



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Tesi di Laurea

Indizi sull’energia oscura dal fondo cosmico di
microonde: l’effetto Sachs-Wolfe integrato

Relatore

Prof. Michele Liguori

Laureanda

Chaima Baztami

Anno Accademico 2021/2022

Lo chiamiamo *spiegazione*, ma è *descrizione*, quel che ci contraddistingue dai gradi più antichi della conoscenza e della scienza. Noi descriviamo meglio, ma spieghiamo tanto poco quanto tutti i nostri predecessori.

- *Friedrich Nietzsche, La Gaia Scienza*

Sommario

Nel presente lavoro di tesi ci proponiamo di esaminare l'effetto Sachs-Wolfe integrato (ISW), una fonte di anisotropia del fondo cosmico di microonde (CMB). L'effetto ISW è dovuto al redshift gravitazionale dei fotoni della CMB ad opera di potenziali gravitazionali che decadono nel tempo per effetto dell'espansione dell'Universo. Un analogo effetto di redshift gravitazionale dovuto a fluttuazioni primordiali della densità di materia oscura, detto effetto Sachs-Wolfe ordinario (SW), contribuisce alle anisotropie primarie della CMB. Il redshift gravitazionale consiste nella perdita di energia da parte di fotoni che risalgono una buca di potenziale e, come molti altri fenomeni, fu predetto da Albert Einstein. Un fotone che cade in una buca di potenziale invece acquista energia e sperimenta un blueshift. Nel 1967, due anni dopo le verifiche sperimentali di questo effetto da parte di R. V. Pound, G. A. Rebka Jr. e J. L. Snider ad Harvard, R. K. Sachs e A. M. Wolfe mostrarono che lo stesso effetto produce fluttuazioni nella temperatura dei fotoni del fondo cosmico di microonde. Ripercorreremo la derivazione degli effetti SW e ISW a partire da perturbazioni scalari della metrica di Friedmann-Robertson-Walker e analizzeremo il processo di misura dell'effetto ISW tramite la cross-correlation con la struttura su larga scala. Infine, tratteremo del potenziale che l'effetto ISW ha di fornire informazioni sull'energia oscura alla luce della sua dipendenza dall'espansione dell'Universo.

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Il fondo cosmico di microonde	2
1.2	Un universo in espansione	2
1.3	La costante cosmologica	4
1.4	Anisotropie della CMB	6
1.5	Spettro di potenza	8
2	Teoria dell'effetto Sachs-Wolfe integrato	11
2.1	Perturbazioni scalari della metrica	11
2.2	Oscillazioni barioniche acustiche	14
2.2.1	Fluidodinamica del plasma primordiale	15
2.3	Effetto Sachs-Wolfe ordinario	19
2.4	L'effetto Sachs-Wolfe integrato	20
2.4.1	Spettro di potenza dell'effetto ISW	20
2.4.2	Cross-correlation	22
3	L'effetto ISW e l'energia oscura	26
3.1	L'effetto ISW e il valore di Λ	26
3.2	Equazione di stato dell'energia oscura	27
4	Conclusione	31
	Riferimenti bibliografici	32

1 Introduzione

1.1 Il fondo cosmico di microonde

L'Universo primordiale conteneva un plasma estremamente caldo e denso in cui fotoni e barioni, ovvero i neutroni e i protoni presenti nei nuclei spogli e gli elettroni liberi, interagivano frequentemente. Con il progredire dell'espansione dell'Universo, la temperatura e la densità del plasma diminuirono progressivamente e i processi di interazione tra barioni e fotoni persero efficacia. Conseguentemente, la componente barionica si disaccoppiò da quella fotonica e divenne così possibile per gli elettroni legarsi ai nuclei e formare i primi atomi neutri di idrogeno. Questa fase, nota come **ricombinazione**, si colloca ad un redshift z di circa 1100, che corrisponde ad una temperatura del plasma primordiale di 3000 K . La ricombinazione lascia l'Universo neutro (fino alla comparsa delle prime sorgenti cosmiche) e i fotoni, che sono ora disaccoppiati dalla materia barionica, possono propagarsi attraverso l'Universo. Ogni osservatore quindi si vede raggiunto in tutte le direzioni da fotoni che si propagano da una superficie sferica infinitamente sottile, detta **superficie di ultimo scattering** (Last Scattering Surface, LSS), centrata sull'osservatore e il cui raggio è pari a $6000 h^{-1} Mpc$ ¹, la distanza che un fotone a $z = 1100$ deve percorrere per raggiungerci oggi, a $z = 0$. Tali fotoni costituiscono il **fondo cosmico di microonde** (Cosmic Microwave Background, CMB), radiazione che oggi mostra uno spettro di corpo nero quasi perfettamente isotropo ad una temperatura di circa 2.725 K . La forma spettrale della CMB riflette l'elevato tasso di interazione tra materia e radiazione nel plasma primordiale. La diminuzione della temperatura, dai circa 3000 K della ricombinazione agli attuali 2.725 K , è dovuta all'espansione dell'Universo.

1.2 Un universo in espansione

Le prime evidenze osservative dell'espansione dell'Universo risalgono al 1929, quando Edwin Hubble mostrò che le galassie appaiono allontanarsi da noi a velocità tanto maggiori quanto più sono distanti. Nel 1998, lo studio del diagramma di Hubble delle Supernovae IA aggiunse al quadro di un Universo in espansione un elemento inatteso. Le Supernovae IA sono violente esplosioni di nane bianche che si trovano in sistemi binari e che per accrescimento di materiale dalla stella compagna raggiungono la massa di Chandrasekhar ($1.44 M_{\odot}$). Superato questo limite, la nana bianca, che è costituita da gas degeneri, non è più gravitazionalmente stabile e collassa. La natura degeneri del gas è tale per cui l'aumento della pressione interna durante il collasso non provoca l'espansione della stella, reazione che la farebbe raffreddare, riportandola in equilibrio. Invece, il collasso procede fino a quando la densità raggiunge valori così elevati da innescare dei bruciamenti nucleari che terminano nell'esplosione della nana bianca. Questo tipo di sorgenti si presta ad essere utilizzato come indicatore di distanza perché presenta una curva di luce caratteristica e molto regolare. Infatti, la dinamica del processo fisico che porta all'esplosione coinvolge sempre la stessa massa di gas degeneri; la quantità di energia liberata quindi è la stessa. Allora, dal momento che la luminosità intrinseca al picco della curva di luce è nota e uguale per tutte le sorgenti, il confronto con la luminosità apparente restituisce subito la distanza della Supernova. Inoltre, queste sorgenti sono molto

¹ $h = H_0 / (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$

brillanti e quindi identificabili anche a grandi distanze. Per le loro proprietà, si riconobbe nelle Supernovae IA la classe di sorgenti più indicata per ricostruire la storia dell'espansione dell'Universo utilizzando il **diagramma di Hubble**. Quest'ultimo confronta il redshift spettroscopico delle Supernovae osservate con la loro magnitudine apparente. I dati raccolti dai gruppi *Supernova Cosmology Project* e *High-z Supernova Search Team* rivelarono magnitudini per le Supernovae ad alto redshift più deboli persino di quanto previsto per un universo privo di materia. Questo sembrava suggerire un universo in espansione accelerata, rovesciando un'immagine che appariva ben più intuitiva, quella di un'espansione progressivamente rallentata dalla forza di gravità. Era quindi necessario ammettere una componente, dominante rispetto alla materia gravitante, in grado di esercitare una pressione negativa e alimentare l'espansione accelerata dell'Universo. Per caratterizzare gli effetti dell'espansione si introduce il **fattore di scala** $a(t)$ che misura di quanto l'Universo si è espanso al tempo t . Al tempo attuale, che indichiamo con t_0 , il fattore di scala vale 1, mentre in epoche passate $a(t) < 1$. La necessità di introdurre una pressione negativa si legge dall'equazione che descrive (insieme all'equazione di Friedmann e all'equazione dei fluidi) l'evoluzione del fattore di scala, detta **equazione dell'accelerazione**:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (1)$$

La derivata seconda del fattore di scala, ovvero l'accelerazione dell'espansione, è positiva per $p < -\frac{1}{3}\rho$, dove p e ρ indicano rispettivamente la pressione e la densità. Per descrivere questa componente repulsiva venne reintrodotta la costante cosmologica che Einstein aveva inizialmente aggiunto alle sue equazioni di campo per ricavarne un modello di universo statico. La costante cosmologica è descritta nel paragrafo successivo.

L'esatta dipendenza di $a(t)$ dal tempo coordinato dipende dal contenuto di energia dell'Universo. In particolare, $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$ dove $w = p/\rho$ è il rapporto tra pressione e densità. $a(t) \propto t^{1/2}$ in un Universo dominato dalla radiazione ($w = 1/3$), $a(t) \propto t^{2/3}$ in un Universo dominato dalla materia ($w = 0$), mentre nell'era cosmica presente $a(t)$ cresce esponenzialmente nel tempo: $a(t) \propto \exp(\Lambda t/3)$, dove Λ è la costante cosmologica. Un'altra quantità fondamentale per descrivere la dinamica dell'Universo è il **parametro di Hubble** $H(t) = \frac{da}{dt}/a$ che misura il tasso di espansione.

Il contributo di ciascuna componente al contenuto di massa-energia dell'Universo è espresso in termini del suo **parametro di densità**, ovvero il rapporto tra la densità della componente considerata e la **densità critica**. Quest'ultima è il particolare valore della densità totale necessario a rendere l'Universo piatto ed è data da:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (2)$$

La dipendenza di ρ_c dal tempo è introdotta dal parametro di Hubble. Riportiamo di seguito i valori attuali della densità critica, del parametro di Hubble, del parametro di densità della materia Ω_m e del parametro di densità della costante cosmologica Ω_Λ :

1. $\rho_c(t_0) = 1.88 h^2 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$
2. $H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

$$3. \Omega_m = \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c(t_0)} = 0.3111 \pm 0.0056$$

$$4. \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda(t_0)}{\rho_c(t_0)} = 0.6889 \pm 0.0056$$

La densità di energia della costante cosmologica è costante nel tempo, quella della materia diminuisce con il cubo del fattore di scala, mentre la densità di energia della radiazione è proporzionale a a^{-4} . Si noti che nel caso della componente relativistica l'effetto dell'espansione è duplice: i volumi aumentano di un fattore a^3 e le lunghezze d'onda di un fattore a , degradando l'energia dei fotoni. Oggi, la densità di energia della radiazione è trascurabile e la somma $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ è molto prossima ad 1, suggerendo una densità dell'Universo vicina alla densità critica. Per quantificare quanto l'Universo sia lontano da una geometria piatta si introduce il parametro di densità della curvatura $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$; il suo valore attuale è 0.0007 ± 0.0037 .

1.3 La costante cosmologica

Oggi, la dinamica dell'Universo è dominata dall'energia oscura. Si stima che questa componente ammonti a circa il 68% del contenuto di massa-energia dell'Universo. Il restante 32% è costituito per il 28% da materia oscura e per il 4% da barioni (l'1% condensato in stelle, il 3% diffuso). Nonostante la sua abbondanza rispetto alle altre componenti, l'energia oscura resta ad oggi incompresa. Vi sono diversi modelli che si propongono di spiegare l'espansione accelerata dell'Universo, anche superando la relatività generale per includere gli effetti dell'energia oscura in una nuova teoria della gravitazione, senza il bisogno di invocare l'esistenza di questa misteriosa componente. Una delle prime interpretazioni dell'energia oscura fu quella di una **costante cosmologica**, indicata con la lettera greca Λ , che corrisponde ad una energia del vuoto. Λ fu introdotta da Einstein per recuperare un modello di universo statico dalle sue equazioni di campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3)$$

$R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, R lo scalare di Ricci, $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico e $T_{\mu\nu}$ rappresenta il tensore energia-impulso:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (4)$$

dove p è la pressione, ρ la densità di materia e il quadrivettore u_μ è la quadrivelocità dell'osservatore. Gli indici μ e ν possono assumere i valori 0, corrispondente alla coordinata temporale, 1, 2 e 3 per le tre direzioni spaziali. Tuttavia, la 3 non contiene 16 equazioni, una per ogni valore di μ e ν , ma solo 6. Infatti, 6 gradi di libertà sono eliminati dalla simmetria dei tensori $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$, gli altri 4 dall'osservazione che se un tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è soluzione delle equazioni di Einstein in un sistema di coordinate x^μ , continuerà ad esserlo in qualsiasi altro sistema x'^μ . Vi sono quindi 4 gradi di libertà non fisici, corrispondenti alle quattro funzioni $x'^\mu(x^\mu)$ che descrivono il cambio di coordinate. Queste equazioni legano la geometria dello spazio-tempo, descritta dai termini a sinistra dell'uguale, alla presenza di un campo gravitazionale, le cui sorgenti sono contenute nel tensore energia-impulso. L'effetto geometrico della gravità è quello di

produrre curvatura dello spazio-tempo. $R_{\mu\nu}$ e R si ottengono per contrazione degli indici dal tensore di curvatura $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$, detto anche tensore di Riemann:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (5)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda \quad (6)$$

$$R = R_\mu^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (7)$$

Il termine $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ è spesso indicato in modo più compatto con $G_{\mu\nu}$, detto tensore di Einstein.

