



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La trottola della Veselova, un sistema anolonomo integrabile

Relatore

Prof. Francesco Fassò

Laureando

Matteo Pretto

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	La trottola della Veselova	3
1.1	Un sistema anolonomo	3
1.2	Un sistema con simmetria	5
1.3	Un sistema integrabile	7
2	La dinamica del sistema ridotto	11
2.1	Insiemi di livello regolari di H	11
2.2	Le rotazioni stazionarie nel modello a palla solida	12
2.3	La raffigurazione delle varietà stabili e instabili	13

Introduzione

Il presente lavoro di tesi triennale ha per oggetto un sistema meccanico integrabile detto "trottola della Veselova", un corpo rigido con un punto fisso e soggetto ad un vincolo anolonomo sulle velocità. Esso è stato introdotto dalla matematica russa L. E. Veselova nel 1986 con l'articolo *New cases of integrability of the equation of motion of a rigid body in the presence of a nonholonomic constraint* [1].

Questo sistema è andato ad aggiungersi all'esiguo gruppo di corpi rigidi integrabili noti i cui costituenti principali sono il corpo rigido di Euler-Poinsot, la trottola di Lagrange e la trottola della Kovalevskaya (per una introduzione ai corpi rigidi vedere [2], 323–366). Esso è quindi di fondamentale importanza per lo studio dei sistemi soggetti al vincolo di rigidità. Altrettanto, se non addirittura maggiore, interesse ha suscitato il fatto che sia un sistema non hamiltoniano integrabile. Pur provenendo dal "mondo" ancora per molti versi inesplorato dei sistemi anolonomi, esso presenta le caratteristiche proprie di ogni sistema hamiltoniano: nello spazio delle fasi è presente una misura invariante e il flusso si svolge sui tori invarianti bidimensionali in cui è foliato lo spazio delle fasi. Tale scoperta ha dato nuova linfa allo studio dei sistemi anolonomi favorendo la ricerca di altri casi che siano integrabili (vedi per esempio [3]).

Il primo capitolo di questo lavoro è dedicato alla presentazione del sistema della Veselova tridimensionale e dei principali risultati che ne garantiscono l'integrabilità. Dopo aver introdotto la nozione di vincolo anolonomo, definiamo matematicamente il particolare vincolo della Veselova e le corrispondenti equazioni del moto. Ci soffermeremo poi sulla particolare simmetria di cui gode il sistema e che permette la riduzione del sistema completo 5-dimensionale a un sistema ridotto di dimensione 4. La presenza di due integrali primi indipendenti e di una misura invariante permetterà poi l'utilizzo del teorema di Eulero-Jacobi per provare l'integrabilità del sistema.

Il secondo capitolo è dedicato allo studio con metodi numerici della dinamica del sistema ridotto, che - come vedremo - può essere considerata rappresentativa anche di quello completo. La dinamica di un insieme di livello dell'energia del sistema ridotto (diffeomorfo a $SO(3)$) potrà essere rappresentata nel modello a palla solida di $SO(3)$ con i punti antipodali identificati. Un ruolo cruciale per la dinamica è giocato dalle sei diverse rotazioni stazionarie attorno agli assi principali di inerzia. Si può provare numericamente che quattro rotazioni consistono in orbite stabili ellittiche nello spazio delle fasi, mentre due presentano un carattere iperbolico e rendono interessante lo studio della loro varietà stabile e instabile. Il nostro lavoro consisterà nel cercare di raffigurare queste varietà con metodi numerici utilizzando il software *Mathematica*, in particolare mediante un loro disegno nella palla solida.

Capitolo 1

La trottola della Veselova

Il sistema della Veselova è costituito da un corpo rigido tridimensionale con un punto fisso, non soggetto a forze attive esterne, ma solamente alla propria inerzia (come il sistema di Euler-Poinsot) e con la presenza di un vincolo anolonomo sulla velocità angolare. Tale sistema presenta una simmetria sotto l'azione di \mathbb{S}^1 che consente di operarne la riduzione allo spazio quoziente, riducendone quindi la dimensione. La presenza di due integrali primi e di una misura invariante sullo spazio delle fasi ridotto rende tale sistema integrabile con un flusso quasi periodico dopo riparametrizzazione temporale su tori bidimensionali. Nei prossimi paragrafi studiamo in dettaglio queste affermazioni, seguendo in particolare l'inedito [4] e il lavoro di tesi di C. Millevoi [5] dove si possono trovare le dimostrazioni alle proposizioni che noi solamente enunceremo.

1.1 Un sistema anolonomo

Considerato un sistema meccanico composto da N punti materiali e indicata con $x_i \in \mathbb{R}^3$ la posizione del punto i -esimo e con $\dot{x}_i \in \mathbb{R}^3$ la sua velocità, si dice *configurazione* del sistema il vettore $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, appartenente allo *spazio delle configurazioni* e velocità del sistema il vettore $\dot{X} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. Il vettore $(X, \dot{X}) \in \mathbb{R}^{6N}$ è detto *atto di moto* del sistema e vive nello *spazio degli atti di moto* o *spazio delle fasi*.

Se le configurazioni del sistema sono vincolate ad appartenere ad una sottovarietà Q dello spazio delle configurazioni - detta varietà delle configurazioni - il sistema si dice soggetto ad un *vincolo olonomo*. In tal caso gli atti di moto appartengono al fibrato tangente TQ , sottovarietà dello spazio degli atti di moto. Un *vincolo anolonomo*, invece, è una restrizione sugli atti di moto che sono vincolati ad appartenere ad una sottovarietà che non è il fibrato tangente di una varietà dello spazio delle configurazioni, ma l'unione delle fibre di una distribuzione non integrabile (per dettagli su fibrati e distribuzioni vedere [6], 133-192).

Definizione 1. Dato un sistema olonomo con varietà delle configurazioni Q , un *vincolo anolonomo* è una restrizione sugli atti di moto ad appartenere alle fibre di una distribuzione non integrabile \mathcal{D} su Q . La distribuzione \mathcal{D} è detta *distribuzione vincolare*.

Il vincolo anolonomo a cui è soggetta la trottola della Veselova consiste in un vincolo sulla velocità angolare alla quale è imposto di avere nulla la componente lungo un asse fisso nello spazio, detto *asse delle rotazioni proibite*. Per descrivere questo vincolo occorre ricordare che, per un corpo rigido con un punto fisso, lo spazio delle configurazioni è il gruppo di Lie $SO(3)$. Per denotare una configurazione è, infatti, necessario e sufficiente individuare una matrice di rotazione $R \in SO(3)$ che mette in relazione il riferimento fisso nello spazio con uno solidale al corpo (e avente origine in comune). Se denotiamo con $\{E_x, E_y, E_z\}$ una base per il sistema fisso e con $\{e_x, e_y, e_z\}$ una per il sistema solidale al corpo, abbiamo che la matrice R è tale che $E_i = R e_i$ con $i = x, y, z$. Supponendo che l'asse delle rotazioni proibite del corpo sia E_x , denotiamo con q il suo trasformato nella base solidale $q := R^T E_x$. Infine sia

$\omega \in \mathbb{R}^3$ il rappresentativo nel sistema solidale al corpo del vettore velocità angolare del corpo relativo al sistema fisso; l'equazione che definisce il vincolo anolonomo è quindi

$$q \cdot \omega = 0 \quad (1.1)$$

Ricordando che il vettore ω definisce un vettore \dot{R} tangente a $SO(3)$ in R tramite la relazione $\dot{R} = R\hat{\omega}$ (con $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow skew(3)$ l'isomorfismo *hat*), è possibile identificare il fibrato tangente $TSO(3)$ dello spazio delle configurazioni con $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ mediante la trivializzazione a sinistra e l'identificazione di $T_{\mathbb{1}}SO(3) = skew(3)$ con \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} TSO(3) &\longrightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (R, \dot{R}) &\longmapsto (R, (R^T \dot{R})^\sim =: \omega) \end{aligned}$$

ove $\tilde{\cdot} : skew(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è l'isomorfismo inverso di *hat*.

L'equazione 1.1 definisce una distribuzione di rango 2 su $SO(3)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : SO(3) &\longrightarrow TSO(3) \\ R &\longmapsto \mathcal{D}_R = \{\dot{R} \in T_R SO(3) : R^T E_x \cdot (R^T \dot{R})^\sim = 0\} \end{aligned}$$

Il sottospazio \mathcal{D}_R di $T_R SO(3)$ ha dimensione 2 in quanto il vincolo è $q \cdot \omega = 0$ e, essendo q mai nullo per definizione, $\forall q$ le ω che lo soddisfano appartengono ad un sottospazio di dimensione 2. L'isomorfismo *hat* garantisce che anche \mathcal{D}_R abbia dimensione 2. Si può facilmente dimostrare che la distribuzione così definita non è Frobenius integrabile verificandone la non involutività. In definitiva si può concludere che fissare un asse delle rotazioni proibite per un corpo rigido con un punto fisso significa precisamente definire un vincolo anolonomo sul sistema e che la varietà vincolare, ossia $D = \mathcal{D}(SO(3)) = \{(R, \omega) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 : \omega \cdot R^T E_x = 0\}$, è una sottovarietà di $TSO(3)$ di dimensione 5.

