



Università degli studi di Padova

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

Corso di Laurea Triennale in
ingegneria Meccanica e Meccatronica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

IN INGEGNERIA MECCANICA E MECCATRONICA

ANALISI TRIDIMENSIONALE AGLI ELEMENTI FINITI DI GANCI A SEZIONE CIRCOLARE E TRAPEZOIDALE

Relatore: Chiarissimo Prof. Marino Quaresimin

Correlatore: Ing. Paolo Andrea Carraro

Laureando: Stefano Bressan

Anno accademico 2012-2013

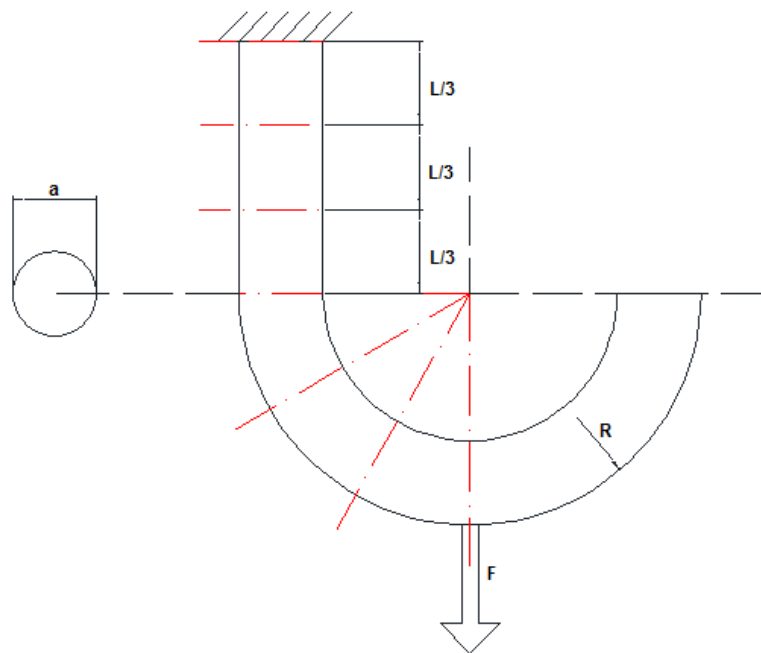
INDICE

Capitolo 1 – Introduzione	3
Capitolo 2 - Soluzione del problema con trattazione analitica	7
2.1 Caratteristiche geometriche della sezione	7
2.2 Calcolo delle tensioni normali e di taglio	8
2.3 Teoria delle Travi Curve	11
Capitolo 3 – Creazione dei modelli FEM	15
3.1 – Gancio a sezione Circolare.....	15
3.2 - Gancio a sezione Trapezoidale	18
3.3 Introduzione al FEM	21
Capitolo 4 – Confronto dati analitici e dati FEM	23
4.1 Introduzione.....	23
4.2 Gancio a sezione circolare.....	24
4.3 Gancio a sezione Trapezoidale:.....	39
Capitolo 5 – Conclusioni	53

1 INTRODUZIONE

Il problema affrontato in questa tesi è l'analisi tensionale su alcune sezioni di ganci a sezione circolare e trapezoidale mettendo in evidenza le discrepanze tra valori analitici e valori ottenuti con il metodo degli elementi finiti cercando di individuare la principale causa che provoca tali discordanze. I ganci da studiare hanno sezioni differenti così come lo è anche la posizione dell'incastro rispetto al punto di applicazione della forza in modo da individuare la configurazione più vantaggiosa in termini progettuali a parità di area della sezione.

Configurazione del gancio a sezione circolare:



Dove:

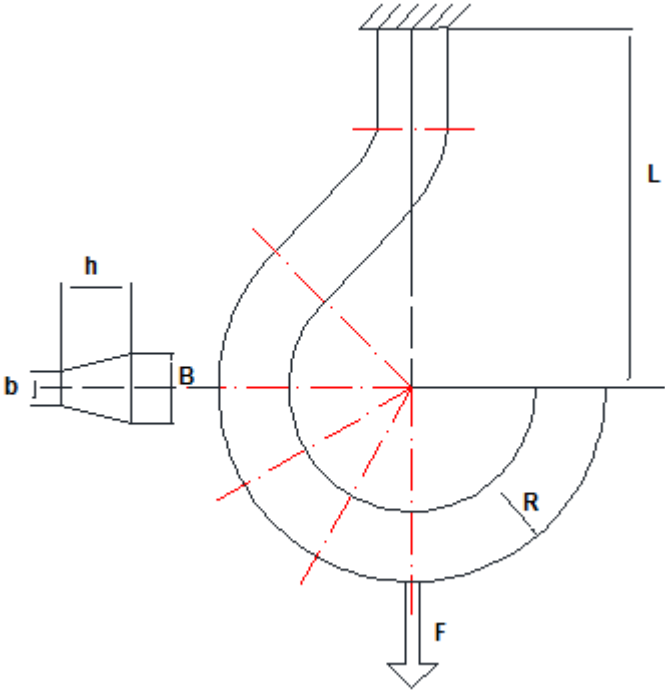
$a = 20\text{mm}$

$R = 55\text{mm}$

$L = 60\text{mm}$

$F = 10000\text{N}$

Configurazione gancio a sezione trapezoidale:



Dove:

$h = 20\text{mm}$

$b = 10\text{mm}$

$B = 20\text{mm}$

$L = 100\text{mm}$

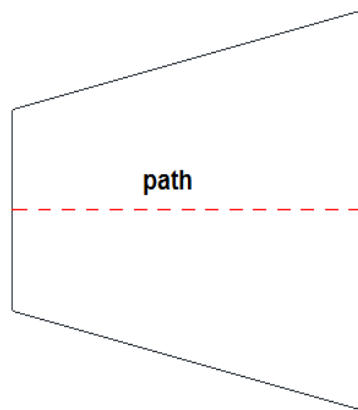
$R = 55\text{mm}$

L'analisi sarà strutturata in questo modo:

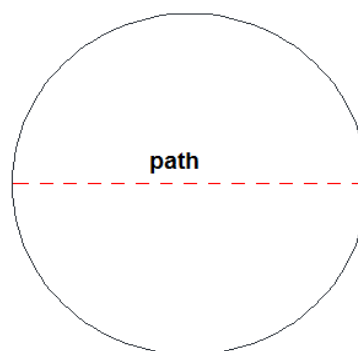
Le tensioni sulla sezione saranno analizzate attraverso un path, ovvero una sequenza di punti. Per ognuno di questi punti il simulatore calcola tutte le tensioni ed in questo modo se si prende un path che corre lungo la sezione riusciamo ad individuare la variazione delle tensioni.

Path analizzati

Sezione trapezoidale



Sezione Circolare



I path analizzati sono sempre perpendicolari alla tangente della linea di estrusione ed appartenenti al piano di simmetria della struttura.

2 SOLUZIONE DEL PROBLEMA CON TRATTAZIONE ANALITICA

Principali formulazioni analitiche utilizzate

2.1 Caratteristiche geometriche della sezione

Per calcolare le tensioni agenti sulle sezioni è necessario definire le caratteristiche geometriche della sezione, in particolare il baricentro e il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico.

Per il cerchio è sufficiente prendere l'intersezione di due assi di simmetria (che sono infinite) e si verifica che il baricentro coincide con il centro.

Per il calcolo del momento di inerzia è sufficiente applicare la formula:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Per il trapezio si sono usate le seguenti formulazioni analitiche note per il calcolo del baricentro e del momento di inerzia.

$$y_g = \frac{H (B + 2b)}{3 (b + B)}$$

Per il calcolo del momento d'inerzia si è fatta la somma dei momenti di inerzia dati dal rettangolo del trapezio e dei due triangoli rispetto alle coordinate del baricentro precedentemente calcolati.

2.2 Calcolo delle tensioni normali e di taglio

Tensioni Normali

Per calcolare le tensioni normali dovute a flessione si è ricorso alla formulazione di Navier per i tratti di trave rettilinei ovvero dove l'asse baricentrico coincide con l'asse neutro. Le sezioni interessate sono quelle del gancio circolare nel tratto verticale prima dell'inizio della curvatura.

La formulazione di Navier è ricavata ipotizzando che le sezioni rimangano piane anche dopo l'applicazione del momento flettente e che subiscano quindi una rotazione rigida attorno ad un asse detto asse neutro che, nel caso di tratto rettilineo, coincide con l'asse baricentrico.

Si pone l'integrale di tutti i momenti prodotti dalle tensioni agenti sulla sezione uguale al momento flettente agente:

$$\int_A \sigma y dA = M_f$$

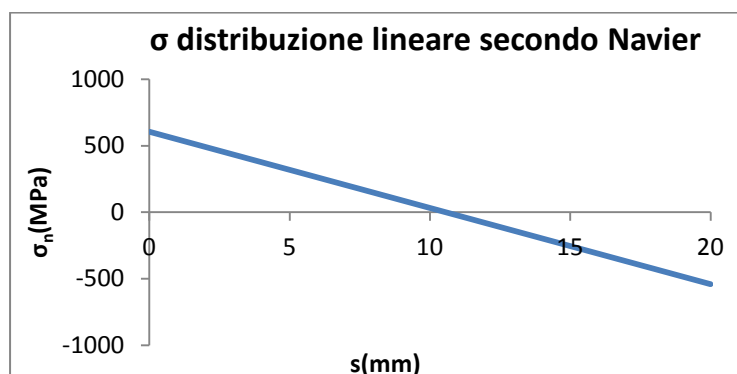
Si ricava quindi l'intensità delle σ_z in funzione della distanza dall'asse neutro:

$$\sigma = \frac{My}{J_{xx}}$$

L'andamento delle tensioni è quindi crescente man mano che ci si allontana dall'asse neutro e massimo ai bordi della sezione.

Alle tensioni normali dovute al momento flettente bisogna aggiungere anche il contributo dello sforzo normale alla sezione che provoca delle tensioni σ_z costanti su tutta la superficie.

$$\sigma = \frac{N}{A}$$



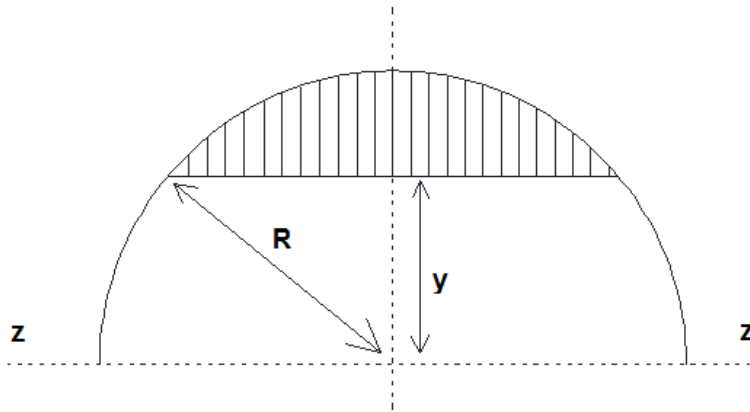
Tensioni Tangenziali

Per il calcolo delle tensioni tangenziali si è utilizzata la formulazione di Jourawski essendo sempre in condizioni di flessione e taglio anche se non è confermata l'ipotesi dei lati paralleli all'asse del momento flettente, avendo sezioni circolare e trapezoidale. Questo utilizzo non propriamente corretto della formula della distribuzione delle tensioni tangenziali sarà messo in evidenza successivamente dai contour plots dove si noterà una distribuzione non uniforme delle tensioni. L'equazione per trovare le tensioni τ è la seguente :

$$\tau = \frac{TS_{zz}}{J_{zz}B}$$

Dove B è lo spessore della sezione nel punto considerato.

Caso Sezione circolare:



Per trovare il S_{zz} in ogni punto si utilizza questa formulazione ricavata dalla definizione di momento del primo ordine:

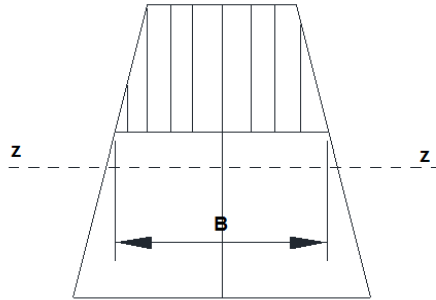
$$S_{zzi} = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Come B si utilizza pitagora quindi

$$B_i = \sqrt{R^2 - y^2}$$

Quindi si ricava il taglio avendo tutti i dati.

Per la sezione trapezoidale il calcolo è analogo ovvero si tratta di calcolare S_{zz} e come B si prende lo spessore su cui giace il punto considerato:



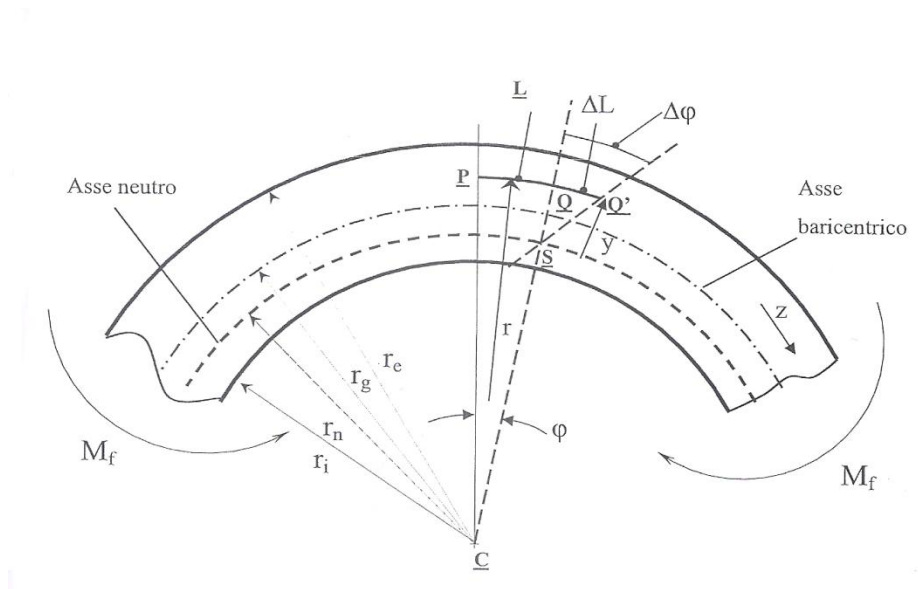
Per calcolare S_{zz} è sufficiente ricavare l'area del trapezio e il suo baricentro e moltiplicare l'area trovata per la distanza tra il baricentro della sezione e il baricentro del trapezio considerato.

Si hanno ora tutti i dati per calcolare le tensioni tangenziali per ogni punto considerato del path.

2.3 Teoria delle Travi Curve

Questa trattazione analitica è indispensabile per calcolare le tensioni normali dovute a flessione lungo i tratti del gancio che hanno una certa curvatura.

Schema generale:



Dove

r_i = raggio interno

r_e = raggio esterno

r_n = raggio neutro

y = distanza rispetto all'asse neutro

L = lunghezza della fibra in deformata

ΔL = allungamento della fibra PQ

Ipotesi per la trattazione:

- 1) Il materiale ha lo stesso modulo E per trazione e compressione.
- 2) Una sezione inizialmente piana, a seguito dell'applicazione di una sollecitazione esterna, si deforma rimanendo piana.
- 3) Ciascuna sezione trasversale della trave presenta un piano di simmetria passante per il centro di curvatura.