Le equazioni di Einstein nella forma 3 applicate alla cosmologia prevedevano un universo in contrazione o in espansione. Le equazioni con costante cosmologica invece sono:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (8)$$

La costante cosmologica rappresenta una componente che esercita una pressione negativa in grado di opporsi alla gravità della materia. Nell'interpretazione di Einstein, il bilanciamento tra la forza repulsiva associata alla costante cosmologica e la forza di gravità avrebbe garantito un Universo statico, che né si contrae, né si espande. $T_{\mu\nu}$ include tutte le sorgenti del campo gravitazionale, quindi nel vuoto il membro a destra dell'uguale nella 8 è nullo. Se portiamo a secondo membro il termine proporzionale a Λ si ottiene:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (9)$$

dove si vede che $\Lambda g_{\mu\nu}$ è assimilabile ad un tensore energia-impulso del vuoto. Trattandosi di una proprietà intrinseca dello spazio-tempo, questa energia non viene diluita dall'espansione dell'Universo e la sua densità si mantiene costante. Questo fa sì che l'energia oscura si imponga nel tempo sulle altre componenti del fluido cosmico (materia gravitante e componente relativistica), le cui densità invece diminuiscono progressivamente per effetto dell'espansione.

Il grafico nella figura 1 mostra vincoli sui parametri di densità della materia Ω_m e della costante cosmologica Ω_Λ alla luce di dati sul fondo cosmico di microonde, le oscillazioni barioniche acustiche, che approfondiremo nel seguito, e le Supernovae IA. Le regioni chiare corrispondono ad un intervallo di confidenza del 68.3%, mentre il colore scuro indica un livello di confidenza del 95.4%. La combinazione dei dati sulle Supernovae IA e delle misure della CMB favorisce chiaramente un modello di universo piatto con $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ e $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

Questa interpretazione della costante cosmologica come energia del vuoto è in forte disaccordo con la teoria dei campi. La quantità di energia sufficiente a rendere conto dei dati astronomici sull'espansione è estremamente più piccola della densità di energia del vuoto predetta dal modello standard della fisica delle particelle. D'altra parte, un valore così grande di Λ risulterebbe in una espansione talmente rapida da impedire la formazione delle strutture cosmiche. Questa inconsistenza va sotto il nome di *cosmological constant problem*.

Per caratterizzare l'energia oscura è comune utilizzare il parametro $w = \frac{p}{\rho}$, dove p è la pressione esercitata dall'energia oscura e ρ la sua densità. Se l'energia

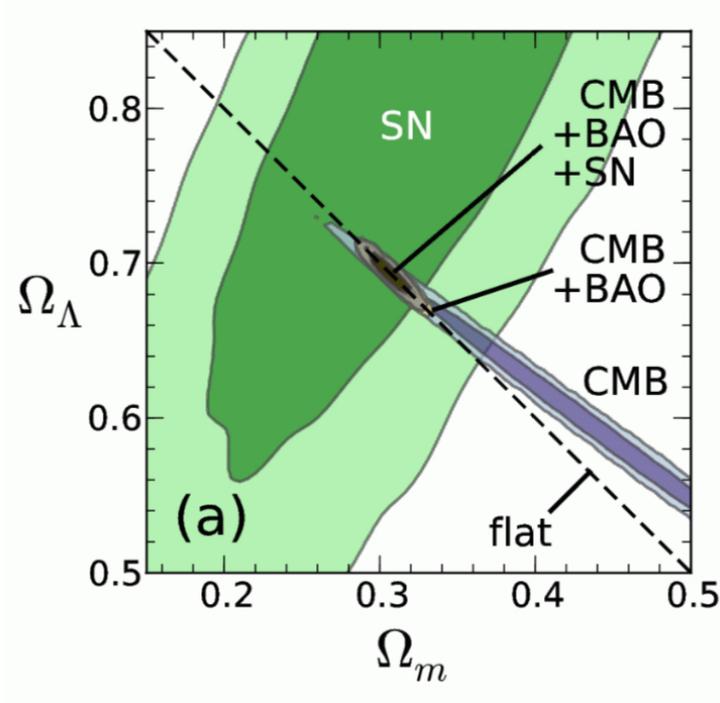


Figura 1: Vincoli sui parametri di densità Ω_m e Ω_Λ da dati su CMB, oscillazioni barioniche acustiche e Supernovae IA (M. J. Mortonson et al, 2013).

oscura è davvero una costante cosmologica, dovrebbe valere $w = -1$. Una alternativa alla costante cosmologica è la possibilità che l'espansione dell'Universo sia dovuta ad una componente dinamica che evolve lentamente, detta *quintessenza*. Questa è rappresentata da un campo scalare reale ϕ la cui Lagrangiana è data da:

$$\mathcal{L}_\phi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (10)$$

La scelta del potenziale $V(\phi)$ è arbitraria. La densità e la pressione associate al campo ϕ sono rispettivamente:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (11)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (12)$$

Il parametro w per il campo scalare è dato dal rapporto p_ϕ/ρ_ϕ e la sua evoluzione dipende dalla scelta del potenziale $V(\phi)$ e dalle condizioni iniziali $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$. Dalle equazioni 11 e 12 si nota che nel limite in cui il termine cinetico $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ è molto minore di $|V(\phi)|$, $p_\phi \approx -\rho_\phi$ e il campo scalare riproduce una costante cosmologica.

1.4 Anisotropie della CMB

Sebbene la CMB sia estremamente uniforme, sono state misurate piccole deviazioni dalla perfetta isotropia dell'ordine di $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$, dove ΔT è la differenza

tra la temperatura misurata in una data direzione e la temperatura media T di $2.725 K$. Tali variazioni hanno una distribuzione gaussiana con valor medio nullo e riflettono le disomogeneità della densità di materia nell'Universo primordiale. L'accrescimento di materia da parte delle regioni sovradense ha poi amplificato queste disomogeneità, fino a formare le strutture cosmiche che osserviamo oggi nel nostro Universo. Le disomogeneità nella densità di materia sono il risultato di fluttuazioni quantistiche, pertanto hanno una natura stocastica e questo si applica anche alle fluttuazioni nella temperatura della CMB. In particolare, la CMB è un insieme di variabili stocastiche perché per ogni direzione in cielo la fluttuazione che potremmo misurare è casuale e non può essere predetta. La CMB è quindi un campo gaussiano bidimensionale sulla sfera celeste che associa ad ogni direzione in cielo una variabile casuale data dalla temperatura misurata in quella direzione.

La CMB, come abbiamo già osservato, non è perfettamente isotropa, ma le sue fluttuazioni costituiscono un campo stocastico **stazionario** e **isotropo**. Se identifichiamo direzioni di osservazione in cielo con dei versori, la stazionarietà implica che la covarianza tra la temperatura misurata in due direzioni diverse dipende solo dal vettore differenza dei versori che corrispondono alle direzioni considerate. L'isotropia aggiunge a questa proprietà la richiesta che la covarianza dipenda solo dalla norma del vettore differenza, e non dalla sua orientazione. Questo discende dal **principio cosmologico**, secondo il quale l'Universo, su scale sufficientemente vaste, è omogeneo e isotropo. Quanto detto per la CMB si estende alle fluttuazioni di qualunque quantità potremmo voler studiare per indagare l'Universo su larga scala, ad esempio la densità di materia o i conteggi di sorgenti. Per ognuna di queste quantità la distribuzione che osserviamo oggi e il carattere stocastico delle fluttuazioni recano traccia dei processi quantistici da cui si è sviluppata la ricchezza di strutture del nostro Universo. Pertanto, ciascuna di queste quantità deve essere trattata come un campo stocastico gaussiano che, in virtù del principio cosmologico, sarà stazionario e isotropo. Per costruire una descrizione matematica delle anisotropie della CMB è comune considerarne l'espansione in **armoniche sferiche** $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (13)$$

Le armoniche sferiche hanno la seguente forma:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (14)$$

dove il termine sotto radice è un fattore di normalizzazione e i $P_l^m(\cos\theta)$ sono polinomi associati di Legendre. Quella delle armoniche sferiche è una base particolarmente adatta per la geometria del problema, dal momento che il campo delle fluttuazioni della CMB è definito sulla sfera celeste. In questo modo, le variabili stocastiche sono rappresentate dai coefficienti dell'espansione a_{lm} . Il numero quantico orbitale l è associato alla frequenza angolare delle fluttuazioni e in genere una buona stima per la scala angolare delle oscillazioni è $\theta = \pi/l$. Al crescere di l quindi la scala angolare si riduce e la frequenza delle oscillazioni aumenta. Il numero quantico magnetico m invece è legato all'orientazione spaziale delle oscillazioni. Per ogni l , il numero quantico m può assumere $2l + 1$ valori, $-l, -l + 1, \dots, l - 1, l$.

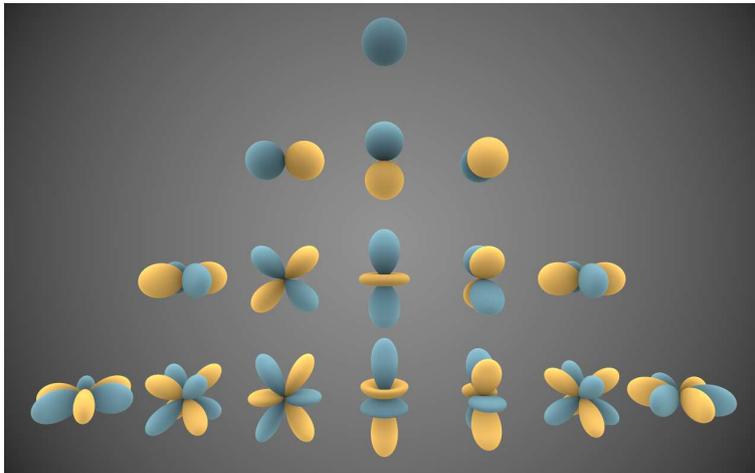


Figura 2: Parti reali delle armoniche sferiche per $l = 0, 1, 2, 3$ (Fonte [1]).

Nella figura 2 sono mostrate le parti reali delle armoniche sferiche per $l = 0, 1, 2$, e 3 con le possibili orientazioni corrispondenti ai diversi valori di m . Configurazioni intermedie si possono ottenere da combinazioni lineari di quelle in figura. Le regioni blu corrispondono a valori positivi dell'armonica sferica, le regioni gialle a valori negativi.

Si noti che nella 13 non sono inclusi il monopoio $l = 0$ e il dipolo $l = 1$. Infatti, il termine di monopoio corrisponde alla temperatura media di $2.725 K$ che viene sottratta per considerare solo le fluttuazioni attorno a questo valore. Il termine di dipolo invece rappresenta l'effetto del moto relativo tra noi e la CMB che produce per effetto Doppler una regione calda, corrispondente a fotoni in avvicinamento, e una regione fredda a 180° . Trattandosi di un effetto cinetico, il dipolo sarebbe presente anche se la CMB fosse perfettamente uniforme ed è comunque molto maggiore del dipolo primordiale predetto teoricamente.