Le equazioni del moto possono essere ricavate a partire dalle equazioni cardinali del moto e facendo uso della tecnica dei *moltiplicatori di Lagrange* per vincoli anolonomi ideali. Dato che il sistema è un corpo rigido con un punto fisso, nel sistema di riferimento spaziale le equazioni del moto si riducono alla seconda equazione cardinale:

$$\frac{d}{dt} M_C = N_C$$

ove denotiamo con M_C il momento angolare totale rispetto ad un polo fisso C e con N_C il momento di tutte le forze. Denotiamo poi con \mathcal{J}_C l'operatore momento di inerzia del corpo. Dato che per ipotesi sul sistema non ci sono forze attive, N_C è il momento delle sole forze reattive che garantiscono la permanenza della dinamica sulla varietà vincolare (ossia garantiscono che il campo vettoriale su $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni del moto sia sempre tangente alla varietà vincolare). A differenza dei vincoli olonomi ideali per cui, mediante il principio di D'Alembert, è possibile liberarsi delle reazioni vincolari, non è possibile fare altrettanto per i vincoli anolonomi, tuttavia l'idealità del vincolo è cruciale in quanto permette di dedurre che $N_C \parallel E_x$. L'idealità del vincolo impone, infatti, che le reazioni vincolari facciano lavoro virtuale nullo:

$$\sum_i F_{P_i}^r \cdot V_{P_i} = 0 \quad \forall V_{P_i} \text{ velocità virtuale}$$

con F_{P_i} la reazione vincolare relativa al punto i -esimo del corpo. Dato che $\forall i, V_{P_i} = \omega \times (P_i - C)$, con ω velocità angolare, $\omega \perp E_x$, e $\sum_i (P_i - C) \times F_{P_i} = N_C^r$ si ha che $\omega \cdot N_C^r = 0 \quad \forall \omega \perp E_x \iff N_C^r \parallel E_x$. Quindi abbiamo che $N_C^r = \lambda E_x$.

A partire dall'equazione di Eulero ($\mathcal{J}_C \dot{\omega} = \omega \times \mathcal{J}_C \omega$) e utilizzando una procedura generale per i vincoli anolonomi che utilizza i moltiplicatori di Lagrange è possibile derivare le equazioni del moto per il sistema.

Proposizione 1. *Le equazioni del moto del sistema della Veselova sono la restrizione alla varietà vincolare D delle*

$$\begin{cases} \dot{R} = R\hat{\omega} \\ \mathcal{J}_C \dot{\omega} + \omega \times \mathcal{J}_C \omega = \lambda(R, \omega) R^T E_x \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda(R, \omega) = \frac{(\omega \times \mathcal{J}_C) \cdot \mathcal{J}_C^{-1} R^T E_x}{R^T E_x \cdot \mathcal{J}_C^{-1} R^T E_x} \quad (1.2)$$

1.2 Un sistema con simmetria

Il primo passo verso l'integrabilità della sistema della Veselova si compie riconoscendo l'esistenza di un'importante simmetria che permette di ridurre di 1 la dimensione del sistema.

Definizione 2. Siano X un campo vettoriale su una varietà M e Ψ un'azione di un gruppo di Lie G su M . Si dice che X è *invariante sotto Ψ* (o sotto G) se ciascuna mappa Ψ_g è una *simmetria* di X :

$$\Psi_g \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Psi_g \quad \forall t \in \mathbb{R}, g \in G$$

ovvero

$$(\Psi_g)_* X = X \quad \forall g \in G \quad \text{ovvero} \quad X \circ \Psi_g = (\Psi_g)' X \quad \forall g \in G$$

(Si dice anche che Ψ è un'azione di simmetria per X e che G è un gruppo di simmetria di X .)

La trottola della Veselova è invariante per rotazioni spaziali attorno all'asse delle rotazioni proibite, ossia è invariante sotto l'azione del sottogruppo G di $SO(3)$ delle rotazioni di asse E_x , con $G = \{S \in SO(3) : SE_x = E_x\} \cong SO(2) \cong \mathbb{S}^1$. Il sollevamento al fibrato tangente di questa azione è dato da $\Psi_S(R, \omega) = (SR, \omega)$, con $S \in SO(3)$ tale che $SE_x = E_x$ e $(R, \omega) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$. Si può dimostrare che D è invariante per rotazioni nello spazio che lasciano fisso l'asse delle rotazioni proibite e quindi Ψ_S è un'azione su D . Per verificare che il campo vettoriale

$$X(R, \omega) = \begin{pmatrix} R\hat{\omega} \\ \mathcal{J}_e^{-1}(\lambda(R, \omega)R^T E_x - \omega \times \mathcal{J}_e \omega) \end{pmatrix}$$

definito dalle equazioni del moto è invariante sotto l'azione di $G \cong \mathbb{S}^1$, è necessario dimostrare che

$$X(\Psi_S(R, \omega)) = \Psi_S' \cdot X(R, \omega) \quad \forall S \in G, (R, \omega) \in D$$

Dato che

$$\Psi_S' = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha che

$$\begin{aligned} X(\Psi_S(R, \omega)) &= \begin{pmatrix} SR\hat{\omega} \\ \mathcal{J}_e^{-1}(\lambda(SR, \omega)(SR)^T E_x - \omega \times \mathcal{J}_e \omega) \end{pmatrix} \\ \Psi_S' \cdot X(R, \omega) &= \begin{pmatrix} SR\hat{\omega} \\ \mathcal{J}_e^{-1}(\lambda(R, \omega)R^T E_x - \omega \times \mathcal{J}_e \omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che sono uguali perché $(SR)^T E_x = R^T S^T E_x = R^T E_x$ e inoltre, sfruttando questa relazione, con un semplice calcolo, si trova $\lambda(R, \omega) = \lambda(SR, \omega)$.

Per procedere alla riduzione del sistema sotto l'azione del sottogruppo G ricordiamo alcune definizioni e risultati fondamentali (per i riferimenti vedere [7] 145-194).

Definizione 3. Sia $\Psi : G \times M \rightarrow M$ un'azione di un gruppo di Lie G :

1. La Ψ -orbita, o G -orbita, di un punto $m \in M$ è $\mathcal{O}_m^G := \{\Psi_g(m) : g \in G\}$.
2. Ψ è *libera* se non ha punti fissi, ovvero se, $\forall m \in M$, $\Psi_g(m) = m$ implica $g = e$, con e elemento neutro del gruppo.
3. Ψ è *propria*, se per ogni compatto $K \subset M$, il sottoinsieme $\{g \in G : K \cap \Psi_g(K) \neq \emptyset\}$ di G è compatto.

L'azione di un gruppo di Lie produce una *relazione di equivalenza* sullo spazio delle fasi data dall'appartenza alla stessa Ψ -orbita: $z_1 \sim z_2$ se e solo se $z_2 = \Psi_g(z_1)$ per qualche $g \in G$. Denotando con $[z]$ la classe di equivalenza di un punto $z \in M$, si può considerare la *proiezione canonica* sullo spazio quoziente M/G :

$$\pi : M \longrightarrow M/G, \quad \pi(z) = [z]$$

M/G è dotato della topologia quoziente ($U \subseteq M/G$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ è aperto).

Proposizione 2. *Sia Ψ un'azione libera e propria di un gruppo di Lie G di dimensione k su una varietà differenziabile M di dimensione $n \geq k$. Allora M/G , dotato della topologia quoziente, è una varietà di dimensione $n - k$ e $\pi : M \rightarrow M/G$ è una sommersione.*

Nel caso della Veselova, l'azione di $G \cong \mathbb{S}^1$ su D è libera:

$$(SR, \omega) = (R, \omega) \iff R = SR \iff S = RR^T \mathbb{I}$$

Vale, inoltre, un risultato che afferma che i sottogruppi di GL_n sono di Lie se, e solo se, sono topologicamente chiusi; quindi l'azione di $G \cong SO(2)$ è propria perché $SO(2)$ è un gruppo di Lie compatto e l'azione di ogni gruppo compatto è propria. È quindi valido il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 3. *Lo spazio quoziente del sistema della Veselova D/G è*

$$D/G = \{(q, w) \in \mathbb{R}^6 : \|q\| = 1, q \cdot w = 0\} \cong TS^2$$

e la proiezione canonica è:

$$\pi : D \rightarrow TS^2 \quad , \quad (R, \omega) \mapsto (R^T E_x, \omega)$$

D'ora in poi intendiamo TS^2 come la sottovarietà immersa in \mathbb{R}^6 definita da $\{(q, w) \in \mathbb{R}^6 : \|q\| = 1, q \cdot w = 0\}$.

