l'hamiltoniana che descrive la dinamica del sistema. Essa è una funzione caratteristica il cui valore è pari all'energia totale del sistema. Il luogo geometrico dei punti Γ che soddisfano la condizione $\mathcal{H}$(p,q) = E è una superficie di energia E.

Si torni al caso dell'espansione libera, se vi sono n molecole in due parti queste hanno a disposizione 2^n volte il numero di configurazioni possibili per n molecole in una parte sola (il due sta ad indicare il volume doppio). Si dice che il gas nei due recipienti ha un numero di stati accessibili pari a 2^n volte quanti ne abbia in un singolo recipiente. Ora se si suppone che tutte le molecole del gas siano contenute in una delle due parti (uguali tra loro) di un recipiente, separate dall'altra da un setto che lo divide a metà, se si apre un orifizio, il gas si espande e raddoppia il volume. Come si è visto il rapporto tra i numeri di microstati che realizzano i due stati finale ed iniziale è 2^n, se n è il numero di molecole [3, pp. 581-583]. La variazione di entropia è quindi:

$$\Delta S = k_B \ln(\Gamma_2/\Gamma_1) = k_B \ln 2^n = nk_B \ln 2. \tag{1.5}$$

Capitolo 2

Il Diavoletto di Maxwell

Uno dei padri della teoria cinetica dei gas fu James Clerk Maxwell che, nella seconda metà dell'800, era giunto alla conclusione che la seconda legge della termodinamica poteva essere dimostrata solamente con argomenti probabilistici e che, di conseguenza, non ha la stessa validità in termini assoluti del principio di conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica). Essa è solo probabile, anche se il tempo trascorso dalla formazione del nostro pianeta ad ora è troppo breve perché vi possa esserci una probabilità significativa di osservare una violazione della legge in questione in un sistema macroscopico [7, p. 310]. In base al teorema di ricorrenza di Poincarè[1] vi è una probabilità non nulla che il sistema descritto, in un tempo sufficientemente lungo, evolva spontaneamente verso lo stato finale che sarebbe prodotto dall'azione del diavoletto (stato che verrà descritto qui di seguito e che viola il secondo principio); tale tempo di ricorrenza come stimò Boltzmann è, se considero un sistema di N_A particelle, e^{N_A} secondi. Se considero quindi una sola mole di particelle il tempo richiesto sarebbe significativamente maggiore dell'età dell'universo.

In linea di principio una violazione però è sempre possibile e Maxwell pensò così ad una creatura, chiamata poi demone da Lord Kelvin, capace di compiere quella violazione. Ne parlò per la prima volta nel 1867, poi nel 1870 in una lettera all'amico Lord Rayleigh ed infine la presentò pubblicamente nel 1871 nel libro "Theory of heat":

> *«But if we conceive a being whose faculties are so sharpened that he can follow every molecule in its course, such a being, whose attributes are still as essentially finite as our own, would be able to do what is at present impossible to us.»* [8, p. 308]

Si immagini una scatola isolata, contenente aria a temperatura uniforme. Le singole molecole d'aria hanno però velocità non uniformi. Si supponga adesso che tale recipiente sia diviso in due parti A e B da una parete isolante nella quale vi è una piccola apertura e che un essere in grado di vedere le singole molecole, apra e chiuda tale apertura, in modo da consentire il passaggio da A a B solo alle molecole più veloci e il passaggio da

[1] *Teorema di Ricorrenza.* Se un sistema ha un energia finita ed è confinato in un volume finito ritornerà, dopo un tempo sufficientemente lungo, in un intorno arbitrariamente piccolo di quasi qualunque stato iniziale assegnato [5, pp. 91-92].

B ad A solo alle molecole più lente.

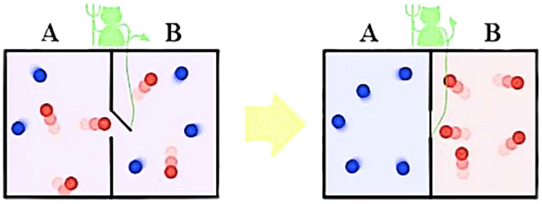

Figura 2.1: [2]

Il diavoletto quindi riuscirà ad alzare la temperatura di B ed abbassare quella di A senza compiere alcun lavoro in contraddizione con il secondo principio. In altri termini la creatura produce un flusso di calore da A e B anche quando il secondo è divenuto più caldo del primo, provocando cioè una diminuzione dell'entropia di A maggiore dell'aumento dell'entropia di B e, di conseguenza, una diminuzione dell'entropia totale dell'universo.

Capitolo 3

Diavoletti meccanici e diavoletti intelligenti

Come si risolve questo paradosso? Come salvare il secondo principio della termodinamica?

La risposta suggerita da Maxwell, secondo cui gli esseri umani non sono in grado di vedere e maneggiare singole particelle, non è del tutto soddisfacente, in quanto non vieta l'esistenza di una tale creatura. Per riuscire a esorcizzare il diavoletto è necessario analizzare innanzitutto semplici marchingegni che simulino l'attività del diavoletto. Si sostituisca il diavoletto con un meccanismo che agisca allo stesso modo (Figura 3.1), cioè che riesca a creare uno squilibrio spontaneo tra le due parti al quale corrisponda una diminuzione dell'entropia. Si consideri quindi una porticina a molla, che funziona come una valvola unidirezionale (tale molla deve essere molto debole).