1.5 Spettro di potenza

Per descrivere matematicamente le fluttuazioni nella densità di materia è utile considerarne la **trasformata di Fourier**. Il vantaggio del passare allo spazio di Fourier è legato alle proprietà statistiche del campo di fluttuazioni della densità. Infatti, se un campo stocastico è stazionario e isotropo la matrice di covarianza nello spazio di Fourier è diagonale e il campo risulta così interamente caratterizzato dalla **varianza** delle variabili. Indicando con \bar{n} la densità media di materia, possiamo esprimere la fluttuazione nella densità alla posizione \vec{x} come:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{n(\vec{x}) - \bar{n}}{\bar{n}} \quad (15)$$

La trasformata di Fourier non è altro che un'espansione in serie di onde piane di diversa ampiezza. Pertanto, la perturbazione del campo di densità nello spazio di Fourier è data da $\tilde{\delta}(\vec{k})$ dove \vec{k} è il vettore d'onda:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \int d^3x \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (16)$$

Il principale strumento per caratterizzare statisticamente sia la CMB che la **Struttura su Larga Scala** (Large Scale Structure, LSS), ovvero la distribuzione di galassie ed ammassi di galassie su larga scala, è la **funzione di correlazione** (*two-point function*). Date due variabili stocastiche $X(\vec{t})$ e $Y(\vec{s})$, la loro funzione di correlazione è definita come la covarianza tra le due variabili normalizzata al prodotto delle loro deviazioni standard:

$$\rho(\vec{t}, \vec{s}) = \frac{\langle (X(\vec{t}) - \langle X(\vec{t}) \rangle)(Y(\vec{s}) - \langle Y(\vec{s}) \rangle) \rangle}{\sqrt{C(\vec{t}, \vec{t})C(\vec{s}, \vec{s})}} \quad (17)$$

Le parentesi angolate indicano il valore medio. Ad esempio, nel caso della CMB le variabili $X(\vec{t})$ e $Y(\vec{s})$ corrispondono alla temperatura nelle direzioni \vec{t} e \vec{s} . La trasformata di Fourier della funzione di correlazione è lo **spettro di potenza** $P(k)$, definito tramite:

$$\langle \tilde{\delta}(\vec{k}) \tilde{\delta}(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta^D(\vec{k} - \vec{k}') \quad (18)$$

$\delta^D(\vec{k} - \vec{k}')$ è la delta di Dirac ed è diversa da zero solo per $\vec{k} = \vec{k}'$, quindi non c'è correlazione tra numeri d'onda diversi, in accordo con le proprietà di stazionarietà e isotropia. Per le stesse proprietà $P(k)$ non dipende dall'orientazione del vettore \vec{k} , ma solo dalla sua norma k . Lo spettro di potenza fornisce informazioni sulla varianza Δ^2 della distribuzione considerata; questa infatti è data da: $\Delta^2 \equiv k^3 P(k) / 2\pi^2$.

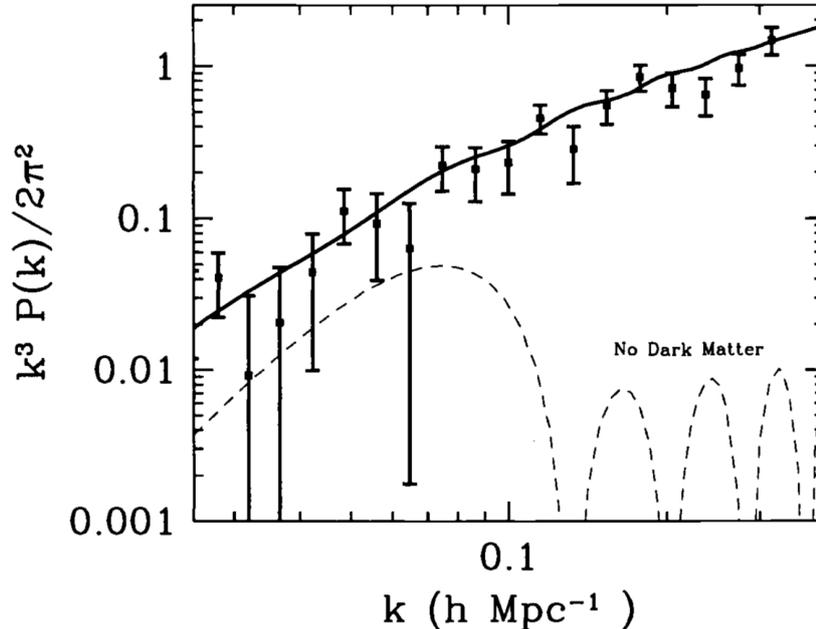


Figura 3: Varianza in funzione del numero d'onda k per la distribuzione di galassie misurata dalla survey PSCz (Hamilton e Tegmark, 2001).

Ad esempio, il grafico 3 mostra la varianza in funzione del numero d'onda k per la distribuzione di galassie misurata dalla survey PSCz (*Saunders et al., 2000*).

k è associato alla **frequenza spaziale** delle oscillazioni in totale analogia con il numero quantico orbitale l per la frequenza angolare delle fluttuazioni della CMB sulla sfera celeste. Come si vede in figura, per piccoli valori di k , corrispondenti a grandi scale, la varianza è minore di 1 e la distribuzione di galassie è piuttosto uniforme. Il tratto solido raffigurato corrisponde all'andamento della varianza predetto da un modello cosmologico che contiene materia oscura, una costante cosmologica e che prevede una fase di espansione dell'Universo estremamente rapida, detta *inflazione*, circa 10^{-34} secondi dopo il Big Bang. La linea tratteggiata invece corrisponde ad un universo che contiene solo materia barionica ed è fortemente inconsistente con i dati, specialmente alle piccole scale.

Per la CMB, che è un campo stocastico bidimensionale sulla sfera celeste, la trasformata di Fourier è sostituita da una espansione in armoniche sferiche. Ricordando che l'espansione in multipoli è data dalla 13, lo spettro di potenza C_l è definito tramite la sua relazione con la varianza di ciascun multipolo, in analogia con la 18:

$$\langle a_{l_1 m_1}^* a_{l_2 m_2} \rangle = C_{l_1} \delta_{l_1}^{l_2} \delta_{m_1}^{m_2} \quad (19)$$

Le delta di Kronecker $\delta_{l_1}^{l_2}$ e $\delta_{m_1}^{m_2}$ impongono $l_1 = l_2$ e $m_1 = m_2$, ovvero la covarianza tra multipoli con valori diversi di l o di m è nulla. In particolare, C_l è detto **spettro di potenza angolare** e dipende solo dal numero quantico l per le stesse proprietà considerate nell'osservare che $P(k)$ dipende solo dalla norma del vettore d'onda. C_l misura il contrasto tra regioni calde e fredde della CMB sulla scala angolare corrispondente ad l ; maggiore è lo spettro di potenza angolare, maggiore è il contrasto tra regioni calde e fredde. Come già osservato, le fluttuazioni nella temperatura della CMB sono casuali; se le potessimo confrontare con una diversa realizzazione dell'Universo troveremmo fluttuazioni in una data direzione diverse rispetto a quanto osserviamo oggi, ma con le stesse proprietà statistiche. Disponendo di un solo Universo, per simulare una media su diverse iterazioni dei processi che hanno prodotto le anisotropie primarie, C_l viene stimato calcolando la media sui $2l + 1$ valori che m può assumere per ogni l , ovvero:

$$C_l = \frac{1}{2l + 1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2. \quad (20)$$

Per piccoli valori di l l'incertezza su C_l è grande e questo pone un limite fondamentale alla precisione con cui può essere determinato lo spettro di potenza angolare, limite che viene chiamato *varianza cosmica*.

2 Teoria dell'effetto Sachs-Wolfe integrato

2.1 Perturbazioni scalari della metrica

La metrica più generale compatibile con il principio cosmologico è la **metrica di Friedmann-Robertson-Walker** (FRW), il cui elemento di linea in coordinate sferiche è dato da:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right] \quad (21)$$

k è detto parametro di curvatura e il suo valore dipende dalla geometria dell'Universo. In particolare, k è negativo in un modello di universo aperto (geometria iperbolica), positivo in un Universo chiuso (geometria sferica) e nullo in un modello piatto (geometria euclidea). Per la nostra analisi assumeremo un Universo imperturbato piatto, ovvero $k = 0$. In coordinate cartesiane la metrica di FRW per un universo piatto assume la forma:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}$$

L'elemento di linea può essere espresso in una notazione più compatta nel seguente modo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (22)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico di Friedmann-Robertson-Walker, $a(\tau)$ è il fattore di scala e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ è il **tensore metrico trasformato**. Ciascun indice ripetuto nella 22 sottintende una somma. Come si legge dalla 22, la relazione tra i due tensori metrici è un riscaldamento di $a^2(\tau)$. τ rappresenta il **tempo conforme**, legato al tempo coordinato t da:

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} = \frac{da}{a} \frac{1}{H} \frac{1}{a} \quad (23)$$

Introduciamo una perturbazione della metrica, operando in approssimazione di **campo debole**. In questo regime di piccole perturbazioni la metrica può essere scritta come:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu} \quad (24)$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è l'usuale tensore metrico di Minkowski con la segnatura $\text{diag}(-, +, +, +)$ e $\tilde{h}_{\mu\nu} \ll 1$.

La forma più generale per una perturbazione della metrica al primo ordine è data da:

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ -(1 + 2A)d\tau^2 - B_i d\tau dx^i + [(1 + 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \} \quad (25)$$

con A , B , D e E funzioni arbitrarie. Dall'equazione 25 si ricava che una generica perturbazione conta sia contributi scalari (A e D), che contributi vettoriali (B_i) e tensoriali (E_{ij}). Inoltre, in relatività generale si è liberi di adottare qualsiasi sistema di coordinate per descrivere lo spazio-tempo, proprietà che viene

chiamata *covarianza generale*. Ne segue che la rappresentazione di una perturbazione della metrica non è unica, da cui la libertà di scegliere le funzioni A, B, D ed E nella 25. Per i nostri scopi considereremo solo perturbazioni scalari e adotteremo il **gauge Newtoniano conforme** in cui le funzioni A e D assumono rispettivamente il significato di **potenziale gravitazionale Newtoniano** Ψ e di **perturbazione della curvatura** Φ , ottenendo:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (26)$$

Trascurando il moto di neutrini massivi attraverso il plasma primordiale, possiamo assumere l'assenza di termini di tensione anisotropi e in questo caso vale $\Psi = \Phi$.

Dalla relatività generale, sappiamo che particelle imperturbate si muovono lungo **geodetiche** $x^\mu(s)$, soluzione dell'equazione:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (27)$$

I $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ sono detti **simboli di connessione di Levi-Civita** e dipendono dalle componenti della metrica secondo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\delta\alpha}(\partial_\nu g_{\delta\mu} + \partial_\mu g_{\nu\delta} - \partial_\delta g_{\mu\nu}) \quad (28)$$

L'equazione della geodetica si riduce alla nozione di linea retta, $d^2 x^\mu/ds^2 = 0$, se i simboli di connessione sono nulli. Questo si può sempre realizzare in un dato punto, ma solo in uno spazio piatto esiste un sistema di coordinate globale, dette **coordinate piatte**, rispetto al quale i simboli di connessione sono nulli. Il parametro s che corre lungo la geodetica è detto **parametro affine** e non è unico. Infatti, se s è parametro affine, anche $u = as + b$, con a e b costanti, lo è. Per applicare l'equazione della geodetica al moto dei fotoni nella metrica trasformata $\tilde{g}_{\mu\nu}$, introduciamo il parametro affine λ legato a τ da $d\tau = a^2 d\lambda$. Per una particella massiva la scelta più naturale per il parametro affine è il tempo proprio; in questo modo, il quadrivettore $\frac{dx^\mu}{ds}$ coincide con la quadrivelocità della particella. Tuttavia, ai fotoni non può essere associata una quadrivelocità, trattandosi di particelle prive di massa per le quali il tempo proprio non è definito; è comunque possibile associargli un quadrimomento $\tilde{p}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Quindi, l'equazione della geodetica per un fotone in termini del quadrimomento \tilde{p}^μ nella metrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ diventa:

$$\frac{d\tilde{p}^\alpha}{d\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu = 0 \quad (29)$$

Il quadrimomento è legato al quadrivettore d'onda \tilde{k}^μ da $\tilde{p}^\mu = \hbar\tilde{k}^\mu$. Pertanto, se poniamo per agevolezza $c = \hbar = 1$, i due quadrivettori coincidono e possiamo proseguire la nostra analisi considerando \tilde{k}^μ .