Riportiamo ora un risultato generale che garantisce la possibilità di dedurre le equazioni del moto nello spazio quoziente a partire da quelle originarie.

Proposizione 4. *Sia X un campo vettoriale su una varietà M invariante sotto un'azione libera e propria Ψ di un gruppo di Lie G su M . Allora esiste un campo vettoriale \bar{X} su M/G tale che, denotato con $\Phi_t^{\bar{X}}$ il suo flusso,*

$$\Phi_t^{\bar{X}} \circ \pi = \pi \circ \Phi_t^X \quad \forall t$$

ed esso soddisfa $\bar{X} \circ \pi = \pi' X$.

Il sistema $(M/G, \bar{X})$ è la riduzione, o sistema ridotto, del sistema completo (M, X) .

Proposizione 5. *Le equazioni ridotte su $TS^2 = \{(q, w) \in \mathbb{R}^6 : \|q\| = 1, q \cdot w = 0\}$ sono:*

$$\begin{cases} \dot{q} = q \times \omega \\ \dot{\omega} = \mathcal{J}_e^{-1}(\tilde{\lambda}(q, \omega)q - \omega \times \mathcal{J}_e \omega) \end{cases} \quad \text{con} \quad \tilde{\lambda}(q, \omega) = \frac{(\omega \times \mathcal{J}_e \omega) \cdot \mathcal{J}_e^{-1} q}{q \cdot \mathcal{J}_e^{-1} q} \quad (1.3)$$

Dimostrazione. Per la proposizione 3 e per le proprietà delle derivate di una funzione composta abbiamo che $\bar{X}(\pi(R, \omega)) = \pi'(R, \omega)X(R, \omega) = \pi'(R, \omega)(\dot{R}, \dot{\omega}) = \frac{d}{dt}\pi(R, \omega)$. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi(R, \omega) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R^T E_x \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R}^T E_x \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R\hat{\omega})^T E_x \\ \mathcal{J}_e^{-1}(\lambda(R, \omega)R^T E_x - \omega \times \mathcal{J}_e \omega) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\hat{\omega} R^T E_x \\ \mathcal{J}_e^{-1}(\lambda(R, \omega)R^T E_x - \omega \times \mathcal{J}_e \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \times \omega \\ \mathcal{J}_e^{-1}(\tilde{\lambda}(q, \omega)q - \omega \times \mathcal{J}_e \omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\lambda(R, \omega) = \tilde{\lambda}(R^T E_x, \omega) = \tilde{\lambda}(q, \omega)$. □

1.3 Un sistema integrabile

D'ora in poi scegliamo come base solidale al corpo una base principale di inerzia, formata da una terna di autovettori normalizzati dell'operatore di inerzia che, in questo sistema di riferimento, è rappresentato da una matrice diagonale. Assumiamo, inoltre, che i momenti principali di inerzia siano tali che $I_1 < I_2 < I_3$.

Il secondo ingrediente essenziale affinché un sistema sia integrabile è la presenza di integrali primi, cioè di funzioni sullo spazio delle fasi che siano costanti lungo le orbite del sistema.

Proposizione 6. *L'energia $H(q, \omega) = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{J}_c\omega$ e la funzione $u(q, \omega) = \|\mathcal{J}_c\omega\|^2 - (q \cdot \mathcal{J}_c\omega)^2$ sono integrali primi del sistema ridotto della Veselova.*

Dimostrazione. È sufficiente verificare che la derivata di Lie $L_{\bar{X}}$ di ciascuna funzione è nulla in TS^2 .

$$L_{\bar{X}}H = \nabla_{(q,\omega)}H \cdot \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_c\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \times \omega \\ \mathcal{J}_c^{-1}(\tilde{\lambda}(q, \omega)q - \omega \times \mathcal{J}_c\omega) \end{pmatrix} = \tilde{\lambda}(q, \omega)q \cdot \omega - \omega \cdot (\omega \times \mathcal{J}_c\omega) = 0$$

$$\begin{aligned} L_{\bar{X}}u &= \nabla_{(q,\omega)}u \cdot \bar{X} = 2 \begin{pmatrix} -(q \cdot \mathcal{J}_c\omega)\mathcal{J}_c\omega \\ \mathcal{J}_c^2\omega - (q \cdot \mathcal{J}_c\omega)\mathcal{J}_c q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \times \omega \\ \mathcal{J}_c^{-1}(\tilde{\lambda}(q, \omega)q - \omega \times \mathcal{J}_c\omega) \end{pmatrix} = \\ &= 2[-(q \cdot \mathcal{J}_c\omega)\mathcal{J}_c\omega \cdot (q \times \omega) + \tilde{\lambda}(q, \omega)(q \cdot \mathcal{J}_c\omega) - \mathcal{J}_c\omega \cdot (\omega \times \mathcal{J}_c\omega) - \tilde{\lambda}(q, \omega)(q \cdot \mathcal{J}_c\omega) + (q \cdot \mathcal{J}_c\omega)q \cdot (\omega \times \mathcal{J}_c\omega)] = \\ &= (q \cdot \mathcal{J}_c\omega)(-\mathcal{J}_c\omega \cdot (q \times \omega) + \mathcal{J}_c\omega \cdot (q \times \omega)) = 0 \end{aligned}$$

□

Dato che il sistema ridotto vive in uno spazio di dimensione 4, la presenza di due integrali primi produce una foliazione dello spazio delle fasi ridotto in sottovarietà invarianti di dimensione 2. L'ultima osservazione cruciale per l'integrabilità è l'esistenza per il sistema ridotto di una misura invariante sullo spazio delle fasi. Si può, infatti, dimostrare che $\sqrt{q \cdot \mathcal{J}_c^{-1}q} d\omega d\gamma$ è una misura conservata dal flusso di \bar{X} mediante la verifica che la divergenza di $\sqrt{q \cdot \mathcal{J}_c^{-1}q} \bar{X}$ è nulla.

Per provare l'integrabilità del sistema si può procedere in due modi: il primo consiste nel dimostrare che esiste una riparametrizzazione del campo vettoriale che lo rende hamiltoniano e poi usare il teorema di Liouville-Arnold (via seguita anche da Veselova in [1]), il secondo sfrutta l'integrabilità alla Eulero-Jacobi (come Veselova in [3]).

Teorema 1. *(di Eulero-Jacobi [8]) Si supponga che il sistema di equazioni $\dot{x} = X(x)$, con X campo vettoriale su M varietà di dimensione n , abbia $n - 2$ integrali primi F_1, \dots, F_{n-2} . Si supponga inoltre che $F = (F_1, \dots, F_{n-2}) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ sia una sommersione e che i suoi insiemi di livello siano compatti.*

Se X ha una misura invariante, allora, $\forall c$:

1. le componenti connesse di $F^{-1}(c)$ sono diffeomorfe a tori bidimensionali.
2. su ogni componente connessa di $F^{-1}(c)$ esistono coordinate $\alpha \in \mathbb{T}^2$ tali che

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \mu(c, \alpha) \begin{pmatrix} \omega_1(c) \\ \omega_2(c) \end{pmatrix}$$

cioè il flusso su questi tori è rettilineo, ma potrebbe non essere uniforme.

Occorre quindi studiare la regolarità e compattezza delle sottovarietà in cui è foliato lo spazio ridotto, studio utile anche per avere una comprensione della dinamica del sistema ridotto, in quanto permette di mettere in luce le condizioni affinché si verifichino rotazioni stazionarie.

Proposizione 7. *La mappa $(u, H) : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una sommersione eccetto dove $H = \frac{u}{2I_j}$ per $j = 1, 2, 3$ e tutte le sue fibre sono compatte. Inoltre, la sua immagine è l'angolo $\frac{u}{2I_3} \leq H \leq \frac{u}{2I_1}$.*

Dimostrazione. Una mappa è una sommersione se il suo differenziale ha rango massimo e, dato che nelle coordinate (q, ω) il differenziale è rappresentato dalla matrice jacobiana aventi per righe $\nabla_{(q,\omega)}H$ e $\nabla_{(q,\omega)}u$, si ha che tale matrice non ha rango massimo se $\nabla_{(q,\omega)}H \times \nabla_{(q,\omega)}u = 0$. Ciò avviene se $\nabla_{(q,\omega)}H = 0$ oppure se $\nabla_{(q,\omega)}u = 0$ oppure se $\nabla_{(q,\omega)}H$ e $\nabla_{(q,\omega)}u$ sono $\neq 0$ e paralleli. Calcolando i gradienti si ha che

$$\nabla_{(q,\omega)}H = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_c\omega \end{pmatrix}, \quad \nabla_{(q,\omega)}u = 2 \begin{pmatrix} -(q \cdot \mathcal{J}_c\omega)\mathcal{J}_c\omega \\ \mathcal{J}_c^2\omega - (q \cdot \mathcal{J}_c\omega)\mathcal{J}_c q \end{pmatrix}$$

Siccome \mathcal{J}_c è invertibile, la prima condizione si verifica nell'insieme di livello 0 di H . Anche la seconda condizione si verifica se e solo se $\omega = 0$. Mostriamo, infine, che la terza condizione si verifica se ω è autovettore di \mathcal{J}_c .

