

**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

# Descrizione degli stati del continuo in sistemi debolmente legati

Candidato:  
**Alessandro Rubin**  
Matricola 1005407

Relatore:  
**Prof. Andrea Vitturi**  
Correlatore:  
**Dott. José Antonio Lay Valera**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Costruzione degli pseudostati e diagonalizzazione dell'Hamiltoniana</b>	<b>1</b>
<b>2 I sistemi <math>^{17}\text{O}</math> e <math>^{17}\text{F}</math></b>	<b>4</b>
2.1 Parametri dell'oscillatore armonico e THO . . . . .	5
2.2 Risonanza dello stato $0d_{3/2}$ . . . . .	6
<b>3 Overlap e reazioni di scambio carica</b>	<b>12</b>
<b>4 Calcolo delle <math>B(E\lambda)</math> per il nucleo <math>^{17}\text{F}</math></b>	<b>17</b>
4.1 $B(E1)$ . . . . .	18
4.2 $B(E2)$ . . . . .	19
<b>5 Reazioni di Breakup</b>	<b>23</b>
5.1 La reazione $^{17}\text{F} + ^{208}\text{Pb} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p} + ^{208}\text{Pb}$ . . . . .	24
<b>6 Conclusioni</b>	<b>28</b>

# Introduzione

Un nucleo atomico è un sistema quantistico costituito da protoni e neutroni, fermioni di spin  $s = \frac{1}{2}$  fortemente interagenti attraverso le interazioni nucleari deboli e forti e l'interazione elettromagnetica. La struttura di tale sistema è in linea di principio difficile da dedurre analiticamente dato che si tratta di un sistema a molti corpi, e una trattazione statistica è poco efficace perché non c'è un numero sufficiente alto di elementi. Quindi sono stati sviluppati dei modelli per poter descrivere alcune classi di nuclei atomici in maniera soddisfacente.

Il modello a shell nucleare è uno di questi e, in analogia con il modello a shell atomico per gli elettroni, consiste nel trattare i nucleoni come particelle immerse in un potenziale medio attrattivo. Questo potenziale sarà limitato poiché esiste un numero finito di stati legati, un esempio tipico di potenziale nucleare è il potenziale di Wood-Saxon della forma

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}$$

Vi è inoltre un contributo dovuto all'interazione spin-orbita che rimuove la degenerazione in  $\ell$ .

Risolviendo il sistema agli autovalori della Hamiltoniana si ottengono le energie degli stati di particella singola  $|j, m_j, \ell, s\rangle$ . In questa notazione  $\ell$  è il numero quantico relativo al momento angolare orbitale,  $s$  al momento angolare di spin,  $j$  rappresenta il momento angolare totale:  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  e  $m_j$  è la sua proiezione sull'asse  $z$ . Questo modello funziona particolarmente bene in prossimità delle shell nucleari chiuse e permette, previa la scelta di un potenziale adeguato, di stimare efficacemente le energie degli stati legati e altre loro proprietà.

Alcuni nuclei atomici sono caratterizzati da uno stato fondamentale in cui i nucleoni nei livelli energetici più alti hanno energia prossima alla soglia del continuo, questo fa sì che nel caso di reazioni nucleari, anche piccole eccitazioni possono fare acquisire al nucleone sufficiente energia per causare il distacco della particella dal nucleo restante. Questi processi prendono il nome di *breakup*.

Nei processi di breakup il nucleone slegato avrà energia positiva, il che corrisponde ad autofunzionali dell'equazione di Schrödinger con autovalori dell'Hamiltoniana nello spettro continuo. Essendo la particella slegata è possibile trovarla in qualunque regione dello spazio, la sua funzione d'onda è non nulla all'infinito e quindi non normalizzabile. Visto che gli strumenti teorici per lo studio di sistemi nucleari sono stati sviluppati per

sistemi legati e quindi con autostati ortonormali, trattare dal punto di vista teorico processi di breakup è difficile proprio per la non ortonormalità degli stati del sistema.

Inoltre l'analisi dal punto di vista computazionale è resa difficile dall'esistenza di un continuo di stati. Serve quindi un modo per trattare computazionalmente gli stati del continuo per esempio discretizzandoli. Una possibilità è quella di espandere gli stati di particella singola in pseudostati (PS) utilizzando come base quella di un oscillatore armonico (HO), tuttavia questo metodo fornisce alle funzioni d'onda così ottenute un comportamento asintotico di tipo gaussiano, che non va bene per rappresentare gli stati di un sistema debolmente legato i quali dovrebbero decadere esponenzialmente. Si può però utilizzare una *local scale transformation* (LST) per trasformare i pseudostati dell'oscillatore armonico in pseudostati che rispettino le condizioni asintotiche dei sistemi debolmente legati.

In questo lavoro utilizzeremo metodi computazionali per ottenere alcune proprietà di nuclei debolmente legati, concentrandoci sul sistema  $^{17}\text{F}$ . Il programma utilizzato principalmente sarà un programma scritto da J. A. Lay e A. M. Moro nel linguaggio FORTRAN che permette di analizzare  $^{17}\text{F}$  trattandolo come un sistema a due corpi,  $^{16}\text{O} + \text{p}$ .

Nel primo capitolo delinearemo le basi teoriche per la costruzione di pseudostati del THO e la diagonalizzazione degli stati dell'Hamiltoniana negli stessi.

Nel secondo capitolo tratteremo i nuclei speculari  $^{17}\text{F}$  e  $^{17}\text{O}$ , confrontando le energie dei primi stati di particella singola con altri valori trovati in letteratura, concentrandoci brevemente sulla risonanza dello stato  $0d_{3/2}$ .

Nel terzo capitolo studieremo possibili overlaps nel continuo tra lo stato fondamentale del  $^{17}\text{F}$  e gli stati legati e lo stato risonante  $0d_{3/2}$  del  $^{17}\text{O}$  e le possibili implicazioni nelle reazioni di scambio carica.

Nel quarto capitolo calcoleremo e discuteremo le probabilità ridotte di transizione elettriche  $B(E1)$  e  $B(E2)$ .

Nel quinto capitolo tratteremo le reazioni di breakup di tipo puramente coulombiano concentrandoci sulla reazione  $^{17}\text{F} + ^{208}\text{Pb} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p} + ^{208}\text{Pb}$ , calcolando le sezioni d'urto associate con eccitazioni al continuo di dipolo e quadrupolo.

# Capitolo 1

## Costruzione dei pseudostati e diagonalizzazione dell'Hamiltoniana

Come accennato nell'introduzione, in un nucleo con shell semichiusa si può, in maniera simile al modello a shell atomico, distinguere tra i nucleoni che occupano le shell chiuse che formano il *core*, che intervengono nella dinamica del sistema solo globalmente, e i nucleoni nella shell aperta, detti *di valenza*, dei quali studieremo la dinamica. In particolare ci interesseremo nel caso più semplice nel quale la valenza è composta da un solo nucleone.

Il metodo THO per tali nuclei, uno dei quali è proprio il  $^{17}\text{F}$ , consiste quindi nell'esprimere le autofunzioni e gli stati nel continuo dell'Hamiltoniana del sistema legato utilizzando come base le autofunzioni dell'oscillatore armonico, per poi effettuare un cambiamento locale di coordinate e garantire così il giusto comportamento asintotico  $e^{-kr}$  tipico dei sistemi con potenziale limitato.

Consideriamo una generica Hamiltoniana unidimensionale di un

$$h = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + v(x) \quad (1.1)$$

dove  $v$  è un potenziale attrattivo limitato, e abbiamo considerato un conveniente sistema di unità di misura per assorbire i parametri, rendendo  $h$  e  $v(r)$  adimensionali.

Assumiamo per semplicità che tale sistema abbia un solo stato legato  $\Psi_B(r)$ , e consideriamo le autofunzioni dell'oscillatore armonico definite come

$$\phi_n^{HO}(s) = N_n H_n \left( \frac{s}{b} \right) e^{-\left(\frac{s}{b}\right)^2} \quad (1.2)$$

dove  $N_n$  sono le costanti di normalizzazione,  $H_n$  i polinomi di Hermite  $n$ -esimi e  $b$  è un parametro che determina la lunghezza dell'oscillatore armonico. Tali stati formano un insieme di stati ortonormali e quadrato-integrabili in  $s$ . Queste proprietà vengono

preservate se si effettua un cambio di coordinate arbitrario  $s \rightarrow r(s)$  tale che la funzione  $r(s)$  sia monotona crescente, le funzioni così ottenute sono date da

$$\varphi_n^{THO}(r) = \sqrt{\frac{ds}{dr}} \phi_n^{HO}(s(r)) \quad (1.3)$$

la funzione  $r(s)$  può essere quindi scelta in modo da fornire alle  $\varphi_n^{THO}$  il giusto comportamento. Per piccoli  $r$  l'oscillatore armonico è una buona approssimazione di un generico potenziale attrattivo, quindi  $s(r)$  deve essere proporzionale a  $r$  per  $r \rightarrow 0$ . Per  $s$  grandi invece si ha che  $\phi_n^{HO}(s)$  è proporzionale a  $+\infty$  a  $\exp(\frac{s^2}{b^2})$  mentre noi richiediamo che  $\varphi_n^{THO}(r)$  vada come  $\exp(-qr)$ , con  $q^2/2 = e_b$ . Quindi per  $s \rightarrow \infty$  dobbiamo avere che  $s^2/b^2$  sia proporzionale a  $qr$ .

A questo punto ci sono varie opzioni per determinare univocamente la forma delle  $\varphi_n^{THO}(r)$ . Una possibilità è porre  $\varphi_0^{THO}(r) = \psi_B(r)$ , ovvero

$$\int_{-\infty}^r |\psi_B(r')|^2 dr' = \int_{-\infty}^s |\phi_0^{HO}(s')|^2 ds' = \frac{1 + \text{erf}(s/b)}{2} \quad (1.4)$$

da cui si ricava la funzione  $r(s)$  e la sua inversa [6].

Un'altra possibilità, che è quella implementata nel programma che verrà usato, è utilizzare una particolare parametrizzazione che soddisfi le condizioni di asintoticità sopra descritte. La funzione  $s(r)$  che verrà usata nei calcoli è la seguente[2]:

$$s(r; \gamma, m) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^m + \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{r}}\right)^m} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (1.5)$$

con  $\gamma$  e  $m$  parametri da fissare. Il parametro  $m$  sarà fissato a 4 durante tutta la trattazione. Si può facilmente vedere che questa funzione rispetta le condizioni sopra descritte, in particolare  $s(r) \xrightarrow{\infty} \gamma\sqrt{\frac{r}{2}}$  per cui le  $\varphi_n^{THO}(r)$  avranno un comportamento asintotico all'infinito come  $\exp(-\frac{\gamma^2}{2b^2}r)$ , il che reintroduce la dipendenza da  $b$ . Il rapporto  $\gamma/b$  determina quindi il comportamento asintotico delle funzioni del THO, un rapporto maggiore tende a fare sì che le funzioni si concentrino in regioni radiali più piccole, corrispondenti a energie maggiori. I parametri  $b$  e  $\gamma$  verranno determinati sia con un metodo variazionale, minimizzando le energie degli stati legati, sia osservando direttamente il comportamento asintotico delle autofunzioni ottenute tramite tale trasformazione.

Con questa ricetta si può quindi costruire una base di dimensione arbitraria  $N$ ,  $\{|THO, i\rangle\}_{i=1\dots N}$  dove le  $\varphi_n^{THO}(r) = \langle r | THO, i \rangle$  costituiranno una base per gli stati legati e una base troncata per gli stati del continuo. Aumentando  $N$  ci si aspetta una trattazione sempre più accurata per fenomeni oltre il raggio d'azione del potenziale.

Le  $|THO, i\rangle$  non saranno necessariamente autostati dell'Hamiltoniana. Si procede quindi alla diagonalizzazione dell'Hamiltoniana nella base costituita dagli  $N$  pseudostati  $\{|THO, i\rangle\}$ .