Per piccole perturbazioni della geodetica è possibile scrivere $\tilde{k}^\mu = \bar{k}^\mu + \delta\tilde{k}^\mu$, dove \bar{k}^μ è la soluzione della 29 nel caso di una geodetica imperturbata. Sostituendo questa espressione per \tilde{k}^μ nella 29 e tenendo solo termini al primo ordine in $\delta\tilde{k}^\mu$ si ottiene:

$$\frac{d\delta\tilde{k}^\alpha}{d\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \bar{k}^\mu \bar{k}^\nu + 2\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \bar{k}^\mu \delta\tilde{k}^\nu = 0 \quad (30)$$

Per ricavare l'effetto della perturbazione sulla temperatura dei fotoni ci occorre la componente temporale di $\tilde{\delta k}^\alpha$. I simboli di connessione con indice alto $\alpha = 0$ calcolati secondo la 28 sono dati da:

$$\tilde{\Gamma}_{00}^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \quad (31)$$

$$\tilde{\Gamma}_{0i}^0 = \partial_i \Psi \quad (32)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \delta_{ij} \quad (33)$$

La componente temporale della perturbazione si ottiene integrando la 30:

$$\frac{\delta \tilde{k}^0}{a^2} = \frac{\delta \tilde{k}^0}{a^2} \Big|_{\tau_*} + 2[\Psi(\tau_*) - \Psi(\tau_0)] + 2 \int_{\tau_0}^{\tau_*} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} d\tau \quad (34)$$

τ_* e τ_0 sono gli istanti di tempo conforme corrispondenti rispettivamente alla ricombinazione e al tempo cosmico attuale. Un osservatore non comovente con il fluido cosmico, quindi in moto rispetto alla CMB, misura un'energia fotonica pari al prodotto scalare tra la sua quadrivelocità e il quadrimomento dei fotoni:

$$E = -g_{\mu\nu} u^\mu k^\nu \quad (35)$$

$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ è il quadrivettore d'onda nella metrica $g_{\mu\nu}$ e dalla relazione tra i parametri affini λ e τ segue che $\tilde{k}^\mu = a^2(\tau)k^\mu$. Il rapporto tra le energie fotoniche misurate da osservatori a τ_* e τ_0 fornisce il redshift z :

$$1 + z = \frac{E(\tau_*)}{E(\tau_0)} = \frac{k^\mu u_\mu|_{\tau_*}}{k^\nu u_\nu|_{\tau_0}} \quad (36)$$

Se ora ricordiamo che la temperatura diminuisce all'aumentare del redshift z secondo $T(z) = T_*/(1+z)$, la 34 può essere convertita in una espressione per la fluttuazione della temperatura misurata da un osservatore al tempo τ_0 :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta T}{T} \Big|_{\tau_*} - \Psi(\tau_0) + \Psi(\tau_*) + [u_\mu k^\mu]_{\tau_0}^{\tau_*} + 2 \int_{\tau_0}^{\tau_*} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} d\tau \quad (37)$$

Il primo addendo nella 37 contiene la fluttuazione intrinseca della temperatura dei fotoni alla superficie di ultimo scattering. Il secondo addendo rappresenta il redshift prodotto dal nostro stesso potenziale gravitazionale e non è osservabile. Il terzo termine invece tiene conto delle fluttuazioni del potenziale gravitazionale locale della materia oscura che hanno prodotto un effetto di redshift sui fotoni alla ricombinazione. Questo contributo è noto come **effetto Sachs-Wolfe ordinario** e viene incluso nelle anisotropie primarie, che si sono impresse nello spettro della CMB alla ricombinazione. Il quarto addendo è il prodotto scalare tra la quadrivelocità dell'osservatore rispetto al fluido cosmico u^μ e il quadrimomento dei fotoni k^μ . Questo termine tiene conto dell'effetto Doppler dovuto al moto relativo tra osservatore e sorgente, che, per i fotoni della CMB, coincide con la superficie di ultimo scattering. Infine, l'integrale della variazione nel tempo del potenziale gravitazionale lungo la linea di vista dalla superficie di ultimo

scattering fino all'osservatore a τ_0 è l'**effetto Sachs-Wolfe integrato, ISW**. In un modello cosmologico in cui la dinamica dell'Universo è dominata dalla materia, i potenziali gravitazionali sono statici e l'effetto ISW non è presente. Contribuisce invece alle anisotropie della CMB in un Universo dominato dalla radiazione oppure da una componente di energia oscura. Per distinguere tra questi due regimi si parla di **early ISW** e di **late ISW** rispettivamente. L'effetto early ISW viene incluso nelle anisotropie primarie perché l'epoca in cui l'Universo era dominato dalla radiazione si colloca a redshift $z > z_{eq} \approx 3300$, dove z_{eq} corrisponde all'epoca dell'equivalenza, in cui le densità di massa-energia della componente relativistica e della materia si eguagliavano. La ricombinazione invece avviene molto tempo dopo, a $z_{dec} = 1090$.

2.2 Oscillazioni barioniche acustiche

Le frequenti interazioni tra fotoni e barioni rendevano il plasma primordiale un ambiente molto uniforme. Tuttavia, il plasma conteneva anche materia oscura che non interagisce con la radiazione, ma ha un effetto gravitazionale. Infatti, fluttuazioni del campo gravitazionale della materia oscura determinano regioni più dense della media e regioni meno dense. La materia barionica attorno a concentrazioni di materia oscura è attratta in delle buche di potenziale, ma per il forte accoppiamento con i fotoni anche questi ultimi si addensano nelle buche di potenziale fino a che la pressione di radiazione non diventa tale da interrompere il processo di accrescimento. In questo modo, la pressione e la densità diminuiscono, ma di nuovo la minore pressione è vinta dalla gravità che richiama i fotoni nella buca di potenziale in un alternarsi di fasi di compressione e rarefazione. Queste variazioni locali di pressione si comportano esattamente come onde sonore attraverso un fluido e sono dette **oscillazioni barioniche acustiche**. Una volta completato il processo di ricombinazione, i fotoni si disaccoppiano dai barioni e diventano liberi di propagarsi attraverso l'Universo. Quando questo avviene, la densità locale di fotoni resta congelata alla fase dell'oscillazione in cui si trovava alla ricombinazione.

La scala di riferimento nel descrivere questo effetto è l'**orizzonte acustico** alla ricombinazione, ovvero la distanza che un segnale percorre alla **velocità del suono** c_s nel tempo che intercorre dalla ricombinazione ad oggi:

$$r_s = \int_0^{\eta_{ric}} c_s d\tau \quad (38)$$

Trascurando i barioni, che sono molto inferiori in numero rispetto ai fotoni, la velocità del suono attraverso il plasma primordiale è $1/\sqrt{3}$ in termini di frazioni della velocità della luce c .

La temperatura in un punto \vec{x} sulla superficie di ultimo scattering è data dalla somma della temperatura media \bar{T} e di una fluttuazione δT . Un elettrone in \vec{x} vedrà fotoni che lo raggiungono da ogni direzione e che provengono da una distanza pari al loro cammino libero medio, ovvero la distanza che i fotoni possono percorrere in media dopo aver interagito con gli elettroni prima di una nuova interazione. Sia $\delta(\vec{x})$ la fluttuazione nella densità di materia oscura in \vec{x} . Se ne calcoliamo la trasformata di Fourier possiamo considerare gli effetti di una singola onda piana perché le proprietà di stazionarietà e isotropia garantiscono che nello spazio di Fourier numeri d'onda k diversi evolvono in modo indipendente. Se la lunghezza d'onda della perturbazione è maggiore dell'orizzonte cosmico

non si osservano oscillazioni. Se invece la lunghezza d'onda della perturbazione è molto maggiore del cammino libero medio dei fotoni, ma minore dell'orizzonte cosmico, questi ultimi appariranno avere la stessa temperatura perché entro il cammino libero medio la densità è uniforme. In questo caso la temperatura in \vec{x} non dipende dalla direzione di provenienza dei fotoni ed è interamente caratterizzata dal termine di monopolo $l = 0$ nell'espansione in armoniche sferiche. Per una descrizione completa del sistema occorre tenere conto anche del fatto che localmente il plasma primordiale avrà un moto d'insieme per effetto dell'accrescimento di materia intorno a regioni sovradense. Per un osservatore al centro della superficie di ultimo scattering elettroni in posizioni diverse sulla LSS avranno velocità peculiari diverse. Abbiamo quindi bisogno di caratterizzare non solo la densità locale, ma anche il moto d'insieme del plasma in un punto della superficie di ultimo scattering. In analogia con lo studio della dinamica dei fluidi, gli strumenti per realizzare questa descrizione sono l'**equazione di continuità** e l'**equazione di Eulero**.

2.2.1 Fluidodinamica del plasma primordiale

Per un fluido di densità ρ e velocità \vec{u} , l'equazione di continuità è data da:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (39)$$

Sia r una coordinata fisica e x la **coordinata comovente**, ovvero solidale con il moto di espansione dell'Universo; la relazione tra le due è mediata dal fattore di scala a : $r(t) = a(t)x$. In un Universo imperturbato x non dipende dal tempo e le posizioni delle galassie in coordinate comoventi non cambiano. Tuttavia, come già discusso, la presenza di fluttuazioni della densità di materia oscura induce dei moti peculiari. Allora, avremo:

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da}{dt} \vec{x} + a \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} (a\vec{x}) + \vec{v} = H\vec{r} + \vec{v} \quad (40)$$

dove \vec{v} è appunto la **velocità peculiare**. Osserviamo ancora che in un Universo non perturbato \vec{v} sarebbe nullo e in tal caso la 40 si riduce alla legge dell'espansione di Hubble che esprime una proporzionalità lineare tra distanza e velocità di recessione.