Per $\omega \neq 0$, si ha che $\nabla_{(q,\omega)}H \parallel \nabla_{(q,\omega)}u \Leftrightarrow (q \cdot \mathcal{J}_c\omega) = 0$. Allora i gradienti sono paralleli se e solo se $\mathcal{J}_c^2\omega = c\mathcal{J}_c\omega$ con $c \in \mathbb{R}$ costante non nulla. Ma, dato che \mathcal{J}_c è invertibile, moltiplicando a destra per \mathcal{J}_c^{-1} si ottiene $\mathcal{J}_c\omega = c\omega$ e quindi ω è autovettore.

Se $\omega = (\omega_1, 0, 0)$, allora $H = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{J}_c\omega = \frac{1}{2}I_1\|\omega\|^2$ e $u = \|\mathcal{J}_c\omega\|^2 - (q \cdot \mathcal{J}_c\omega)^2 = I_1^2\|\omega\|^2 - (I_1\omega_1 q_1)^2$. Dato che $0 = q \cdot \omega = q_1\omega_1$ si ottiene $\|\omega\|^2 = \frac{u}{I_1^2}$. Sostituendo nell'energia si trova $H = \frac{u}{2I_1}$ e si procede analogamente con gli altri autovettori.

Il fatto che le fibre della mappa siano compatte risulta ovvio perché ciascuna di esse è chiusa perché la mappa è continua ed è contenuta in un insieme di livello dell'energia che è un ellissoide e, dunque, compatto.

Infine, la restrizione di H ad un insieme di livello di u ammette minimo e massimo in quanto esso è compatto e, siccome H dipende solo da ω , tali punti sono necessariamente i punti critici di H , ove $H = \frac{u}{2I_j}$. Avendo supposto $I_1 < I_2 < I_3$ l'immagine è l'angolo $\frac{u}{2I_3} \leq H \leq \frac{u}{2I_1}$. \square

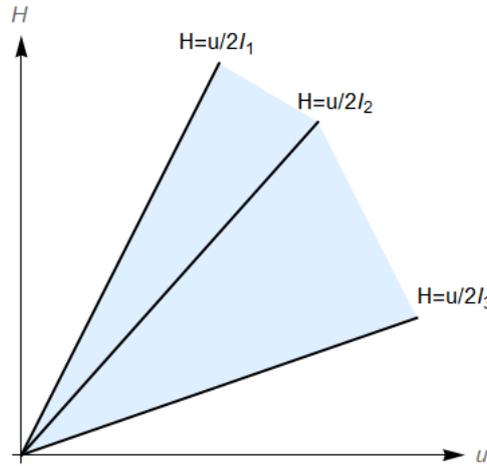


Figura 1.1: Immagine della mappa (u, H) , le linee nere sono i valori critici.

Per il teorema di Eulero-Jacobi il sistema ridotto della Veselova è integrabile dopo un riscaldamento del tempo che si mostra essere $t \mapsto \sqrt{q \cdot \mathcal{J}_c q} t$. Diamo la seguente definizione (tratta da [4]) che permette di comprendere con più precisione il significato di un flusso rettilineo su tori dopo una riparametrizzazione.

Definizione 4. Un flusso Φ di un campo vettoriale X su un toro n -dimensionale \mathbb{T}^n si dice:

1. *lineare*, se X è costante, ossia $X = \sum_{i=1}^n \omega_i \partial_{\phi_i}$ con $\omega_i \in \mathbb{R}$. Quindi $\Phi_t(\phi) = \phi + t\omega \pmod{2\pi}$.
2. *quasi-periodico*, se X è coniugato ad un campo vettoriale con un flusso lineare.
3. *rettilineo*, se X ha una direzione costante ovvero $X(\phi) = g(\phi) \sum_{i=1}^n \omega_i \partial_{\phi_i}$ con $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile positiva e $\omega_i \in \mathbb{R}$.

4. *quasi periodico dopo una riparametrizzazione temporale*, se X è coniugato ad un campo vettoriale con un flusso rettilineo.

In definitiva, dopo un riscaldamento del tempo, la trottola della Veselova gode di tutte le proprietà di un sistema hamiltoniano – flusso su tori invarianti bidimensionali (come garantisce per i sistemi hamiltoniani il teorema di Liouville-Arnold per le componenti connesse e compatte degli insiemi di livello degli integrali primi in involuzione tra loro), misura differenziabile invariante sullo spazio delle fasi (nei sistemi hamiltoniani è la misura di Liouville) – pur non avendo un'origine hamiltoniana in quanto proviene dal "mondo" dei sistemi anonomi. Queste peculiarità fanno sì che questo sistema sia degno di attenzione e di studio nelle sue proprietà e possibili generalizzazioni (per esempio il sistema della Veselova n-dimensionale [9]).

Osservazione 1. È possibile ricostruire la dinamica su D da quella su TS^2 : dato $(q, \omega) \in TS^2$, si definisce $\alpha := u^{-1/2}(\mathcal{J}_e\omega - (q \cdot \mathcal{J}_e\omega)q)$ e si verifica che $\dot{\alpha} = \alpha \times \omega$ e che, per ogni soluzione $(q(t), \omega(t))$ del sistema ridotto, $(g(t), \omega(t))$ con $g = [q, \alpha, q \times \alpha]$ è una soluzione per il sistema completo. In questo modo le proprietà della dinamica del sistema ridotto sono le medesime di quello completo (periodicità, stabilità delle orbite, ...).

Capitolo 2

La dinamica del sistema ridotto

2.1 Insiemi di livello regolari di H

Come precisato nell'ultima osservazione del capitolo precedente, per una comprensione della dinamica della Veselova è sufficiente soffermarsi sullo studio del sistema ridotto. Basta, inoltre, considerare un unico insieme di livello di energia positiva. Infatti, se $H = 0$ allora ω è uguale a 0, ci sono solo equilibri e la dinamica risulta di scarso interesse. Se $H \neq 0$, considerata una soluzione $t \mapsto (q_t, \omega_t)$ di energia $h > 0$ si ha che, $\forall \lambda > 0$, $t \mapsto (q_t, \lambda \omega_t)$ è soluzione di energia $\lambda^2 h$. Segue, quindi, che la dinamica su due insiemi di livello con energia non nulla è coniugata da una riparametrizzazione temporale ed è sufficiente studiare il sistema con energia fissata $h > 0$. Osserviamo, inoltre, che se $H \neq 0$ non ci sono equilibri perché la prima componente del campo vettoriale non si annulla mai: con $\omega \neq 0$ e $\|q\| = 1$, $q \times \omega = 0$ solo se $q \parallel \omega$, ma ciò è impedito dal vincolo sulla velocità.

Gli insiemi di livello regolari di H sono varietà differenziabili di dimensione 3. Per la proposizione 7 tali varietà sono diffeomorfe agli insiemi

$$M_h = \{(q, \omega) \in \mathbb{R}^6 : q \cdot \omega = 0, \|q\| = 1, \omega \cdot \mathcal{J}_e \omega = 2h\}$$

con $h \neq \frac{u}{2I_1}, \frac{u}{2I_2}, \frac{u}{2I_3}$.

Proposizione 8. *Gli insiemi di livello regolari di H , M_h , sono diffeomorfi a $SO(3)$.*

Dimostrazione. Osserviamo, innanzitutto, che M_h è diffeomorfa a $T_1\mathbb{S}^2 \cong \{(q, \omega) \in \mathbb{R}^6 : q \cdot \omega = 0, \|q\| = \|\omega\| = 1\}$. $T_1\mathbb{S}^2$ è a sua volta diffeomorfo a $SO(3)$, in quanto le colonne di una matrice di $SO(3)$ sono date da tre vettori ortonormali e, $\forall (q, \omega) \in M_h$, è sufficiente considerare la matrice $[q, \frac{\omega}{\|\omega\|}, \frac{q \times \omega}{\|q \times \omega\|}] \in SO(3)$. \square

Il gruppo delle rotazioni può essere poi a sua volta rappresentato con il modello a palla solida di $SO(3)$ (solid ball) con i punti antipodali identificati (per maggiori riferimenti vedere [10]).