Si otterranno quindi  $N$  stati  $\{|N, i\rangle\}_{i=1\dots N}$  e altrettanti autovalori  $\{\epsilon_i\}_{i=1\dots N}$ . Gli autostati relativi alle energie negative tenderanno all'aumentare di  $N$  agli stati legati del

sistema, mentre gli autostati relativi alle energie positive forniranno una rappresentazione finita degli stati liberi del continuo. Questi ultimi per  $N \rightarrow \infty$  tenderanno agli stati del continuo se viene rispettata la condizione di completezza  $\sum_i |\text{THO}, i\rangle \langle \text{THO}, i| = \mathbb{I}$ .

Poiché però dobbiamo usare un numero finito di stati, è necessario che questi convergano agli autostati dell'Hamiltoniana con un numero  $N$  sufficientemente piccolo, per fare ciò bisogna scegliere accuratamente i parametri  $b$  e  $\gamma$ .



## Capitolo 2

### I sistemi $^{17}\text{O}$ e $^{17}\text{F}$

Il sistema che tratteremo da qui in poi è il nucleo  $^{17}\text{F}$ , assieme al suo nucleo speculare  $^{17}\text{O}$ .

Il nucleo  $^{17}\text{F}$  ha 8 protoni e 8 neutroni che completano la shell  $0p_{1/2}$  e un protone che allo stato fondamentale occupa la shell  $0d_{5/2}$ , che ha un'energia di legame di circa 0.6 MeV, rendendolo pertanto un nucleo debolmente legato. Ciò renderà necessaria una trattazione degli stati continuo per studiarne le proprietà di eccitazione.

Il suo nucleo speculare  $^{17}\text{O}$  è invece caratterizzato dallo stesso core e da un neutrone con energia di legame di circa 4.5 MeV, a causa dell'assenza di repulsione coulombiana.

Cercheremo quindi innanzitutto di ottenere le energie dei primi stati del  $^{17}\text{F}$  e  $^{17}\text{O}$  e confrontarle con i dati presenti in letteratura, poi studieremo la risonanza dello stato  $0d_{3/2}$ .

Le energie sono riportate in tabella 2.1.

		$^{17}\text{O}$	$^{17}\text{F}$
$I^\pi$	Stato particella singola	E (MeV)	E (MeV)
$\frac{5}{2}^+$	$0d_{5/2}$	-4.144	-0.601
$\frac{1}{2}^+$	$1s_{1/2}$	-3.273	-0.106
$\frac{3}{2}^+$	$0d_{3/2}$	0.941	4.4

Tabella 2.1: Energie dei primi tre stati di  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$ .

Il potenziale utilizzato è un potenziale di Wood-Saxon con un termine di spin orbita:

$$V(R) = \left( V_0 + V_{SO} \bar{L} \cdot \bar{s} \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) \left[ 1 + \exp \left( \frac{R - R_0}{a} \right) \right]^{-1} \quad (2.1)$$

con  $V_0 = -56.7$  MeV,  $R_0 = 3.023$  fm,  $a = 0.6415$  fm,  $V_{SO} = 24.01$  MeV per  $^{17}\text{O}$  e 25.14 MeV per  $^{17}\text{F}$ ,  $R_0 = 3.023$  fm,  $a = 0.6415$  fm. Per simulare la repulsione coulombiana tra il protone e il core  $^{16}\text{O}$  è stato aggiunto un potenziale sferico elettrostatico con  $R_C = 3.023$  fm [7].

## 2.1 Parametri dell'oscillatore armonico e THO

Prima di procedere con i calcoli bisogna ottenere i parametri che caratterizzano la forma delle funzioni del HO e del THO che verranno usati nel programma.

Procediamo quindi a ricavare i parametri  $b$  e  $\gamma$  per  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$ . Entrambi possono essere ricavati tramite un'analisi di tipo variazionale, ovvero scegliendo i parametri che minimizzano l'energia dello stato fondamentale. Poiché per  $N$  grande le autoenergie convergerebbero ad un valore indipendente da entrambi i parametri, le calcoleremo con un numero  $N$  di pseudostati piccolo, in modo da poter apprezzare meglio le variazioni di energia al variare di  $b$  e  $\gamma$ .

Una seconda condizione per la scelta dei parametri è che le autofunzioni ricavate decadano in maniera esponenziale, o più precisamente come una funzione di Whittaker. Non dovranno quindi oscillare o presentare altre irregolarità. Questa condizione è in realtà più importante perché, mentre le energie tenderanno a convergere ai valori aspettati anche se  $b$  e  $\gamma$  non siano scelti accuratamente, il comportamento oscillante dei pseudostati inciderà pesantemente quando tratteremo le  $B(E\lambda)$ . Infatti per il calcolo di queste ultime le funzioni d'onda verranno moltiplicate per  $r$ , amplificando quindi eventuali comportamenti asintotici irregolari.

### Scelta dei parametri per $^{17}\text{O}$

Per determinare dei valori  $b$  e  $\gamma$  per  $^{17}\text{O}$  facciamo prima variare  $b$  e poi  $\gamma$  cercando di minimizzare l'energia dello stato fondamentale. Abbiamo un minimo intorno dell'energia di legame a  $b = 2.0$  fm, facendo variare  $\gamma$  otteniamo un valore per quest'ultimo pari a  $3.0 \text{ fm}^{1/2}$ .

Con questi parametri otteniamo le seguenti energie per gli stati legati al variare della dimensione della base  $N$ :

Stato	E(MeV)
$0d5/2$	-4.1497
$1s1/2$	-3.2783

Queste energie sono in accordo molto buono con i valori di riferimento (tabella 2.1).

### Scelta dei parametri per $^{17}\text{F}$

Anche per il nucleo  $^{17}\text{F}$  facciamo prima variare  $b$  e una volta determinato quest'ultimo variamo il parametro  $\gamma$ . Poi controlliamo che le autofunzioni abbiano il corretto comportamento asintotico quando generate con una base di dimensione più grande. Come si vede nella figura 2.1 per  $b = 1.6$  fm e  $\gamma = 1.8$  fm $^{1/2}$ , con  $N = 80$ , la funzione d'onda dello stato fondamentale presenta irregolarità molto ridotte. L'autofunzione con  $b = 2.4$  fm e  $\gamma = 1.36$  fm $^{1/2}$  è quella ottenuta ricavando  $b$  dalla trattazione del  $^{17}\text{F}$  con il metodo HO e poi ricavando  $\gamma$  dalla relazione  $k_{\text{eff}} = \frac{\gamma^2}{2b^2}$  con  $k_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2\mu E_{\text{gs}}}{\hbar^2}}$ . Nelle figure 2.2 e 2.3 sono mostrate le funzioni d'onda in scala logaritmica. La funzione con  $b = 2.4$  fm è l'autofunzione dello stato fondamentale calcolata senza THO e si vede immediatamente che quest'ultima si discosta molto dalle altre, decadendo come  $\exp(-r^2)$ . Ciò suggerisce che utilizzare come base autofunzioni dell'oscillatore armonico non è un buon metodo per studiare il nucleo  $^{17}\text{F}$ . Nelle figure 2.2 e 2.3 sono mostrati i parametri che utilizzeremo nella trattazione del nucleo  $^{17}\text{F}$  con il metodo THO sono quindi  $b = 1.6$  fm e  $\gamma = 1.8$  fm $^{1/2}$ .

Con  $N = 20$  troviamo:

Stato	E(MeV)
$0d5/2$	-0.5727
$1s1/2$	-0.0897

Pur essendo leggermente sovrastimate, queste energie sono in accordo discreto con i dati riportati in tabella 2.1.

## 2.2 Risonanza dello stato $0d3/2$

Per verificare la presenza di una risonanza nello stato  $0d3/2$  possiamo procedere in due modi.

### Metodo della stabilizzazione

Il primo metodo consiste nel calcolare gli autovalori dell'Hamiltoniana per i sistemi  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$  nello stato  $0d3/2$  in funzione della dimensione  $N$  della base THO. Poiché si stanno calcolando le autoenergie di uno stato non legato, al crescere di  $N$  queste tenderanno a diminuire convergendo alla soglia del continuo. Tuttavia, in presenza di una risonanza ci

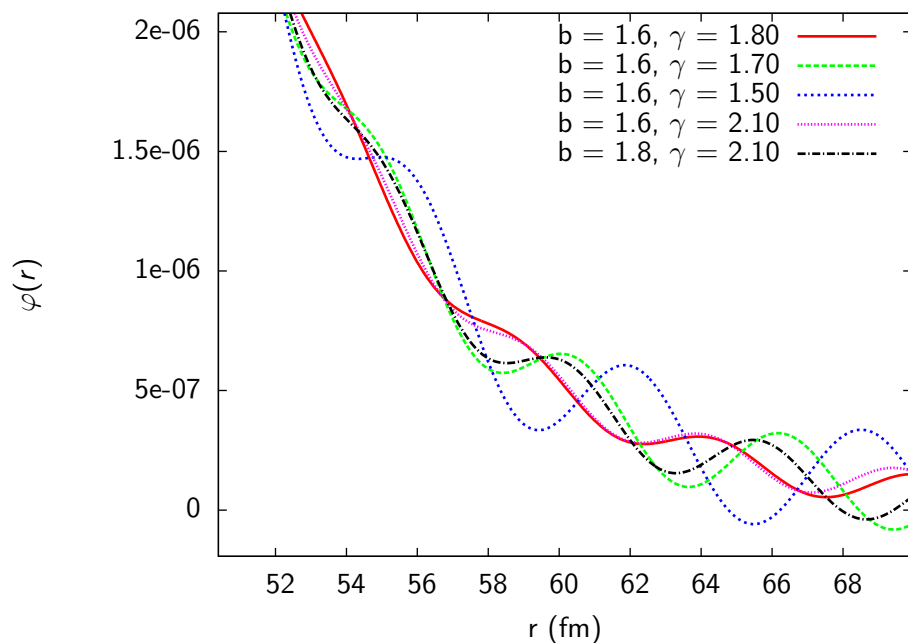


Figura 2.1: Ingrandimento delle funzioni d'onda del  $^{17}\text{F}$  al variare di  $b$  e  $\gamma$ .