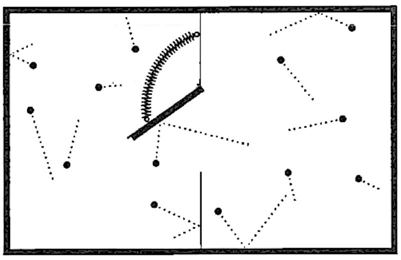

Figura 3.1: [6]

Ora si immagini che la porta si apra solo verso sinistra, se la valvola funziona come il diavoletto, ogni volta che una molecola della parte di destra urta la porta, questa si apre e la molecola passa nella parte di sinistra. Viceversa quando è una molecola della parte di sinistra ad urtare la porticina, essa rimane chiusa. Alla fine del processo tutte le molecole dovrebbero essere state intrappolate nella parte sinistra, cioè la valvola dovrebbe aver compresso il gas senza compiere alcun lavoro. In realtà un meccanismo del genere non funzionerà mai, perché, come notò nel 1912 Marian Smoluchowski [9, p. 11], la porta (della stessa scala delle molecole del gas) ripetutamente urtata dalle molecole, finisce per acquisire un'energia cinetica (sottoforma di energia termica, dello stesso ordine di grandezza dell'energia di agitazione termica delle molecole del gas); il risultato sarà che tale porta si aprirà e chiuderà in modo casuale, facendo passare alcune molecole per il verso opposto.

> *«Ogni tendenza della porta a funzionare come valvola a flusso unidirezionale, aprendosi per lasciare passare le molecole da destra a sinistra, è esattamente bilanciata dalla tendenza contraria a chiudersi davanti ad una molecola, spingendola da sinistra a destra, aiutata in questo dalla forza della molla.»* [6, p. 82]

Considerare però un diavoletto "meccanico" non è sufficiente a risolvere il paradosso. Se infatti il diavoletto fosse dotato di intelligenza cosa accadrebbe?

> *«Per quanto ne sappiamo oggi non esiste alcuna macchina automatica in grado di realizzare un moto perpetuo, malgrado fluttuazioni molecolari, ma un simile apparecchio potrebbe forse funzionare, qualora fosse azionato da esseri intelligenti.»* [1]

Nel 1929, il fisico Leó Szilárd pubblicò un lavoro che affrontava tale questione in termini quantitativi. Si intitolava: "Sulla diminuzione di entropia in un sistema termodinamico per intervento di un essere intelligente". Szilárd aveva preso in considerazione una versione del diavoletto differente da quella orginale di Maxwell, che divenne poi nota come "macchina di Szilárd". La sua intuizione fu quella di incorporare l'informazione nel sistema.

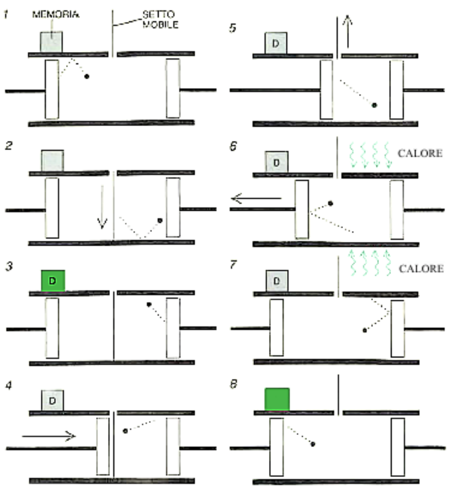

Figura 3.2: Rivisitazione dell Macchina di Szilárd di Bennett. [6]

Il componente principale di tale macchina è un cilindro nel quale è contenuta una sola molecola, soggetta ad agitazione termica casuale. Tale cilindro ha le estremità chiuse da due pistoni ed è munito di un setto mobile. Per completare la struttura della macchina

[1] Marian Smoluchowski, 1914

si hanno delle apparecchiature per osservare il contenuto del cilindro e memorizzare le osservazioni.
La macchina presa in considerazione[2] compie un ciclo di 6 fasi e differisce leggermente da quella originale di Szilárd (descritta in appendice) che ne compie 4.
Durante la prima fase (Figura 3.2(2)) si abbassa il setto, intrappolando la molecola in una metà del cilindro. Nella seconda e terza fase, il sistema di osservazione determina e memorizza la posizione della molecola (Figura 3.2(3)) e il pistone dalla parte opposta viene spinto fino a toccare il setto (Figura 3.2(4)). Il pistone viene spostato senza compiere lavoro, dato che si muove nel vuoto. Nella quarta e quinta fase il setto viene ritirato (Figura 3.2(5)) e la molecola urta il pistone (il gas monomolecolare si «espande»), spingendolo indietro (Figura 3.2(6)). L'energia spesa dalla molecola nel compiere lavoro sul pistone è compensata dal calore sottratto all'ambiente. Quando il pistone è tornato nella posizione originale (Figura 3.2(7)), inizia la sesta e ultima fase dove la memoria viene cancellata (Figura 3.2(8)) e il ciclo può ricominciare [6, p. 85].
Il risultato complessivo del ciclo compiuto da tale macchina è un'apparente conversione di calore sottratto all'ambiente in lavoro, con una diminuzione di entropia dell'universo. Per fare questo il diavoletto deve però osservare e memorizzare le posizioni della particella, per capire quando deve alzare il setto mobile e riportare così il sistema alle condizioni di partenza.
La soluzione del paradosso proposta da Szilárd consisteva nel postulare che l'azione di misurazione, nel corso della quale viene determinata la posizione della molecola, aumenti l'entropia dell'ambiente circostante:

> *«One may reasonably assume that a measurement procedure is fundamentally associated with a certain definite average entropy product, and that this restores concordance with the second law. The ammount of entropy generated by the mesurement may, of course, always be greater than this foundamental ammount, but not smaller.»* [9, p. 16]

Szilárd identifica la quantità fondamentale di entropia con la quantità:

$$S = k_B \ln 2. \tag{3.1}$$

Quindi l'informazione data dalle misure può essere usata o trasferita, in un sistema fisico per diminuire la sua entropia, organizzando il sistema, ma tale diminuzione sarà sempre inferiore all'aumento di entropia dell'ambiente, a cui si deve aggiungere l'aumento di entropia dovuto alla perdita di calore nei vari passaggi del ciclo, poiché essi non sono efficienti al 100%.