Esprimiamo la densità ρ come somma della densità media $\bar{\rho}$ e di una perturbazione $\delta\rho$ e valutiamo le derivate nella 39 in un punto r fissato, ottenendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{r}} \left[\bar{\rho} \left(1 + \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \right) \right] + \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (41)$$

Sostituiamo ad \vec{u} l'espressione 40 e poniamo $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{r}} [\bar{\rho}(1 + \delta)] + \vec{\nabla}_{\vec{r}}[\bar{\rho}(1 + \delta)(H\vec{r} + \vec{v})] = 0 \quad (42)$$

Se nella 42 trascuriamo la perturbazione della densità δ e la velocità peculiare \vec{v} ritroviamo l'equazione:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{r}} \bar{\rho} + \vec{\nabla}_{\vec{r}}[\bar{\rho}(H\vec{r})] = 0 \quad (43)$$

Ricordando che $\bar{\rho}$ e il parametro di Hubble H non hanno dipendenza spaziale e notando che la divergenza del vettore posizione \vec{r} è pari a 3, si ottiene:

$$\dot{\bar{\rho}} + 3H\bar{\rho} = 0 \quad (44)$$

Il contenuto di questa equazione è che la densità di materia diminuisce con il cubo del fattore di scala $a(t)$. Infatti, la 44 può essere rimaneggiata ottenendo:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad (45)$$

che implica $\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0$, ovvero il prodotto ρa^3 è costante. Se invece teniamo i termini perturbativi al primo ordine la 42 diventa:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}}[\bar{\rho}\delta] + \vec{\nabla}_{\vec{r}}[\bar{\rho}\delta H\vec{r} + \bar{\rho}\vec{v}] = 0 \quad (46)$$

Sviluppando le derivate si trova:

$$\delta \left[\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\bar{\rho} H \vec{r}) \right] + \bar{\rho} \left[\frac{\partial \delta}{\partial t} + H \vec{r} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta) + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{v} \right] = 0 \quad (47)$$

ma l'espressione nella prima parentesi è la 43, quindi è nulla. In definitiva, otteniamo:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + H \vec{r} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta) + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{v} = 0 \quad (48)$$

A questo punto vorremmo esprimere la 48 in coordinate comoventi. A tale scopo, occorre considerare come trasformano gli operatori di derivata nel passaggio alle coordinate comoventi. Per la derivata temporale:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} \cdot \nabla_{\vec{x}} \quad (49)$$

Ricordando che $\vec{x} = a^{-1}(t)\vec{r}$ e che le derivate sono valutate ad \vec{r} fisso, si ricava per il secondo addendo nella 49:

$$\frac{\partial(a^{-1}\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\dot{a}}{a^2}\vec{r} = -H\vec{x} \quad (50)$$

Per quanto riguarda la divergenza, la trasformazione è più immediata, essendo $\vec{\nabla}_{\vec{x}} = a\vec{\nabla}_{\vec{r}}$; il termine $H\vec{r} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}}\delta)$ assume quindi la stessa forma in coordinate comoventi:

$$H\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}\delta = H\vec{x} \cdot a\vec{\nabla}_{\vec{r}}\delta = H\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\delta \quad (51)$$

La 48 in coordinate comoventi è dunque:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} - H\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\delta + H\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\delta + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = 0 \quad (52)$$

Osserviamo che la velocità peculiare \vec{v} è allineata con il vettore d'onda \vec{k} perché i barioni, e con loro i fotoni ai quali sono accoppiati, sono attratti nelle buche di potenziale delle regioni sovradense. Il moto quindi si svolge lungo la direzione di propagazione della perturbazione del campo gravitazionale, che è data da \vec{k} . Allora, nello spazio di Fourier $\vec{v}_\gamma = -iv_\gamma \hat{k}$, dove \hat{k} è il versore orientato secondo

il vettore d'onda. Se ora al tempo cosmico sostituiamo il tempo conforme τ , otteniamo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + kv_\gamma = 0 \quad (53)$$

Trascurando i barioni, la perturbazione nella densità δ si riferisce alla densità numerica di fotoni δ_γ , che è proporzionale al cubo della temperatura. Tuttavia, la fluttuazione nella temperatura è alimentata anche dalla perturbazione della curvatura Φ oltre che dal termine di monopolo Θ . Per determinare l'effetto di Φ sulla temperatura dei fotoni, consideriamo di nuovo una perturbazione scalare della metrica in gauge Newtoniano. Ricordiamo che l'elemento di linea è dato da:

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (54)$$

Sia \tilde{a}^2 il fattore di scala effettivo $a^2(1 - 2\Phi)$ che moltiplica il termine spaziale della 54. La variazione del fattore di scala è data da:

$$\delta(a^2) = \tilde{a}^2 - a^2 = -2a^2\Phi = 2a\delta a \quad (55)$$

da cui si ricava che $\frac{\delta a}{a} = -\Phi$. La temperatura fotonica è proporzionale ad a^{-1} , pertanto avremo:

$$\Theta = \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta a}{a} = \Phi \quad (56)$$

che rappresenta l'effetto della perturbazione della curvatura sulla temperatura. Ricordando che la densità numerica di fotoni n_γ è proporzionale a T^3 possiamo ora legare δ alla fluttuazione nella temperatura:

$$\delta = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3(\Theta + \Phi) \quad (57)$$

Sostituendo nella 53 si trova:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}kv_\gamma = -\dot{\Phi} \quad (58)$$

L'equazione di continuità applicata al plasma primordiale esprime la **conservazione del numero di fotoni** in un dato volume comovente. L'equazione di Eulero invece esprime la **conservazione del quadrimomento** dei fotoni e per un generico fluido è data da:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Psi \quad (59)$$

dove P è la pressione, ρ è la densità e Ψ il potenziale gravitazionale. A questo punto possiamo di nuovo sostituire alla velocità \vec{u} la 40 ed esprimere sia la densità che la pressione come somma dei valori imperturbati, $\bar{\rho}$ e \bar{P} rispettivamente, e delle fluttuazioni $\delta\rho$ e δP . Nell'approssimazione di un fluido dominato dai fotoni $P_\gamma = \rho_\gamma/3$, dove ρ_γ è la densità di energia fotonica, pertanto la fluttuazione nella pressione può essere espressa in termini di $\delta\rho_\gamma$:

$$\delta P_\gamma = \frac{1}{3}\delta\rho_\gamma = \frac{1}{3}\bar{\rho}_\gamma\delta_\gamma \quad (60)$$

Se la densità numerica di fotoni è proporzionale al cubo della temperatura, la densità di energia ρ_γ dipende da T^4 ed avremo $\delta_\gamma = 4\Theta$. Da queste considerazioni e passando allo spazio di Fourier dove $\vec{v}_\gamma = -iv_\gamma\hat{k}$, l'equazione di Eulero per il plasma primordiale diventa:

$$\dot{v}_\gamma = k(\Theta + \Psi) \quad (61)$$

Derivando la 53 rispetto al tempo e sostituendovi \dot{v}_γ come dato dalla 61 si ottiene:

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = -\frac{k^2}{3} \Psi - \ddot{\Phi} \quad (62)$$

dove $c_s = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}}$ è la velocità del suono e in un fluido dominato da fotoni vale $1/\sqrt{3}$ per la relazione che abbiamo già sfruttato tra pressione e densità. Ricordiamo che trascurando il contributo di neutrini massivi si ha $\Psi = \Phi$ e la 62 diventa:

$$\ddot{\Theta} + \ddot{\Psi} + c_s^2 k^2 (\Theta + \Psi) = 0 \quad (63)$$

che ha per soluzione:

$$[\Theta + \Psi](\tau_*) = [\Theta + \Psi](0) \cos(kr_{s_*}) \quad (64)$$

τ_* e r_{s_*} sono rispettivamente l'istante di tempo conforme corrispondente alla ricombinazione e l'orizzonte acustico cosmico alla ricombinazione. $\Theta + \Psi$ è detta **fluttuazione effettiva** della temperatura. In realtà, scrivendo la soluzione per l'equazione delle oscillazioni barioniche nella forma 64 abbiamo assunto di considerare solo perturbazioni di densità adiabatiche. In generale, le perturbazioni di densità si distinguono in **adiabatiche** e di **isocurvatura**: nel primo caso, si tratta di perturbazioni locali della curvatura che però lasciano inalterata l'entropia locale; nel secondo caso è la curvatura ad essere imperturbata. Quest'ultima classe di perturbazioni produrrebbe un termine sinusoidale proporzionale alla condizione iniziale sulle derivate $\dot{\Theta}$ e $\dot{\Psi}$. I dati suggeriscono che le perturbazioni adiabatiche sono decisamente preponderanti e questo è anche quanto prevedono diversi modelli in cui l'energia oscura è una componente dinamica, manifestazione di uno o più campi scalari. Nel regime in cui $kr_{s_*} \ll 1$ non vi sono oscillazioni: le fluttuazioni nella densità di materia sono descritte da onde che hanno una lunghezza d'onda maggiore dell'orizzonte acustico e pertanto sono fisse alle loro ampiezze iniziali $[\Theta + \Psi](0)$ determinate dalla fisica che ha agito nell'Universo primordiale. Invece, il regime $kr_{s_*} \gtrsim 1$ corrisponde ad oscillazioni con frequenze che dipendono da k . Al termine della ricombinazione, i fotoni si disaccoppiano dalla materia e possono risalire le buche di potenziale per propagarsi attraverso l'Universo. Le oscillazioni acustiche restano congelate alla configurazione in cui si trovavano alla ricombinazione.

Dalla forma delle fluttuazioni nella 64 notiamo che lo spettro di potenza alla ricombinazione è proporzionale allo spettro di potenza delle condizioni iniziali e dipende da $\cos^2(kr_{s_*})$. Questo cattura l'andamento oscillante nello spettro di potenza della CMB mostrato nella figura 4. La modulazione dell'altezza dei picchi è determinata da altri effetti che emergono affinando la descrizione fisica del plasma primordiale, ad esempio considerando il ruolo dei barioni nella dinamica del fluido, che invece abbiamo assunto dominato dai fotoni. Anche la proiezione delle fluttuazioni dallo spazio di Fourier alla sfera celeste ha effetti sulla forma

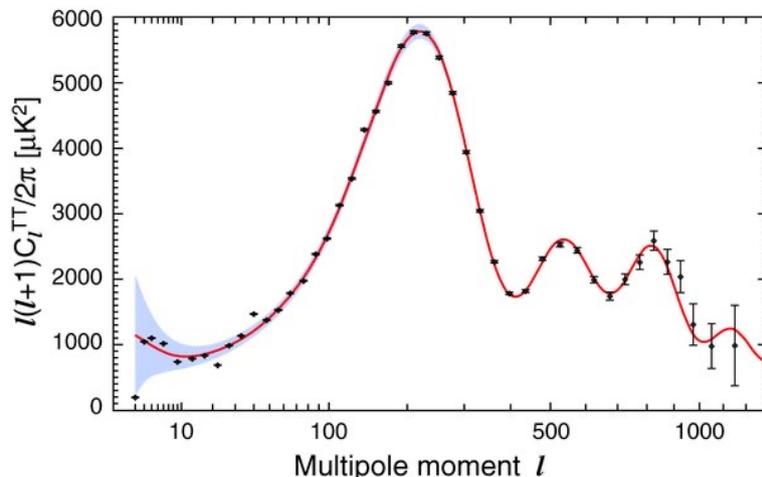


Figura 4: Spettro di potenza della CMB dai dati della missione WMAP (D. Larson et al, 2011).

dello spettro di potenza. Tuttavia, nella dipendenza dal termine $\cos^2(kr_{s_*})$ possiamo cogliere che i picchi nello spettro di potenza della CMB sono prodotti da quelle onde che alla ricombinazione si trovavano in corrispondenza di massimi o minimi. In particolare, riconosciamo una serie di picchi data da $k_n = n\pi/r_{s_*}$, con n intero. All'aumentare di l si stanno considerando perturbazioni che nello spazio di Fourier corrispondono a numeri d'onda sempre maggiori e lunghezze d'onda sempre minori. Su scale minori del cammino libero medio dei fotoni le fluttuazioni della temperatura tendono a smorzarsi per diffusione. Infatti, su queste scale fotoni a diverse temperature possono mischiarsi tra loro senza interagire con gli elettroni uniformando la temperatura. Le scale intermedie sono tipiche dalle oscillazioni barioniche acustiche, mentre l'andamento dello spettro di potenza sulle larghe scale è dominato dall'effetto Sachs-Wolfe ordinario.

2.3 Effetto Sachs-Wolfe ordinario

Le anisotropie su larga scala sono direttamente legate tramite l'effetto Sachs-Wolfe ordinario alle perturbazioni del campo gravitazionale della materia oscura alla ricombinazione. Infatti, la fluttuazione effettiva $\frac{\Delta T}{T}|_f$ nella temperatura dei fotoni che si propagano fuori dalle buche di potenziale è data dalla fluttuazione iniziale $\frac{\Delta T}{T}|_i$ acquisita per effetto della maggiore densità di fotoni all'interno della buca e dalla perdita di energia per redshift gravitazionale risalendo la buca. In formula:

$$\frac{\Delta T}{T}|_f = \frac{\Delta T}{T}|_i + \Psi = -\frac{\delta a}{a} + \Psi \quad (65)$$

dove Ψ è il potenziale gravitazionale. Il redshift all'uscita dalla buca di potenziale è dovuto al fatto che il tempo scorre più lentamente nella vicinanza di un campo gravitazionale. Se si confrontano orologi in punti diversi di un campo gravitazionale si misura un ritardo che è proporzionale alla differenza di potenziale gravitazionale tra i due punti. Possiamo dunque scrivere:

$$\frac{\delta t}{t} = \Psi \quad (66)$$

Per un fluido descritto da un'equazione di stato della forma $p = w\rho$, il fattore di scala evolve proporzionalmente a $t^{\frac{2}{3(1+w)}}$, pertanto avremo:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{2}{3(1+w)} \frac{\delta t}{t} = \frac{2}{3(1+w)} \Psi \quad (67)$$

La ricombinazione si è verificata a $z_{dec} = 1090$, quando l'Universo era dominato dalla materia, regime che corrisponde a $w = 0$ nell'equazione di stato e quindi ad una fluttuazione complessiva della temperatura di:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{SW} = \frac{1}{3} \Psi \quad (68)$$

Pertanto, come si legge dalla 68, misurando le fluttuazioni nella temperatura della CMB su larga scala si ha accesso ad informazioni sul potenziale gravitazionale della materia oscura alla ricombinazione.