Innanzitutto si ricava la posizione dell'asse neutro il quale non coincide con l'asse baricentrico

Da:

$$\int_A \sigma dA = 0$$

Si ricava

$$r_n = \frac{\int_A r dA}{\int_A dA}$$

Da questa formula generale si ricava quella specifica per ogni sezione, in particolare:

Cerchio:
$$r_n = \frac{(\bar{r}_e + \bar{r}_i)^2}{4}$$

Trapezio:
$$r_n = \frac{Ah}{b_i r_e - b_e r_i \ln \frac{r_e}{r_i} - b_i - b_e} h$$

Dove

r_e = raggio di curvatura esterno

r_i = raggio di curvatura interno

b_i = base interna

b_e = base esterna

A = Area della sezione

h = Altezza della sezione

Per ricavare invece la distribuzione delle σ si parte dall'integrale analogo a quello della teoria delle travi rettilinee:

$$\int_A \sigma y dA = M_f$$

Da cui si ricava:

$$\sigma = \frac{M_f y}{r A \delta}$$

Dove

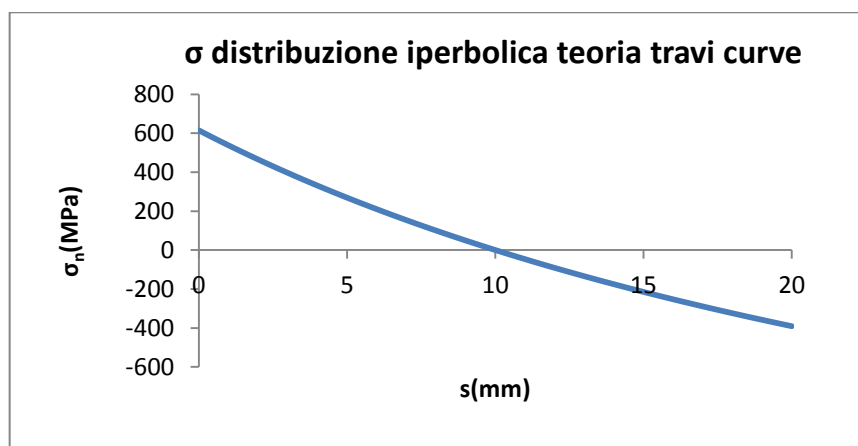
y = distanza dall'asse neutro

r = raggio del punto analizzato

δ = eccentricità (distanza dell'asse baricentrico dall'asse neutro)

la distribuzione non è lineare come Navier ma iperbolica.

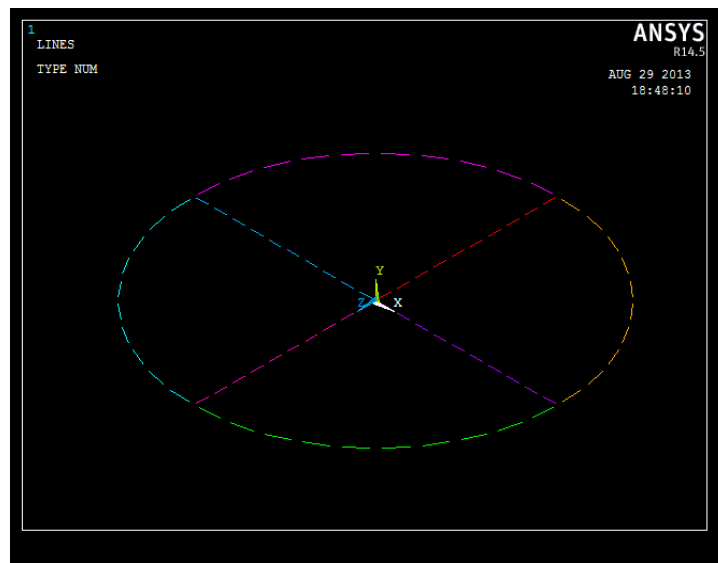
Esempio distribuzione tensioni iperbolica:



3 CREAZIONE DEI MODELLI FEM

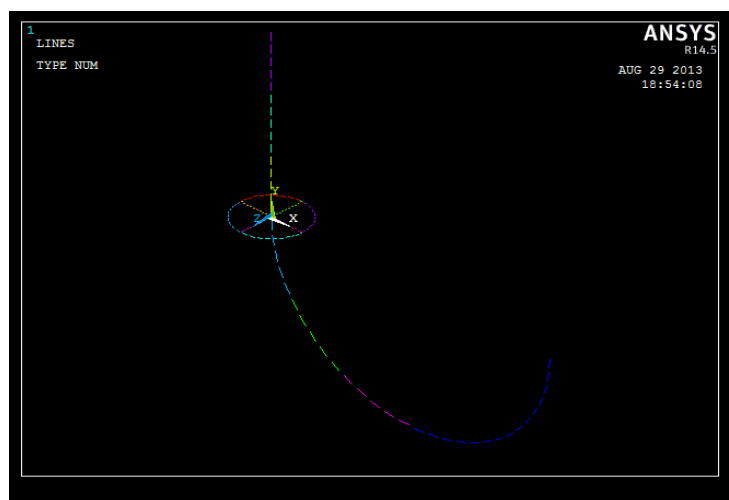
3.1 – Gancio a sezione Circolare

Come prima cosa si è creata una circonferenza che rappresenta la sezione del gancio e due assi di simmetria tra loro ortogonali per ottimizzare la meshatura successiva e per analizzare il path.



Sezione circolare con linee suddivise

Successivamente si sono create le linee di estrusione a loro volta divise in modo da guidare la meshatura con elementi omogenei per tutto il gancio.

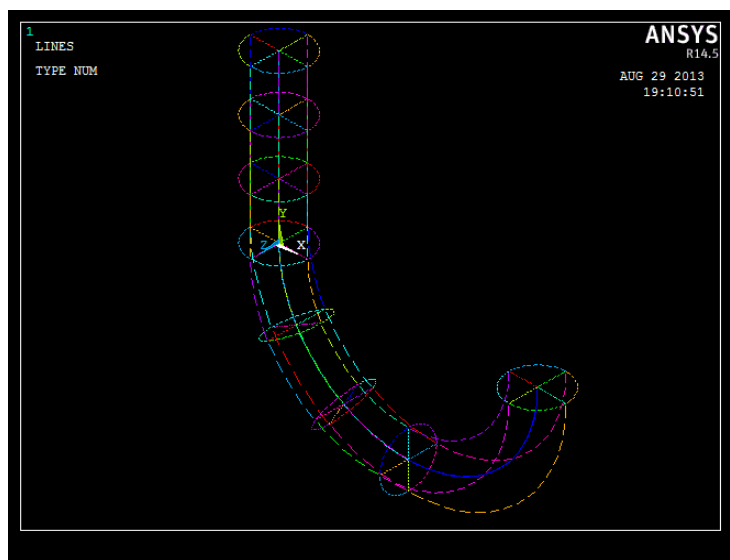


Linee di estrusione

E' stata fatta un'estrusione della sezione lungo le linee in modo da creare dei volumi delimitati dalle sezioni che ci interessa analizzare.

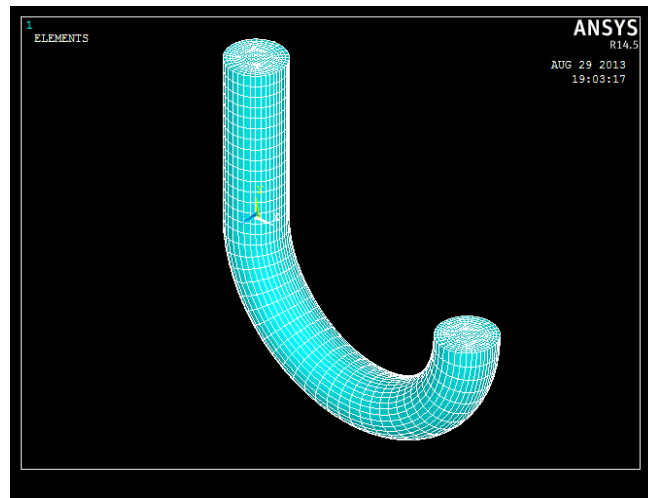


Sezioni estruse: le sezioni con la circonferenza evidenziata in bianco saranno soggette alle analisi FEM



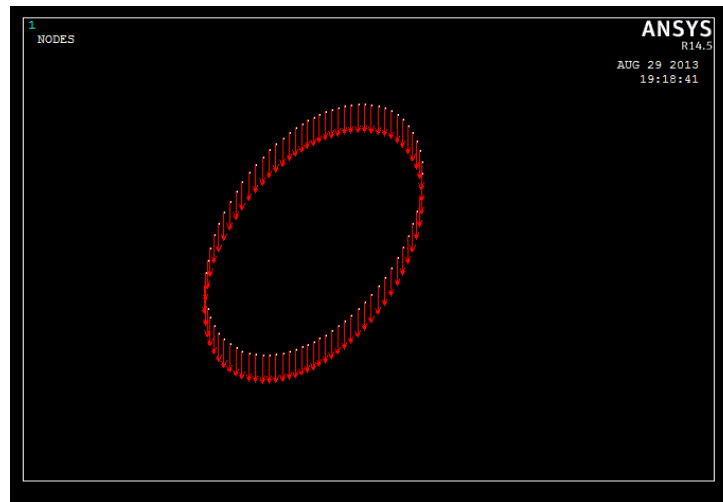
Linee del modello: questo tipo di suddivisione guiderà la meshatura

Il processo di meshatura è stato semplice: avendo già le linee guida suddivise, è stato dato il comando di meshatura dei volumi “4 o 6 sided” per ottenere elementi solid-186:



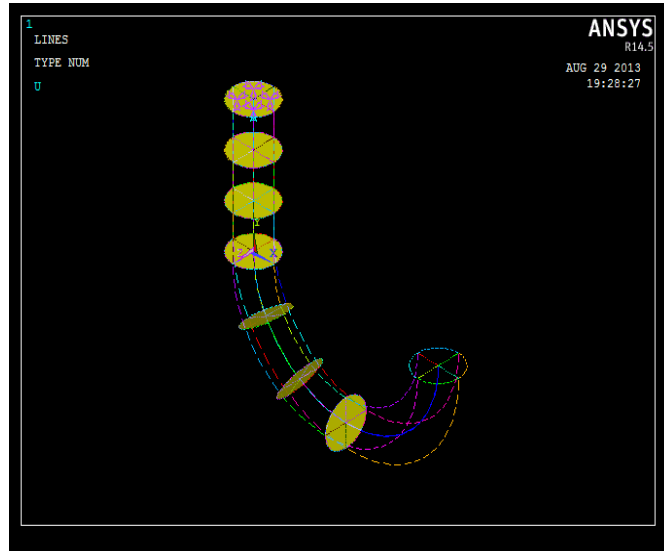
Gancio meshato: gli elementi sono distribuiti in maniera tale da seguire la suddivisione delle linee sia di costruzione dell'area che di estrusione

E' stato applicato un vincolo sull'area superiore di tipo a incastro che toglie tutti i gradi di libertà alla superficie col comando Displacement del sottogruppo Structural. La forza non è stata applicata in un solo punto ma in ogni nodo della circonferenza: avendo 80 nodi e una forza di 10000 N per ogni nodo sono stati applicati 125 N verso il basso.



Applicazione Carico: questa distribuzione è stata fatta per evitare tensioni troppo elevate in un unico eventuale punto di applicazione

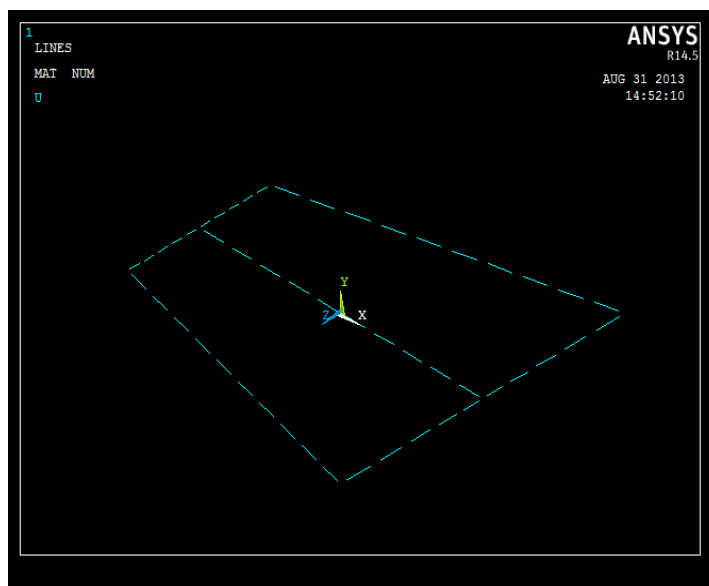
Dopo aver risolto la struttura si sono analizzati path delle sezioni in esame: i path sono stati presi in direzione radiale rispetto al centro di curvatura del gancio in modo da analizzare la variazione delle tensioni normali e tangenziali nella sezione (teoricamente costanti nella direzione perpendicolare a quella presa in considerazione).