Szilárd però rimase alquanto vago a proposito della natura e della collocazione di tale aumento di entropia, non specificando se esso si riferisca alla misura, alla memorizzazione o alla cancellazione dell'informazione. Se da un lato quindi non era riuscito ad esorcizzare completamente il diavoletto, dall'altro aveva compreso, prima della nascita delle moderne idee di informazione e prima dell'età del computer, l'importanza del concetto di informazione associato a processi binari, scoprendo quello che oggi viene chiamato bit

[2]Rivisitazione di Bennett

di informazione [3] [9, p. 16].
Quest'ultimo concetto verrà ripreso nel capitolo 6, dove risulterà estremamente importante per risolvere definitivamente il paradosso del diavoletto.

[3] Un bit può avere due significati differenti:

- *binary unit* è l'unità di misura dell'informazione; rappresenta la quantità minima di informazione necessaria per distinguere tra due possibili eventi equiprobabili;
- *binary digit* è una cifra binaria, rappresenta l'unità di definizione di uno stato logico; un bit può assumere solo uno dei due valori possibili, che vengono comunemente rappresentati con i simboli «0» e «1».

[21, pp. 61,62] [22].

Capitolo 4

Diavoletti e segnali luminosi

Negli anni che seguirono la pubblicazione del lavoro di Szilárd, molti fisici, tra cui Léon Brillouin e, indipendentemente, Denis Gabor, approfondirono il concetto di misurazione cercando di dare delle basi alla sua natura irreversibile [9, p. 18]. Fondamentale per il loro lavoro fu la teoria quantistica della radiazione. I fotoni, quanti della radiazione elettromagnetica del corpo nero, sono contenuti in un recipiente ed hanno una ben definita distribuzione di energia dettata dalla teoria quantistica. L'energia di un singolo fotone dipende dalla sua lunghezza d'onda ed è impossibile osservare meno di un fotone. Brillouin era giunto all'idea che per osservare una molecola questa deve diffondere almeno un fotone del fascio di luce utilizzato per individuarla. Facendo ciò, l'energia del fotone si dissipa e vi è un aumento di entropia almeno equivalente al calo di entropia dovuto all'informazione ottenuta. Ma che energia deve avere il fascio di fotoni? L'idea di utilizzare un fascio a bassa energia non funziona per un'altra conseguenza della teoria quantistica. Per capire questo punto, si prenda un recipiente le cui pareti e il cui interno si trovino a temperatura uniforme, e si consideri riempito con un «gas» di fotoni. Le varie lunghezze d'onda dei fotoni dipendono dalla temperatura alla quale si trova il recipiente.

> *«Questo «gas» di fotoni è responsabile della luminosità uniforme di colore giallo o arancione che si osserva all'interno di una fornace*[1]*. A prima vista, il gas di fotoni sembrerebbe un'ottima sorgente di luce per mezzo della quale il diavoletto potrebbe osservare le molecole, risparmiando così il costo entropico di una lampada.»* [6, p. 85]

Una conseguenza del secondo principio, scoperta sperimentalmente da Gustav Robert Kirchhoff nel 1859, dice che risulta impossibile vedere gli oggetti contenuti in un recipiente a temperatura uniforme usando la radiazione luminosa emessa dal recipiente stesso [6, p. 85].

> *«In effetti, se si osserva, per esempio, l'interno di un forno nel quale vengono cotti alcuni vasi, si vede una luminescenza arancione uniforme, quasi completamente priva di contrasto, anche se i vasi hanno colori e superfici completamente diversi. Gli oggetti nel forno*

[1] I fotoni possiedono, a temperatura ambiente (313K) energie corrispondenti alla zona infrarossa dello spettro e quindi non sono visibili.

appaiono come se avessero tutti la medesima luminosità e tonalità di colore, ma si può verificare che non è così illuminandoli dall'esterno con un fascio di luce sufficientemente intenso. La ragione per la quale gli oggetti nel forno quasi scompaiono è che quelli scuri (che riflettono meno la luce) emettono una luce più intensa di quelli chiari (più riflettenti): in questo modo, l'intensità totale della luce (emessa e riflessa) che proviene da ogni oggetto è sempre la stessa.» [6, p. 85]

Dunque, per vedere i singoli oggetti all'interno in una fornace è necessario illuminarli dall'esterno, per esempio con una lampada il cui filamento sia a temperatura superiore di quella esistente dentro il forno. Si consideri, ad esempio, la distribuzione non uniforme della radiazione di un corpo nero. Per un gas ad una temperatura T, la legge di Wien[2] dà una lunghezza d'onda di massima densità spettrale, $\lambda_m(T) \approx 2900/T\ \mu m$. Ipotizzando una temperatura ambiente $T = 290K$, la regione di lunghezza d'onda in prossimità di $\lambda(290) \approx 10\mu m$ può essere evitata con una torcia che emette ad una lunghezza d'onda $\lambda \ll \lambda_m$. Da questa scoperta e dagli studi di Pierre Demers (1944-1945) [9, p. 18], che era arrivato alla medesima conclusione, Brillouin concluse che il diavoletto di Maxwell non poteva vedere le molecole da selezionare senza impiegare una qualunque sorgente di luce con una certa energia minima.