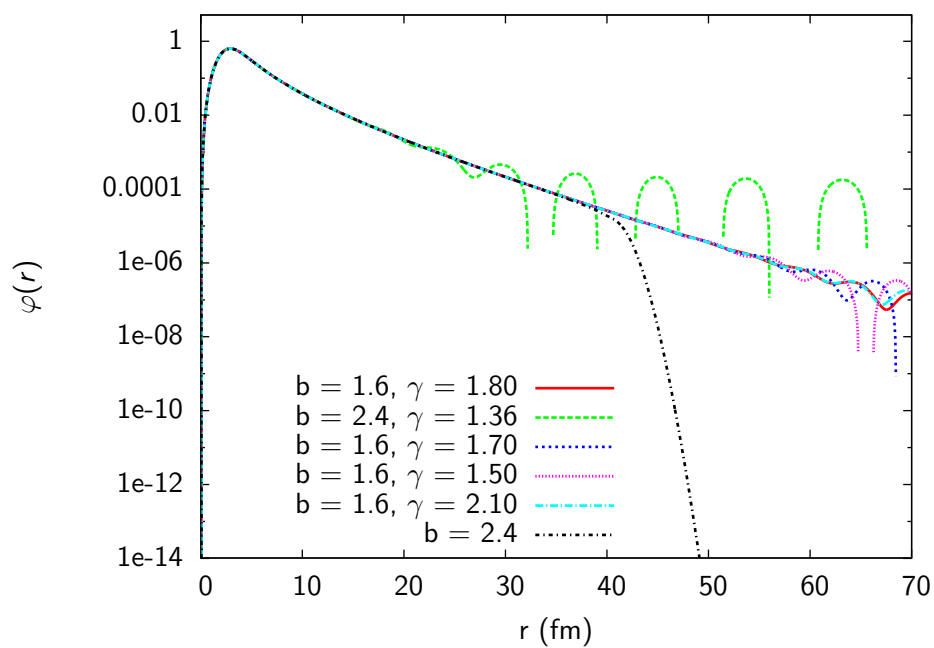
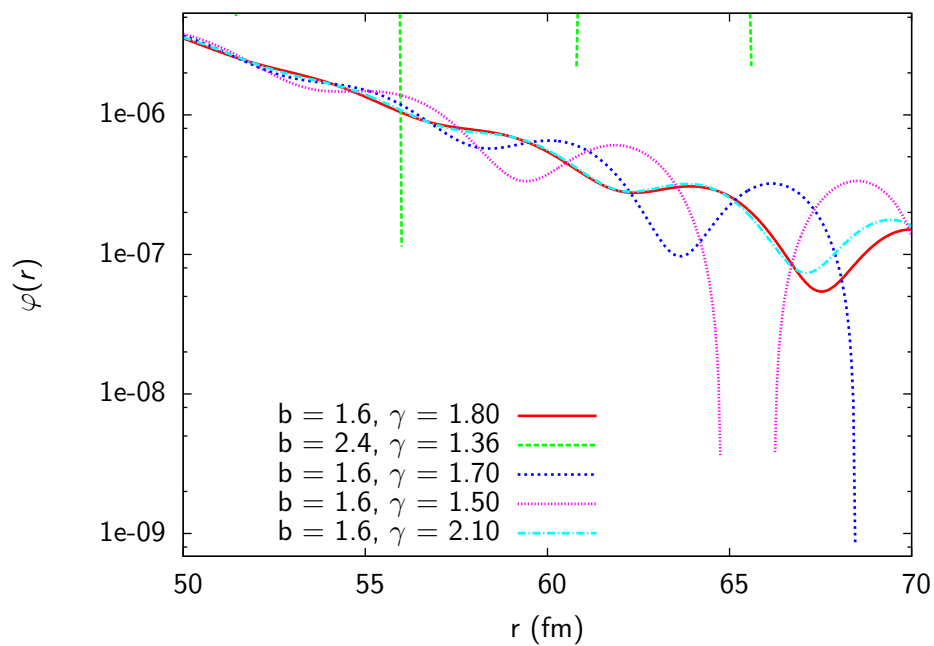
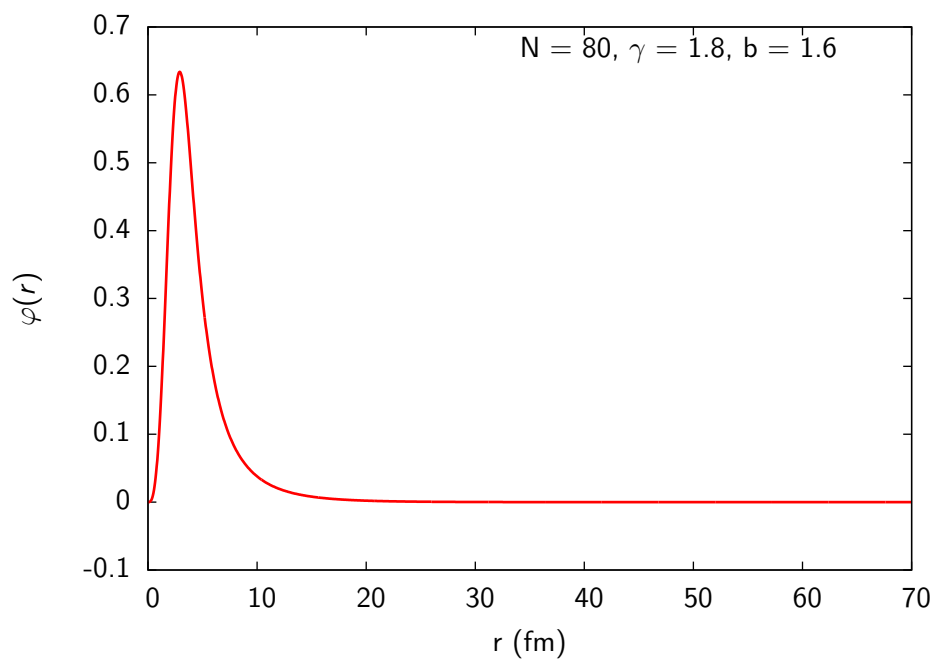


Figura 2.2: Funzioni d'onda del  $^{17}\text{F}$  al variare di  $b$  e  $\gamma$ , scala logaritmica.


 Figura 2.3: Funzioni d'onda del  $^{17}\text{F}$  al variare di  $b$  e  $\gamma$ , scala logaritmica.

 Figura 2.4: Parte radiale della funzione d'onda dello stato fondamentale del  $^{17}\text{F}$

si aspetta che le autoenergie si stabilizzino brevemente proprio intorno all'energia della risonanza, per poi tornare a decrescere. La relazione tra la larghezza della risonanza e la derivata dell'evoluzione delle autoenergie al variare di  $N$  fa sì che per risonanze molto piccate l'intervallo in  $N$  nel quale ci sia stabilizzazione sia più largo [5]. Poiché nei sistemi a una particella la larghezza della risonanza è proporzionale all'energia dello stato, nel caso del  $^{17}\text{O}$  si ha un intervallo in  $N$  maggiore che nel  $^{17}\text{F}$ .

Nelle figure 2.5 e 2.6 sono mostrati gli spettri dello stato  $0d3/2$  per  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$ . In entrambi i casi il primo autovalore evidenzia la presenza di una risonanza intorno al valore atteso, anche se nel caso del  $^{17}\text{O}$  è stato necessario utilizzare una dimensione della base  $N$  maggiore a causa della minore larghezza della risonanza.

### Metodo del phase shift

Il secondo metodo, quello del phase shift, consiste invece nello studiare la variazione degli sfasamenti delle autofunzioni in funzione dell'energia. In presenza di una risonanza si verificherà un salto della fase di  $\pi/2 + k\pi$  con  $k$  intero.

I phase shift possono essere ottenuti studiando la funzione d'onda nel limite  $r \rightarrow \infty$ . Il potenziale attrattivo nucleare infatti farà sì che le autofunzioni subiscano un ritardo di fase dovuto alla buca di potenziale, tanto più piccolo quanto è grande l'autoenergia dello stato, poiché come ci si aspetta stati di energia molto maggiore della profondità della buca subiranno gli effetti del potenziale in maniera ridotta. Il comportamento asintotico degli stati del continuo può essere espresso come

$$\varphi_\ell(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\cos \delta_\ell(k) F_\ell(kr) + \sin \delta_\ell(k) G_\ell(kr)] \quad (2.2)$$

dove  $F_\ell$  e  $G_\ell$  sono rispettivamente le funzioni regolari e irregolari di Coulomb, ovvero le soluzioni dell'equazione di Schrödinger per un potenziale Coulombiano. Da questa formula tuttavia non è possibile estrarre gli sfasamenti  $\delta_\ell$  per gli pseudostati, poiché le funzioni d'onda relative ad essi svaniscono esponenzialmente all'infinito. Bisogna quindi utilizzare un altro approccio. Utilizzando delle espressioni integrali si possono determinare gli sfasamenti senza dover analizzare le funzioni d'onda per  $r$  grande. utilizzeremo quindi la seguente formula [4]:

$$\tan \delta_\ell(k) = - \frac{\int_0^\infty \varphi_\ell(k, r) [E - H] f(r) F_\ell(kr) dr}{\int_0^\infty \varphi_\ell(k, r) [E - H] f(r) G_\ell(kr) dr} \quad (2.3)$$

con  $f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$  e  $f(0) = f'(0) = 0$ . Tale funzione è scelta in modo da selezionare una regione radiale appropriata per il calcolo dei phase shift.

Il programma utilizzato consente di estrarre automaticamente gli sfasamenti, che sono mostrati in figura 2.7.

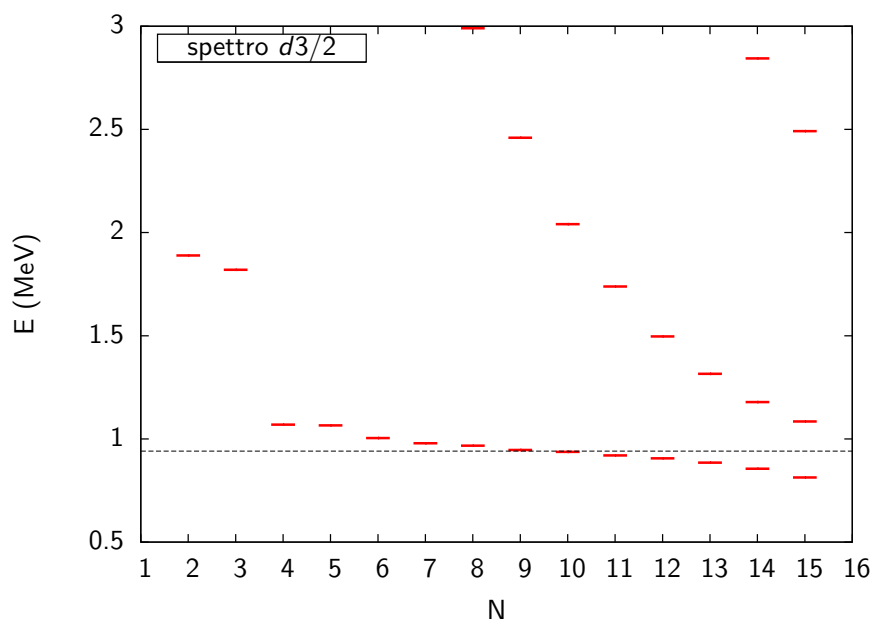


Figura 2.5: Studio della risonanza  $0d_{3/2}$  del  $^{17}\text{O}$  con il metodo della stabilizzazione e THO. La linea tratteggiata rappresenta il valore atteso di 0.941 MeV.

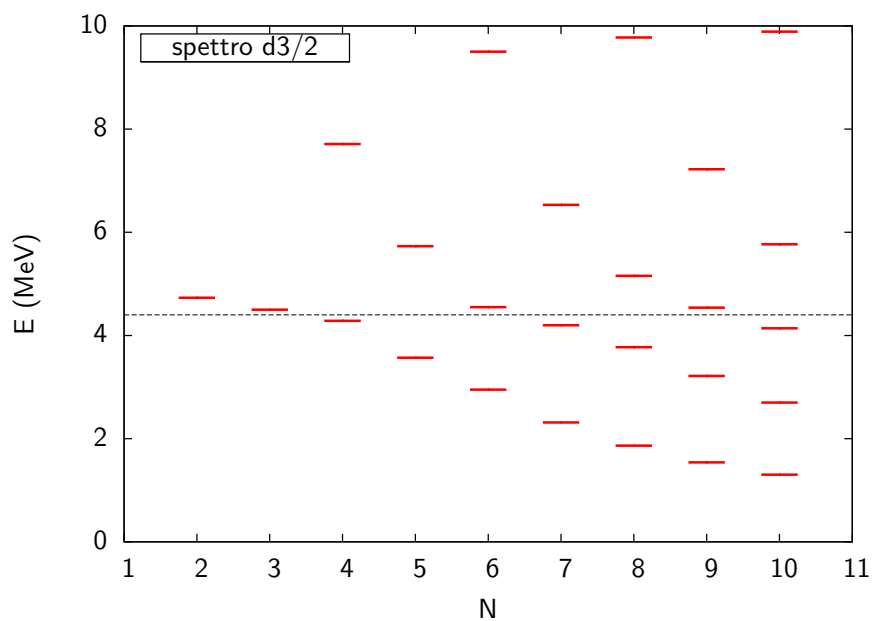


Figura 2.6: Studio della risonanza  $0d_{3/2}$  del  $^{17}\text{F}$  con il metodo della stabilizzazione. La linea tratteggiata rappresenta il valore atteso di 4.4 MeV.