Sia B la palla unitaria in \mathbb{R}^3 e B_P la palla in cui vale la relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali con proiezione canonica $p : B \rightarrow B_P$. Ogni punto P di B_P rappresenta una rotazione nello spazio tridimensionale di asse il vettore $P - O$, con O centro della palla, e di angolo la distanza di P dal centro moltiplicata per π . Dato che una rotazione di π è uguale ad una di $-\pi$, si comprende la necessità di identificare i punti antipodali. L'identificazione tra $SO(3)$ e B_P è basata, più precisamente, sul fatto che, dato un vettore $v \in \mathbb{R}^3$, $\exp \hat{v}$ è una rotazione di asse v e angolo $\|v\|$. A partire dalla mappa suriettiva, ma non iniettiva $B \rightarrow SO(3)$, $m \mapsto \exp \hat{m}$, si può verificare che esiste un diffeomorfismo $\mathcal{F} : SO(3) \rightarrow B_P$.

Per lavorare con il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ (e poi rappresentarlo nella solid ball) è necessario considerarne una parametrizzazione; una scelta conveniente è quella di utilizzare il ricoprimento a due

fogli di $SO(3)$ dato dal corpo dei quaternioni unitari $\{u \in \mathbb{H} : \|u\| = 1\}$ (diffeomorfo a $\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$) dato dalla "Euler parameter map":

$$\mathcal{E} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SO(3), \quad \mathcal{E}(u_0, u) = 1 + 2u_0\hat{u} + 2\hat{u}^2 \quad (2.1)$$

Tale rivestimento è anche un omomorfismo tra gruppi in quanto la composizione di due rotazioni $\mathcal{E}(U)\mathcal{E}(P)$ è data dal prodotto tra i quaternioni: $\mathcal{E}(U)\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(U \otimes P)$ con $U \otimes P = (u_0p_0 - u \cdot p, u_0p + p_0u + u \times p)$ (per maggiori dettagli vedere [11]). Una rotazione di angolo ϕ e asse $e \in \mathbb{R}^3$ di norma unitaria è quindi data da $\exp \phi \hat{e} = \mathcal{E}(\pm(\cos \frac{\phi}{2}, e \sin \frac{\phi}{2}))$.

Per rappresentare le rotazioni nella solid ball è necessario considerare la composizione $\mathcal{F} \circ \mathcal{E} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow B_P$ che può essere riscritta come la composizione di

$$\mathcal{B} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow B, \quad (u_0, u) = \begin{cases} u & \text{se } u_0 = 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u_0) \arcsin(|u|) \frac{u}{|u|} & \text{se } u_0 \neq 0 \text{ e } u \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

con la proiezione canonica $p : B \longrightarrow B_P$.

Il passaggio da $T_1\mathbb{S}^2$ alla solid ball, e viceversa, si fa attraverso le due catene di mappe:

$$T_1\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\mathcal{M}} SO(3) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathcal{B}} B \xrightarrow{p} B_P, \quad B_P \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathcal{E}} SO(3) \xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} T_1\mathbb{S}^2 \quad (2.3)$$

con $\mathcal{M} : T_1\mathbb{S}^2 \rightarrow SO(3)$, $(q, \omega) \mapsto [q, \omega, q \times \omega]$,
 $\mathcal{Q} : SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^3$, $R \mapsto (u_0, u)$ con $u_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{tr}(R) + 1}$ e $u = (\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(R_{32} - R_{23})\sqrt{R_{11} - R_{22} - R_{33} + 1},$
 $\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(R_{13} - R_{31})\sqrt{R_{22} - R_{11} - R_{33} + 1}, \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(R_{21} - R_{12})\sqrt{R_{33} - R_{11} - R_{22} + 1})$,

$\mathcal{B} : \mathbb{S}^3 \rightarrow B$ e $p : B \rightarrow B_P$ come in 2.2,

$\mathcal{T} : B_P \rightarrow \mathbb{S}^3$, $P \mapsto (\cos \frac{\|P\|\pi}{2}, \frac{P}{\|P\|} \sin \frac{\|P\|\pi}{2})$,

$\mathcal{E} : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$ la Euler parameter map (2.1) e $\mathcal{M}^{-1} : SO(3) \rightarrow T_1\mathbb{S}^2$ l'ovvia identificazione.

Denotiamo, infine, con $\Phi_t^{\bar{X}} : T_1\mathbb{S}^2 \longrightarrow T_1\mathbb{S}^2$ la mappa al tempo t del flusso del campo vettoriale ridotto e con $\Phi_t^{B_P} : B_P \longrightarrow B_P$ la mappa al tempo t del flusso del sistema ridotto a valori nella solid ball definita da $\Phi_t^{B_P} = p \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{Q} \circ \mathcal{M} \circ \Phi_t^{\bar{X}} \circ \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{T}$.

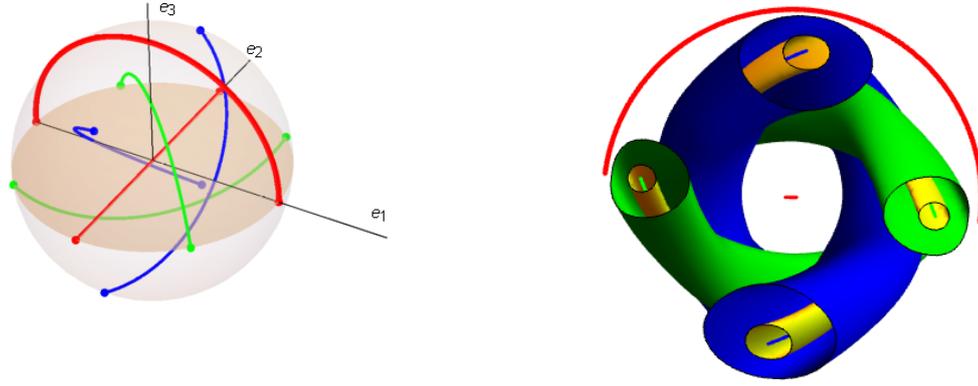
2.2 Le rotazioni stazionarie nel modello a palla solida

Dalla proposizione 7 sappiamo che, per $h > 0$ fissato, gli insiemi di livello di u che non sono varietà bidimensionali sono quelle per cui $u = 2J_{e_j}h$. Le fibre di u corrispondenti sono diffeomorfe all'unione di due cerchi e, $\forall j = 1, 2, 3$, sono le orbite periodiche corrispondenti alle rotazioni stazionarie attorno al j -esimo asse di inerzia e velocità angolari $\omega = \pm \sqrt{\frac{u}{J_{e_j^2}}} e_j$. In $SO(3) \cong T_1\mathbb{S}^2$ una rotazione stazionaria di

asse e_j è data dalla matrice $R_t = [q_t, \omega, q_t \times \omega] = \exp t\hat{\omega}_j[q_0, \frac{\omega}{\|\omega\|}, \frac{q_0 \times \omega}{\|\omega\|}]$ con q_0 qualsiasi vettore unitario ortogonale a ω . Nel modello a palla solida in figura 2.1a esse appaiono come 5 semicirconferenze e un diametro i cui estremi vanno pensati identificati.

In figura 2.1b sono disegnati alcuni insiemi di livello di u non corrispondenti a valori critici; essi sono diffeomorfi a tori bidimensionali che producono una foliazione della solid ball, come atteso dall'integrabilità del sistema ridotto. Disegnando un solo insieme di livello si nota che esso è sempre costituito da due componenti connesse ad eccezione di quello dato da $u = 2I_2h$, che è connesso e contiene le rotazioni attorno a e_2 . Gli insiemi di livello corrispondenti agli altri due valori critici, $2I_1h$ e $2I_3h$, sono le rimanenti quattro orbite stazionarie, attorno alle quali si sviluppano i tori bidimensionali.

Anche se ad oggi non conosciamo una dimostrazione, possiamo intuire come le quattro orbite al centro dei diversi tori siano orbite periodiche ellittiche, mentre le due rotazioni attorno a e_2 (in rosso nella figura) siano orbite iperboliche. Questo fatto può per altro essere verificato numericamente calcolando lo spettro della matrice di monodromia ottenuta dall'integrazione dell'equazione alle variazioni (per ulteriori riferimenti vedere [7], 103-112).



(a) Orbite periodiche nella solid ball (in grigio la palla unitaria, in verde le rotazioni di asse e_1 , in rosso di asse e_2 e in blu di asse e_3) (b) Insiemi di livello di u nella solid ball (foliazione in tori invarianti)

Figura 2.1: Rotazioni stazionarie e foliazione in tori invarianti nella solid ball. Immagini tratte da [4]

2.3 La raffigurazione delle varietà stabili e instabili

Nella sezione precedente, nonostante la mancanza di una precisa dimostrazione, abbiamo rilevato la presenza di due orbite periodiche iperboliche nel sistema ridotto della Veselova (per una panoramica sui sistemi iperboliche vedere [12], 47-126). Ai disegni delle figure 2.1 manca, tuttavia, l'insieme di livello che contiene le rotazioni iperboliche e le corrispondenti varietà stabili e instabili. Queste varietà possono essere visualizzate sia mediante la tecnica delle sezioni di Poincarè, sia attraverso un loro disegno direttamente nel modello a palla solida prima introdotto.