In altre parole, ogni volta che il diavoletto osserva una molecola deve dissipare l'energia di almeno un fotone; tale energia poi deve essere maggiore di un valore minimo che dipende dalla temperatura del gas di fotoni dentro il quale il diavoletto è immerso (se si considerano, infatti, sorgenti con frequenze minori, non sarebbe possibile da parte del diavoletto osservare le particelle). Importante, in relazione con la proposta di Brillouin, è la teoria matematica dell'informazione di Claude Elwood Shannon e Warren Weaver (1949) legata ai processi di comunicazione. Shannon introdusse una funzione matematica, l'«*entropia informazionale*» [9, p. 19]. Anche se tale funzione ha un forte legame con l'entropia dell'ensemble canonico in meccanica statistica, l'approccio di Shannon era molto differente [10]. Al contrario, Brillouin postulò coraggiosamente una diretta connessione tra l'«*entropia informazionale*» e l'entropia termodinamica. Egli suppose che, dato un sistema fisico, esso si può trovare in uno qualsiasi degli stati P_0 con uguale probabilità, non conoscendo lo stato in cui effettivamente si trova. Assegnò, poi, l'informazione $I_0 = 0$ quando non si conosce nessuno degli stati del sistema. Ora, se mediante una misura si elimina uno di questi stati dalle possibilità, riducendo il numero di $P_1 < P_0$, le informazioni così raccolte sono definite come:

$$I_1 = K' \ln(\frac{P_0}{P_1}) \tag{4.1}$$

K' rappresenta una generica costante positiva. Se il numero di stati aumentasse, I_1 sarebbe negativa, e per esempio avremmo avuto una perdita di informazione. Brillouin distinse tra due tipi di informazioni, «*free*» e «*bound*», per gestire quelle prive di significato termodinamico [9, p. 19]. «*Free information*» (I_f) si riferiva ad un concetto astratto senza significato fisico. «*Bound information*» (I_b) è definito in termini dei possibili stati

[2] $\lambda_{max} T = \frac{hc}{4.965 k_B} = 2.898 \cdot 10^{-3} m\ K$ [11, p. 316].

fisici. Brillouin diede come esempio di «*Free information*» la conoscenza posseduta da un individuo. Questa conoscenza si trasforma in «*bound information*» quando viene trasmessa da un individuo ad un altro mediante segnali fisici. Brillouin pensava che fosse il carattere fisico dei segnali a rendere le informazioni che essi portano «*bound*». Nel processo di comunicazione, l'informazione potrebbe essere distorta o in parte persa; per esempio I_b può diminuire. Quando la «*Bound information*» risultante arriva ad un altro individuo, è considerata nuovamente «*Free information*». Brillouin collegò le variazioni di «*Bound information*» con le variazioni di entropia di un sistema fisico con l'ipotesi:

$$I_{b1} - I_{b0} = k(\ln P_0 - \ln P_1) = S_0 - S_1 > 0 \tag{4.2}$$

Dove la costante arbitraria K' dell'equazione 4.1 viene qui posta uguale alla costante di Boltzmann k_B; S_0 e S_1 sono i valori di entropia iniziali e finali del sistema fisico. Ponendo $K' = k_B$ si riesce a confrontare l'«*entropia informazionale*» con l'entropia fisica, nel senso che esse hanno ora la stessa unità di misura. L'ipotesi di Brillouin impica che la «bound information» guadagnata da un sistema fisico, diminuisce l'entropia fisica del sistema stesso. Continuando il ragionamento di Brillouin si introduce ora il concetto di «negentropy»:

$$N = -(entropy) \tag{4.3}$$

con variazione pari a:

$$\Delta N = -(entropychange) = -\Delta S \tag{4.4}$$

Si applica quindi il «Negentropy Principle of Information»[3] ad un sistema fisico isolato. L'entropia del sistema è $S_1 = S_0 - I_{b1}$, come sopra. Ora si può riscrivere la seconda legge della termodinamica come:

$$\Delta S_1 = \Delta(S_0 - I_{b1}) = \Delta S_0 - \Delta I_{b1} = -\Delta N - \Delta I_{b1} \geq 0 \tag{4.5}$$

Figura 4.1: [9]

[3]Léon Brillouin, 1953

La quantità ($negentropy + information$) non può mai aumentare, e nel caso di trasformazioni reversibili, essa rimane costante.
Con questa nuova interpretazione della seconda legge della termodinamica, Brillouin cercò di «esorcizzare» il diavoletto. È interessante notare come l'attenzione posta all'acquisizione di informazioni sembra togliere completamente l'interesse per gli aspetti di memoria che Szilárd aveva invece sottolineato. Questo fatto è evidente nel tentativo proposto da Brillouin di risolvere il paradosso: in esso infatti vengono completamente ignorati gli aspetti fisici della memoria. Ragionamenti come quello di Brillouin sono corretti ma non sono generali. Se al posto di una sorgente di fotoni il diavoletto utilizzasse qualcosa di differente per identificare la posizione delle molecole, il secondo principio sarebbe sempre rispettato?