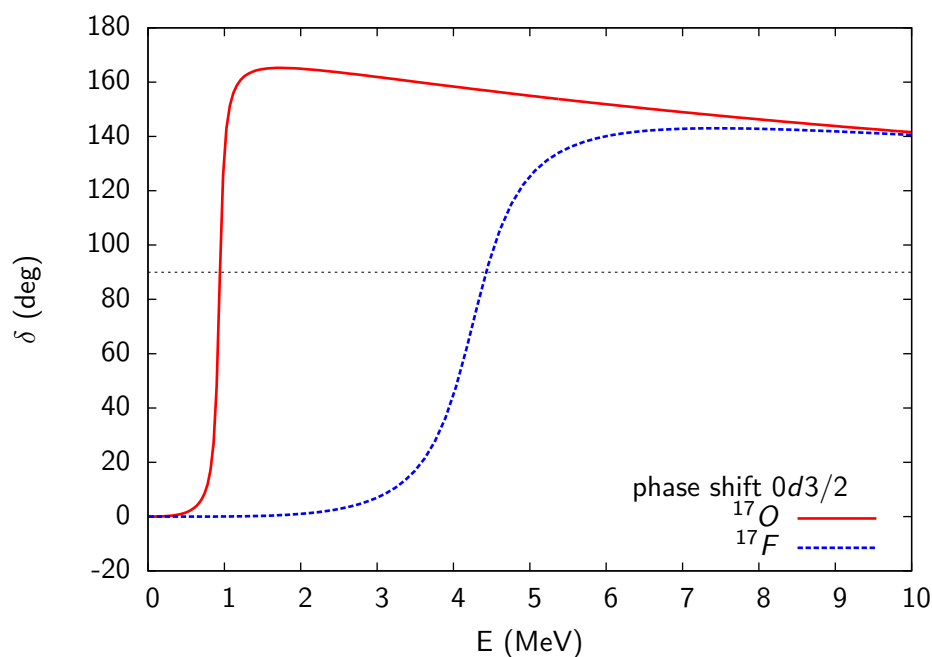


Figura 2.7: Sfasamenti relativi agli stati  $0d_{3/2}$  di  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$ . La linea orizzontale indica uno sfasamento di  $90^\circ$

Come nel metodo della stabilizzazione, si nota immediatamente che la pendenza della curva del phase shift del  $^{17}\text{O}$  è molto maggiore di quella del  $^{17}\text{F}$ , da cui si deduce che la larghezza della risonanza di quest'ultimo sia maggiore di quella del  $^{17}\text{O}$ .

### Confronto

Si può notare un accordo tra i due metodi, in quanto entrambi suggeriscono la presenza di una risonanza attorno a 4.5 MeV per il nucleo  $^{17}\text{F}$  e intorno a 1 MeV per il suo nucleo speculare  $^{17}\text{O}$ , in accordo con i dati presenti in letteratura. Il metodo della stabilizzazione evidenzia chiaramente la risonanza del  $^{17}\text{O}$  poiché questa è molto stretta, a differenza della risonanza del  $^{17}\text{F}$ , nella quale invece si vede solo una leggera flessione nel decadimento degli stati.



## Capitolo 3

# Overlap e reazioni di scambio carica

In una reazione di scambio carica avviene che il nucleo originale si trova ad avere un protone in più e un neutrone in meno o viceversa. Nel nostro caso la reazione sarà del tipo  $^{17}\text{F} + a \longrightarrow ^{17}\text{O}^{(*)} + b$ , dove l'asterisco sta a indicare che il nucleo  $^{17}\text{O}$  può essere eccitato.

Si ha che la probabilità di una tale reazione è tanto maggiore quanto maggiore è l'overlap tra le funzioni d'onda dei nuclei coinvolti nella reazione, cioè quanto più esse si assomigliano. Considerando reazioni con il  $^{17}\text{F}$  allo stato fondamentale e  $^{17}\text{O}$  in uno stato generico  $\psi_s$ , una misura di tale overlap è il prodotto scalare tra lo stato iniziale e finale, o meglio il suo modulo quadro  $|\langle \psi_{\text{g.s.}}(^{17}\text{F}) | \psi_s(^{17}\text{O}) \rangle|^2$ .

Nel caso in cui nessuno dei nuclei sia debolmente legato ci si aspetta che tali overlap siano quasi completamente dovuti agli stati legati. Nel caso uno dei nuclei sia debolmente legato invece, potrebbe esserci un contributo dovuto agli stati di energia positiva, quindi del continuo.

In figura 3.1 sono mostrati gli overlap tra lo stato fondamentale del  $^{17}\text{F}$  e degli stati  $0d5/2$ ,  $1s1/2$  e  $0d3/2$  del nucleo  $^{17}\text{O}$ , in funzione delle autoenergie degli stati legati per energie negative o dei pseudostati per energie positive. Si nota che gli overlap tra lo stato fondamentale del nucleo  $^{17}\text{F}$  e degli stati legati del nucleo  $^{17}\text{O}$  sono significativamente diversi da 0 solo per energie negative, suggerendo che nonostante la natura di nucleo debolmente legato del nucleo  $^{17}\text{F}$  gli stati del continuo non intervengano nelle reazioni di scambio carica, con l'eccezione dello stato  $0d3/2$ , dalla cui risonanza deriva l'unico contributo per energie positive.

Inoltre si nota che gli overlap con lo stato  $0d3/2$  sono fortemente piccati attorno a 1 MeV, come mostrato in figura 3.2, che è l'energia della risonanza di tale stato per il nucleo  $^{17}\text{O}$ .

La presenza quasi nulla di overlap nel continuo nonostante le energie di legame dei due nuclei siano così diverse può essere dovuta a due fattori: il fatto che il nucleone debolmente legato del nucleo  $^{17}\text{F}$  sia un protone, e quindi risenta di una barriera coulombiana, e che il suo stato fondamentale abbia momento angolare  $\ell = 2$ , che produce

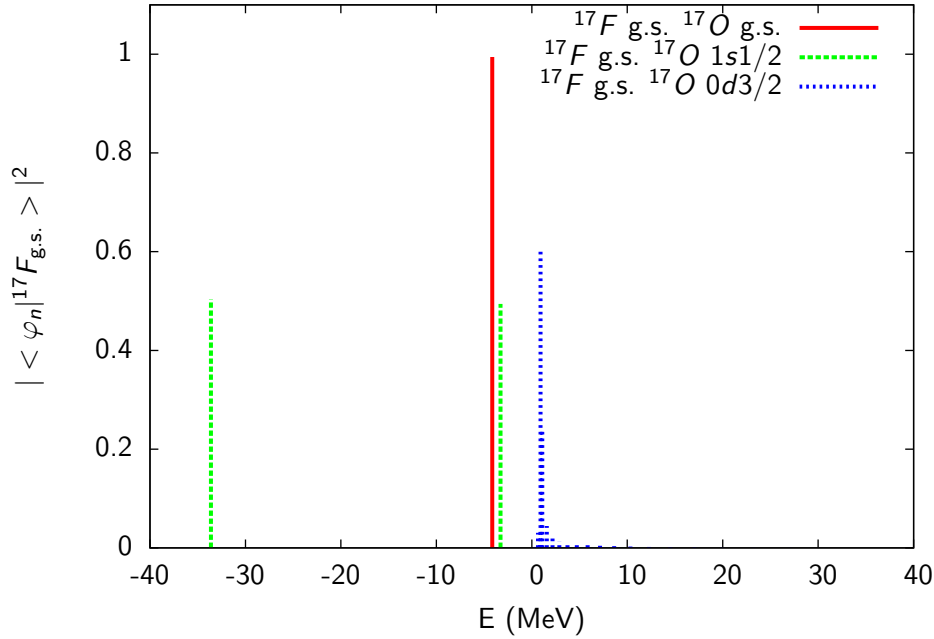


Figura 3.1: Overlap tra lo stato fondamentale del  $^{17}\text{F}$  e gli stati  $0d5/2$ ,  $1s1/2$  e  $0d3/2$  del  $^{17}\text{O}$

una barriera centrifuga. Queste barriere restringono l'estensione spaziale della funzione d'onda, facendo sì che rimanga simile a quella dello stato fondamentale del nucleo  $^{17}\text{O}$ .

In figura 3.3 sono mostrate le parti radiali delle funzioni d'onda dei nuclei  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$ . È inoltre mostrata la funzione d'onda di un ipotetico nucleo con la stessa energia di legame del nucleo  $^{17}\text{F}$ , ma con un neutrone nello stato  $0d5/2$  al posto del protone, quindi privo di barriera coulombiana. Si noti come l'estensione radiale delle funzioni d'onda dei nuclei  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$  sia simile, suggerendo che l'influenza degli stati del continuo in una transizione tra le due sia poca. Si può notare inoltre come la funzione test si estenda spazialmente visibilmente più delle altre, confermando l'azione di confinamento della barriera coulombiana. Nonostante ciò, l'azione della barriera centrifuga dovuta al momento angolare orbitale  $\ell = 2$  dello stato  $0d5/2$  è sufficiente per evitare che il neutrone formi un alone intorno al nucleo, ovvero che la sua funzione d'onda si estenda radialmente molto più del core. Un altro approfondimento interessante sarebbe studiare la situazione speculare nella quale sia abbia sì un protone di valenza, ma lo stato fondamentale sia  $s1/2$ , quindi con  $\ell = 0$ , per vedere se l'assenza della barriera centrifuga produca risultati diversi, ma non ci soffermeremo su questo caso.

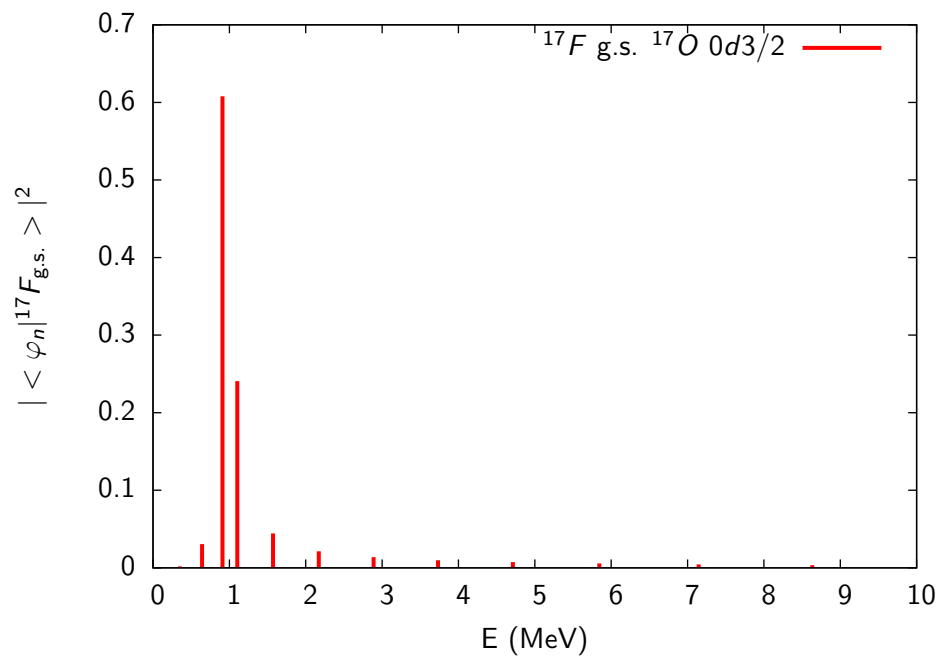


Figura 3.2: Overlap tra lo stato fondamentale del  ${}^{17}\text{F}$  e lo stato  $0d3/2$  del  ${}^{17}\text{O}$

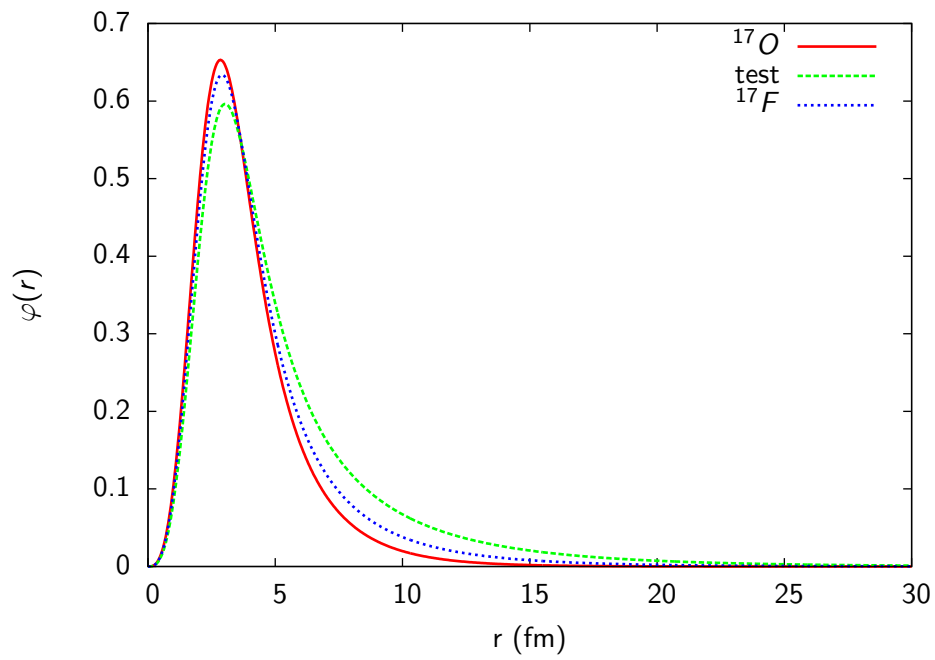


Figura 3.3: Parti radiali delle funzioni d'onda dello stato fondamentale di  $^{17}\text{O}$  e  $^{17}\text{F}$  a confronto. La funzione test ha la stessa energia di legame del nucleo  $^{17}\text{F}$  ma un neutrone di valenza invece del protone.