2.4 L'effetto Sachs-Wolfe integrato

I fotoni che si propagano dalla superficie di ultimo scattering incontrano lungo il loro percorso concentrazioni di materia sotto forma di galassie ed ammassi di galassie. Queste strutture generano delle buche di potenziale e i fotoni subiscono prima un blueshift quando vi cadono, poi un redshift quando risalgono le buche. Tuttavia, i due effetti non si compensano perché i potenziali gravitazionali decadono nel tempo per effetto dell'espansione dell'Universo. Questo produce ulteriori fluttuazioni della temperatura su larga scala oltre all'effetto Sachs-Wolfe ordinario. L'effetto ISW diventa importante solo sulle grandi scale angolari perché alle piccole scale i fotoni incontrano molte perturbazioni del campo di densità e gli effetti di redshift gravitazionale tendono a compensarsi. Tuttavia, alle grandi scale angolari, che corrispondono a piccoli valori del numero quantico l , le misure della CMB sono dominate dalla varianza cosmica. Per misurare l'effetto ISW si ricorre alla **cross-correlation** con un traccian-te della **Struttura su Larga Scala** (Large Scale Structure, LSS), ovvero la distribuzione di galassie ed ammassi di galassie su larga scala. L'operazione di cross-correlation permette di valutare la correlazione tra due segnali. Infatti, l'effetto ISW è prodotto da potenziali gravitazionali dipendenti dal tempo, quindi ci aspettiamo una corrispondenza con la struttura su larga scala.

2.4.1 Spettro di potenza dell'effetto ISW

Sappiamo che l'effetto ISW in funzione della direzione $\hat{\mathbf{n}}$ di osservazione in cielo è dato da:

$$\Theta_{ISW}(\hat{\mathbf{n}}) = 2 \int \frac{\partial \Psi(\hat{\mathbf{n}}r, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (69)$$

La relazione tra potenziale gravitazionale Ψ e densità di materia ρ è espressa dall'**equazione di Poisson**:

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G\rho \quad (70)$$

Nello spazio di Fourier il potenziale gravitazionale è:

$$\Psi(\mathbf{k}, \tau) = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{a} \left(\frac{H_0}{k}\right)^2 \left[\frac{3aH}{k^2} \theta(\mathbf{k}, \tau) + \delta(\mathbf{k}, \tau) \right] \quad (71)$$

Ω_m è il parametro di densità della materia e H_0 il parametro di Hubble al tempo attuale. Il parametro $\delta(\mathbf{k}, \tau) \equiv \rho(\mathbf{k}, \tau)/\bar{\rho}(\tau) - 1$ è detto *density contrast* ed è una misura della variazione locale di densità rispetto alla densità di materia media. θ è la divergenza della velocità della materia. Infatti, il moto di galassie perpendicolarmente alla linea di vista produce un potenziale gravitazionale che dipende dal tempo, effetto noto come *moving lens* (lente mobile). L'espansione in multipoli della 69 alla luce dell'espressione 71 per il potenziale Ψ è data da:

$$\Theta_{ISW}(\hat{\mathbf{n}}) = 12\pi\Omega_m H_0^2 \sum_{lm} (-i)^l \int d\tau \int \frac{dk d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\delta(\mathbf{k}, \tau)}{a} \right) \times j_l(kr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (72)$$

$\hat{\mathbf{n}}$ è il versore orientato nella direzione di osservazione in cielo e le $j_l(kr)$ sono funzioni sferiche di Bessel. Le ampiezze a_{lm}^{ISW} dell'espansione in armoniche sferiche si possono ottenere dalla 72 sfruttando l'ortogonalità delle armoniche sferiche per valori diversi di l e di m . Moltiplicando la 72 per $Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}})$ e integrando si ottiene:

$$a_{lm}^{ISW} = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} \Theta(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) = 12\pi\Omega_m H_0^2 (-i)^l \int d\tau \int \frac{dk d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\delta(\mathbf{k}, \tau)}{a} \right) \times j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (73)$$

$d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ è l'elemento di volume su una sfera di raggio unitario e l'integrale è esteso a tutto il cielo. Lo spettro di potenza, come definito nella 19, è dato da:

$$C_l^{ISW} = \langle a_{lm}^{ISW} a_{lm}^{*ISW} \rangle = \frac{18}{\pi} \Omega_m^2 H_0^4 \int dk P(k) \left[\int dr D(f-1) \mathcal{H} j_l(kr) \right]^2 \quad (74)$$

$\mathcal{H} = \frac{da}{d\tau}/a$ è il parametro di Hubble rispetto al tempo conforme. Il parametro D nella 74 descrive l'ampiezza delle fluttuazioni di densità. In particolare, la sua normalizzazione al fattore di scala a è detto **fattore di crescita lineare** g :

$$g \equiv \frac{D}{a} \quad (75)$$

Adottando la metrica di Friedmann-Robertson-Walker, il fattore di crescita lineare per un Universo che contiene solo materia e una costante cosmologica è dato da:

$$g = \frac{5\Omega_m}{2} \int_0^1 \frac{da}{a^3 H^3(a)} \quad (76)$$

dove il parametro di Hubble è espresso in funzione dei parametri di densità della materia Ω_m , della costante cosmologica Ω_Λ e della curvatura Ω_k secondo:

$$H(a) = (\Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda)^{1/2} \quad (77)$$

$f \equiv d \ln D / d \ln a$ è la derivata logaritmica del fattore di crescita g e assume il significato di tasso di crescita delle fluttuazioni di densità. f è dato da:

$$f = -1 - \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_\Lambda + \frac{5\Omega_m}{2g} \quad (78)$$

È proprio attraverso la dipendenza dello spettro di potenza 74 dai parametri D e f che l'effetto ISW può fornire informazioni sull'energia oscura.

2.4.2 Cross-correlation

Dati due campi stocastici $A(x)$ e $B(x)$, lo spettro di potenza della loro cross-correlation $P_{AB}(k)$ è dato da:

$$\langle A(k)B^*(k') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(k - k') P_{AB}(k) \quad (79)$$

dove $A(k)$ e $B(k)$ sono le trasformate di Fourier dei campi A e B . Sia δ_{LSS} la fluttuazione nel tracciante della LSS e Θ la fluttuazione complessiva della temperatura della CMB. Possiamo esprimere la covarianza tra le due nel seguente modo:

$$\langle \Theta \delta_{LSS} \rangle = \langle (\Theta_{ric} + \Theta_{fg} + \Theta_{ISW} + \Theta_{SZ} + \Theta_{lens} + \dots) \delta_{LSS} \rangle \quad (80)$$

Come si legge dalla 80, Θ contiene diversi contributi: Θ_{ric} è l'anisotropia primaria formatasi prima della ricombinazione, compreso l'effetto Sachs-Wolfe ordinario, Θ_{fg} è il *foreground astrofisico*, ovvero rumore dal Sistema Solare o dal piano galattico che contamina le misure, mentre i termini rimanenti rappresentano fonti secondarie di anisotropia. In particolare, Θ_{ISW} è l'effetto Sachs-Wolfe integrato, mentre Θ_{SZ} e Θ_{lens} rappresentano rispettivamente i contributi dell'*effetto Sunyaev-Zel'dovich* e di *lente gravitazionale* alla fluttuazione di temperatura. L'effetto Sunyaev-Zel'dovich si presenta quando i fotoni della CMB attraversano il plasma caldo tra le galassie in un ammasso e interagiscono per effetto Compton inverso con elettroni energetici. La lente gravitazionale consiste in una deflessione della luce che passa nelle vicinanze di una struttura.

Nelle equazioni 72 e 73 abbiamo espanso l'effetto ISW in armoniche sferiche. Le singole ampiezze dell'espansione sono date da:

$$a_{lm}^{ISW} = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} \Theta_{ISW}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) \quad (81)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore che punta nella direzione di osservazione in cielo e $d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ è l'elemento di volume su una sfera di raggio unitario. Per calcolare la cross-correlation con un tracciante della LSS occorre proiettarne il campo di densità $\delta_m(\hat{\mathbf{n}}r)$ definito nello spazio tridimensionale sulla sfera celeste. Il tracciante che considereremo è la distribuzione di galassie, la cui proiezione è data da:

$$\delta_{gal}(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^{r_{max}} dr \delta_m(\hat{\mathbf{n}}r, \tau) W_{gal}(r) \quad (82)$$

L'estremo superiore dell'integrale r_{max} è la massima distanza alla quale una sorgente contribuisce alla proiezione. La funzione $W_{gal}(r)$ è detta nucleo della proiezione (*projection kernel*) e rappresenta una sorta di peso statistico. In particolare, il nucleo $W_{gal}(r)$ è dato da:

$$W_{gal}(r) = b(r)r^2 \phi(r) \left[\int dr r^2 \phi(r) \right]^{-1} \quad (83)$$

$\phi(r)$ è la *funzione di selezione radiale*, che caratterizza la probabilità che una sorgente sia inclusa nel catalogo e dipende dai dettagli di come è stata condotta la survey; la funzione $b(r)$ è il *galaxy bias* e tiene conto degli effetti del campo di densità della materia oscura sulla distribuzione di galassie. Una volta proiettato il campo di densità del tracciante ne calcoliamo lo sviluppo in armoniche sferiche:

$$a_{lm}^{gal} = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} \delta_{gal}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) \quad (84)$$

Lo **spettro di potenza angolare** $C_l^{ISW-gal}$ è dato dalla covarianza tra l'effetto ISW e la distribuzione di galassie ad l e m fissati, secondo:

$$\langle a_{lm}^{ISW} a_{l'm'}^{gal*} \rangle = C_l^{ISW-gal} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (85)$$

Anche in questo caso C_l viene stimato calcolando la media sui $2l + 1$ valori di m per ogni multipolo l :

$$\hat{C}_l^{ISW-gal} = \frac{1}{2l + 1} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm}^{CMB} a_{lm}^{gal*} \quad (86)$$

In generale, lo spettro di potenza angolare della cross-correlation tra l'effetto ISW e un tracciante della densità di materia sarà dato da una funzione della cross-correlation tra il potenziale gravitazionale Ψ e la sua derivata temporale Ψ' . Il grafico nella figura 5 mostra lo spettro di potenza della cross-correlation tra Ψ e Ψ' a diversi redshift. Le linee tratteggiate indicano una correlazione negativa, mentre i tratti continui corrispondono ad una correlazione positiva. Per piccoli k siamo nel regime di perturbazioni lineari del campo di densità: nelle regioni sovradense il potenziale gravitazionale è negativo e decade per effetto dell'espansione dell'Universo, sicché $\Psi < 0$, $\Psi' > 0$ e il loro prodotto è negativo. Per k grande, corrispondente a piccole scale, le perturbazioni della densità entrano in un regime non lineare: i potenziali gravitazionali delle strutture cosmiche diventano più negativi e le buche di potenziale più profonde per accrescimento di materia intorno alle regioni sovradense. In questo regime sia Ψ che Ψ' sono negativi e il loro prodotto è positivo. Al diminuire del redshift il regime lineare in cui i potenziali gravitazionali decadono diventa sempre più dominante perché con il progredire dell'espansione la materia è sempre più diluita a favore dell'energia oscura. Le fluttuazioni nella temperatura della CMB dovute a perturbazioni non lineari della densità di materia vanno sotto il nome di *effetto Rees-Sciama*.