Capitolo 5

Bennett e Landauer, una nuova risoluzione

5.1 Il principio di Landauer

A metà del '900 quindi non si poteva ancora affermare con assoluta certezza che il diavoletto fosse stato del tutto esorcizzato. Molti fisici ero convinti che la soluzione fornita da Szilárd, cioè che la misurazione comportasse necessariamente un aumento di entropia, fosse la strada corretta. La situazione non ebbe ulteriori sviluppi fino agli anni '60 quando venne finalmente compiuto il passo successivo che mostrò come la misurazione non implicava necessariamente un aumento di entropia. Tale passo è il risultato collaterale delle ricerche condotte da Rolf Landauer della IBM (International Business Machines) sulla termodinamica dell'elaborazione di dati.
Fino agli anni '50, invece, si pensava che:

> *« Alcune operazioni di elaborazione come la copiatura di dati di un sistema di memoria a un altro, sono analoghe ad una misurazione, in quanto un sistema acquisisce conoscenze sullo stato di un altro.[...] si conveniva che le operazioni di elaborazione fossero intrinsecamente irreversibili (nel significato termodinamico della parola), proprio come Szilárd aveva sostenuto per le misurazioni»* [6, p. 87]

L'idea comune era che qualsiasi operazione sui dati implicasse la produzione e la rimozione di almeno un bit di calore per ogni bit di dati elaborato. Tale quantità era piccolissima, circa un decimo di miliardesimo del calore prodotto dai circuiti elettronici. Intorno al 1960 però Landauer esaminò il problema più a fondo e si rese conto che alcune operazioni avevano un costo energetico mentre altre no. Tra queste ultime rientrava anche, in determinate situazioni, la copiatura di dati. L'intuizione di Landauer si basava sull'idea che stati logici differenti di un calcolatore devono essere rappresentati da stati fisici diversi del suo hardware. Si consideri per esempio ogni stato possibile della memoria di un calcolatore, ognuno dei quali deve essere rappresentato da un insieme distinto di correnti, tensioni, campi e così via [6, p. 87]. Si supponga che un registro di memoria di n bit venga cancellato, in altre parole, ogni sua locazione venga posta uguale a zero, indipendentemente dallo stato iniziale. Il registro, prima della cancellazione, può trovarsi in uno qualsiasi dei suoi 2^n stati possibili. Dopo l'operazione esso può essere in un solo stato. Landauer identificò varie altre operazioni termodinamicamente irreversibili. Tutte queste operazioni hanno in comune il fatto di scartare informazioni concernenti lo stato precedente del calcolatore. Landauer chiamò tali operazioni «logicamente irreversibili». Ora, secondo Landauer, per cancellare un bit di informazione dalla memoria, o in altri termini per comprimere lo stato logico di un calcolatore, si deve anche comprimere il suo stato fisico. Occorre quindi diminuire l'entropia dell'hardware.

> *«According to the second law, this decrease in the entropy of the computer's hardware cannot be accomplished without a compensating increase in the entropy of the computer's environment. Hence one cannot clear a memory register without generating heat and adding to the entropy of the environment. Clearing a memory is a thermodynamically irreversible operation.»* [13, p. 15]

La quantità minima di calore che deve essere prodotta è pari:

$$W = k_B T \ln 2 \tag{5.1}$$

per ciascun bit cancellato. Dove k_B è la costante di Boltzmann e T è la temperatura in Kelvin. Quello che è stato appena descritto è il *principio di Landauer (1961)* e la quantità minima di calore rappresenta il così detto *limite di Landauer*. L'operazione appena descritta è un'operazione logicamente irreversibile. Il principio di Landauer mette in risalto due fatti:

- l'irreversibilità logica di una computazione implica l'irreversibilità fisica del sistema che la effettua ("l'informazione è fisica");
- i calcoli logicamente reversibili possono essere almeno in principio intrinsecamente non dissipativi (in rapporto con il teorema di Carnot sui motori termici, che mostra che i motori più efficienti sono reversibili, ed il teorema di Clausius, che attribuisce un cambiamento di entropia nullo ai processi reversibili).

La rilevanza di queste idee nel problema della misurazione, implicita nel lavoro di Landauer stesso e nei modelli reversibili di elaborazione sviluppati nel corso degli anni settanta da Edward Fredkin, Tommaso Toffoli, Charles Henry Bennett e da altri fisici, divenne chiara verso la gli inizi degli anni '80 [6].

5.2 La risoluzione di Bennett e Landauer

Bennett propose di applicare il principio di Landauer al problema del diavoletto. Nel 1982 Landauer e Bennett conclusero che l'azione di riportare la macchina di Szilárd alle condizioni iniziali è logicamente irreversibile, in quanto comprime due stati possibili in uno solo (in cui la posizione della molecola non è stata ancora determinata). La macchina quindi non può azzerare la sua memoria senza far salire l'entropia dell'ambiente di almeno un bit. Bennett concluse che il diavoletto non può violare il secondo principio perché se vuole osservare la posizione di una molecola deve dimenticare i risultati delle misure precedenti. Inoltre Bennett riuscì a generalizzare il risultato di Léon Brillouin e Denis Gabor, ideando un dispositivo in grado di misurare le posizioni in termini reversibili, cioè senza un aumento di entropia. Un'ulteriore osservazione venne fatta sempre da Bennett nel caso di un diavoletto di memoria molto grande. In questo caso non ci sarebbe alcun processo logicamente irreversibile.