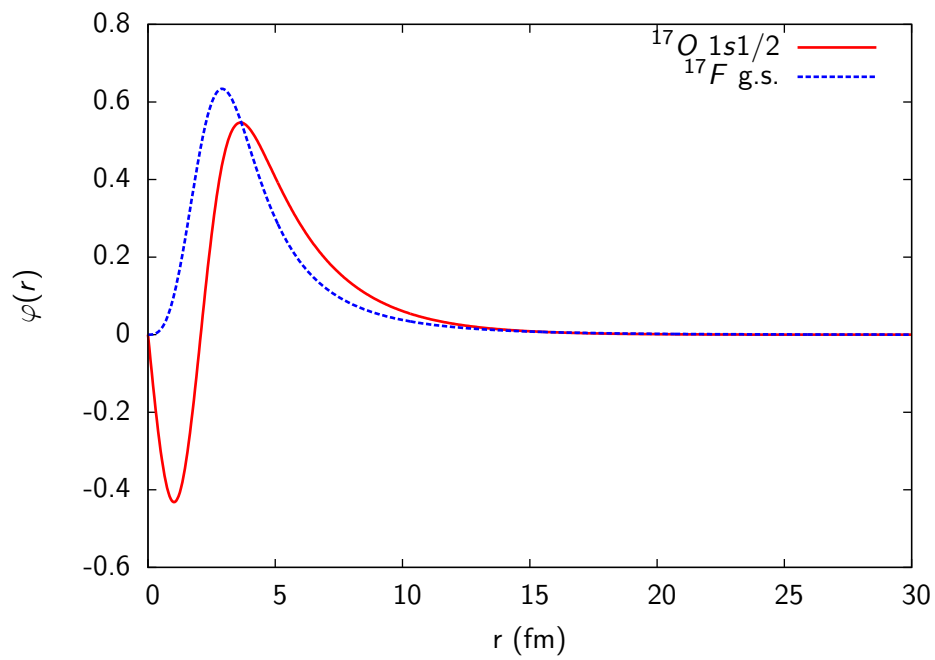


Figura 3.4: Parti radiali delle funzioni d'onda dello stato  $1s_{1/2}$  del  $^{17}\text{O}$  e dello stato fondamentale del  $^{17}\text{F}$  a confronto.

## Capitolo 4

# Calcolo delle $B(E\lambda)$ per il nucleo $^{17}\text{F}$

Una proprietà importante nello studio delle reazioni nucleari e dei processi di decadimento elettromagnetico è data dalle probabilità ridotte di transizione elettrica di multipolo  $B(E\lambda)$ . Poiché le reazioni nucleari coinvolgono spesso eccitazioni multipolari dei nuclei, la conoscenza delle probabilità di transizione ridotte permette di poter stimare i contributi di multipolo nelle reazioni stesse.

In questo capitolo ci concentreremo sullo studio del nucleo  $^{17}\text{F}$ . Poiché stiamo studiando un nucleo con shell semichiusa ci aspettiamo che le  $B(E\lambda)$  ottenute dalla sola eccitazione del protone di valenza siano una buona stima delle probabilità di transizione elettrica effettive del nucleo.

Consideriamo inoltre il caso in cui l'eccitazione del nucleo ne causi la rottura  $^{17}\text{F} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p}$  (*breakup*). Indicheremo con  $a$  il nucleo originale e con  $b$  e  $c$  i prodotti.

Il calcolo delle probabilità di eccitazione elettromagnetica  $B(E\lambda)$  avviene in modi diversi a seconda che lo stato iniziale siano entrambi legati o che quest'ultimo sia uno stato del continuo.

Nel primo caso si ha, con  $|(\ell_i s) j_i\rangle$  stato iniziale e  $|(\ell_f s) j_f\rangle$  stato finale

$$B(E\lambda, i \rightarrow f) = \frac{2j_f + 1}{2j_i + 1} |\langle (\ell_f s) j_f | \mathcal{M}(E\lambda) | (\ell_i s) j_i \rangle|^2 \quad (4.1)$$

dove  $\mathcal{M}$  è l'operatore di multipolo

$$\mathcal{M}(E\lambda\mu) = Z_{\text{eff}}^{(\lambda)} e r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \quad (4.2)$$

e  $Z_{\text{eff}}^{(\lambda)}$  è la carica effettiva

$$Z_{\text{eff}}^{(\lambda)} = Z_b \left( \frac{m_c}{m_b + m_c} \right)^\lambda + Z_c \left( -\frac{m_b}{m_b + m_c} \right)^\lambda \quad (4.3)$$

Se invece si ha un transizione da uno stato legato al continuo  $|k(\ell_f s) j_f\rangle$

$$\frac{dB(E\lambda)}{d\varepsilon} = \frac{2j_f + 1}{2j_i + 1} \frac{\mu_{bc} k}{(2\pi)^3 \hbar^2} |\langle k(\ell_f s) j_f | \mathcal{M}(E\lambda) | (\ell_i s) j_i \rangle|^2 \quad (4.4)$$

con  $k = \sqrt{2\mu_{bc}\varepsilon}/\hbar$ . Il fattore  $(\mu_{bc}k)/((2\pi)^3\hbar^2)$  serve a mantenere la consistenza con la condizione di normalizzazione  $\langle k(\ell s)j|k'(\ell s)j\rangle = \delta(k - k')$  e la condizione 2.2 sul comportamento asintotico delle funzioni d'onda.

Considerando solo transizioni a partire dallo stato fondamentale e ignorando gli spin interni dei cluster si ottiene

$$\frac{dB(E\lambda)}{d\varepsilon} = \frac{2\ell_f + 1}{2\ell_i + 1} \frac{\mu_{bc}k}{(2\pi)^3\hbar^2} |\langle \varphi_{\ell_f}(k) | \mathcal{M}(E\lambda) | \varphi_{\text{g.s.}} \rangle|^2 \quad (4.5)$$

Tuttavia la base del continuo che utilizziamo ha una dimensione finita  $N$ , quindi possiamo calcolare le transizioni dallo stato fondamentale a uno pseudostato  $\varphi_n$   $B^{(N)}(E\lambda, \text{g.s.} \rightarrow n)$  secondo la formula 4.1. Se vogliamo ottenere una distribuzione continua da questa relazione possiamo utilizzare l'approssimazione

$$\left. \frac{dB(E\lambda)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_n} \simeq \frac{1}{\Delta_n} B^{(N)}(E\lambda, \text{g.s.} \rightarrow n) \quad (4.6)$$

dove  $\Delta_n$  rappresenta la larghezza del pseudostato  $n$ .

In alternativa si può sfruttare il fatto che per  $N \rightarrow \infty$  vale la relazione di completezza  $\sum_i^N |\varphi_{\ell,i}\rangle \langle \varphi_{\ell,i}| = \mathbb{I}$  e inserirla nell'equazione 4.5

$$\frac{dB(E\lambda)}{d\varepsilon} \simeq \frac{2\ell_f + 1}{2\ell_i + 1} \frac{\mu_{bc}k}{(2\pi)^3\hbar^2} \left| \sum_{i=1}^N \langle \varphi_{\ell}(k) | \varphi_{\ell,i}\rangle \langle \varphi_{\ell,i} | \mathcal{M}(E\lambda) | \varphi_{\text{g.s.}} \rangle \right|^2 \quad (4.7)$$

Possiamo inoltre testare l'accuratezza della regola di somma pesata dall'energia (Energy Weighted Sum Rule, EWSR) [4]

$$\begin{aligned} \text{EWSR} &\equiv \int d\varepsilon \frac{dB(E\lambda)}{d\varepsilon} (\varepsilon - \varepsilon_{\text{g.s.}}) \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu_{bc}} \lambda(2\lambda + 1) \frac{2\ell_f + 1}{2\ell_i + 1} \left( D_{\ell_i, \ell_f}^{(\lambda)} \right)^2 \langle r^{2\lambda-2} \rangle_{\text{g.s.}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

dove  $D_{\ell_i, \ell_f}^{(\lambda)}$  è un fattore geometrico dipendente dal sistema. Questa formula è valida solo nel caso in cui venga utilizzato lo stesso potenziale per tutte le onde, nel quale rientra la nostra trattazione. L'ultima espressione nella 4.8 tuttavia è valida solo nel caso di Hamiltoniane indipendenti dal momento angolare, mentre nel nostro caso è presente un termine di spin-orbita. La EWSR è inoltre più utile a testare l'accuratezza della base per energie alte a causa del fattore  $(\varepsilon - \varepsilon_{\text{g.s.}})$  al numeratore.

## 4.1 B(E1)

Procediamo al calcolo delle probabilità di transizione dipolare  $B(E1)$  a partire dallo stato fondamentale. Poiché  $L = 1$  e  $J_{\text{in}} = 5/2$  le regole di somma dei momenti angolari  $|J_{\text{in}} - J_f| \leq L \leq J_{\text{in}} + J_f$  e di conservazione della parità suggeriscono che gli stati finali

	$B(E1)(\text{e}^2\text{fm}^2)$			<b>Totale</b>
	$p3/2$	$f5/2$	$f7/2$	
Da pseudostati	0.04631	0.01981	0.39697	<b>0.46309</b>
Dal continuo	0.02140	0.01980	0.39697	<b>0.43817</b>
EWSR	0.04631	0.01985	0.39698	<b>0.46315</b>

Tabella 4.1: Probabilità totali di transizione elettrica di dipolo

saranno caratterizzati da un  $J_f^\pi$  di  $3/2^-$ ,  $5/2^-$ ,  $7/2^-$ , che corrispondono agli stati di particella singola  $p3/2$ ,  $f5/2$ ,  $f7/2$ .

Le probabilità di eccitazione dipolare  $B(E1)$  totali sono mostrate nella tabella 4.1. Si noti come ci sia un accordo eccellente tra le  $B(E1)$  calcolate con i tre metodi, eccetto che per il calcolo relativo allo stato  $1p1/2$  del continuo. Ciò è dovuto al fatto che il calcolo delle probabilità di eccitazione  $B(E1)$  con pseudostati e con la EWSR comprende anche il contributo con lo stato legato  $0p3/2$ , che equivale a  $0.02492 \text{ e}^2\text{fm}^2$ . Aggiungendo tale numero alla  $B(E1)$  del continuo otteniamo  $0.46309 \text{ e}^2\text{fm}^2$ , in accordo con gli altri valori. Questo contributo in realtà non influisce nel caso si stiano calcolando reazioni di breakup, poiché queste implicano che il protone nello stato finale abbia energia positiva e quindi sia descritto da una distribuzione di pseudostati nel continuo e non possa passare ad un altro stato legato già occupato a causa del principio di esclusione di Pauli.