Vogliamo, innanzitutto, fare il ritratto in fase della mappa di Poincarè definita su opportune sezioni della sottovarietà ad energia costante del sistema ridotto. A tal fine osserviamo che le sottovarietà tridimensionali ad energia costante $h > 0$ sono gli insiemi di livello della sommersione

$$\Psi = \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad (q, \omega) \mapsto (f(q, \omega), g(q, \omega), H(q, \omega)) \quad (2.4)$$

con $f(q, \omega) = q \cdot \omega$, $g(q, \omega) = \|q\|^2$, $H(q, \omega) = \frac{1}{2}\omega \cdot I\omega$ l'integrale primo dell'energia.

Per avere una parametrizzazione locale della sottovarietà, è necessario esplicitare tre delle coordinate $(q, \omega) \in \mathbb{R}^6$. Per scegliere quali coordinate esplicitare è necessario considerare che, da tale scelta, dipende la sezione che andremo a realizzare. Per studiare le rotazioni stazionarie è conveniente fare sezioni parametrizzate da due componenti ω_i, ω_j della velocità angolare: lo zero di una tale sezione rappresenta, infatti, una rotazione stazionaria attorno all'asse di inerzia e_k , con $k \neq i, j$. In particolare quindi usiamo come coordinate $(\omega_i, \omega_j, q_1)$ e consideriamo la sezione definita da $q_1 = 0$.

Proposizione 9. *Sia M_h un insieme di livello regolare della mappa 2.4. $\forall i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j$, è possibile usare $(\omega_i, \omega_j, q_1)$ come coordinate locali su M_h . Nel dominio di esistenza di questi sistemi di coordinate, la superficie $q_1 = 0$ è trasversale al campo vettoriale del sistema ridotto della Veselova 3.*

Ne consegue che tali superfici sono sezioni di Poincarè.

Dimostrazione. La matrice jacobiana di Ψ è:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (q, \omega)} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & q_1 & q_2 & q_3 \\ 2q_1 & 2q_2 & 2q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

Per il teorema della funzione implicita si possono usare $(\omega_i, \omega_j, q_1)$ come coordinate locali su M_h laddove $\det \frac{\partial \Psi}{\partial (q_2, q_3, \omega_k)} \neq 0$ con $k \neq i, j$, ossia

$$\omega_k \neq 0 \quad \text{e} \quad \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2 \neq 0$$

La seconda condizione equivale a $(\omega \times q)_1 \neq 0$ e, a meno di un segno, coincide con la prima componente del campo vettoriale del sistema ridotto che è, quindi, trasversale a $q_1 = 0$. \square

In figura 2.2 riportiamo il ritratto in fase della mappa di Poincarè relativa alla sezione di coordinate (ω_1, ω_2) . Essa presenta orbite diffeomorfe a \mathbb{S}^1 come ci si attende da sezioni di Poincarè di tori invarianti. L'origine rappresenta la rotazione stazionaria attorno all'asse e_3 in quanto sia ω_1 che ω_2 sono nulle e quindi $\omega_3 = \pm \sqrt{\frac{2h}{I_3}}$. La figura suggerisce che l'origine sia un punto fisso ellittico per la mappa di Poincarè. Omettiamo la sezione di coordinate (ω_2, ω_3) in quanto è analoga alla precedente.

Diversa è, invece, la sezione 2.3 di coordinate (ω_1, ω_3) : l'origine presenta ω_1 e ω_3 nulle e quindi corrisponde ad una delle due rotazioni stazionarie attorno all'asse e_2 . La figura suggerisce che essa sia un punto fisso iperbolico e sono ben visibili le varietà stabili e instabili che in essa entrano o da essa fuoriescono.

Osserviamo, infine, che ogni sezione è sempre contenuta nell'ellisse di equazione $I_i \omega_i^2 + I_j \omega_j^2 = 2h$ in quanto contenuta nell'ellissoide definito dall'integrale primo dell'energia. Tale ellisse è la frontiera delle regioni mostrate nelle figure 2.2 e 2.3.

Il ritratto in fase della mappa di Poincarè è stato realizzato con il software *Mathematica*. Considerando il campo vettoriale del sistema ridotto come un campo definito sulla sottovarietà $\{(q, \omega) \in \mathbb{R}^6 : \|q\| = 1, q \cdot \omega = 0\} \subset \mathbb{R}^6$, lo abbiamo integrato numericamente mediante un algoritmo del tipo *Runge-Kutta* di ordine 2. Se una parametrizzazione della sottovarietà ad energia costante è $(q_1, \omega_i, \omega_j) \mapsto (q, \omega) \in \mathbb{R}^6$, con $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$ (vedi proposizione 2.3), scegliamo come dato iniziale per l'integrazione un punto sulla sezione $q_1 = 0$ di coordinate $(q, \omega) \in \mathbb{R}^6$ date dalla parametrizzazione, in cui si è posto $q_1 = 0$. Considerando i punti che costituiscono l'evoluzione del dato iniziale ottenuta iterando l'algoritmo, abbiamo selezionato quelli costituenti il ritratto in fase della mappa di Poincarè utilizzando come criterio il segno della coordinata q_1 . Quando questa cambia di segno significa, infatti, che l'orbita del sistema ridotto ha attraversato la sezione $q_1 = 0$; i ritratti in fase realizzati sono costituiti dalle coordinate ω_i e ω_j degli evoluti immediatamente successivi al cambio di segno della coordinata q_1 .

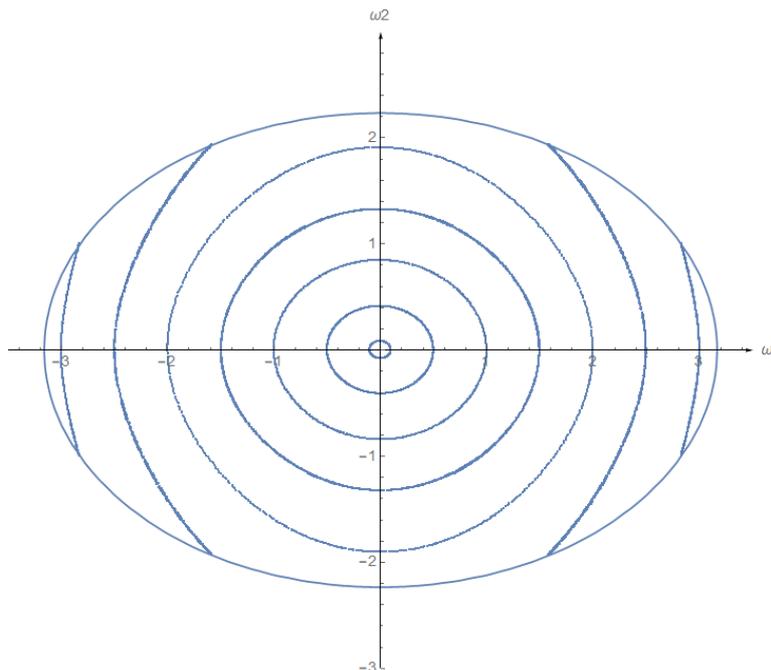


Figura 2.2: Sezione di Poincarè rotazione ellittica stabile. Coordinate (ω_1, ω_2) , sezione $q_1 = 0$.

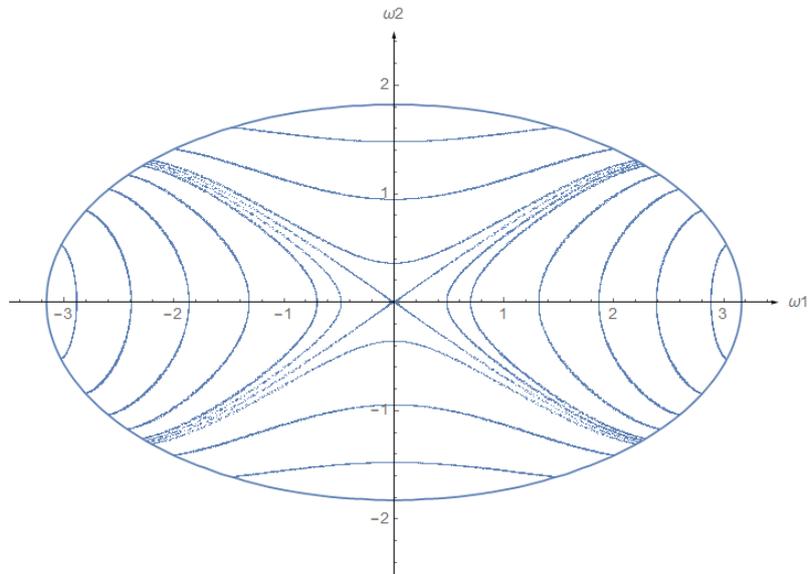
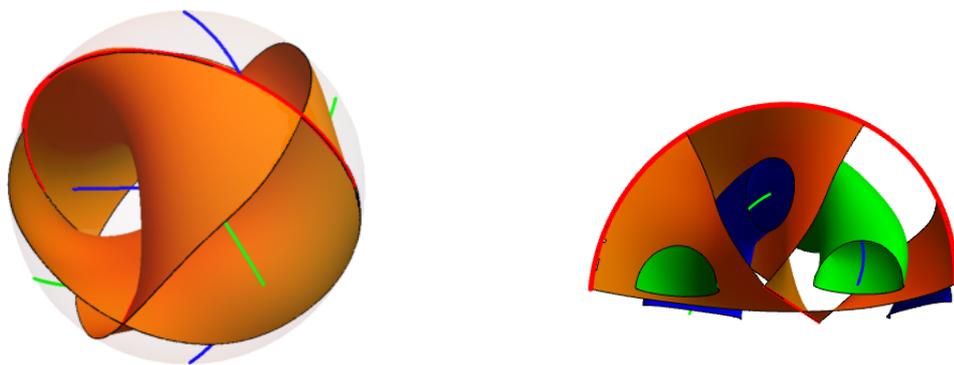


Figura 2.3: Sezione di Poincarè per la rotazione iperbolica instabile. Coordinate (ω_1, ω_3) , sezione $q_1 = 0$.