> *«La macchina potrebbe convertire in lavoro, a ogni ciclo, l'equivalente di un bit di calore. Ma in questo caso il ciclo non è più un ciclo: ogni volta la memoria inizialmente azzerata, acquisirebbe un altro bit di informazione casuale. La corretta interpretazione termodinamica di questo fatto può essere espressa dicendo che la macchina aumenta l'entropia della propria memoria per diminuire quella dell'ambiente.»* [6, p. 87]

Capitolo 6

L'esorcismo del diavoletto

6.1 Il ritorno del diavoletto

Negli anni che seguirono le pubblicazioni di Bennett molti fisici si interrogarono sulla validità della sua soluzione. Nei primi anni '90 Carlton M. Caves e precedentemente Wojciech H. Zurek avevano studiato tale risoluzione. Caves riteneva però che considerando un diavoletto più complesso essa si sarebbe rivelata non corretta. Ideò quindi una versione del diavoletto formata non da un singolo recipiente ma da 10 e inserendo in ognuno una molecola (la prima versione prevedeva non 10 ma 2 macchine di Szilárd [13, p. 19]). Si può pensare a tale struttura come a 10 macchine di Szilárd in parallelo, cioè indipendenti l'una dall'altra; dove la perdita di calore descritta dal principio di Landauer è ancora verificata. 10 bit sarebbero necessari per memorizzare le informazioni sulle molecole in tutte le caselle; questi poi potranno essere cancellati annullando così qualsiasi diminuzione di entropia. Caves pensò che ci fosse un modo per evitare la cancellazione dei 10 bit.
Si consideri un diavoletto in grado di monitorare la posizione delle molecole e attendere l'occasione molto rara in cui tutte le molecole si trovano da un lato del recipiente, per esempio a sinistra. Si potrebbe ora memorizzare tutte le posizioni in un singolo bit.
«1» rappresenterebbe lo stato con tutte le molecole a sinistra. «0» rappresenterebbe qualsiasi altro stato.
Quando si verifica questa rara configurazione, tutti i pistoni sono posti sul lato destro di tutte le macchine e viene così estratto del lavoro da ognuno. Ma dato che si hanno 10 macchine, il lavoro risulta 10 volte maggiore rispetto a quello della singola macchina.
Tuttavia, poiché i dati sono stati memorizzati in un singolo bit, Caves suggerì che solo un bit di memoria dovrà essere poi cancellato. Quindi risulterebbe un perdita di calore molto inferiore rispetto al lavoro guadagnato.

Tale argomentazione sembra convincente però presenta un grosso difetto: per capire se tutte le molecole sono sul lato sinistro, il diavoletto dovrebbe prima misurare la posizione di tutte. Questa operazione, che è una trasformazione intermedia rappresenta un ulteriore processo logicamente irreversibile. Non solo si deve dissipare l'energia per cancellare il bit di memoria «1» o «0» che si ottiene alla fine, ma si deve anche spiegare la perdita di 10 bit di informazione sulla posizione della molecola in ogni singolo contenitore. Se si ottiene uno zero in uscita, gli ingressi avrebbero potuto trovarsi in una qualsiasi delle 1023 possibili combinazioni ($2^{10} - 1$) e non si ha modo di lavorare a ritroso per scoprire quale. 10 bit di dati devono essere quindi distrutti, viene dissipata energia e la seconda legge è ancora salva [18].

6.2 Generalizzazione del principio di Landauer e verifica sperimentale

In seguito a questa e ad altre critiche ma sopratutto agli sviluppi della meccanica statistica di non-equilibrio applicata ai processi di elaborazione di dati [16] era chiaro che la soluzione fornita da Bennett poteva presentare dei limiti. E' importante sottolineare che nella sua analisi non erano mai state considerate le fluttuazioni termiche, poiché nei suoi studi aveva analizzato solo sistemi di grandi scale, tali che fluttuazioni di questo tipo potessero essere facilmente scartate [2].
Tuttavia tali fluttuazioni diventano predominanti in sistemi microscopici. Attraverso calcoli e simulazioni Eric Lutz e Raoul Dillenschneider, a livello preliminare, hanno visto che tali fluttuazioni termiche sulla cancellazione di memoria in scale nanometriche potrebbero portare ad un consumo di calore inferiore al limite di Landauer. Da qui nasce l'esigenza di generalizzare il principio di Landauer e il secondo principio della termodinamica includendo nel caso di scale nanometriche queste fluttuazioni termiche. Lutz parla così della sua ricerca:

> *«it is known that thermal fluctuations dominate at these length scales. However, our investigations showed that they can have observable consequences in nanomemories: information may be erased by dissipating less heat than required by Landauer's principle. Our second main contribution was to propose an experiment that may allow us to study these effects using single-particle devices. Landauer's principle, despite its fundamental importance as a link between thermodynamics and information theory, hasn't been investigated experimentally yet.»* [2]

Il risultato quindi presenta anche la possibilità che il diavoletto di Maxwell possa causare un diminuzione di entropia. Gli scienziati hanno però notato che le grandi fluttuazioni sono soppresse anche in sistemi in nanoscala in accordo con la formulazione macroscopica del principio di Landauer. Lutz afferma che tali fluttuazioni di entropia negativa sono legittime su scala nanometrica e risultano esponenzialmente piccole come descritto dal teorema di fluttuazione[1]. Lo stesso Lutz con altri fisici nel 2012 è riuscito a verificare sperimentalmente il principio di Landauer. L'esperimento prevedeva l'utilizzo di un sistema a singola particella colloidale intrappolata in una doppia buca di potenziale creata grazie a un fascio laser. Lutz *et al.* hanno stabilito che la media del calore dissipato satura attorno al limite di Landauer se considero il limite di lunghi cicli di eliminazione

[1] $\frac{\mathcal{P}(-\sigma)}{\mathcal{P}(\sigma)} = e^{-\sigma t}$ dove σ rappresenta le fluttuazioni di entropia negativa [23].

[14, p. 187]. Il bit è rappresentato da un modello con una doppia buca di potenziale e una pallina che sta da una parte o dall'altra. Lutz e il suo gruppo di ricerca ha sperimentalmente dimostrato il principio di Landauer descrivendo ciò che accade da un punto di vista energetico e dissipativo quando si esegue uno switching tra lo stato «0» e lo stato «1» o, viceversa, per simulare rispettivamente la memorizzazione del dato ed il corrispondente necessario reset; tutto questo deve considerare in media più di 600 cicli. [14][19].