## 4.2 B(E2)

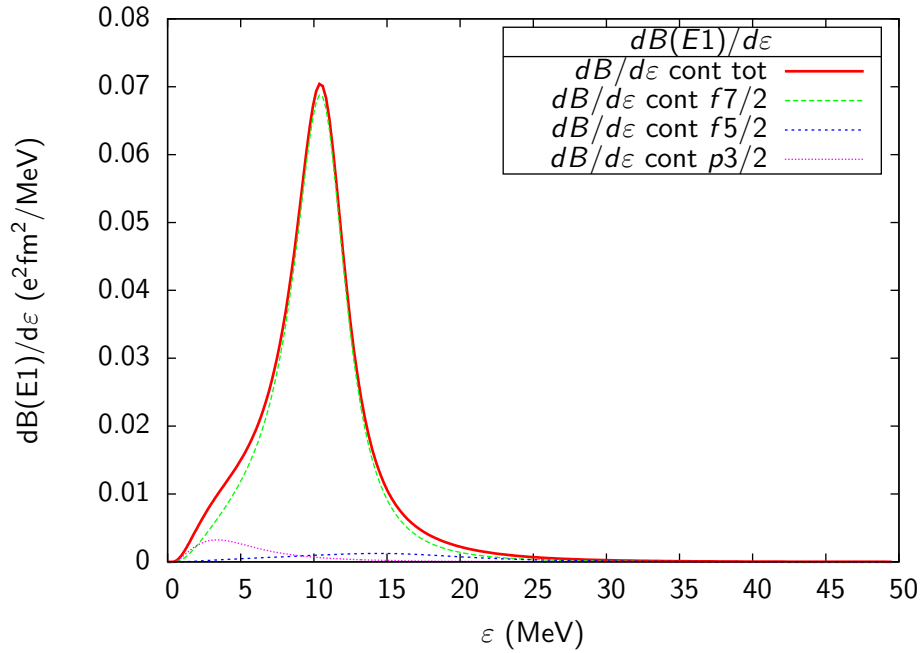
	$B(E2)(\text{e}^2\text{fm}^4)$					<b>Totale</b>
	$s1/2$	$d3/2$	$d5/2$	$g7/2$	$g9/2$	
Da pseudostati	21.967	6.2699	25.106	4.1537	52.038	<b>109.535</b>
Dal continuo	3.2476	6.2652	11.591	4.1078	51.774	<b>76.9856</b>
EWSR	21.981	6.2802	25.121	4.1868	52.335	<b>109.904</b>

Tabella 4.2: Probabilità totali di transizione elettrica di quadrupolo.

Per quanto riguarda le transizioni elettriche di quadrupolo invece abbiamo come valori possibili  $J_f^\pi = 1/2^+$ ,  $3/2^+$ ,  $5/2^+$ ,  $7/2^+$ ,  $9/2^+$ . Gli stati di particella singola consentiti dalla transizione sono quindi  $s1/2$ ,  $d3/2$ ,  $d5/2$ ,  $g7/2$ ,  $g9/2$ .

I valori sono riportati nella tabella 4.2. Anche qui abbiamo un accordo molto buono tra varie somme. Come nel caso precedente ci sono alcune transizioni a stati legati che sono state contate nelle probabilità di eccitazione di quadrupolo  $B(E2)$  calcolata con pseudostati e con le EWSR ma non con la distribuzione dal continuo. Questi contributi




 Figura 4.1:  $dB(E1)/d\varepsilon$  per il nucleo  $^{17}\text{F}$ .

sono dati dalle transizioni dallo stato fondamentale agli stati  $0s_{1/2}$ ,  $1s_{1/2}$  e  $0d_{5/2}$ . La transizione al primo stato è vietata dal principio di esclusione di Pauli, mentre le transizioni agli altri due non sono contati nel calcolo dalla distribuzione del continuo in quanto stati legati. Il loro contributo totale ammonta a  $32.210 \text{ e}^2\text{fm}^4$  che dà  $B(E2)_{\text{cont}} = 109.196 \text{ e}^2\text{fm}^4$  in buon accordo con le altre probabilità ridotte.

In figura 4.2 sono mostrate le distribuzioni delle probabilità di transizione  $dB(E2)/d\varepsilon$  in funzione dell'energia. Si nota, come anche nella tabella 4.2, un forte contributo dallo stato  $0g_{9/2}$ . A prima vista può sembrare che la distribuzione di probabilità di eccitazione di quadrupolo  $dB(E2)/d\varepsilon$  per lo stato  $0g_{9/2}$  sia composta da un solo contributo, ma in realtà si possono notare due picchi, uno intorno a 5 MeV e uno intorno a 20 MeV.

Ci chiediamo dunque se questi contributi siano dovuti a effetti di soglia o a una risonanza. Per verificare ciò, ricalcoliamo le probabilità ridotte per questo stato con diversi valori del parametro  $V_0$  del potenziale per lo stato  $0g_{9/2}$ , mantenendo lo stesso potenziale per lo stato fondamentale.

Poiché le energie alle quali avvengono gli effetti di soglia dipendono dall'energia di legame ci si aspetta che questi ultimi siano indipendenti dalla scelta di  $V_0$ , mentre le risonanze invece dipendano da tale parametro. Come si vede in figura 4.3, il primo picco è chiaramente un effetto di soglia, mentre il secondo è dovuto a vera una risonanza, la cui presenza è verificata dal salto di fase di  $90^\circ$  mostrato in figura 4.4.

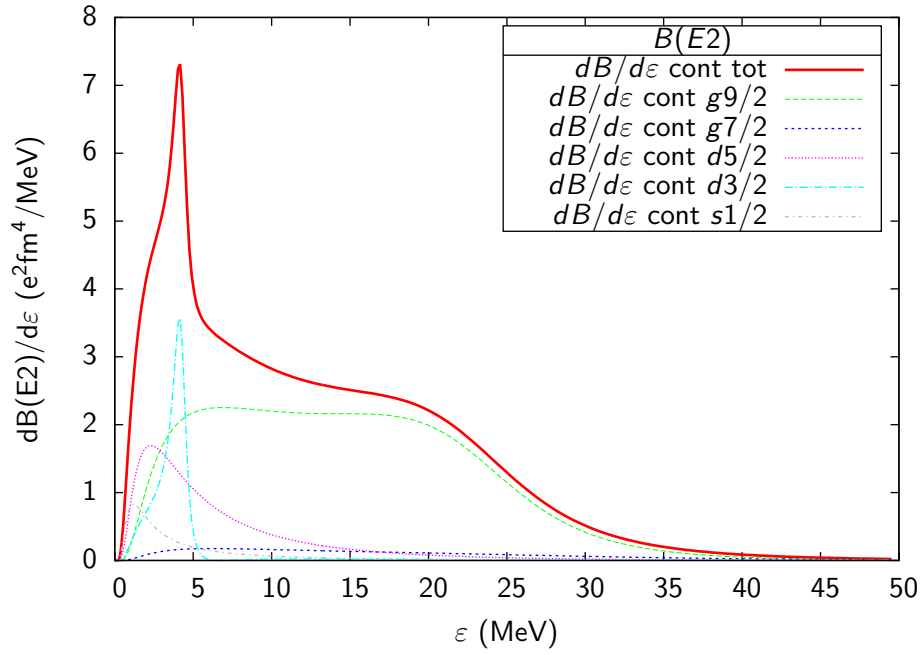


Figura 4.2:  $\frac{dB(E2)}{d\varepsilon}$  per il nucleo  $^{17}\text{F}$ .

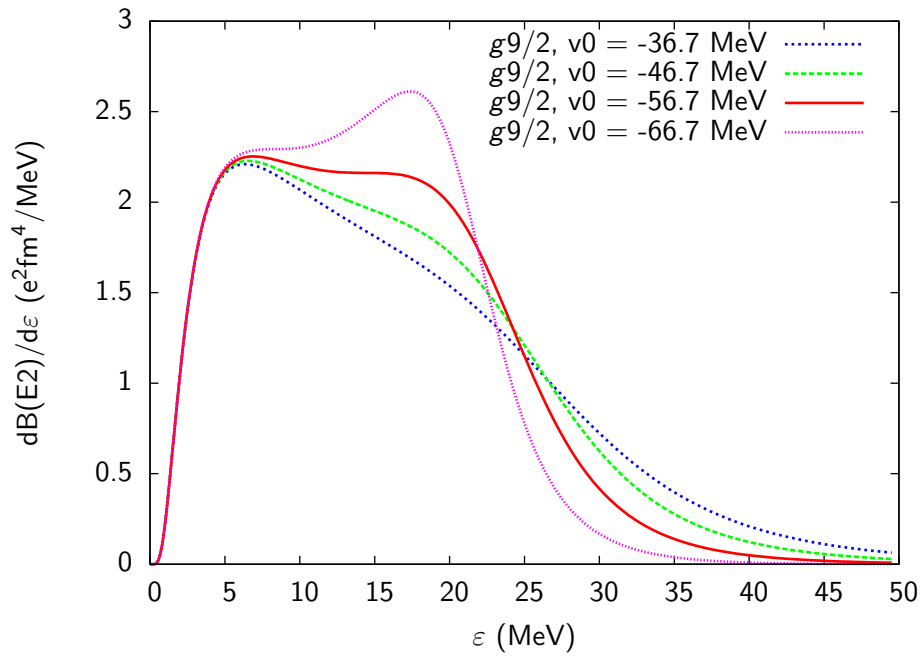


Figura 4.3:  $\frac{dB(E2)}{d\varepsilon}$  per lo stato  $0g_{9/2}$  al variare di  $V_0$ .

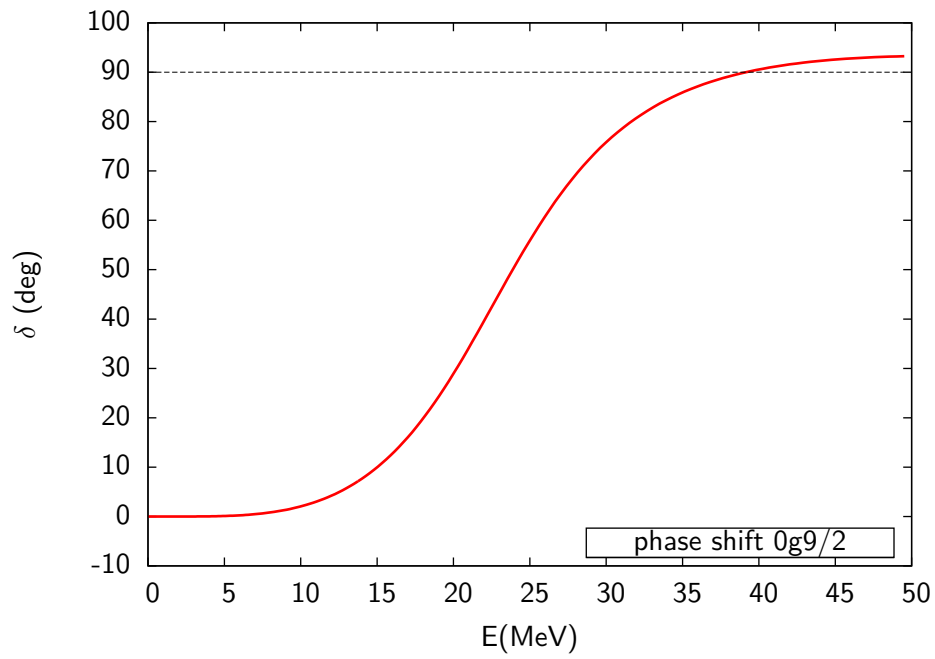


Figura 4.4: Sfasamenti relativi allo stato  $0g9/2$ . La linea orizzontale rappresenta un salto di fase di  $90^\circ$ .