Una rappresentazione tridimensionale della varietà stabile e instabile delle rotazioni iperboliche può, invece, essere realizzata nel modello a palla solida, raffigurando l'insieme di livello di u in cui sono contenute. Per un valore dell'energia $h > 0$ fissato, l'insieme di livello che contiene queste varietà è dato da $u = 2I_2h$. Nella figura 2.4a le superfici arancioni sono un disegno globale di questo insieme di livello nella palla solida (in grigio). Le rotazioni stazionarie iperboliche (in rosso) sono contenute nell'insieme di livello, mentre le altre quattro si collocano in ciascuna delle regioni delimitate dall'insieme di livello stesso. Anche dalla figura 2.4b, dove raffiguriamo un ottante dell'insieme di livello con alcuni tori invarianti, risulta evidente la funzione separatrice delle due varietà rispetto ai tori che circondano le diverse rotazioni ellittiche. Tali figure sono state ottenute con la funzione *ContourPlot3D* in *Mathematica* che permette di disegnare insiemi di livello tridimensionali di funzioni assegnate.



(a) Visione globale dell'insieme di livello $u = 2I_2h$ insieme alle rotazioni stazionarie

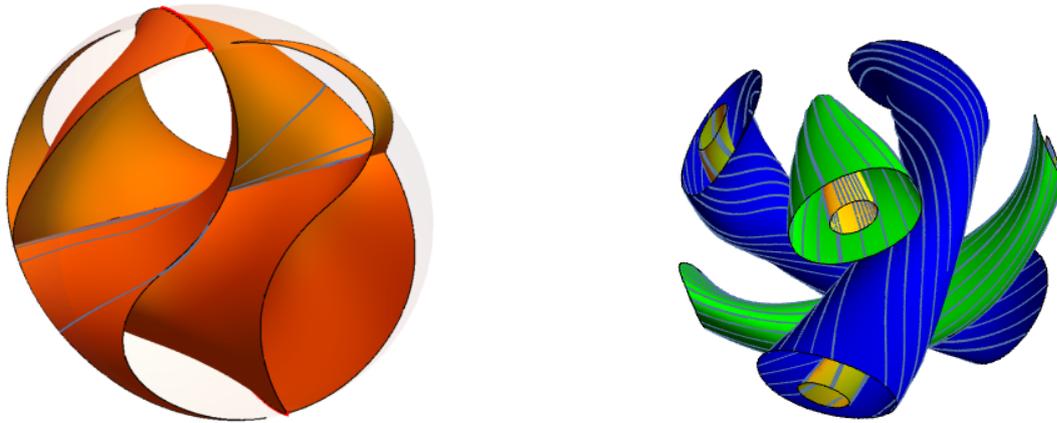
(b) Rappresentazione di un ottante dell'insieme di livello $u = 2I_2h$ con alcuni tori invarianti e, in rosso, le orbite iperboliche

Figura 2.4: Insieme di livello contenente la varietà stabile e instabile

L'insieme di livello così disegnato non è di immediata visualizzazione in quanto le sue due falde si coprono a vicenda. Osserviamo, inoltre, che la varietà stabile di una rotazione è la varietà instabile dell'altra e viceversa. Se le rappresentiamo separatamente è, quindi, possibile individuare precisamente qual è la varietà stabile e quale quella instabile di ciascuna rotazione.

In figura 2.5 mostriamo alcune orbite sovrapposte agli insiemi di livello nella solid ball: in 2.5b orbite quasi periodiche sovrapposte ad alcuni tori invarianti e in 2.5a un'orbita sull'insieme di livello critico di u tendente ad una delle due rotazioni stazionarie (quella rappresentata dal diametro). Questo è un modo per individuare la varietà stabile di una rotazione e identificare, quindi, le due diverse varietà.

Le orbite sono state ottenute integrando numericamente - sempre con un *Runge-Kutta* in *Mathematica* - il campo vettoriale in \mathbb{R}^6 , come indicato in precedenza, e scegliendo opportunamente il dato iniziale in maniera tale che appartenga all'insieme di livello desiderato. Le orbite sono poi state disegnate nella solid ball.



(a) In blu orbita sulla varietà stabile della rotazione iperbolica

(b) Orbite quasi periodiche sui tori invarianti

Figura 2.5: Rappresentazione delle orbite sovrapposte ad alcuni insiemi di livello sulla solid ball

Per riuscire a disegnare solo una delle due varietà - per esempio la varietà stabile - di una rotazione non è sufficiente considerare gli insiemi di livello definiti dagli integrali primi. Un modo possibile - e che abbiamo implementato in questa tesi - è quello di considerare l'evoluzione temporale dei punti dell'insieme di livello che contiene entrambe le varietà: in linea teorica appartengono alla varietà stabile di una rotazione tutti quei punti la cui distanza dalla rotazione considerata tende a 0, al tendere di t all'infinito.

A tale scopo occorre definire un modo per misurare la distanza da una rotazione stazionaria nella solid ball, usare le mappe 2.3 che permettono di identificare $(q, \omega) \in T_1\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^6$ e $P(p_1, p_2, p_3) \in B_P$ punto della palla solida e implementare un algoritmo che permetta di selezionare e disegnare i punti di una sola delle due varietà.

Lavoriamo nella palla solida e denotiamo con $(+)$ la rotazione iperbolica di velocità angolare $(0, \sqrt{\frac{2h}{I_2}}, 0)$ la cui orbita è un diametro della solid ball e con $(-)$ la rotazione di velocità angolare $(0, -\sqrt{\frac{2h}{I_2}}, 0)$ la cui orbita è una semicirconferenza sulla superficie della palla solida (in rosso nella figura 2.1a). Per valutare la distanza di un evoluto dalla rotazione iperbolica è necessario considerare la distanza insiemistica, in quanto si tratta di valutare la distanza da un insieme di punti. Su ciascuna rotazione consideriamo un numero sufficientemente alto di punti $O_i \in B_P, i = 1, 2, \dots, n$. La distanza di un

punto $P \in B_P$ dalla rotazione (+) è

$$\text{dist}_{(+)}(P) = \min_i(\|P - O_i\|)$$

mentre per la rotazione (-) è

$$\text{dist}_{(-)}(P) = \min(\min_i(\|P - O_i\|), \min_i(\|P + O_i\|))$$

per tenere conto che i punti antipodali sono identificati.

Per calcolare l'evoluzione di un punto della solid ball abbiamo integrato numericamente il campo vettoriale in $T_1S^2 \subset \mathbb{R}^6$ facendo uso di un *Runge-Kutta* di ordine 2 e delle mappe definite in 2.3.

Il criterio più ovvio per selezionare i punti della varietà stabile di una delle due rotazioni è quello di valutare, per ciascun punto $P \in B_P$ dell'insieme di livello, se

$$\text{dist}_{(\pm)}(\Phi_t^{B_P}(P)) < \epsilon$$

per un certo tempo $t > 0$, un certo $\epsilon > 0$ piccolo (per esempio $\epsilon = 0.01$) e con $\Phi_t^{B_P}$ il flusso sulla solid ball definito in precedenza.

Questo criterio funziona, tuttavia, solo teoricamente in quanto è necessario osservare che i punti che costituiscono l'insieme di livello elaborato graficamente con la funzione *ContourPlot3D* non sono punti che appartengono esattamente alla varietà, in quanto sono pur sempre una sua approssimazione. In particolare essi appartengono ai tori invarianti immediatamente vicini e quindi la loro evoluzione temporale li porta ad avvicinarsi e allontanarsi periodicamente alla rotazione stazionaria. Inoltre, dato che l'orbita di questi punti si svolge su tori che sono vicini ad entrambe le rotazioni iperboliche (vedi fig 2.4b), la loro evoluzione li porterà ad avvicinarsi periodicamente anche all'altra rotazione iperbolica.