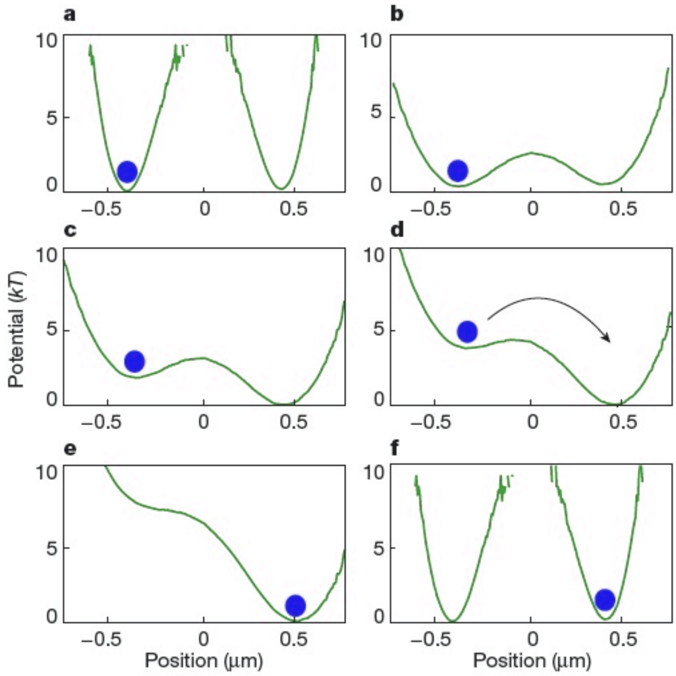

Figura 6.1: Un bit d'informazione memorizzato in un potenziale con due equilibri stabili viene cancellato dal primo abbassamento della barriera centrale e viene poi applicata una forza di inclinazione. Nelle figure, si rappresenta la transizione dallo stato iniziale «0» (nella buca di sinistra), allo stato finale, «1» (nella buca di destra). I potenziali delle curve mostrate sono quelle misurate nell'esperimento di Lutz [14, p. 188].

> *«I nostri risultati sperimentali mostrano che il limite termodinamico per la cancellazione dell'informazione, il limite di Landauer, può essere avvicinato in un regime quasi-statico, ma non superato.»* [20]

Così Lutz parla dei risultati ottenuti. Si può concludere quindi che risulta possibile realizzare in laboratorio un «diavoletto» che per funzionare deve prelevare energia dall'esterno del sistema termodinamico considerato. Tale energia (per ora molto maggiore del limite di Landauer) è quella necessaria per cancellare la memoria del diavoletto; quest'ultima operazione risulta necessaria per permettere al diavoletto di ricominciare a misurare la velocità delle particelle [19].

Capitolo 7

Conclusioni

Dopo più di un secolo dalla sua formulazione (1871, James Clerk Maxwell) il diavoletto sembra essere stato esorcizzato. Partendo da semplici diavoletti meccanici (1912, Marian Smoluchowski), si è poi passati a diavoletti intelligenti (1929, Leó Szilárd); in questo caso fondamentale è stata l'intuizione di Szilárd di introdurre nei suoi ragionamenti il concetto di informazione e di sottolineare l'importanza della memoria. Poi con argomentazioni sulla teoria quantistica della luce (Léon Brillouin e Denis Gabor, anni '50) l'attenzione si è spostata dal concetto di memoria a quello di acquisizione dell'informazione.

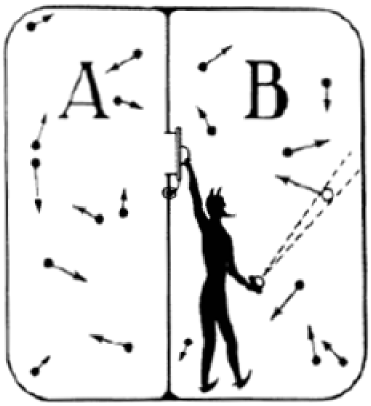

Figura 7.1: [9, p. 10]

Quest'ultima trattazione, anche se affascinante, perde di generalità e perde di vista la chiave per risolvere il paradosso.
La chiave è rappresentata proprio dal concetto di memoria e, in particolare, dalla cancellazione di memoria. Tale intuizione, come si è visto, è alla base del *principio di Landauer* (1961) che pone un limite minimo al calore che deve essere dissipato per cancellare un bit di informazione:

$$W = k_B T \ln 2 \tag{7.1}$$

Partendo da questo principio si è arrivati alla soluzione di Bennett e di Landauer (1982), basata sull'utilizzo della macchina si Szilárd:

> *« A Maxwell demon makes use of information to convert thermal energy of a reservoir into work. A quantitative example is a thought experiment known as a Szilárd engine, which uses one bit of information about the position of a thermalized molecule in a box to extract $k_B T \ln 2$ of work. The second law of thermodynamics remains valid because, according to Landauer principle, erasure of the information dissipates at least the same amount of heat.»*
> [15]

Poi da scale molto grandi si è passati a studiare sistemi di scale nanometriche e si è visto che con le dovute generalizzazioni (introducendo il teorema di fluttuazione), sia il principio di Landauer (verificato sperimentalmente nel 2012) sia il secondo principio della termodinamica sono in media ancora validi. Da qui, data la conferma della validità della seconda legge, si può affermare che un essere come l'aveva concepito Maxwell, in grado di violare il secondo principio, non può esistere.