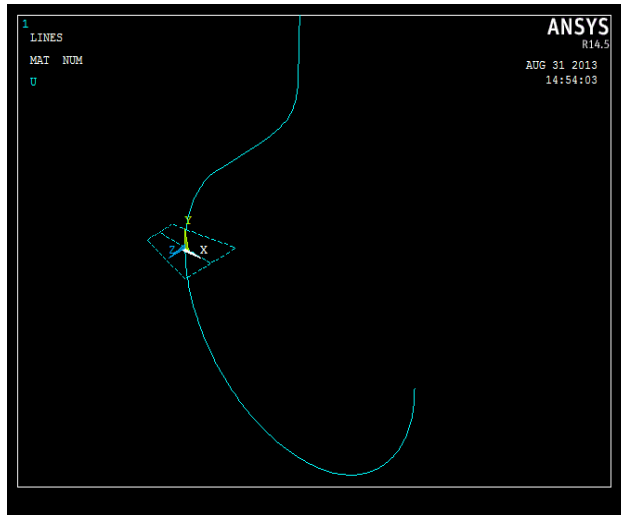
Sezioni analizzate (in giallo)

3.2 - Gancio a sezione Trapezoidale

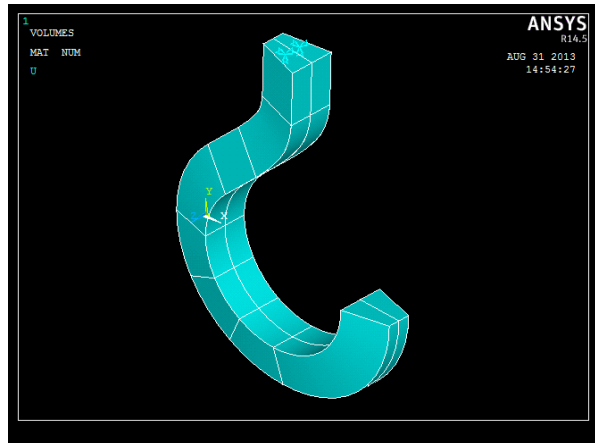
La costruzione e il metodo per la meshatura è analogo a quello circolare. Si riportano alcune immagini che catturano alcuni passi per la costruzione del modello:



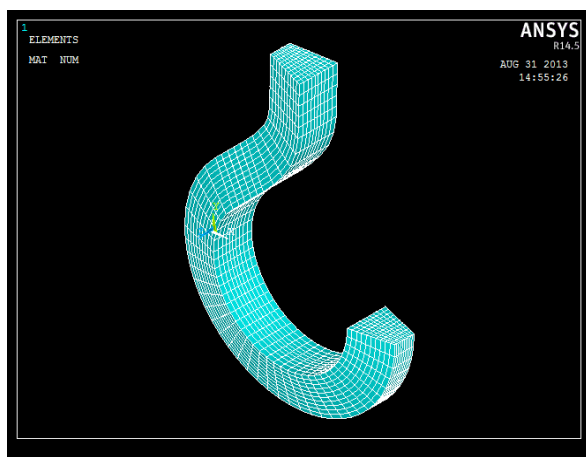
Sezione con linee suddivise (la linea centrale rappresenta il path)



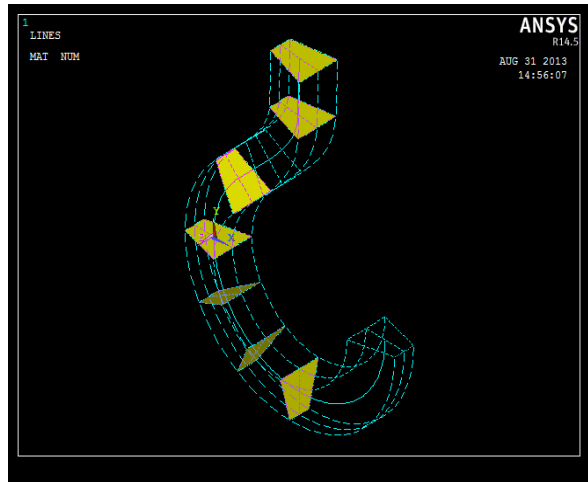
Linea che guiderà l'estrusione della sezione



Volumi dopo estrusione della sezione

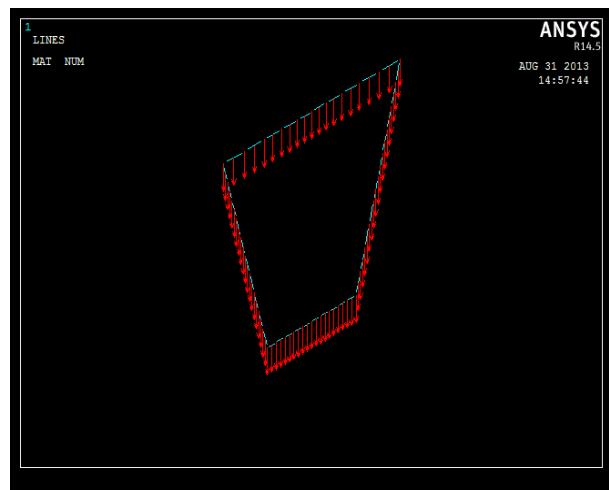


Gancio dopo meshatura



Sezioni che si andranno ad analizzare

La forza è stata applicata come nel caso del primo gancio ed avendo anche qui 80 nodi al perimetro della sezione, per ogni nodo sono stati applicati 125 N di forza verso il basso:



Forze applicate ai nodi

3.3 Introduzione al FEM

Il FEM ovvero metodo agli elementi finiti è una modalità di analisi di una struttura che ci permette di ottenere i risultati di un problema attraverso la risoluzione di equazioni algebriche esatte o approssimate. Il sistema consta nel trovare una matrice K detta di rigidità che lega le forze con gli spostamenti.

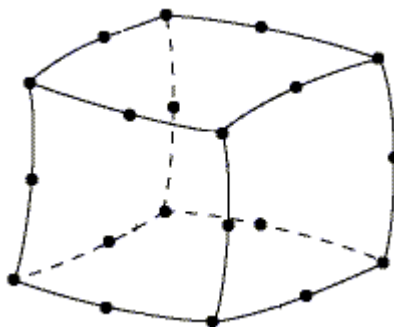
$$F = K \{f\}$$

Ricavata la K ed essendo note le forze applicate si risale agli spostamenti e alle reazioni vincolari della struttura. La dimensione della matrice, il numero di equazioni da risolvere e la possibilità di determinare la soluzione in forma esatta o meno dipende ovviamente dalla complessità del problema affrontato.

Il vantaggio fondamentale di questo metodo è chiaramente la possibilità di automatizzazione e la univocità del calcolo: se si forniscono i dati in ingresso e un modello geometrico la soluzione sarà univoca. Ovviamente per la grande mole di equazioni da risolvere è necessario un dispositivo in grado di affrontare molti cicli di calcolo in un tempo ragionevole. La struttura viene solitamente scomposta in piccole sottostrutture dette elementi le quali possiedono un certo numero di nodi e per ognuno dei quali il metodo darà in output spostamenti e forze applicate al nodo. E' quindi un modo per trovare la soluzione alla struttura completa e in ogni suo punto.

Mentre con una struttura a 2 nodi ad esempio un'asta si può ricavare agevolmente la matrice di rigidità essendo essa di dimensioni 2×2 , con un elemento a 20 nodi di forma cubica (come nel caso in esame) la cosa si fa più complicata ed occorre un calcolatore per risolverla come nel caso esaminato.

La struttura è stata meshata proprio con elementi a 20 come si vede dalle immagini nelle pagine precedenti. L'elemento è un cubo avente i nodi in ogni vertice e alla metà di ogni spigolo:



Elemento Solid-186 a 20 Nodi

4 CONFRONTO DATI ANALITICI E DATI FEM

4.1 Introduzione

In questo capitolo verranno messi a confronto i dati analitici calcolati con le relazioni espone nei precedenti capitoli e i dati che risultano dall'analisi dei modelli realizzati. I grafici faranno riferimento ai path delle sezioni dove il punto zero rappresenta il punto del path interno al gancio e così via fino alla fine della sezione. In ogni sezione verranno visualizzati i seguenti dati:

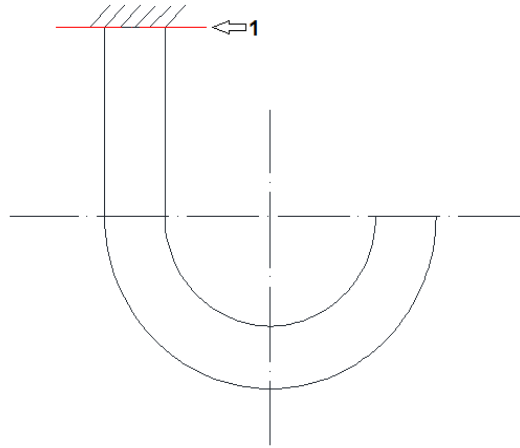
- 1) Posizione della sezione sul gancio
- 2) Forze agenti
- 3) Contour Plots
- 4) Grafici di confronto
- 5) Commenti ai dati

I contour plots serviranno ad avere una visione più globale delle tensioni agenti sulla sezione, in quanto i path riassumono sì la linea dove abbiamo la variazione di tensione ma con una certa approssimazione, visto che si andrà ad analizzare strutture la cui risoluzione richiede la formulazione di alcune ipotesi semplificative.

4.2 Gancio a sezione circolare

4.2.1 Sezione 1

Posizione:



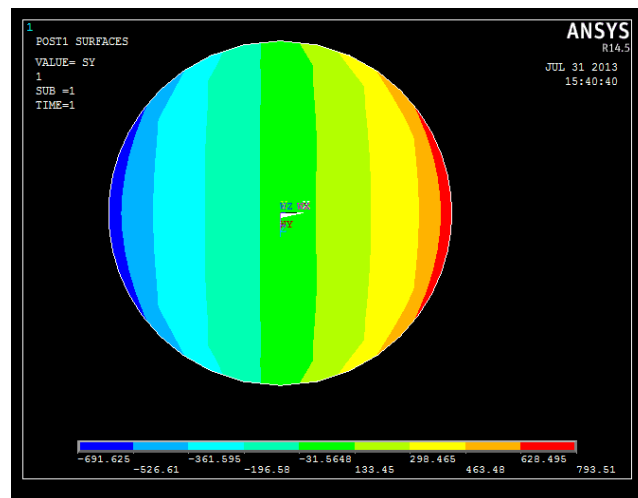
Forze agenti:

All'incastro abbiamo sia momento flettente ottenuto moltiplicando la forza per il braccio:

$$M_f = F * b = 10000 \text{ N} * 45 \text{ mm} = 450000 \text{ Nmm}$$

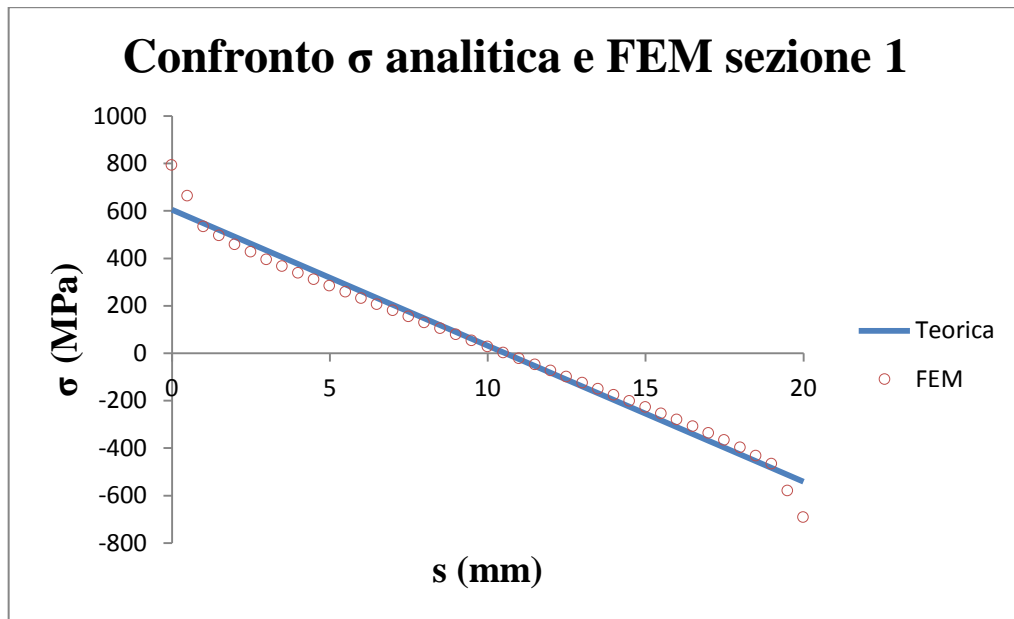
Abbiamo inoltre uno sforzo normale N pari alla forza applicata ovvero 10000 N che induce delle tensioni σ normali costanti su tutta la sezione:

Contour Plots:



Contour Plot σ sezione 1

Grafici dei risultati:



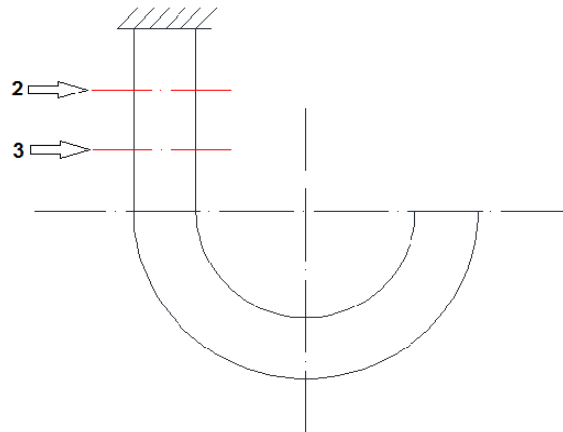
Tensioni normali σ :

Le tensioni normali sono calcolate secondo Navier e quindi si vede dalla linea teorica come vi sia una retta che passa da una estremità di massima trazione ad una di massima compressione. Si nota che l'asse neutro non coincide con l'asse baricentrico: questo è dovuto all'ulteriore tensione data dallo sforzo in direzione conseguente all'applicazione del carico che aumenta la porzione di area sottoposta a trazione. I risultati del FEM coincidono in maniera praticamente perfetta fino alle estremità della sezione dove vi è un'amplificazione delle tensioni siano esse di trazione o compressione. Questo è dovuto molto probabilmente al fatto che stiamo analizzando un vincolo ideale dove le ipotesi per calcolare le tensioni normali non sono verificate (ovvero la lontananza dai vincoli). Le tensioni analizzate inoltre sono più alte di quelle presenti della sezione critica (ovvero quella analizzata per il progetto) ma bisogna tener conto che solitamente questo tipo di struttura non viene vincolata ad incastro.

Contour plot:

Il contour plot conferma le analisi fatte: si vede uno spessore delle bande costante nel mezzo e un infittimento di queste ultime ai bordi della sezione come si evince dal grafico.

4.2.2 Sezioni 2 e 3

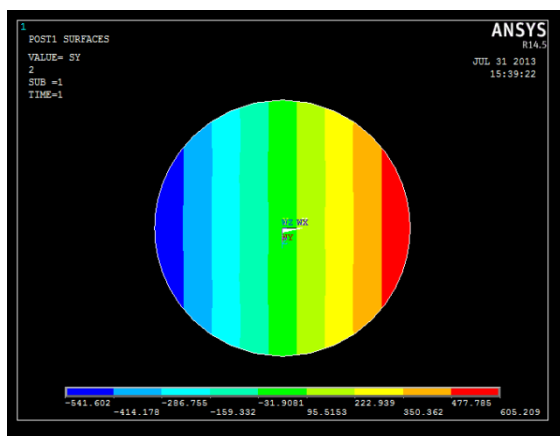


Queste sezioni vengono analizzate in uno stesso paragrafo in quanto sono soggette alle stesse forze e momenti e hanno entrambe una distanza sufficiente dal vincolo per aderire alle formulazioni per il calcolo della σ .

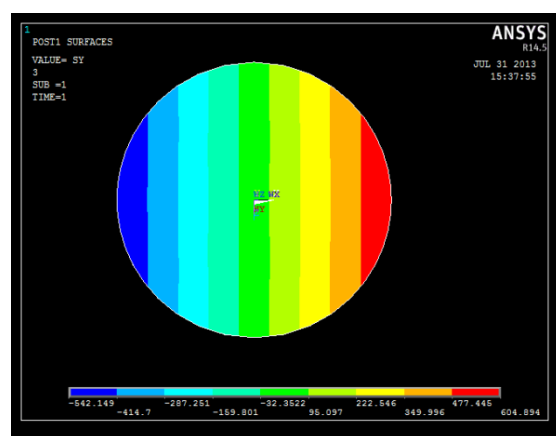
Forze agenti:

Queste sezioni sono soggette ai medesimi momento flettente e sforzo normale della sezione 1 con l'unica differenza che si trovano ad una distanza 20mm e 40mm (rispettivamente sezione 2 e 3) in direzione verticale dall'incastro.