## Capitolo 5

# Reazioni di Breakup

Una reazione di breakup è un processo nel quale un nucleo proiettile viene fatto collidere con un nucleo più pesante e si divide in due o più componenti:  $a + A \longrightarrow b + b' + B$ , dove  $A$  e  $B$  possono essere lo stesso nucleo. In tali reazioni intervengono sia l'interazione coulombiana, di natura repulsiva, poiché i nucleoni hanno solo carica positiva o nulla, e le forze nucleari debole e forte. In questo capitolo ci concentreremo in breakup che coinvolgono solo l'interazione coulombiana.

Poiché il nucleo proiettile non è più legato dopo il breakup, la dinamica è influenzata sia dagli stati legati che dagli stati nel continuo di tale sistema [3]. Per tale ragione le reazioni di breakup sono state utilizzate per studiare nuclei debolmente legati, in particolare quelli di tipo *halo*. In tali nuclei i protoni o i neutroni di valenza hanno una distribuzione spaziale molto più estesa di quella attesa dalla semplice formula  $r = r_0 A^{1/3}$ , con  $r_0 = 1.2$  fm, formando una sorta di "alone" attorno al core.

In un contesto sperimentale si ha che il bersaglio è fermo nel sistema del laboratorio e contro di esso è lanciato un fascio di nuclei proiettili aventi una certa energia  $E_{\text{lab}}$  nel sistema di riferimento del laboratorio. Si misurano poi le distribuzioni di quantità di moto del nucleo proiettile prima e dopo la reazione e l'angolo di scattering  $\theta$  del centro di massa del sistema sistema  $b + b'$ , relativamente al sistema di riferimento del centro di massa di bersaglio + proiettile.

Da queste informazioni si deduce l'energia relativa  $\varepsilon_{\text{rel}}$  tra il sistema  $a$  e il sistema  $b + b'$

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \varepsilon_x + S_b \quad (5.1)$$

dove  $S_b$  è l'energia per separare il sistema  $a$  nel sistema  $b + b'$ . Nel caso del breakup  $^{17}\text{F} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p}$  questa sarà l'energia di legame del protone, che abbiamo calcolato essere 0.5727 MeV. Quindi si può procedere al calcolo delle sezioni d'urto differenziali in funzione dell'energia relativa  $d\sigma/d\varepsilon_{\text{rel}}$  o dell'angolo di emissione  $d\sigma/d\Omega$ . A loro volta queste informazioni permettono di risalire alle probabilità di eccitazione  $B(E\lambda)$  [1].

Gli apparati sperimentali hanno delle limitazioni dovute alla risoluzione angolare, alla risoluzione in energia, e al valore massimo dell'angolo di scattering che può venire osservato  $\theta_{\text{max}}$ . Inoltre, a causa della natura non puntiforme dei nuclei atomici, l'angolo di scattering per un processo deflessione puramente coulombiana avrà un massimo, chia-

mato *angolo di grazing*  $\theta_{gr}$ , dovuto al fatto che i nuclei non sono puntiformi, ma hanno una certa estensione spaziale. Infatti l'angolo di scattering  $\theta$  aumenta al diminuire del parametro di impatto  $b$ , perché aumenta la forza di Coulomb che subisce il nucleo proiettile nella sua traiettoria, ma se  $b$  è minore della somma dei due raggi atomici i due nuclei verranno a contatto e il processo non sarà più puramente di tipo coulombiano, perché interverranno anche le interazioni nucleari.

*L'angolo di grazing*

L'angolo di grazing di un processo dipende da parametri quali l'energia dei nuclei coinvolti nella reazione e i loro raggi.

Il  $^{17}\text{F}$  non è un nucleo halo, come abbiamo visto nel capitolo 3 (figura 3.3), ma essendo comunque debolmente legato può essere interessante studiarne la dinamica processo di breakup. In questo capitolo calcoleremo le sezioni d'urto differenziali  $d\sigma/d\varepsilon_{rel}$  sia per eccitazioni di dipolo che di quadrupolo della reazione  $^{17}\text{F} + ^{208}\text{Pb}$  utilizzando il metodo *Equivalent Photon Method* (EPM).

Tale approccio consiste in un'approssimazione semiclassica del primo ordine dei processi di breakup, cioè viene tenuto conto solo dell'interazione coulombiana, trascurando le eventuali interazioni nucleari tra bersaglio e proiettile e consiste nel rappresentare l'interazione elettromagnetica tramite lo scambio di fotoni virtuali.

*L'approccio EPM*

Ciò permette di mettere in relazione facilmente le probabilità di eccitazione elettriche multipolari  $B(E\lambda)$  con la sezione d'urto differenziale del processo studiato, per esempio nel caso di eccitazioni di dipolo la sezione d'urto differenziale  $d^2\sigma/d\Omega d\varepsilon_{rel}$  è data da [1]

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon_{rel}} = \frac{16\pi^3}{9\hbar c} \frac{dN_{E1}(\theta, \varepsilon_x)}{d\Omega} \frac{dB(E1)}{d\varepsilon_{rel}} \quad (5.2)$$

dove  $N_{E1}(\theta, \varepsilon_x)$  è il numero di fotoni virtuali con energia di eccitazione  $\varepsilon_x = S_p + \varepsilon_{rel}$  e angolo di scattering  $\theta$ .

Confrontando misure sperimentali delle sezioni d'urto di un proceso di breakup con il calcolo teorico sarà quindi possibile derivare le probabilità di eccitazione multipolari  $B(E\lambda)$ .

È importante notare che, affinché questo metodo dia risultati precisi, il processo deve essere puramente coulombiano, pertanto nei calcoli, che coinvolgeranno l'integrazione della sezione d'urto differenziale  $d^2\sigma/d\Omega d\varepsilon_{rel}$ , si integrerà sempre non oltre l'angolo di grazing  $\theta_{gr}$ .

Il programma utilizzato nello svolgimento di questo capitolo permette quindi di calcolare le sezioni d'urto differenziali per processi di breakup conoscendo le probabilità di eccitazione multipolari  $B(E\lambda)$  e impostando un angolo massimo  $\theta_{max}$ , un angolo di grazing  $\theta_{gr}$ . Inoltre permette di calcolare le stesse quantità effettuando una convoluzione con una griglia ad una risoluzione fissata, per simulare la risoluzione non infinita di una apparato sperimentale.

## 5.1 La reazione $^{17}\text{F} + ^{208}\text{Pb} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p} + ^{208}\text{Pb}$

D'ora in poi ci concentreremo sullo studio della reazione  $^{17}\text{F} + ^{208}\text{Pb} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p} + ^{208}\text{Pb}$ . In tale reazione il protone nella shell di valenza del nucleo  $^{17}\text{F}$  subisce l'effetto repulsivo

del campo coulombiano generato dal  $^{208}\text{Pb}$ , e a causa della bassa energia di legame si divide in un protone, non più legato, ed un nucleo  $^{16}\text{O}$ , che può essere eccitato.

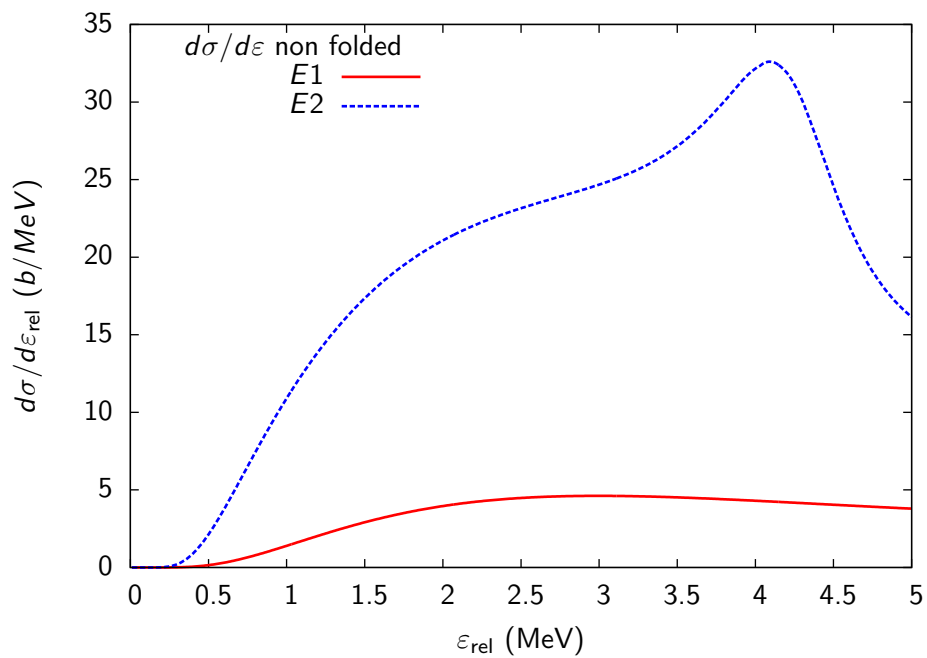
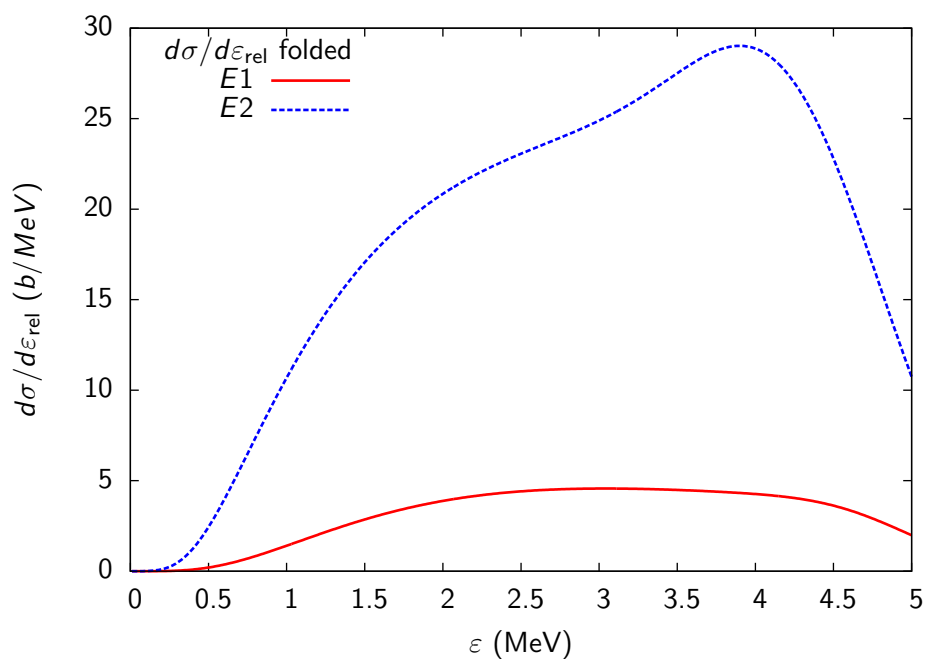
L'energia utilizzata è  $E_{\text{lab}} = 1190$  MeV, quindi circa  $70$  MeV/ $u$ , oltre la soglia di dissociazione  $^{17}\text{F} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p}$ , che abbiamo calcolato essere  $S_p = 0.5727$  MeV. Il valore di  $E_{\text{lab}}$  è stato scelto affinché la reazione avvenga sufficientemente velocemente, altrimenti altre interazione oltre alla repulsione coulombiana potrebbero dare contributi importanti, rendendo il processo più complesso e quindi non necessariamente descrivibile con un approccio semiclassico.