Appendice A

La Macchina di Szilárd

Nel 1929 Leó Szilárd introdusse il suo famoso modello, in cui un essere intelligente, il diavoletto, riesce a convertire calore in lavoro. La macchina di Szilárd è costituita da un cilindro in cui si ha un gas formato da una sola molecola. Inizialmente l'intero volume V del cilindro è disponibile per il moto termico della molecola. La prima fase consiste nel mettere una partizione nel cilindro, dividendola in due camere uguali. Nella seconda fase il diavoletto determina in quale lato si trova la molecola, registrando questo risultato.

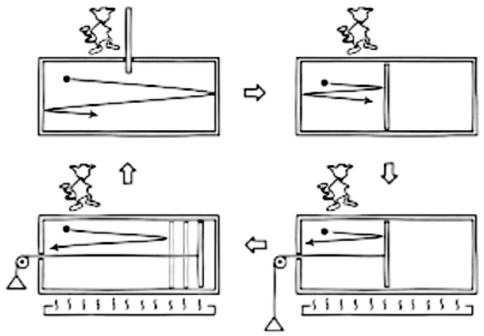

Figura A.1: Macchina di Szilárd [17].

Nella terza fase la partizione è sostituita da un pistone al quale si collega tramite una carrucola una massa, ora la particella inizia ad espandersi facendo spostare il pistone e facendo di conseguenza salire la massa appesa. Mediante quest'espansione si ha una conversione di calore in lavoro in quanto il sistema è immerso in un bagno termico. Una volta che il pistone ha raggiunto la parete destra del cilindro, in modo che il volume e la temperatura siano tornati alle condizioni iniziali, si toglie il pistone che divide il cilindro e si va a vedere dove sta la particella. Si può ripetere il procedimento infinite volte, mettendo la massa in differenti posizioni convertendo ogni volta una certa quantità di calore in lavoro [9, pp. 15,16].

Bibliografia

[1] Jim AL-KHALILI, *La fisica del diavolo. Maxwell, Schrödinger, Einstein e i paradossi del mondo*, Torino, 2012, Nuovi Saggi Bollati Boringhieri.

[2] Lisa ZYGA, *Could Maxwell's Demon Exist in Nanoscale Systems?*, 2009, phys.org/news165065343.html.

[3] Alessandro BETTINI, *Meccanica e Termodinamica*, Bologna, 1995, Zanichelli.

[4] Rudolf CLAUSIUS, *Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie*, 1864, Braunschweig, Springer Verlag Vieweg.

[5] Kerson HUANG, *Meccanica Statistica*, Bologna, 1997, Zanichelli.

[6] Charles Henry BENNETT, *Diavoletti, macchine e il secondo principio*, Roma, 1988, Le Scienze.

[7] Emilio SEGRE', *Personaggi e scoperte nella fisica classica*, Milano, 1983, Edizioni scientifiche e tecniche Mondadori.

[8] James Clerk MAXWELL, *Theory of Heat*, London, Third Edition 1872, Longmans, Green, and Co.

[9] Harvey S LEFF, Andrew F REX, *Maxwell's Demon, Entropy, Information, Computing*, Bristol, 1990, Adam Hilger.

[10] C. E. SHANNON, *A Mathematical Theory of Communication*, 1948, Bell System Technical Journal.

[11] Arthur BEISER, *Concepts of MODERN PHYSICS*, 2003, INTERNATIONAL EDITION, McGraw-Hill Higher Education.

[12] John EARMAN and John D. NORTON, *EXORCIST XIV: The Wrath of Maxwell's Demon. Part I. From Maxwell to Szilárd*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics Vol 29, 1999, Pergamon.

[13] John EARMAN and John D. NORTON, *EXORCIST XIV: The Wrath of Maxwell's Demon. Part II. From Szilárd to Landauer and Beyond*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics Vol 30 1999, Pergamon.

[14] Antoine BÉRUT, Artak ARAKELYAN, Artyom PETROSYAN, Sergio CILIBERTO, Raoul DILLENSCHNEIDER, Eric LUTZ, *Experimental verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics*, Vol 483, 2012, NATURE.

[15] Jonne V. KOSKI, Ville F. MAISI, Jukka P. PEKOLA, and Dmitri V. AVERIN, *Experimental realization of a Szilárd engine with a single electron*, 2014, PNAS.

[16] Takahiro Sagawa, *Thermodynamic and logical Reversibilities Revisited*, 2014, arxiv.org/pdf/1311.1886.pdf.

[17] Felix RITORT, *Colloquium: Manipulating molecules one at a time: a new frontier of research in science*, 2015, Dipartimento di Fisica e Astronomia «G. Galilei» - Aula «A. Rostagni», www.youtube.com/watch?v=fZY6UXCanvI.

[18] Theo Sanderson, *Maxwell: Thermodynamics meets the demon*, splasho.com/blog/essays/maxwell-thermodynamics-meets-the-demon/

[19] Roberto Battiston, *Quanto è caldo un bit?*, Le Scienze Blog, 2012, battiston-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2012/03/11/quanto-e-caldo-un-bit/.

[20] *Il costo inevitabile della cancellazione di un bit*, Le Scienze, 2012, www.lescienze.it/news/2012/03/08/news/informazione-termodinamica-seconda-legge-diavoletto-di-maxwell-costo-energetico-893730/.

[21] Steven Roman, *Introduction to Coding and Information Theory*, Fullerton, 2000, Springer.

[22] en.wikipedia.org/wiki/Bit

[23] www.chem.ntnu.no/nonequilibrium-thermodynamics/pub/Jarzynski.pdf