Contour Plots:



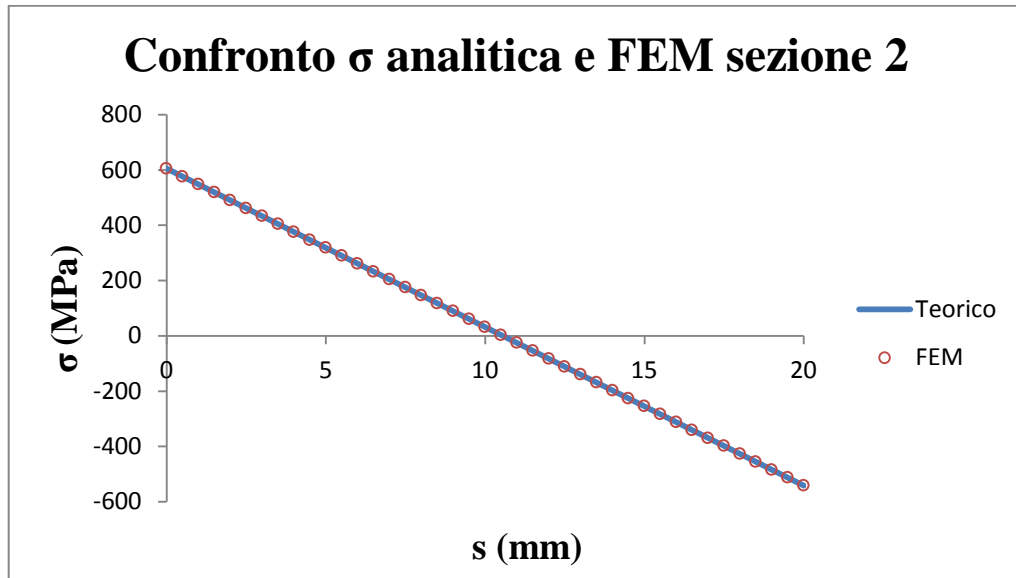
contour plot σ sezione 2



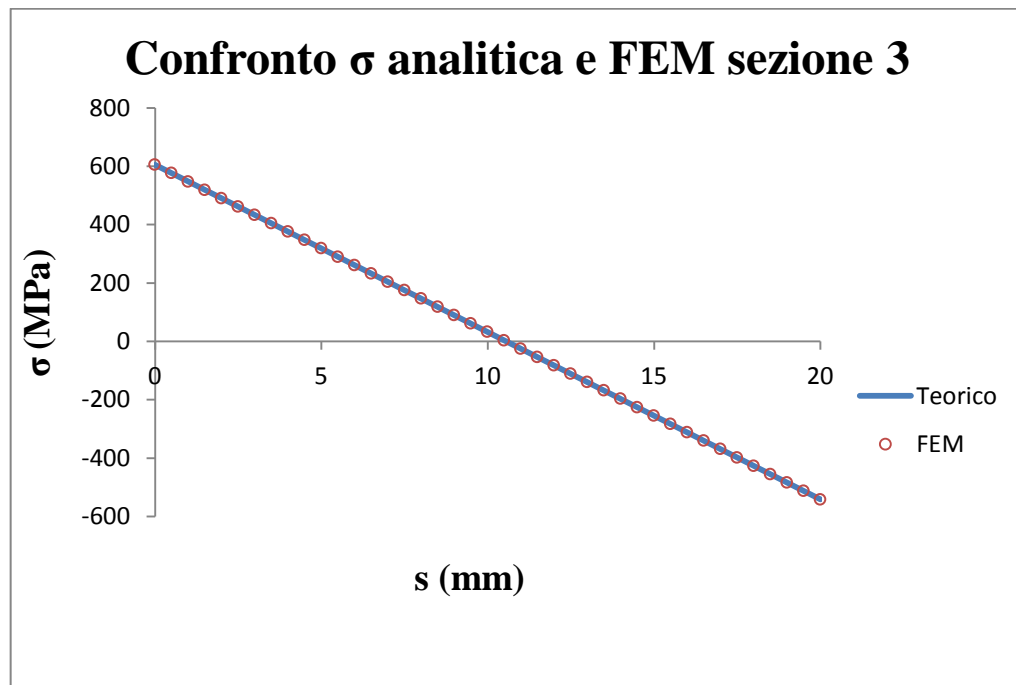
contour plot σ sezione 3

Grafici dei risultati:

Sezione 2



Sezione 3



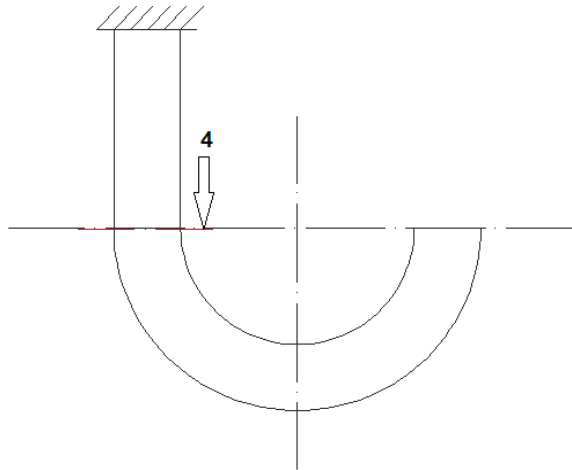
Tensioni normali σ :

Quello che si nota in questi path è una completa congruenza tra i dati analitici e FEM in quanto, pur avendo le stesse condizioni di forze e momenti applicati della sezione all'incastro, siamo ad una distanza dal vincolo tale da rispettare le ipotesi per l'analisi con Navier. Vediamo, come nella sezione 1, che l'asse neutro è verso l'esterno del gancio in quanto abbiamo la tensione provocata dal carico in direzione normale che aumenta i punti del path sottoposti a trazione.

Contour plot:

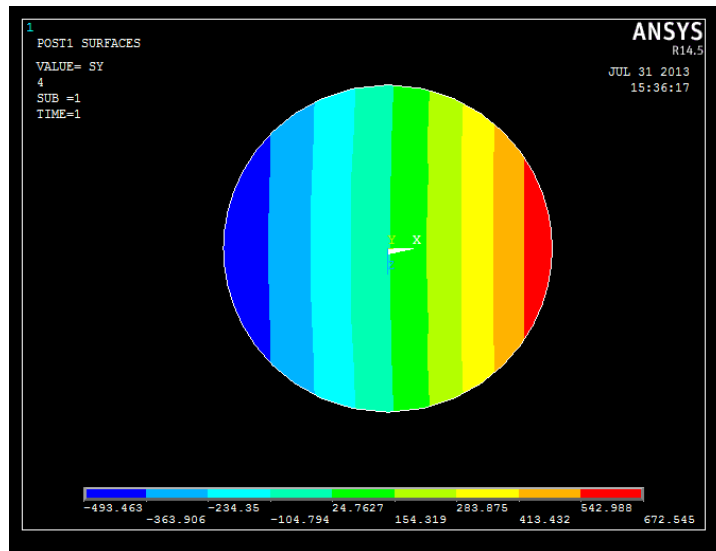
I contour plot fanno vedere che se si prende una tensione in un punto del path questa coinciderà con tutte le tensioni sulla linea parallela all'asse del momento flettente in quanto la tensione varia solo al variare della distanza dall'asse baricentrico.

4.2.3 Sezione 4

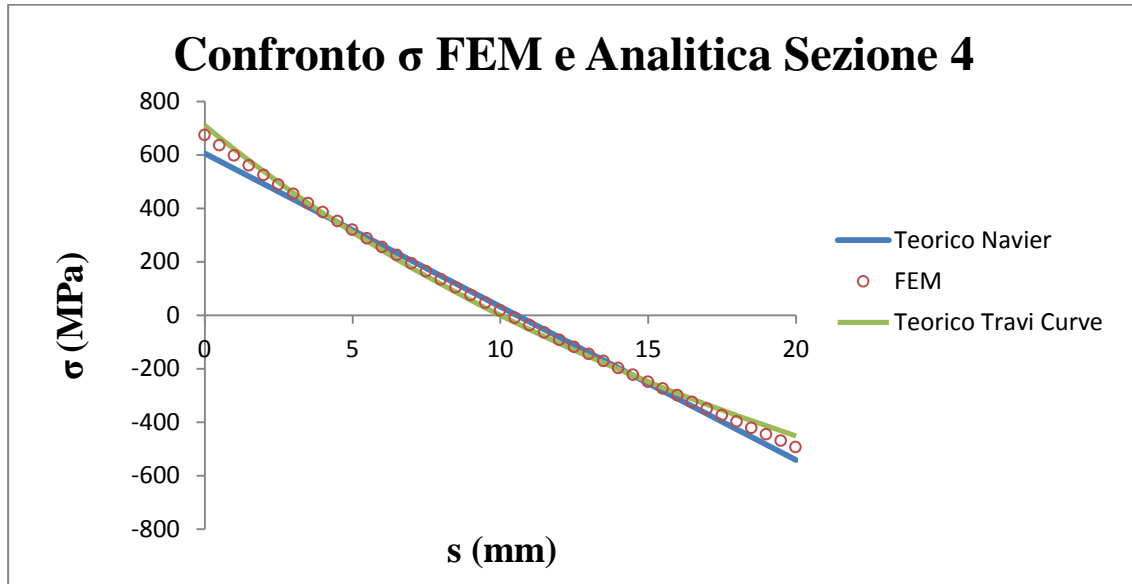


Questa sezione è stata analizzata con due metodi analitici in quanto può essere considerata appartenente sia ad un tratto rettilineo ma anche curvo. In questo caso quindi si farà il confronto tra FEM, analisi con Navier e analisi con travi curve.

Contour Plot:



Contour plot σ sezione 4



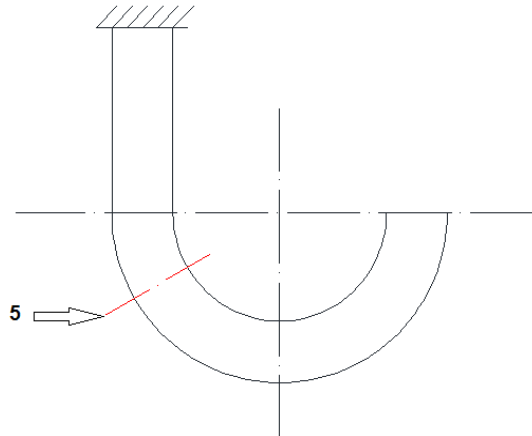
Tensioni normali σ :

Innanzitutto notiamo che in questa sezione si ottengono i valori più alti della tensione di tutta la struttura ed infatti è utilizzata come sezione di progetto. I due metodi analitici sono differenti in quanto quello di Navier sottostima la tensione FEM di circa 70 MPa mentre quelle delle travi curve la sovrastima di 30 MPa ed è quindi preferibile alla progettazione. Questa disparità è data dal fatto che questa zona è di transizione ed è quindi difficile capire quale formulazione utilizzare.

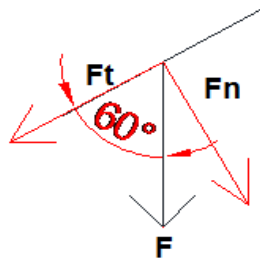
Contour Plot:

I contour plot ci suggerisce che il comportamento è quello di una sezione appartenente ad una trave curva in quanto nel grafico si nota un infittimento delle bande di tensione nella zona rossa di trazione e che quindi ricalca l'andamento iperbolico delle tensioni in un tratto di trave curvilineo sottoposto a momento flettente.

4.2.4 Sezione 5



Forze agenti:

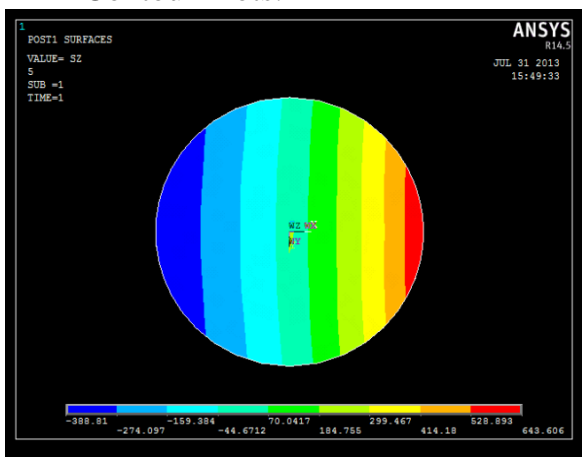


$$F_t = 10000\text{N} * \cos 60 = 5000\text{N}$$

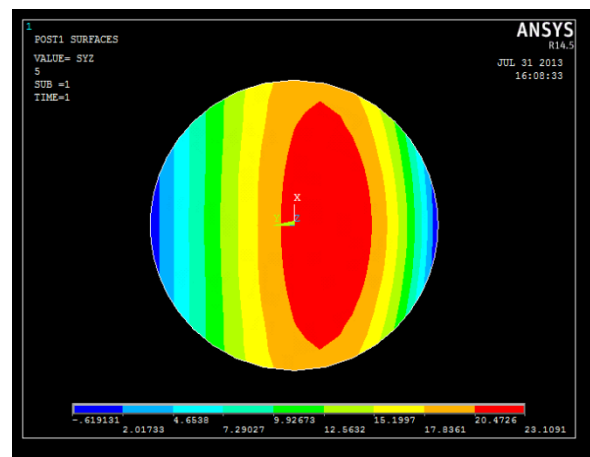
$$F_n = 10000\text{N} * \sin 60 = 8660\text{N}$$

$$M_f = 10000\text{N} * 45 * \sin 60 = 389711\text{ Nmm}$$

Contour Plots:

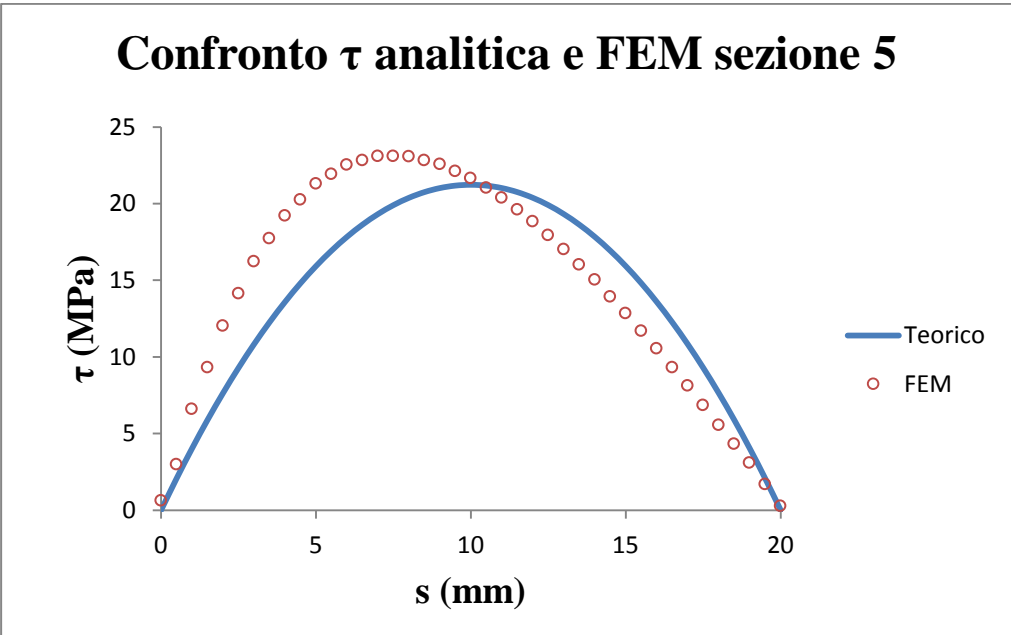
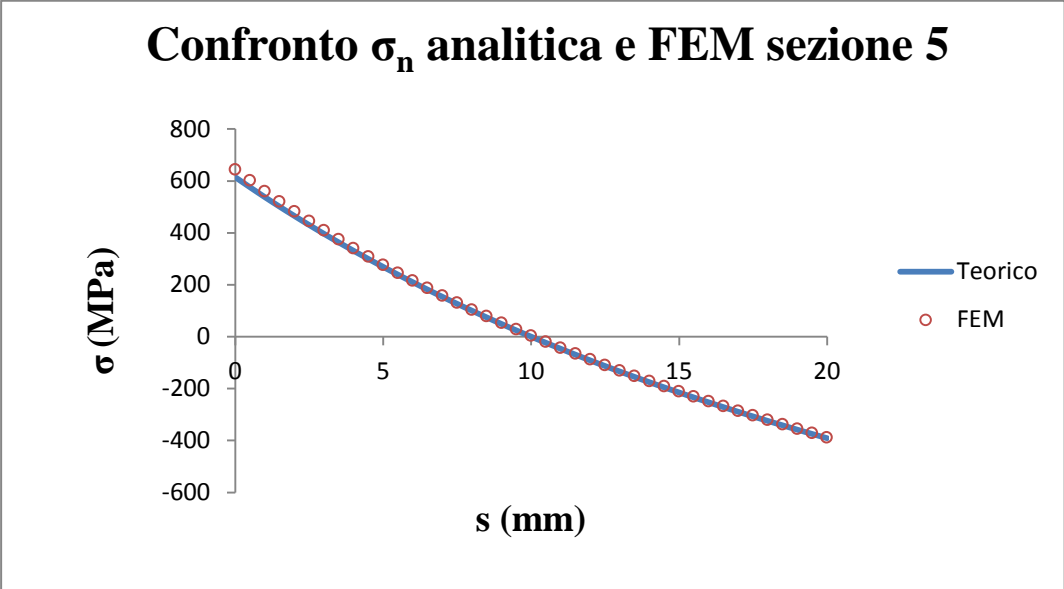


Contour Plot σ sezione 5



Contour Plot τ sezione 5

Grafici dei risultati:



Tensioni normali σ :

Le tensioni normali ricalcano quella che è la teoria delle travi curve ovvero un andamento iperbolico delle tensioni. I dati sono coincidenti nella parte sottoposta a compressione e vi è una sottostima da parte dei dati analitici rispetto a quelli FEM di circa un 4% nella parte sottoposta a trazione. Questa discrepanza è probabilmente dovuta alle ipotesi semplificative delle travi curve. Il valore massimo è tuttavia inferiore al massimo della sezione 4 confermando così che quest'ultima è da considerare come la sezione di progetto della struttura.

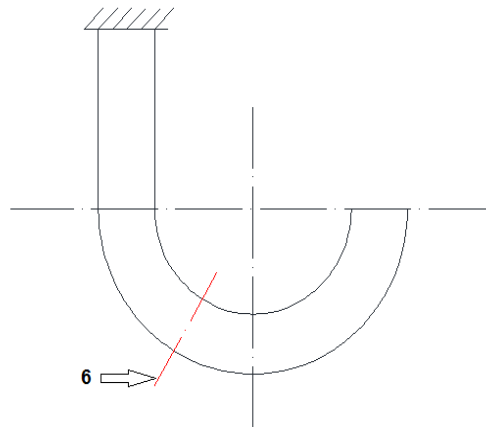
Tensioni tangenziali τ :

Le tensioni ricavate con il metodo di Jourawski sottostimano la tensione del FEM di circa 2 MPa e individua il massimo della tensione di taglio deviato di circa 2 mm. La deviazione del massimo è dovuta al fatto che siamo su una trave curva e le tensioni tangenziali non sono ricavabili analiticamente. Da questi grafici deduciamo che il massimo di una tensione tangenziale in una sezione appartenente ad un tratto curvilineo ha la tendenza a deviare la sua posizione verso l'asse neutro.

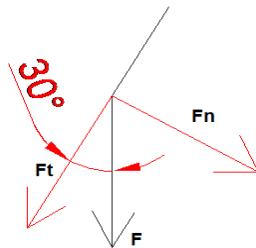
Contour Plots:

Per quanto concerne le tensioni normali il contour plot illustra meglio l'andamento iperbolico attraverso un infittimento delle bande colorate in corrispondenza della parte in trazione. Il contour plot delle tensioni tangenziali ci fa vedere come le ipotesi semplificative di Jourawski non sono valide (ovvero che la tensione fosse costante in direzione normale al path). Non si hanno infatti delle bande rettilinee come nel caso delle tensioni normali ma la tensione varia sia in direzione del path preso in considerazione sia in direzione normale a quest'ultima. Il massimo si trova tuttavia in corrispondenza della linea analizzata non correndo il rischio di sottostime della tensione (anche se la τ non è solitamente un parametro di progetto).

4.2.5 Sezione 6



Forze Agenti:



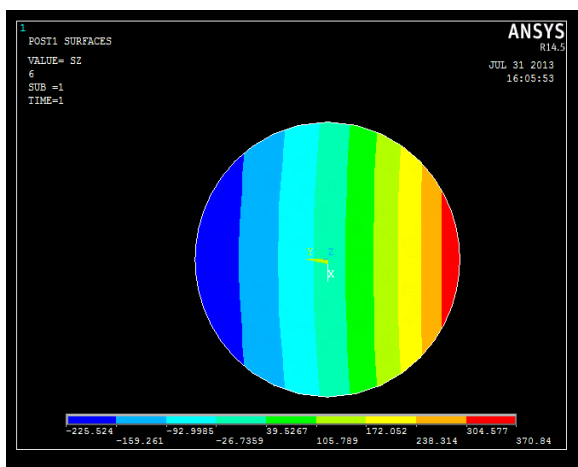
Analogamente alla sezione 5.

$$M_f = 225000 \text{ Nmm}$$

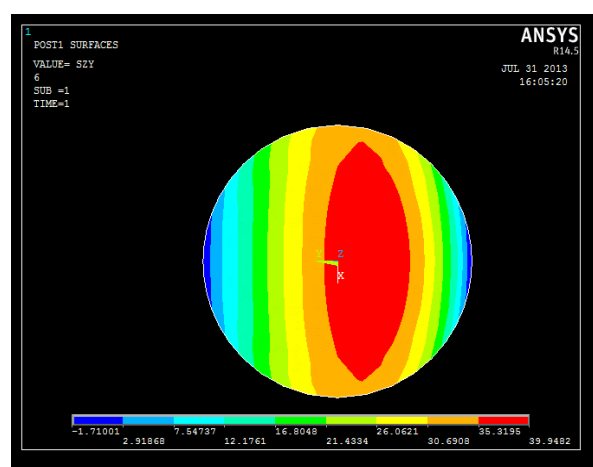
$$F_t = 8660 \text{ N}$$

$$F_n = 5000 \text{ N}$$

Contour Plots:

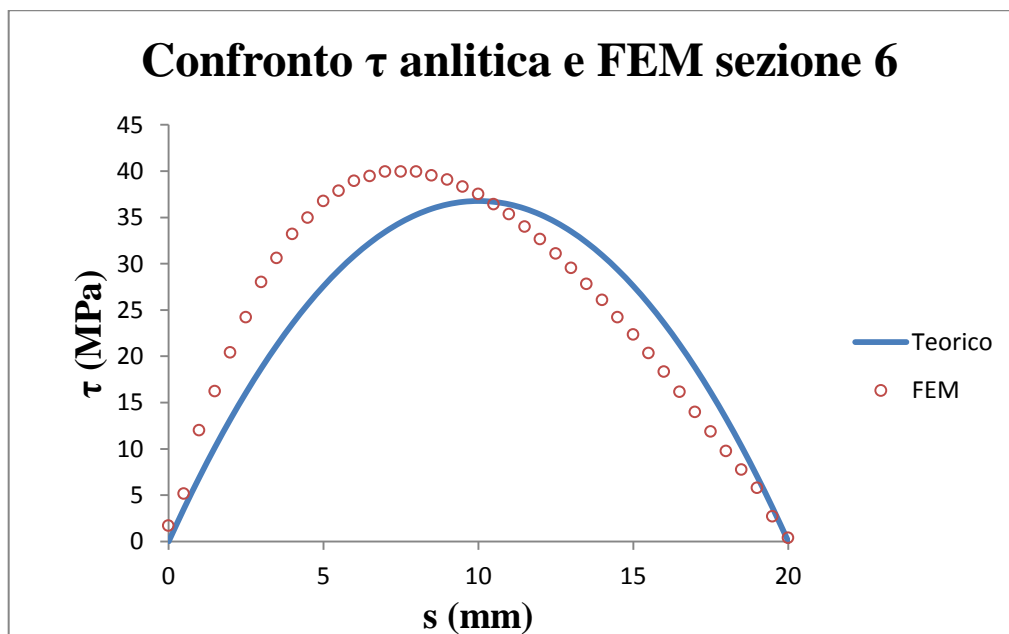
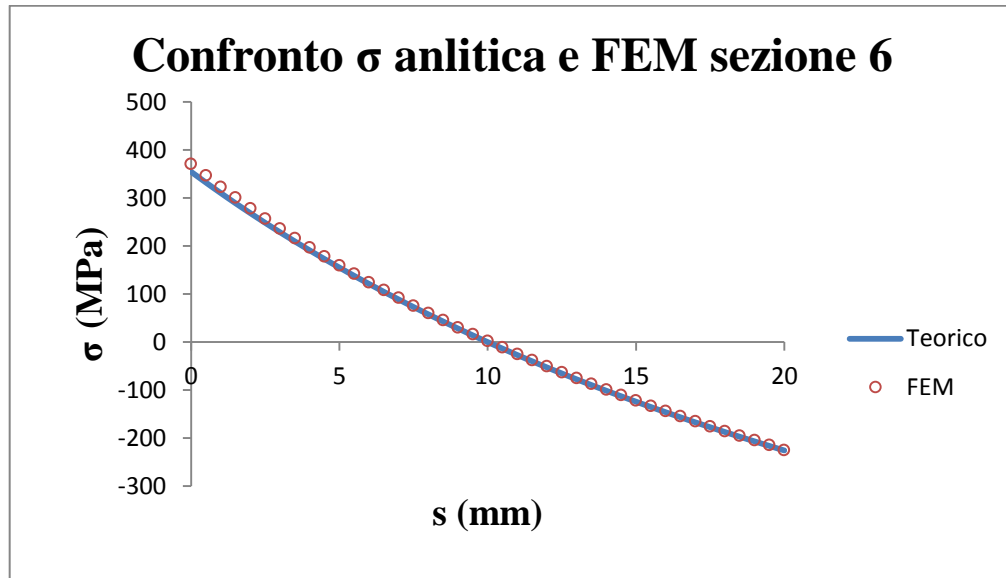


Contour plot tensioni normali



Contour plot tensioni tangenziali

Grafici dei risultati:



Tensioni normali σ :

I dati sono analoghi a quelli della sezione 5 ovvero un andamento delle tensioni iperbolico tipico della trattazione analitica delle travi curve. Infatti i dati ricavati per via teorica coincidono per la maggior parte dei punti del path tranne che nei punti di massima trazione dove la FEM è leggermente più elevata del dato ricavato.

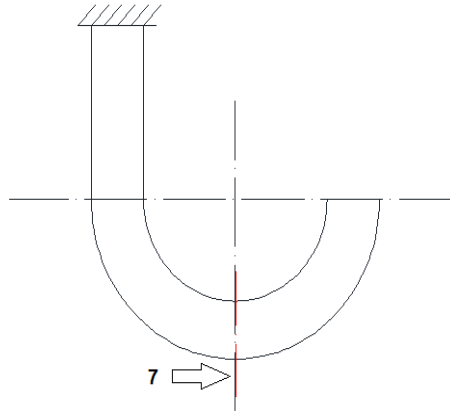
Tensioni tangenziali τ :

Anche in questo caso i dati relativi alla tensione di taglio non differiscono molto in valore quanto in posizione del punto di massimo dovuto come detto in precedenza probabilmente all'impossibilità di trattare le tensioni tangenziali su sezioni di travi curve. Si trascura quindi questo spostamento del massimo verso l'asse neutro che comunque non influisce sulla progettazione strutturale.

Contour Plots:

Come i contour plots della sezione 5, questi evidenziano l'andamento iperbolico della tensione normale con un infittimento delle bande colorate nella porzione di sezione sottoposta al massimo sforzo di trazione e per quanto riguarda le tensioni tangenziali una non costanza della tensione lungo la normale del path diversamente dalle ipotesi che abbiamo formulato per utilizzare la formulazione analitica di Jourawski.