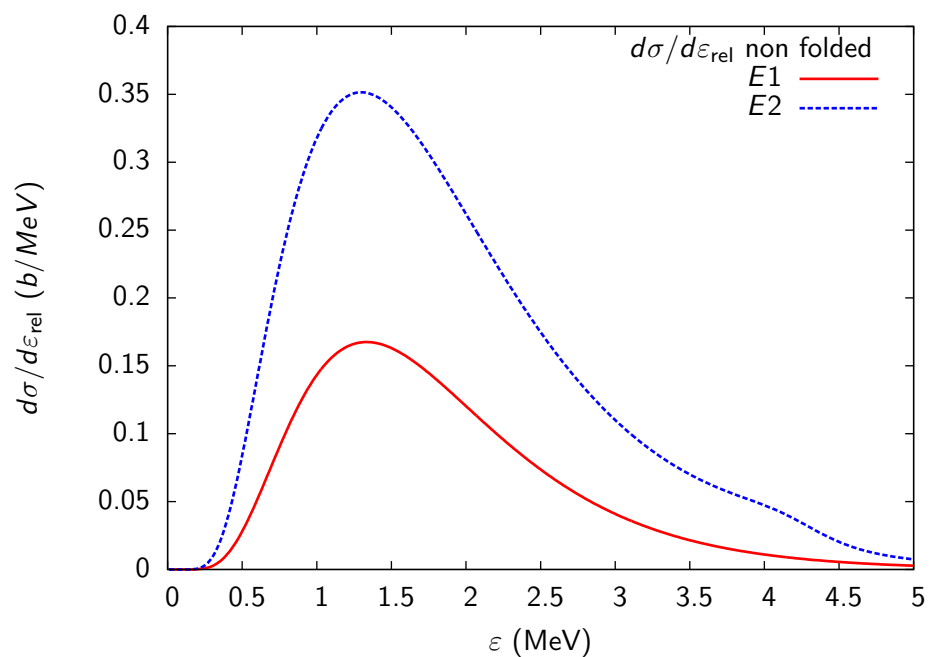
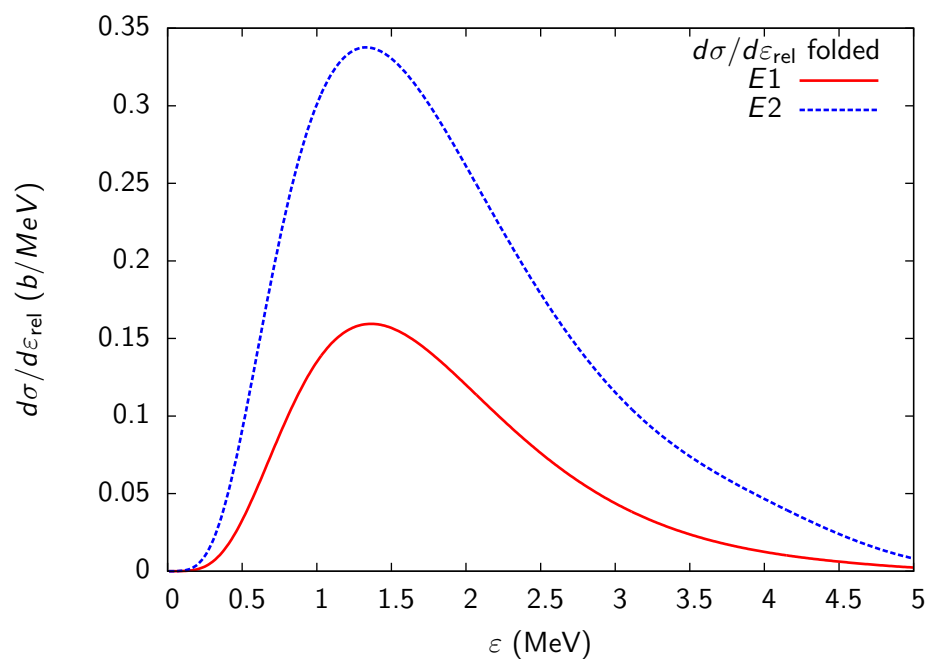
L'angolo di grazing nel sistema di riferimento del centro di massa per il processo  $^{17}\text{F} + ^{208}\text{Pb}$  all'energia per il quale lo stiamo studiando risulta essere  $\theta_{\text{gr}} = 5^\circ$ . Infatti questo è l'angolo di deflessione della traiettoria nella quale la somma dei due raggi atomici dei nuclei coinvolti risulta essere uguale al parametro di impatto.

Nelle figure 5.1 e 5.2 sono mostrate le sezioni d'urto  $d\sigma/d\varepsilon_{\text{rel}}$  da eccitazioni dipolari e quadripolari in funzione dell'energia per  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ , tuttavia il programma eseguirà l'integrazione delle sezioni d'urto differenziali  $d^2\sigma/d\Omega d\varepsilon$  da 0 al minore tra  $\theta_{\text{max}}$  e  $\theta_{\text{gr}}$ , che è  $5^\circ$ , perché per  $\theta > \theta_{\text{gr}}$  i nuclei verranno a contatto e il processo non sarà più puramente coulombiano. Nelle figure 5.3 e 5.4 le stesse sezioni d'urto sono calcolate con  $\theta_{\text{max}} = 1^\circ$ .

In entrambi i casi vi è una netta predominanza delle eccitazioni di quadrupolo rispetto a quelle dipolari, a differenza di quello che ci si aspetterebbe. La probabilità di eccitazione per l'interazione coulombiana infatti dovrebbe decadere molto rapidamente con l'aumentare della multipolarità. Presumiamo che questa anomalia sia dovuta all'incidere delle risonanze degli stati  $0d3/2$  e  $0g9/2$ , che contribuiscono a più dell'80% della probabilità di eccitazione quadripolare.

Poiché i contributi di quadrupolo e dipolo alla sezione d'urto sono dello stesso ordine di grandezza, non sarebbe possibile, da un confronto tra questi calcoli teorici e dei dati sperimentali, poter poter dedurre le singole probabilità di eccitazione di dipolo o quadrupolo, ma solamente la loro somma.


 Figura 5.1:  $d\sigma/d\varepsilon_{\text{rel}}$  dipolare e quadripolare,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ .

 Figura 5.2:  $d\sigma/d\varepsilon_{\text{rel}}$  dipolare e quadripolare convoluta,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ .


 Figura 5.3:  $d\sigma/d\varepsilon_{\text{rel}}$  dipolare e quadripolare,  $\theta_{\text{max}} = 1^\circ$ .

 Figura 5.4:  $d\sigma/d\varepsilon_{\text{rel}}$  dipolare e quadripolare convoluta,  $\theta_{\text{max}} = 1^\circ$ .



## Capitolo 6

# Conclusioni

L'obiettivo di questo lavoro era studiare la trattazione da un punto di vista teorico-computazionale dei sistemi debolmente legati. Abbiamo preso in considerazione il nucleo debolmente legato  $^{17}\text{F}$ , utilizzando come base per descriverne gli autostati le autofunzioni dell'oscillatore armonico, trasformate per poter simulare accuratamente il comportamento asintotico di un sistema a potenziale limitato. Ciò è necessario in particolar modo se si vogliono studiare proprietà di tale nucleo che coinvolgono eccitazioni a stati del continuo, come le eccitazioni multipolari del protone di valenza e le reazioni di breakup.

Abbiamo quindi cercato dei parametri appropriati per la *Local Scale Transformation*, verificando anche che le sole autofunzioni dell'oscillatore armonico non sono consistenti con il comportamento asintotico delle funzioni d'onda del protone di valenza. Quindi abbiamo studiato la risonanza dello stato  $0d3/2$  con il metodo della stabilizzazione e del phase shift, trovando un buon accordo tra i due metodi.

### Overlap nel continuo e barriere di potenziale

Dopo aver determinato dei buoni parametri per le LST, abbiamo calcolato gli overlap tra lo stato fondamentale del nucleo  $^{17}\text{F}$  e gli stati  $0d5/2$ ,  $1s1/2$  e  $0d3/2$  del suo nucleo speculare  $^{17}\text{O}$ . Data la natura di nucleo debolmente legato, quindi facilmente eccitabile a stati non legati, del  $^{17}\text{F}$ , ci aspettavo un contributo del continuo per gli overlap tra questi stati. Tuttavia non abbiamo trovato alcunché che suggerisca un contributo sostanziale del continuo in tali overlap, all'infuori della risonanza stato  $0d3/2$  del nucleo  $^{17}\text{O}$ .

Abbiamo supposto che tale comportamento sia dovuto alle barriere coulombiana e centrifuga, la prima dovuta al fatto che il nucleone debolmente legato è un protone, la seconda dovuta al momento angolare orbitale  $\ell = 2$  del protone nello stato fondamentale. Entrambi questi effetti contribuiscono a confinare la funzione d'onda dello stato fondamentale del nucleo  $^{17}\text{F}$  in una regione spaziale più limitata di quanto potesse suggerire la bassa energia di legame. Nonostante il nucleo  $^{17}\text{F}$  sia debolmente legato, esso si comporta comunque in maniera simile a quella del proprio nucleo speculare  $^{17}\text{O}$  e non come un nucleo halo.

## $B(E\lambda)$ e reazioni di breakup

Il momento angolare  $\ell = 2$  ha effetti importanti anche nel calcolo delle probabilità di eccitazione dipolare e quadripolare  $dB(E1,2)/d\varepsilon$ . In tali eccitazioni infatti influiscono fortemente le risonanze degli stati nel continuo, e abbiamo studiato una di queste, la risonanza dello stato  $0g9/2$ , che contribuisce in larga parte alla probabilità di eccitazione di quadripolo  $B(E2)$ .

Infine abbiamo studiato il caso della reazione di breakup  $^{17}\text{F} + ^{208}\text{Pb} \longrightarrow ^{16}\text{O} + \text{p} + ^{208}\text{Pb}$ , trattandola con l'approccio semiclassico Equivalent Photon Method, che permette di mettere in relazione le le distribuzioni delle probabilità di eccitazione dipolare e quadripolare  $dB(E\lambda)/d\varepsilon$  con le sezioni d'urto differenziali  $d\sigma/d\varepsilon$ . Nel caso di breakup coulombiano ci si aspetta una forte predominanza delle sezioni d'urto dovute ad eccitazioni dipolare, mentre noi abbiamo trovato un contributo maggiore delle eccitazioni di quadrupolo. Pensiamo che questo comportamento sia dovuto alla natura del nucleo studiato, in particolare al momento angolare  $\ell = 2$  che caratterizza il suo stato fondamentale. Esso dà luogo alle risonanze degli stati nel continuo con  $\ell = 2, 4$ , che hanno inciso fortemente nel calcolo delle probabilità di transizione di quadrupolo.

# Bibliografia

- [1] N. Fukuda et al. “Coulomb and nuclear breakup of a halo nucleus  $^{11}\text{Be}$ ”. In: *Phys. Rev. C* **70** 054606 (2004).
- [2] S. Karataglidis, K. Amos e B. G. Giraud. “Local scale transformations and extended matter distributions in nuclei”. In: *Phys. Rev. C* **71** 064601 (2005).
- [3] J. A. Lay, A. M. Moro, J. M. Arias e J. Gómez-Camacho. “Core excitation effects in halo nuclei using a transformed oscillator basis”. In: *AIP Conf. Proc.* **1541**. AIP Publishing LLC, 2013, pp. 152–153.
- [4] J. A. Lay, A. M. Moro, J. M. Arias e J. Gómez-Camacho. “Exploring continuum structures with a pseudo-state basis”. In: *Phys. Rev. C* **82** 024605 (2010).
- [5] J. A. Lay, A. M. Moro, J. M. Arias e J. Gómez-Camacho. “Stabilization method in two-body systems with core excitations”. In: *AIP Conf. Proc.* **1488**. American Institute of Physics, 2012, p. 438.
- [6] F. Pérez-Bernal, I. Martel, J. M. Arias e J. Gómez-Camacho. “Continuum discretization in a basis of transformed harmonic-oscillator states”. In: *Phys. Rev. A* **63** 052111 (2000).
- [7] J.-M. Sparenberg, D. Baye e B. Imanishi. “Coupled-reaction-channel calculations of the  $^{16}\text{O} + ^{17}\text{O}$  and  $^{16}\text{O} + ^{17}\text{F}$  charge-symmetric systems”. In: *Phys. Rev. C* **61** 054610 (2000), p. 3.