Non è quindi sufficiente valutare la distanza degli evoluti ad un certo tempo t da una rotazione stazionaria, in quanto non è possibile fissare un tempo t valido per tutti. Per riuscire a selezionare i punti della varietà stabile di una rotazione occorre quindi raffinare il criterio di selezione. Esso può essere così formulato a parole: appartengono alla varietà stabile di una rotazione quei punti i cui evoluti si avvicinano prima alla rotazione considerata rispetto a quanto non facciano con l'altra. Più precisamente si deve usare una funzione che arresti l'integrazione quando l'evoluto si è sufficientemente avvicinato ad una delle due rotazioni stazionarie. Il punto considerato appartiene, quindi, alla varietà stabile della rotazione a cui si è avvicinato per primo.

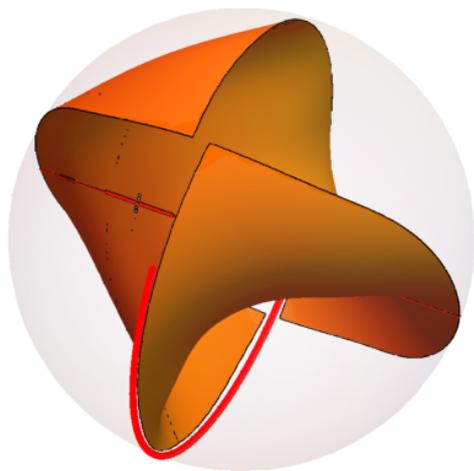
Per la realizzazione della figura abbiamo, infine, individuato due possibilità. La prima consiste nel selezionare i punti a partire da quelli dell'insieme di livello precedentemente disegnato con il *ContourPlot3D*. In questo modo, tuttavia, la figura sarà composta solamente da punti, in quanto con fatica si riesce a disegnare la superficie a partire da essi. La seconda possibilità sfrutta l'opzione *RegionFunction* della funzione *ContourPlot3D* che permette di selezionare previamente i punti che andranno a costituire la superficie, facendo calcolare a *Mathematica* l'insieme di livello solo nella regione i cui punti soddisfano il criterio precedentemente enunciato. In questo modo è possibile ottenere il disegno di una superficie, migliorando notevolmente la qualità grafica dell'immagine ottenuta.

In figura 2.6 alcune immagini della varietà ottenute usando la seconda della modalità indicate. Nello specifico in 2.6a la varietà stabile della rotazione (+), in 2.6c quella stabile per la rotazione (-). In 2.6b metà varietà stabile della rotazione (+) che rende evidente la torsione della superficie attorno alla rotazione iperbolica e in 2.6d l'insieme dei punti della varietà stabile per (+).

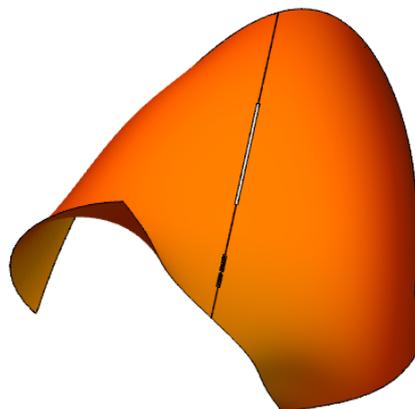
Le due varietà hanno un'evidente simmetria: dato un punto (p_1, p_2, p_3) di una delle due varietà anche il punto trasformato secondo la relazione

$$p_1 \mapsto -p_1, p_2 \mapsto p_2, p_3 \mapsto -p_3$$

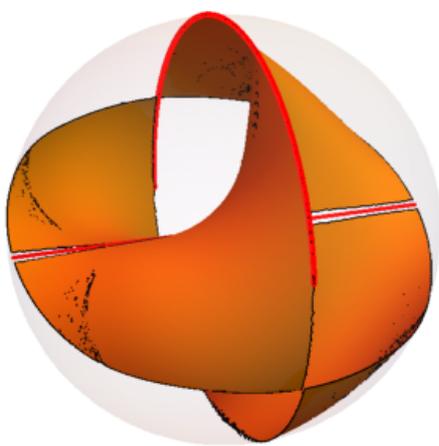
appartiene alla varietà. C'è quindi una simmetria per riflessione attorno all'asse e_2 .



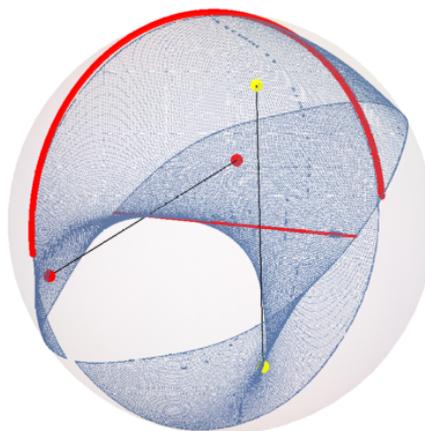
(a) Varietà stabile della rotazione stazionaria (+)



(b) Mezza varietà stabile della rotazione stazionaria (+) definita nella semisfera con $p_2 > 0$



(c) Varietà stabile della rotazione stazionaria (-)



(d) Punti della varietà stabile della rotazione stazionaria (+) con due punti evidenziati e i loro simmetrici

Figura 2.6: Disegno delle varietà stabile e instabile nella solid ball

Tale simmetria può facilmente essere provata numericamente sia disegnando alcuni punti e i loro simmetrici (vedi figura 2.6d), sia provando che si può ottenere l'intera varietà applicando la trasformazione di simmetria ai punti di mezza varietà (per esempio alla mezza varietà con punti aventi $p_1 > 0$ o $p_3 > 0$, ma ovviamente non $p_2 > 0$).

È possibile che l'origine di questa simmetria sia da ricercarsi nel fatto che $H(\omega)$ è quadratico in ω e $u(q, \omega)$ è quadratico sia in q che in ω . Ciò risulta più chiaro osservando che, per note relazioni vettoriali, $u(q, \omega) = \|\mathcal{J}_c \omega \times q\|^2$. Infatti, $(\mathcal{J}_c \omega \times q) \cdot (\mathcal{J}_c \omega \times q) = (\mathcal{J}_c \omega \cdot \mathcal{J}_c \omega)q \cdot q - (q \cdot \mathcal{J}_c \omega)^2 = \|\mathcal{J}_c \omega\|^2 - (q \cdot \mathcal{J}_c \omega)^2$. Per ora, tuttavia, questa rimane solamente un'ipotesi che apre la strada a ricerche ulteriori.

Bibliografia

- [1] L.E. VESELOVA, *New cases of integrability of the equation of motion of a rigid body in the presence of a nonholonomic constraint*, Geometry, Differential Equations and Mechanics - Moscow State University (1986) 64–68.
- [2] F. FASSÒ, *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*, CLEUP (2019).
- [3] A.P. VESELOV AND L.E. VESELOVA, *Integrable Nonholonomic Systems on Lie Groups*, Mat.Notes 44 (5-6) (1988) 810–819.
- [4] F. FASSÒ, L.C. GARCIA-NARANJO E J. MONTALDI, *The 3D Veselova System*, Inedito.
- [5] C. MILLEVOI, *La trottola della Veselova*, Tesi di laurea triennale in Matematica - Università degli studi di Padova. Anno accademico 2017-2018.
- [6] M. ABATE E F. TOVENA, *Geometria differenziale*, Springer - Verlag (2011).
- [7] F. FASSÒ, *Note per il corso di Sistemi Dinamici*, Corso di laurea magistrale in Matematica (2018).
- [8] V.I. ARNOLD, V. KOZLOV E A.I. NEISHTADT, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. [Dynamical systems. III]*, Translated from the Russian original by E. Khukhro. Third edition. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 3. Springer-Verlag, Berlin (2006).
- [9] F. FASSÒ, L.C. GARCIA-NARANJO E J. MONTALDI, *Integrability and dynamics of the n -dimensional symmetric Veselova top*, Journal of Nonlinear Science 29 (3) (2018) 1205–1246. doi:arXiv:1804.09090v1 [math.DS] 24Apr2018.
- [10] F. FASSÒ E L. BATES, *The conjugate locus for the Euler top. I. The Axisymmetric Case*, International Mathematical Forum 2 (43) (2007) 2109–2139.
- [11] T. LAZZARONI, *Integrazione numerica su varietà: il caso del corpo rigido mediante quaternioni*, Tesi di laurea triennale in Matematica - Università degli studi di Padova. Anno accademico 2004-2005.
- [12] E. ZEHNDER, *Lectures on Dynamical Systems - Hamiltonian Vector Fields and Symplectic Capacities*, European Mathematical Society (2010).