Sezione 7

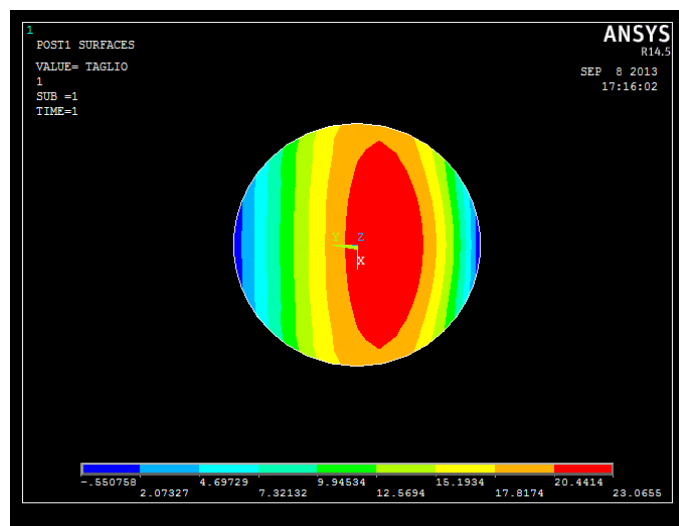


Forze Agenti:

In questa sezione abbiamo solo una forza tangenziale coincidente con il carico applicato alla struttura

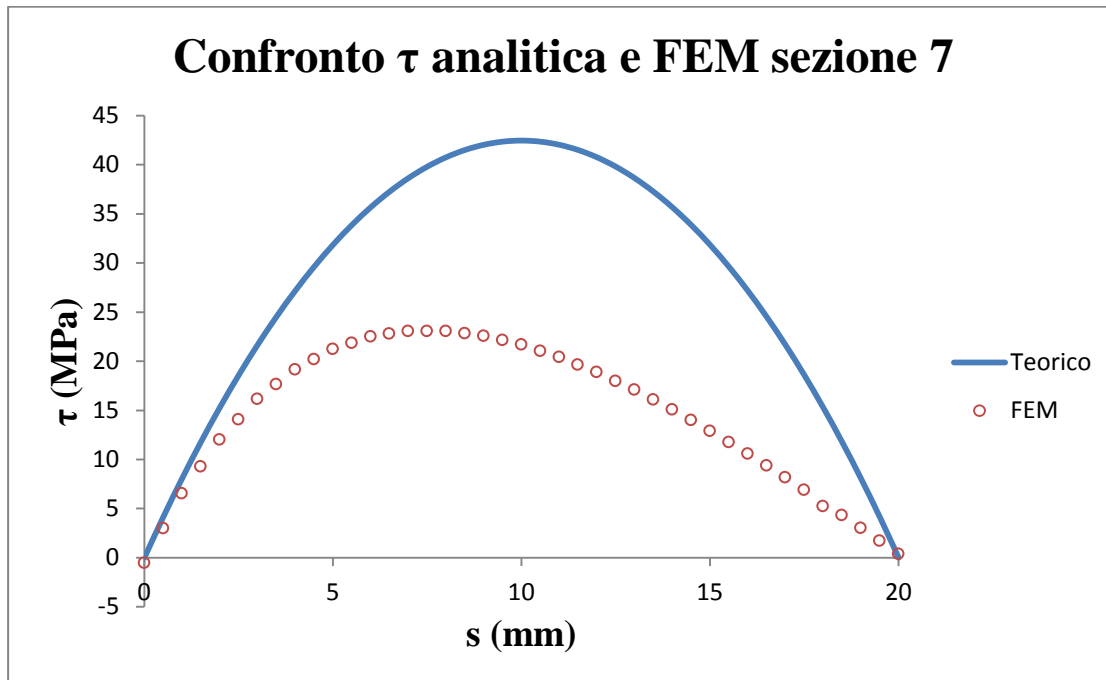
$$F_t = 10000 \text{ N}$$

Contour Plot:



Tensioni tangenziali sezione 7

Grafici dei risultati:



Tensioni tangenziali τ :

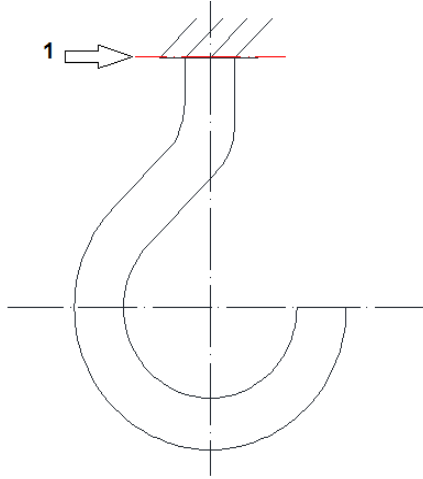
In questo caso i dati sono diversi sia in termini di posizione di massimo (la cui possibile origine è già stata esposta nelle precedenti sezioni) sia in termini di valori. Ci si aspetta infatti che avendo una forza che agisce solo con azione di taglio si ottengano tensioni tangenziali molto più elevate delle precedenti sezioni. Questo è dovuto probabilmente al fatto che siamo nel punto di applicazione della forze e quindi le trattazioni analitiche non sono valide. Anche in questo caso l'errore che si commette sulla valutazione di queste tensioni non influisce sulla progettazione del componente.

Contour Plot:

Anche da questo contour plot si evince una discordanza dalle ipotesi semplificative formulate per usufruire della trattazione analitica di Jourawski.

4.3 Gancio a sezione Trapezoidale:

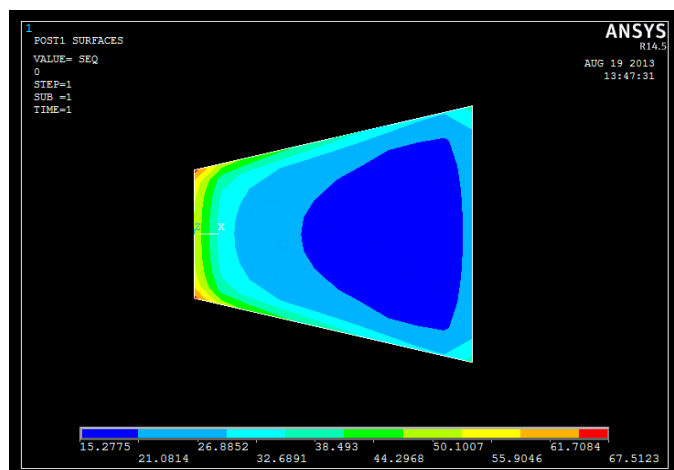
4.3.1 Sezione 1



Forze Agenti:

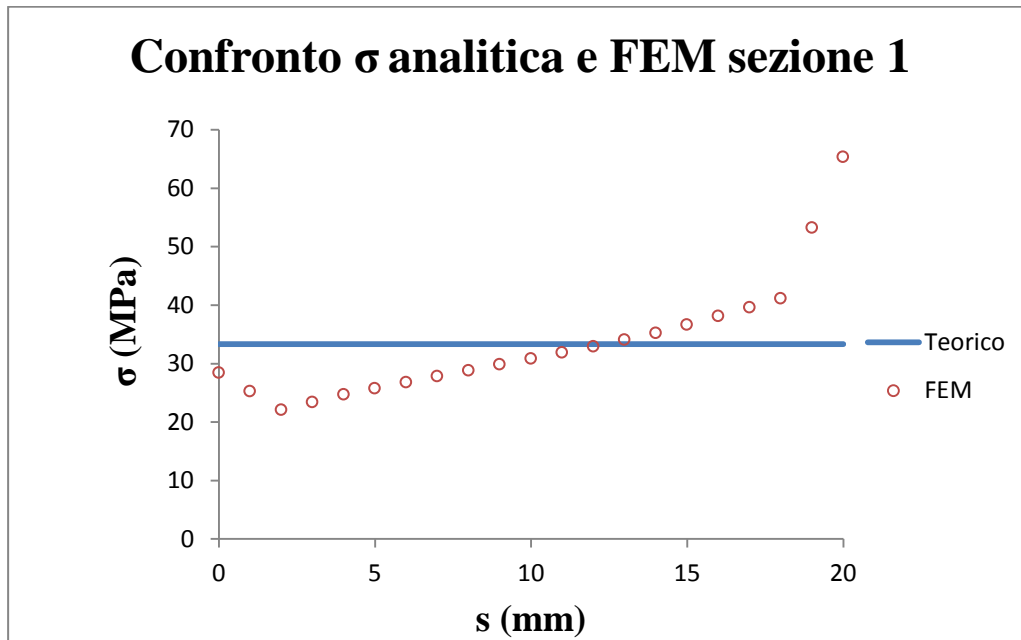
L'unica forza agente sulla sezione è uno sforzo di trazione in quanto il baricentro è sulla direzione di applicazione della forze e non vi è momento flettente.

Contour Plot:



Contour Plot σ sezione 1

Grafici dei risultati:



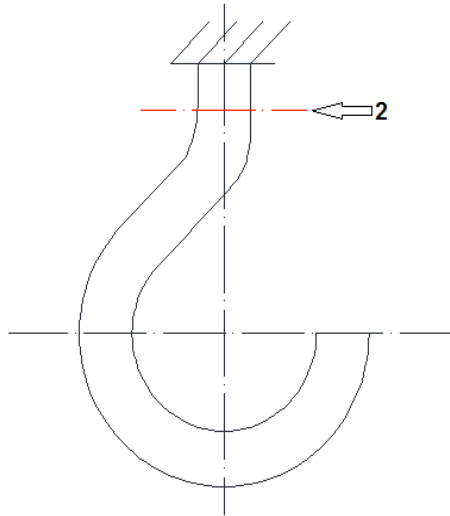
Tensioni normale σ :

Teoricamente avendo solo una forza in direzione normale si dovrebbe ricavare una tensione costante su tutta la sezione. Tuttavia si vede che i dati FEM assumono una configurazione simile ad una distribuzione data da momento flettente. La causa può essere il non allineamento perfetto tra il baricentro della sezione e la direzione di applicazione della forza. Inoltre siamo all'incastro e quindi le formulazioni analitiche non hanno più la loro validità.

Contour plot:

Dal contour plot si evince che la distribuzione non è costante e che varia sia nella direzione del path sia nella direzione ad essa normale confermando i dati ricavati dal path ovvero un piccolo contributo di momento flettente e l'influenza dell'appartenenza di questa sezione al vincolo della struttura.

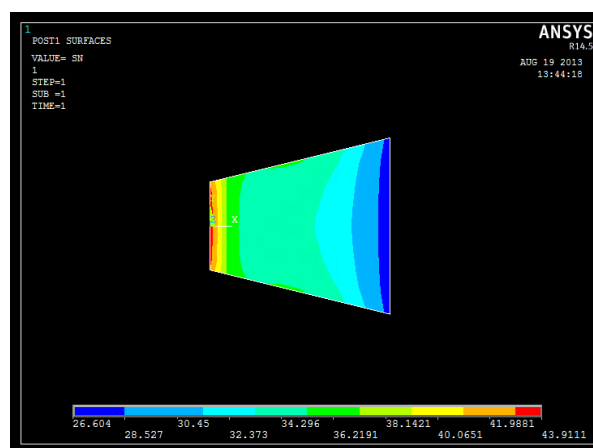
4.3.2 Sezione 2



Forze:

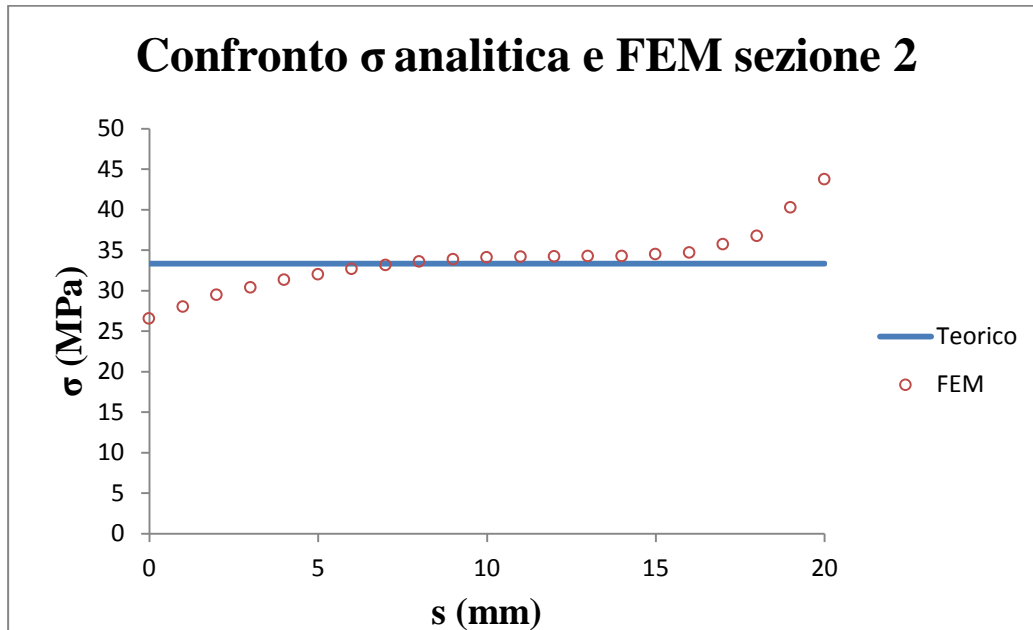
Le forze agenti sono quelle viste nella sezione 1 ovvero solo una forza normale alla sezione essendo il baricentro di quest'ultima in linea con la direzione di applicazione del carico.

Contour Plot:



Contour Plot σ sezione 2

Grafici dei risultati:



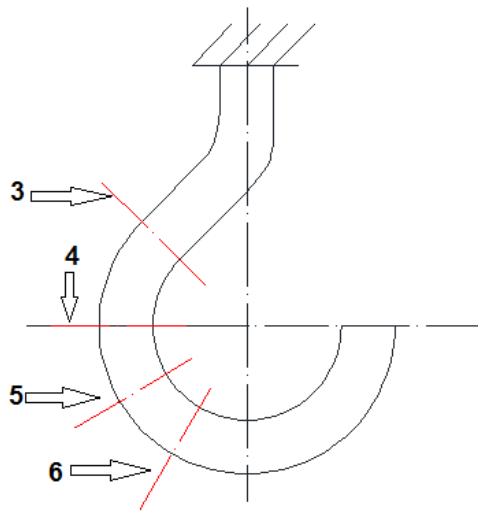
Tensioni normale σ :

In questo caso si nota una miglior corrispondenza tra i dati teorici i FEM. I valori della tensione normale coincidono per un tratto di circa 10 mm al centro della sezione. La discrepanza dei dati alle estremità dei path può essere data da un piccola componente di momento flettente e da una vicinanza della sezione al vincolo.

Contour plot:

Rispetto al contour plot della sezione all'incastro questo si presenta con bande colorate più regolari e quindi la tensione è distribuita in maniera più uniforme. Dato che la sezione 2 è sulla stessa linea della sezione 1 (e quindi la componente del momento flettente è la stessa) la differenza tra i contour plot può essere attribuita alla vicinanza della sezione al vincolo che ha quindi un'influenza notevole.

4.3.3 Sezioni 3,4,5,6



Forze:

Queste sezioni vengono trattate in unico capitolo in quanto fanno tutte parte di una trave curva e differiscono solo per le forze esterne applicate alla sezione:

Sezione 3:

$$M_f = 310400 \text{ Nmm}$$

$$F_t = 7071 \text{ N}$$

$$F_n = 7071 \text{ N}$$

La sezione è inclinata di 45°

Sezione 4:

$$M_f = 439000 \text{ Nmm}$$

$$F_n = 10000 \text{ N}$$

Questa sezione è quella sottoposta al momento flettente massimo e quindi è utilizzata come sezione di progetto. Inoltre non è sottoposta a taglio in quanto la normale alla sezione è parallela alla direzione di applicazione del carico.

Sezione 5:

$$M_f = 380100 \text{ Nmm}$$

$$F_n = 8660 \text{ N}$$

$$F_t = 5000 \text{ N}$$

Sezione 6:

$$M_f = 219500 \text{ Nmm}$$

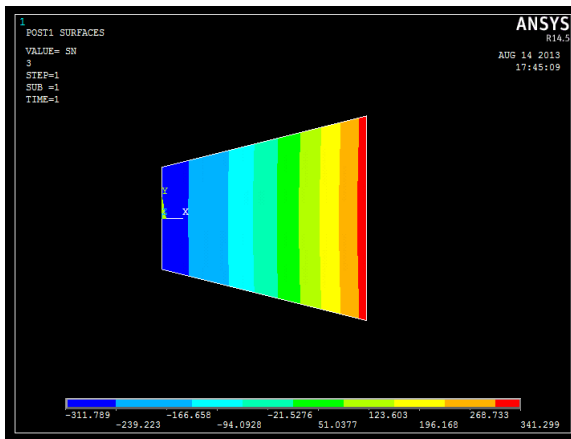
$$F_n = 5000 \text{ N}$$

$$F_t = 8660 \text{ N}$$

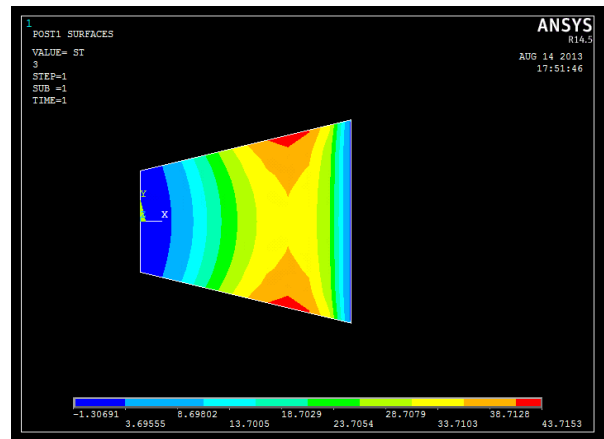
Le sezioni 5 e 6 come la sezione 3 hanno momento flettente, sforzo normale e sforzo di taglio. La differenza del momento flettente è data dalla distanza del baricentro dal carico mentre la differenza tra i valori di sforzo normale e taglio è data dall'inclinazione della sezione una a 30° l'altra a 60° .