Confrontare lo spettro della CMB con una survey di galassie non risolve completamente il problema della varianza cosmica. Infatti, la dispersione nello spettro di potenza della cross-correlation, $\Delta C_{gT}^2(l)$, può essere approssimata da:

$$\Delta C_{gT}^2(l) \approx \frac{C_{gg}(l) C_{TT}(l)}{f_{sky}(2l + 1)} \quad (87)$$

dove C_{gg} e C_{TT} sono rispettivamente lo spettro di potenza dell'autocorrelazione della survey e della CMB. L'autocorrelazione rappresenta la correlazione tra un segnale e una sua versione traslata ed è una misura della somiglianza tra due osservazioni della stessa variabile stocastica eseguite in istanti diversi o punti diversi nello spazio. Come si legge dalla 87, alle grandi scale angolari, corrispondenti ad l piccolo, la dispersione $\Delta C_{gT}^2(l)$ è grande, ma è proprio per l piccolo che l'effetto ISW diventa importante. In alternativa, come tracciante della densità di materia si può utilizzare un catalogo di sorgenti radio o raggi X. Inoltre, è possibile sfruttare la cross-correlation tra l'effetto ISW e l'effetto Sunyaev-Zel'dovich che è sensibile alla presenza di ammassi di galassie, oppure la cross-correlation con l'effetto di *lensing* gravitazionale dei fotoni. Nella figura 6 è mostrato un esempio della cross-correlation tra gli effetti ISW e Sunyaev-Zel'dovich.

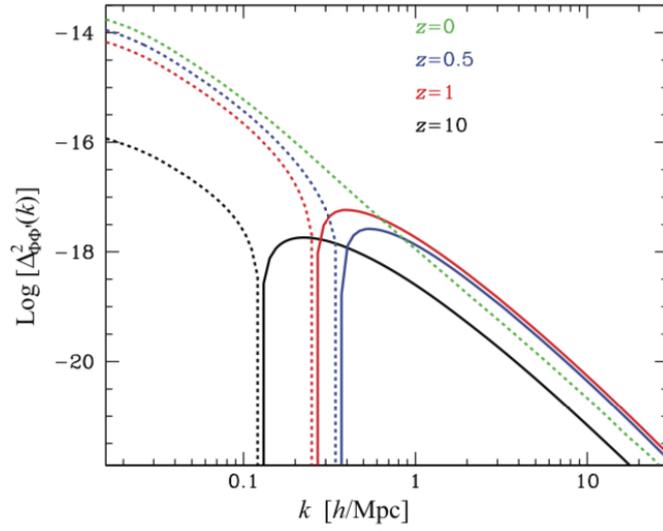


Figura 5: Spettro di potenza della cross-correlation tra Ψ e Ψ' a diversi redshift (A. J. Nishizawa, 2014). Nel grafico il potenziale gravitazionale è indicato con Φ .

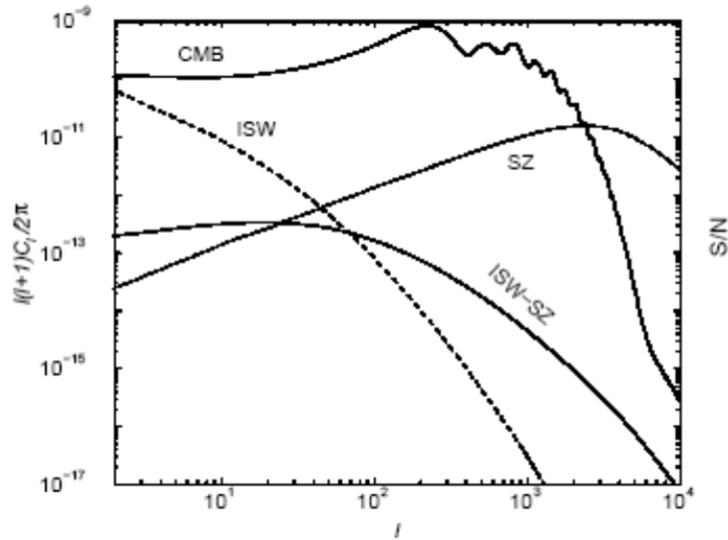


Figura 6: Cross-correlation tra gli effetti ISW e SZ (Cooray, 2001). Sono mostrati anche i singoli spettri di potenza dell'effetto ISW e dell'effetto SZ.

Spesso può essere necessario coprire una regione del cielo perché contaminata dall'emissione di polveri o da sorgenti radio extragalattiche. In questi casi, il coefficiente a_{lm} viene troncato introducendo una *funzione maschera* $W(\hat{\mathbf{n}})$ che blocca il segnale dai pixel contaminati. Il coefficiente armonico troncato \tilde{a}_{lm} è dato da:

$$\tilde{a}_{lm} = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} W(\hat{\mathbf{n}}) \Theta_{ISW}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}), \quad (88)$$

A partire dai coefficienti armonici troncati possiamo definire lo **pseudo-spettro di potenza** (*pseudo-power spectrum*):

$$\tilde{C}_l \equiv \langle \tilde{a}_{lm} \tilde{a}_{lm}^* \rangle \quad (89)$$

La relazione tra lo spettro di potenza e lo pseudo-spettro è mediata proprio dalla frazione di cielo osservata f_{sky} . Infatti, $\tilde{C}_l \approx f_{sky} C_l$

3 L'effetto ISW e l'energia oscura

L'energia oscura può essere trattata come un fluido ideale in cui la viscosità è trascurabile e non vi è conduzione di calore. In questo modo la dinamica del fluido è interamente caratterizzata dall'equazione di stato $p = w\rho$. L'interpretazione dell'energia oscura come costante cosmologica prevede w costante e pari a -1 . Anche le altre componenti del fluido cosmico possono essere trattate come fluidi ideali. Per la materia $w = 0$, ovvero la pressione è nulla. Per la componente relativistica $w = 1/3$, mentre un termine di curvatura avrebbe $w = -1/3$. L'effetto ISW fornisce uno strumento per indagare le proprietà dell'energia oscura e in questa sezione considereremo questo aspetto.

3.1 L'effetto ISW e il valore di Λ

Come abbiamo già osservato, in un universo dominato dalla materia i potenziali gravitazionali sono stazionari. L'Universo attuale invece è dominato dall'energia oscura, una componente caratterizzata da una pressione negativa. Per effetto dell'energia oscura i potenziali gravitazionali delle strutture cosmiche decadono proporzionalmente ad a^{-1} . L'effetto ISW è prodotto da potenziali gravitazionali che evolvono nel tempo, quindi in un universo dominato dalla materia sarebbe assente. La sua presenza nello spettro della CMB è un'indicazione dell'esistenza dell'energia oscura.

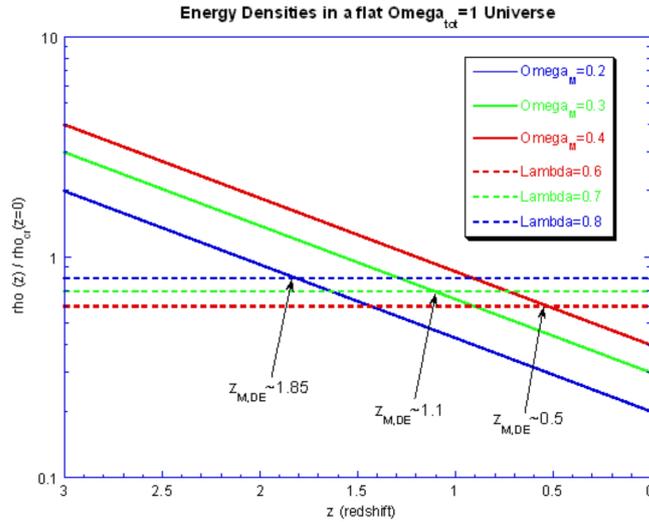


Figura 7: Confronto tra i parametri Ω_m e Ω_Λ per diversi valori di Λ in funzione di z (D. Miller, *The Integrated Sachs-Wolfe Effect: Origin, Status and Future*).

La figura 7 mostra l'effetto dell'aumentare il valore della costante cosmologica per un universo piatto. Un tale universo, trascurando il contributo della radiazione, soddisfa $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. In ascissa è riportato il redshift z , in ordinata la densità normalizzata al valore attuale della densità critica $\rho_{cr}(z = 0)$. Si noti che maggiore è il valore della costante cosmologica, maggiore è il redshift al quale l'energia oscura diventa preponderante rispetto alla materia (barionica).

ed oscura). L'entità dell'energia oscura indice su quanto presto nell'evoluzione dell'Universo questa arriva a dominarne il contenuto di energia. Inoltre, l'effetto ISW è presente proprio perché l'Universo è dominato dall'energia oscura e non dalla materia. Pertanto, se un valore maggiore della costante cosmologica porta l'energia oscura a dominare sulla materia sempre prima, questo ha un impatto sull'evoluzione dei potenziali gravitazionali delle strutture cosmiche e quindi sul contributo dell'effetto ISW alle anisotropie. Il grafico nella figura 8 mostra lo

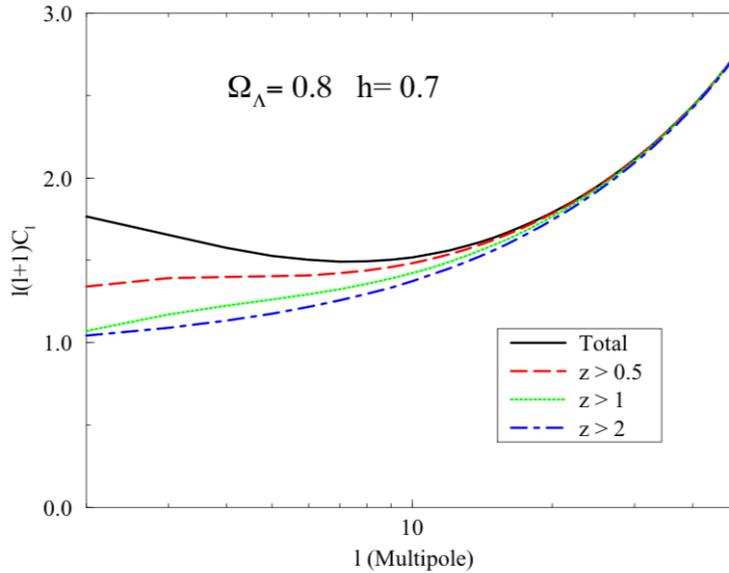


Figura 8: Spettro di potenza C_l delle anisotropie su larga scala per un modello con $\Omega_{\Lambda} = 0.8$ e $h = 0.7$ con evidenziati i contributi prodotti prima di un certo redshift (Crittenden e Turok, 1995).

spettro di potenza C_l delle anisotropie su larga scala. Le curve colorate evidenziano il contributo prodotto prima di un certo redshift z_c : $z_c = 2$ per la curva blu, $z_c = 1$ per la curva verde e $z_c = 0.5$ per la curva rossa. Nel calcolo sono stati assunti i valori $\Omega_{\Lambda} = 0.8$ e $h = 0.7$, che corrisponde ad un parametro di Hubble pari a $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Dalla figura si nota che maggiore è il minimo redshift considerato, minore è il contributo allo spettro di potenza. In particolare, buona parte delle anisotropie su larga scala è prodotta a $z < 1$. Ricordiamo però che misure dello spettro di potenza sulle grandi scale angolari, corrispondenti a piccoli valori di l , sono dominate dalla varianza cosmica e queste sono anche le scale alle quali l'effetto ISW diventa importante. Da cui la necessità di ricorrere alla cross-correlation con la struttura su larga scala per misurare l'effetto ISW.