Contour Plots:

Sezione 3

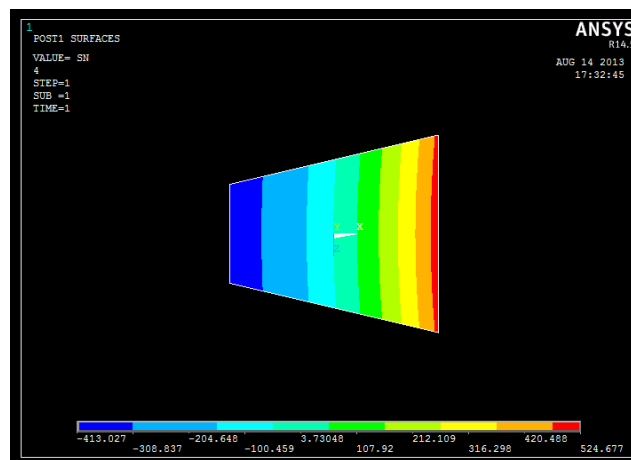


Contour Plot σ sezione 3



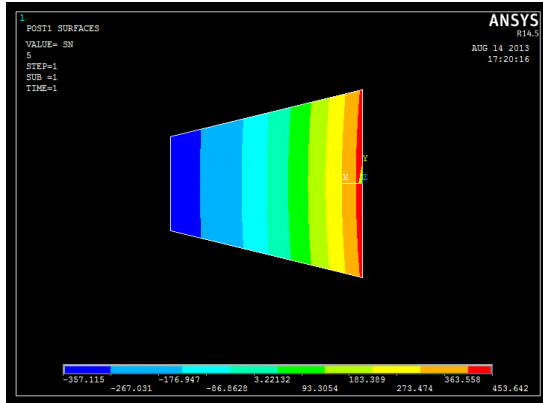
Contour Plot τ sezione 3

Sezione 4

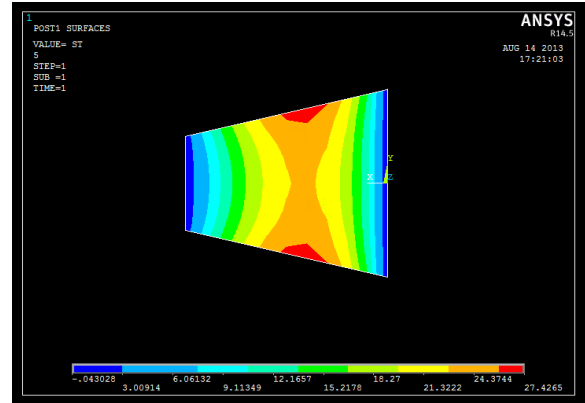


Contour plot σ sezione 4

Sezione 5

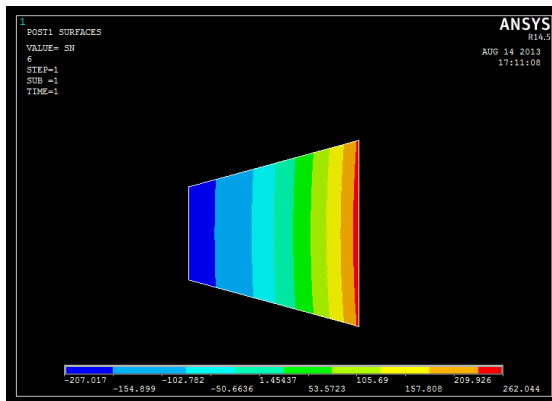


Contour Plot σ sezione 5

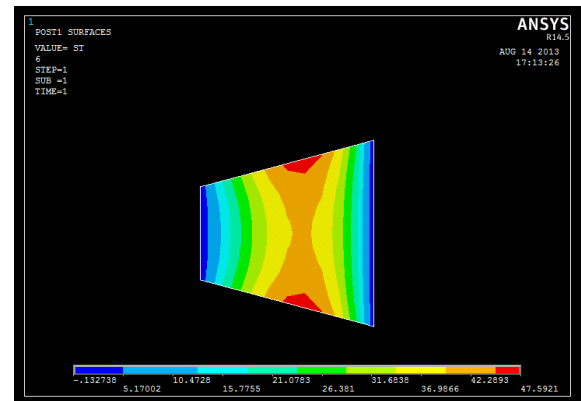


Contour Plot τ sezione 5

Sezione 6



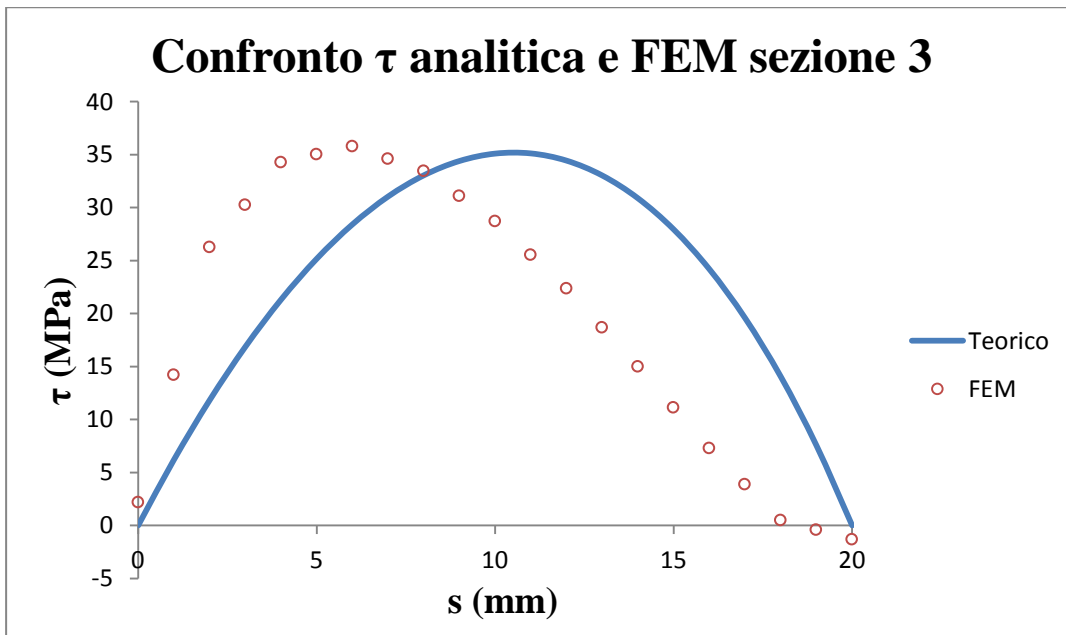
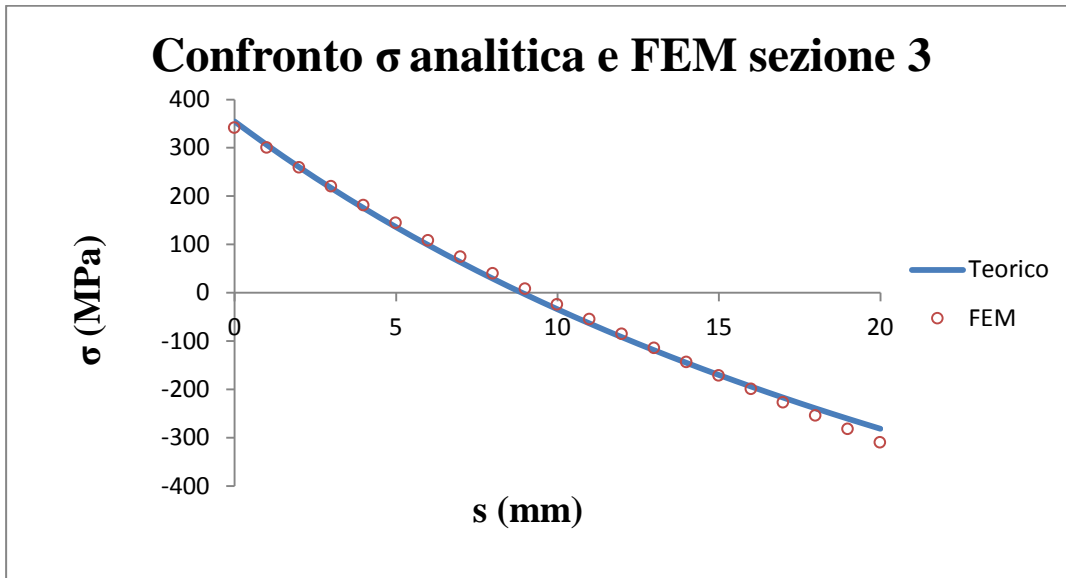
Contour Plot σ sezione 6



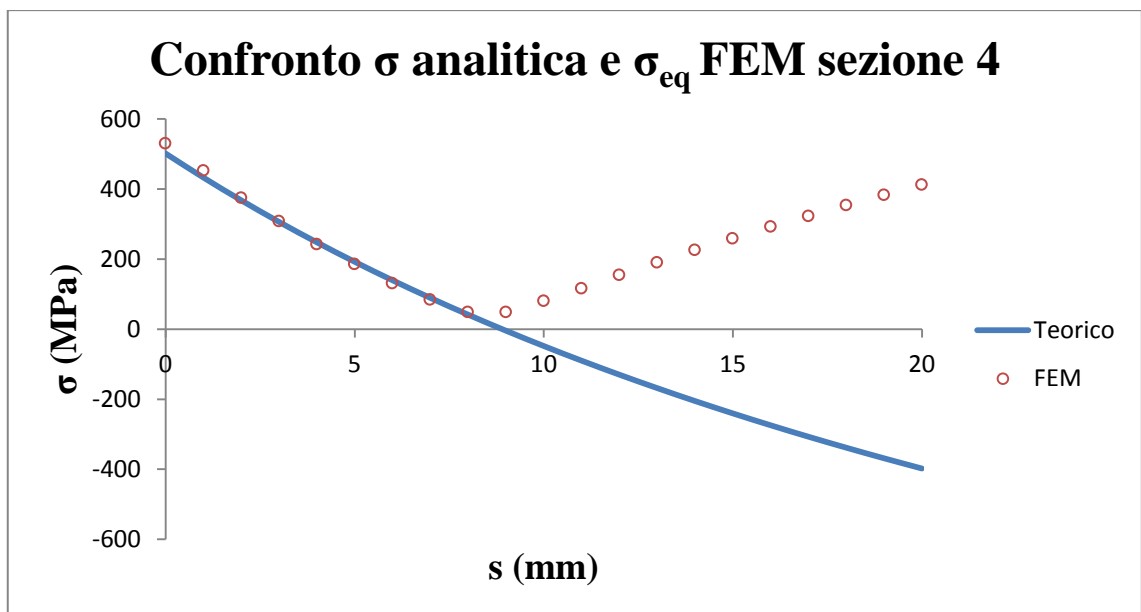
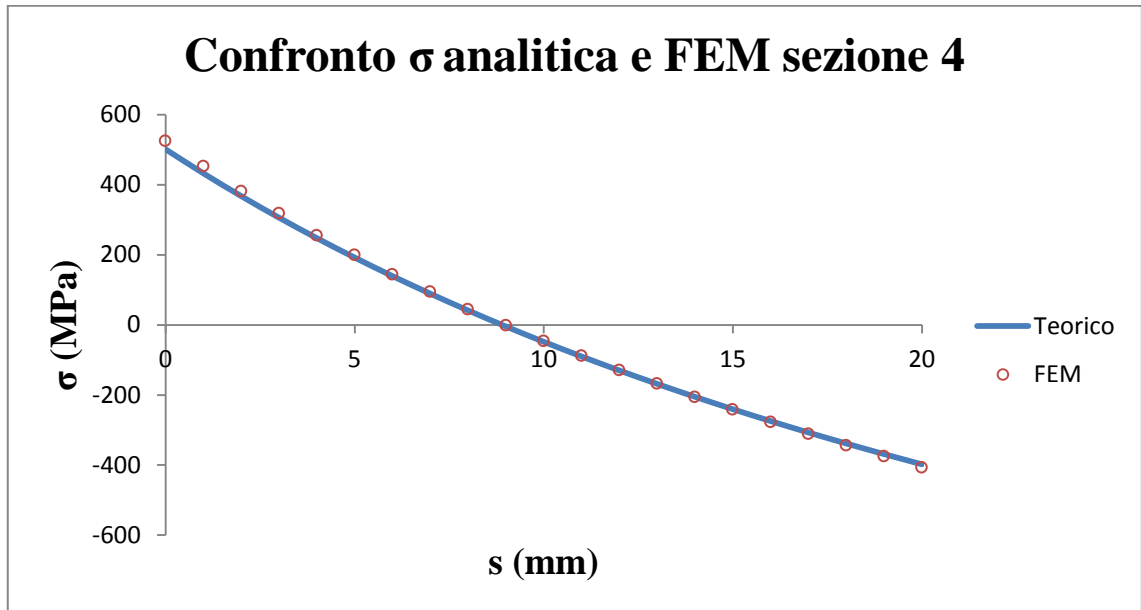
Contour Plot τ sezione 6

Grafici dei risultati:

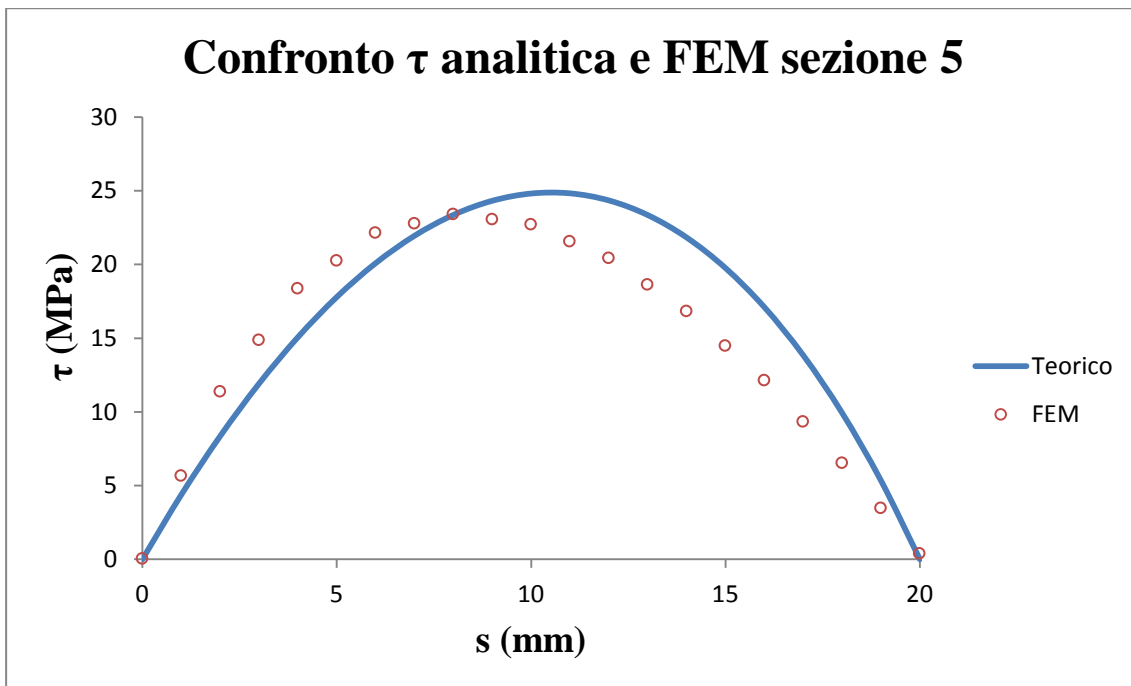
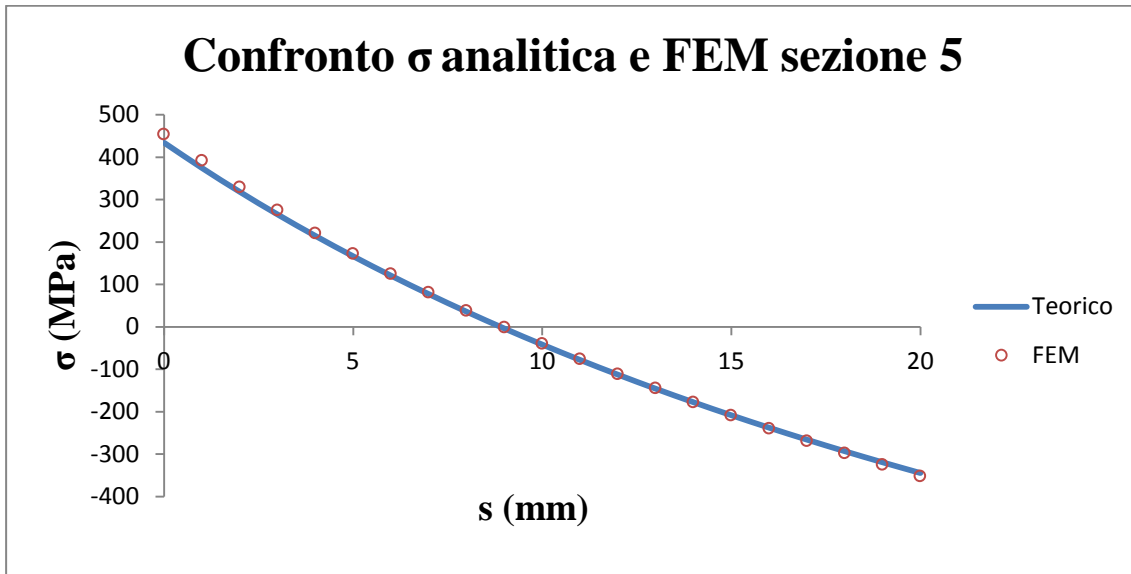
Sezione 3



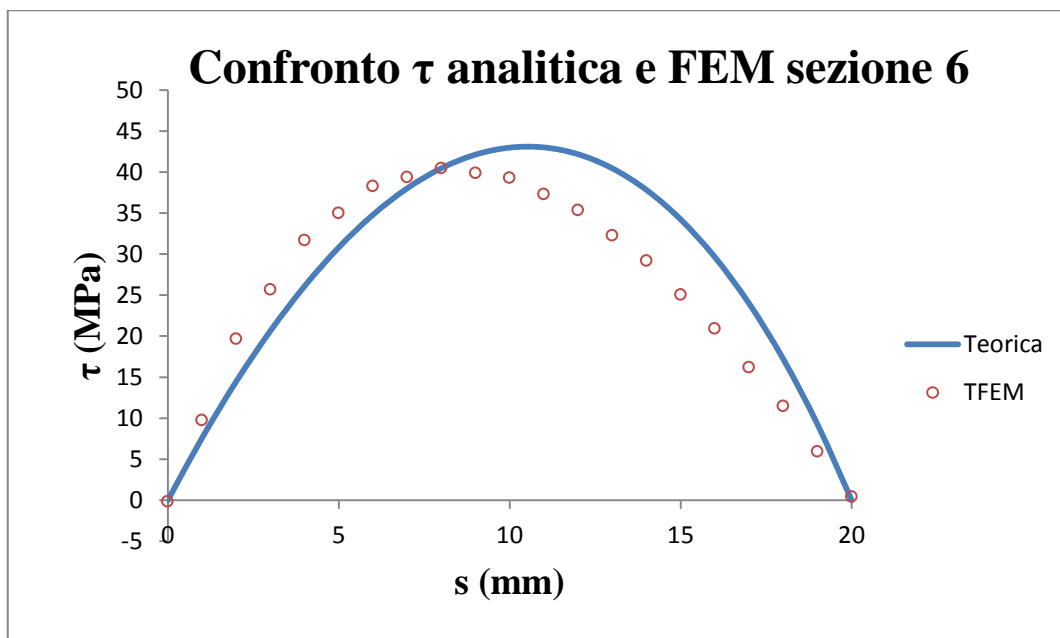
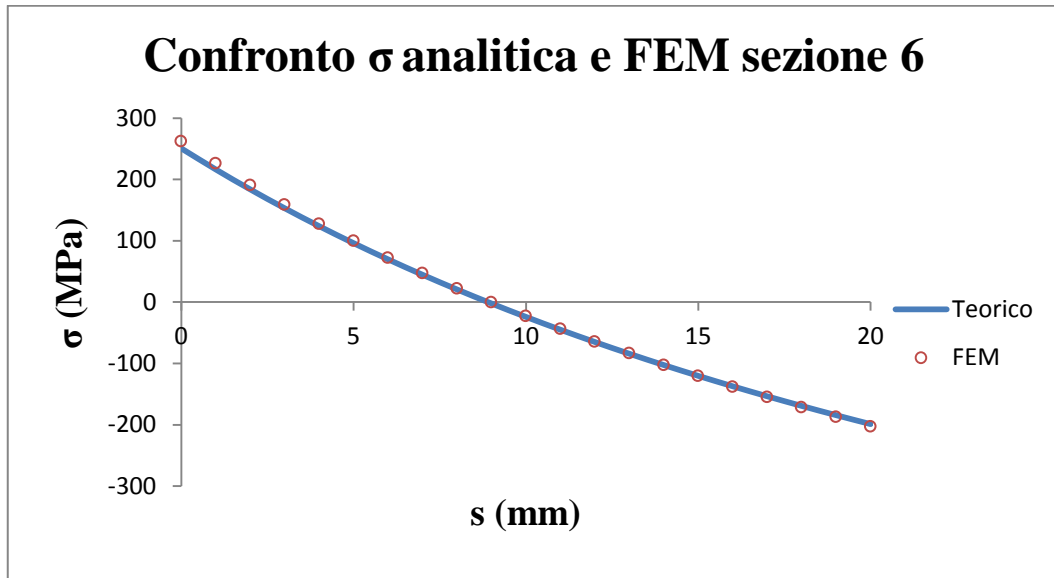
Sezione 4:



Sezione 5:



Sezione 6:



Tensione normale σ :

I dati della tensione normale sono in accordo con la teoria della travi curve a parte qualche discrepanza alle estremità in trazione. Questo è dovuto alle varie ipotesi semplificative per utilizzare le formulazioni analitiche ma l'andamento iperbolico si nota. Si nota inoltre un maggiore spostamento dell'asse neutro dovuto allo sforzo normale del carico della sezione 5 rispetto alla 6 proprio perché il carico agisce in maniera più efficace in direzione normale.

Tensione tangenziale τ :

Per quanto riguarda la tensione tangenziale vale lo stesso discorso fatto per la sezione circolare: anche qui i lati non sono paralleli e quindi la formulazione di Jourawski è stata utilizzata in modo approssimato. I valori non differiscono di molto ma c'è uno spostamento del massimo dovuto all'appartenenza delle sezioni ad un tratto curvilineo il che impedisce di calcolare analiticamente le tensioni tangenziali.

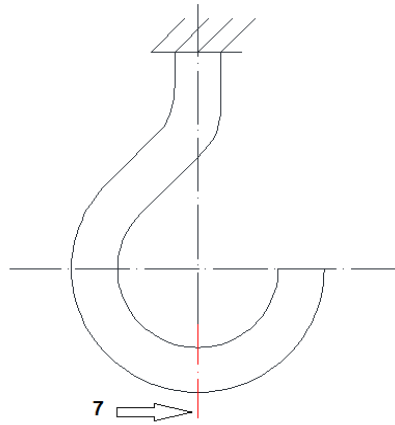
Tensione equivalente di Von Mises:

La differenza tra la σ analitica e la σ_{eq} che tiene conto di tutte le tensioni sulla sezione è minima e quindi la teoria delle travi curve è adatta per trovare la tensione sulla quale progettare la struttura

Contour Plots:

I contour plots della tensione normale mettono in evidenza l'andamento parabolico con bande più strette in presenza della parte in trazione. I contour plots della tensione tangenziale mettono in evidenza un aspetto importante ovvero che si analizza il path considerato non si visualizza la tensione massima del taglio (a differenza della sezione circolare) perché questa si manifesta ai bordi della sezione diversamente da come l'abbiamo calcolata con Jourawski che implica una tensione τ uguale in direzione normale al path.

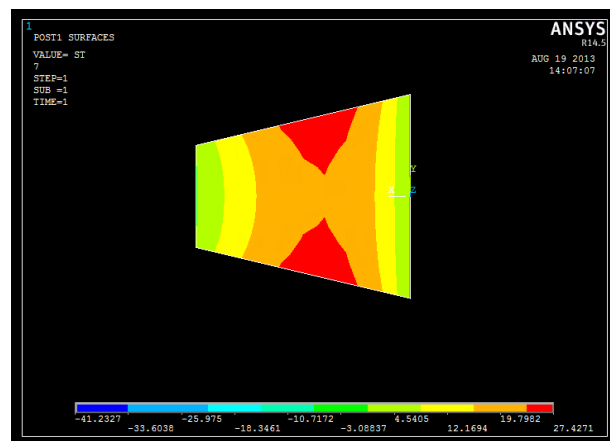
4.3.4 Sezione 7



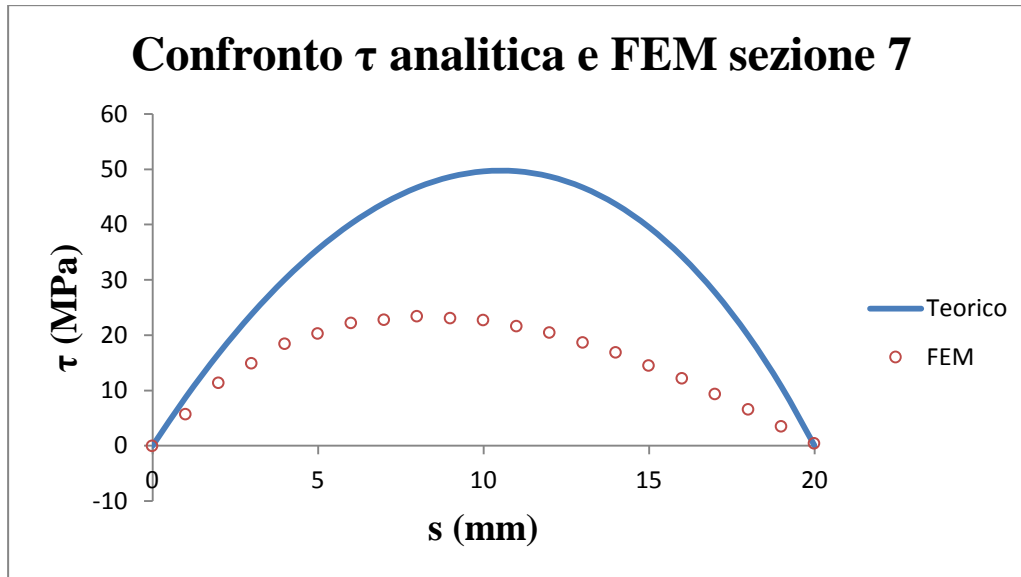
Forze Agenti:

In questo caso abbiamo solo il carico che agisce come sforzo di taglio sulla sezione considerata

Contour Plot:



Contour Plot τ sezione 7



Tensione tangenziale τ :

L'andamento e il confronto coi dati FEM è analogo alla sezione 7 del gancio circolare ovvero una discrepanza netta dei valori e della posizione del massimo dovuto al fatto che siamo sul punto di applicazione del carico quindi gli sviluppi analitici perdono di validità.

Contour Plots:

Questo contour plot mette in evidenza ciò che si è detto per le altre sezioni trapezoidale sottoposte a forza di taglio ovvero che le tensioni tangenziali massime non si trovano sul percorso analizzato bensì sui bordi esterni della sezione (evidenziati con dei triangoli più scuri).

5 CONCLUSIONI

Dalle analisi dei dati si possono evincere diversi aspetti.

Innanzitutto la vicinanza delle sezioni analizzate ai vincoli e al punto di applicazione del carico influenza in maniera evidente i risultati analitici che risultano in buona parte corretti e che se avvicinano molto al calcolo teorico nelle sezioni ad una distanza sufficiente da questi punti critici. Quindi la non osservanza delle ipotesi semplificative, ovvero che i punti analizzati devono essere ad una certa distanza dai vincoli e dai punti di applicazione di carichi esterni influenza la possibilità di risolvere in maniera esatta una struttura in ogni suo punto.

Un altro esempio dell'importanza delle ipotesi semplificative delle formulazioni analitiche risiede nel calcolo delle tensioni tangenziali τ con il metodo di Jourawski. Nel nostro caso l'assenza nella sezione di lati paralleli al path non influenza di molto i valori in uscita rispetto al FEM quanto la distribuzione generale di queste tensioni sulla sezione, messa in evidenza solamente dai contour plots. Non è un parametro fondamentale per la progettazione della struttura ma è un'ulteriore verifica dell'importanza di effettuare certe considerazioni prima di applicare qualsiasi formulazione analitica.

La teoria delle travi curve rispecchia molto bene i dati analitici con quelli ricavati al FEM per quanto riguarda le tensioni normali in quanto l'errore massimo che si compie non supera il 4%, solitamente riscontrato in prossimità della tensione massima di trazione. Inoltre per quanto riguarda le tensioni tangenziali si riscontra uno spostamento generale della massima τ verso l'asse neutro dovuto probabilmente all'appartenenza della sezione ad un tratto curvilineo. Tale scostamento è difficilmente calcolabile in quanto non si ha una teoria di base per trattare tali tensioni nelle travi curve.

BIBLIOGRAFIA:

Quaresimin M. e Zappalorto M. (2013)..... *Lezioni ed Esercizi di Costruzione di Macchine e Laboratorio*