3.2 Equazione di stato dell'energia oscura

Come già accennato, l'energia oscura può essere assimilata ad un fluido ideale nel quale viscosità e conduzione di calore sono trascurabili. La costante cosmologica è caratterizzata dall'equazione di stato $p = -\rho$. Tuttavia non è da escludere che l'equazione di stato dell'energia oscura sia una funzione del redshift z . In

tal caso, il parametro di densità dell'energia oscura diventa:

$$\Omega_{DE} \exp \left[3 \int_0^z [1 + w(z')] \frac{dz'}{1+z'} \right] = \Omega_{DE} \zeta(z, w) \quad (90)$$

dove il più generico Ω_{DE} sostituisce il parametro di densità della costante cosmologica Ω_Λ . In genere $w(z)$ è parametrizzato in termini di una funzione lineare del fattore di scala:

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) = w_p + w_a(a_p - a) \quad (91)$$

dove w_0 è il valore di w a $z = 0$, w_p è il valore di w ad un certo redshift di riferimento z_p e $w_a = dw/da$.

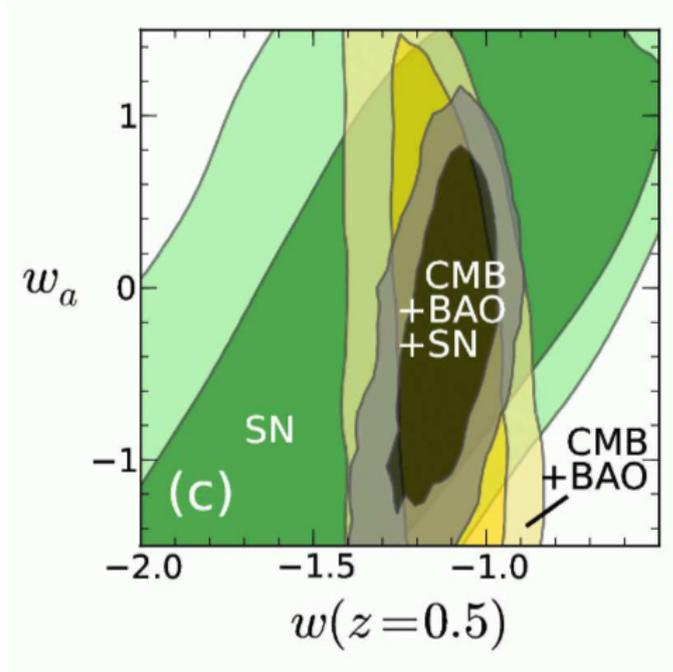


Figura 9: Vincoli sulla dipendenza temporale dell'equazione di stato dell'energia oscura combinando dati dalla CMB, oscillazioni barioniche acustiche e Supernovae IA (M. J. Mortonson et al, 2013).

Il grafico nella figura 9 mostra vincoli sui due parametri della relazione 91, w_p e w_a , ottenuti combinando dati sulla CMB, le oscillazioni barioniche acustiche e le Supernovae IA. Come redshift di riferimento per w_p si è considerato $z_p = 0.5$. Come si nota, i dati convergono su un intervallo piuttosto stringente per $w(z = 0.5)$, mentre non si riescono a porre grandi limiti su w_a che varia di alcune unità. L'equazione di stato dell'energia oscura è una relazione di particolare interesse perché, oltre a fornire informazioni sull'energia oscura stessa, incide sull'evoluzione delle perturbazioni di densità della materia. In particolare, maggiore è la velocità del suono dell'energia oscura, maggiore è la soppressione delle perturbazioni di densità della materia oscura. Per un'equazione di stato $p = w\rho$, la velocità del suono è data da:

$$c_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \quad (92)$$

Una variazione più forte dei potenziali gravitazionali amplifica l'effetto ISW. Questo è mostrato nella figura 10 dove si riporta il contributo dell'effetto ISW alle anisotropie su larga scala per due valori diversi della velocità del suono dell'energia oscura.

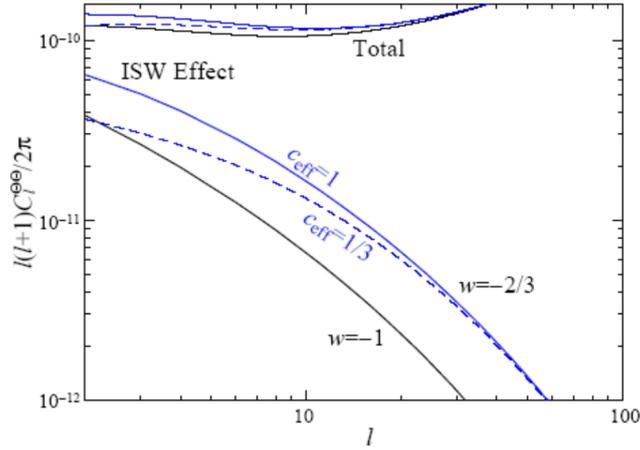


Figura 10: Contributo dell'effetto ISW allo spettro di potenza C_l per piccoli l considerando due diversi valori della velocità del suono dell'energia oscura (Hu, 2001).

Nella 74 abbiamo calcolato lo spettro di potenza dell'effetto ISW trovando che dipende dall'ampiezza e dal tasso di evoluzione delle perturbazioni di densità tramite il termine $(D/a)' = \mathcal{H}D(f-1)$. f è il tasso di crescita delle fluttuazioni di densità ed è dato dalla 78, mentre D è legato all'ampiezza delle perturbazioni di densità. Il grafico nella figura 11 mostra l'evoluzione della quantità $(D/a)'$ per diversi valori di Ω_{DE} e w . Il tratto rosso corrisponde alla combinazione $\Omega_{DE} = 0.65$ e $w = -1.0$. Le curve blu, nera e verde considerano diversi w per lo stesso valore di $\Omega_{DE} = 0.74$. In particolare, w è pari a -1.5 per la curva blu, -1 per la curva nera e -0.5 per il tratto in verde. La sigla Λ CDM indica un modello di universo che prevede una costante cosmologica e una componente di materia oscura (*Cold Dark Matter*) sufficientemente fredda da permettere la formazione delle strutture cosmiche. Nel modello w CDM le assunzioni sono simili, ma il parametro w può assumere valori diversi da -1 . Dal grafico si nota che un valore minore del parametro di densità dell'energia oscura riduce l'effetto ISW e avvicina l'Universo ad un modello dominato dalla materia. Viceversa, per $w > -1$ l'energia oscura si impone a redshift maggiori, quindi ad epoche più antiche, incrementando l'effetto ISW.

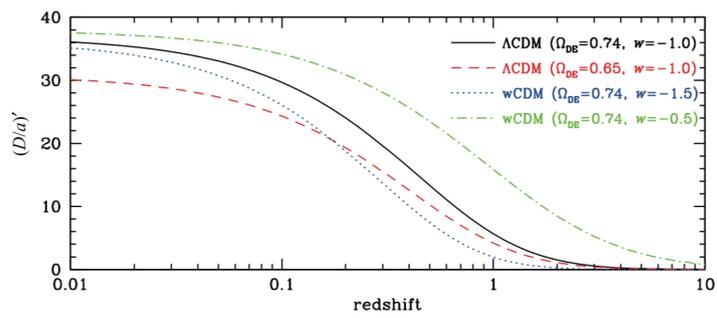


Figura 11: $(D/a)'$ in funzione del redshift per diverse combinazioni dei parametri Ω_{DE} e w (A. J. Nishizawa, 2014).

4 Conclusione

In questo lavoro di tesi abbiamo trattato l'effetto Sachs-Wolfe integrato. L'effetto ISW consiste nel redshift gravitazionale dei fotoni della CMB quando questi incontrano potenziali gravitazionali che decadono nel tempo per effetto dell'espansione dell'Universo. Nella sezione 1 abbiamo descritto il fondo cosmico di microonde, radiazione dall'Universo primordiale che ha la proprietà di essere quasi perfettamente isotropa. Le piccole deviazioni dalla temperatura media di 2.725 K , dell'ordine di una parte su 100.000, sono ricche di informazioni sull'Universo primordiale. Abbiamo poi trattato brevemente l'espansione dell'Universo e la misteriosa componente energetica che ne domina la dinamica nell'era cosmica attuale, l'energia oscura. Abbiamo considerato l'interpretazione più semplice di questa componente, ovvero una costante cosmologica associata ad una densità di energia del vuoto. Infine abbiamo introdotto gli strumenti per una descrizione matematica delle anisotropie della CMB, in particolare lo spettro di potenza. Nella sezione 2 abbiamo trattato la teoria dell'effetto ISW. Come primo passo, abbiamo considerato perturbazioni scalari della metrica di Friedmann-Robertson-Walker nel gauge Newtoniano assumendo un universo imperturbato piatto e abbiamo ottenuto un'espressione per la fluttuazione nella temperatura di un fotone che si propaga lungo una geodetica perturbata. In questa espressione abbiamo riconosciuto diversi contributi, tra cui l'effetto ISW che è dato dall'integrale lungo la linea di vista della derivata temporale del potenziale gravitazionale. Successivamente, prima di approfondire l'effetto ISW, abbiamo trattato brevemente le oscillazioni barioniche acustiche e l'effetto Sachs-Wolfe ordinario. Le oscillazioni barioniche acustiche sono perturbazioni della densità fotonica nel plasma primordiale. Si formano quando i barioni, ai quali i fotoni sono accoppiati, vengono attratti nelle buche di potenziale prodotte da addensamenti locali di materia oscura. Durante il processo di accrescimento, la pressione di radiazione esercitata dai fotoni nelle buche di potenziale cresce fino a vincere la gravità; il processo di accrescimento quindi rallenta, ma questo riduce la pressione di radiazione a favore della gravità che richiama i fotoni nelle buche di potenziale in un alternarsi di fasi di compressione e rarefazione. Questo si verifica fino alla ricombinazione, quando il forte accoppiamento tra fotoni e barioni viene meno e i fotoni iniziano a propagarsi attraverso l'Universo. Quando questo avviene la densità fotonica resta congelata alla fase dell'oscillazione in cui si trovava alla ricombinazione, pertanto studiando le oscillazioni barioniche si possono ricavare informazioni sul potenziale gravitazionale della materia oscura alla ricombinazione. L'effetto SW ordinario consiste nel redshift gravitazionale dei fotoni della CMB quando questi risalgono le buche di potenziale della materia oscura alla ricombinazione. Da qui, abbiamo proseguito approfondendo l'effetto ISW, il suo spettro di potenza e la cross-correlation con la struttura su larga scala, strumento che consente di misurare l'effetto ISW a partire dalla correlazione con un tracciante della densità di materia, così da limitare l'impatto della varianza cosmica sulle misure. Infine, nella sezione 3 abbiamo descritto il potenziale dell'effetto ISW di fornire informazioni sull'energia oscura, in particolare sulla sua equazione di stato che indice non solo sull'espansione dell'Universo, ma anche sull'evoluzione delle perturbazioni di densità.

Riferimenti bibliografici

- [1] Spherical harmonics. URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical-harmonics>.
- [2] Saul Perlmutter. Supernoave, dark energy, and the accelerating universe. *Physics Today*, 56(4), 2003.
- [3] Atsushi J. Nishizawa. The integrated Sachs-Wolfe effect and the Rees-Sciama effect. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2014(6), 2014.
- [4] Kouji Nakamura. Gauge in General Relativity: Second-order general relativistic gauge-invariant perturbation theory. *arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology*, 2007.
- [5] A. J. S. Hamilton. Formulae for growth factors in expanding universes containing matter and a cosmological constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 322(2):419–425, 2001.
- [6] M. J. Mortonson, D. H. Weinberg, and M. White. Dark energy: a short review. *arXiv:1401.0046 [astro-ph CO]*, 2013.
- [7] A. Arbey and F. Mahmoudi. Dark matter and the early universe: a review. *arXiv:2104.11488 [hep-ph]*, 2021.
- [8] Sean M. Carroll. Lecture notes on General Relativity. *arXiv:gr-qc/9712019*, 1997.
- [9] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. ISBN 9780122191411.
- [10] Scott Dodelson. *An Introduction to Modern Cosmology, Third Edition*. Wiley, 2015. ISBN 9781118502099.
- [11] David Miller and Wayne Hu. The Integrated Sachs-Wolfe Effect: Origin, Status and Future. URL <https://fisisist.web.cern.ch/isw/ISW-effect-Home.htm>.