UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Viaggio storico-didattico nella Geometria : dagli *Elementi* di Euclide al *Programma di Erlangen*

Felix Klein e la Geometria proiettiva: la nascita delle geometrie non-euclidee

Relatore:
Prof.ssa Cinzia Bonotto

Correlatore:
Prof. Luigi Tomasi

Laureando:
Francesco Giunta

1177595

Anno Accademico 2021-2022
23 settembre 2022

Indice

Introduzione

"Il matematico, come il pittore ed il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue sono fatte di idee" (Godfrey H. Hardy)

Lo scopo di questa tesi è quello di presentare le geometrie non-euclidee nel loro percorso dinamico, sia storico che teorico. Per questo, nel primo capitolo si presenta il contesto storico da cui nascono le geometrie che si differenziano dalla Geometria degli *Elementi* di Euclide (III sec. a.C.). Infatti, nel corso della storia della geometria sono state individuate diverse lacune nel trattato di Euclide che, da una parte hanno portato ad una sistemazione rigorosa della Geometria euclidea (elaborazione portata a termine da David Hilbert, *Fondamenti della Geometria*, 1899) e, dall'altra, alla nascita di teorie che hanno negato il postulato più conosciuto, ovvero il V postulato di Euclide, riscoprendo in questa percorso il contributo dato da Gerolamo Saccheri. Il primo capitolo si concluderà con il *Programma di Erlangen* (1872) di Felix Klein, che ha portato ad uno studio più generale della Geometria che ha permesso di "mettere ordine" tra i diversi tipi di geometria che si erano sviluppati particolarmente nell'Ottocento. E questo è stato possibile in particolare tramite la la Geometria proiettiva. Nel secondo capitolo verrà dato uno sguardo al contesto matematico in cui sono sorte le diverse geometrie non-euclidee, ovvero il contesto della *Geometria proiettiva* (solo una presentazione a grandi linee), che è la teoria di svolta per introdurre un punto di vista più ampio in grado di inglobare le diverse geometrie sorte all'epoca. Nel terzo capitolo prenderemo in esame lo studio specifico di una geometria non-euclidea, quale la *Geometria sferica* o *Geometria ellittica di dimensione tre*, riportando in dettaglio alcuni risultati, utilizzando lo studio di Felix Klein delle geometrie non-euclidee secondo l'indirizzo proiettivo e non quello differenziale, proposto invece da Gauss e da Riemann. Nella tesi si è scelto di esporre sinteticamente questo esempio di geometria non-euclidea perché è quella più conosciuta ed utilizzata (in particolare in ambito nautico), ed inoltre è più facilmente proponibile, in ambito didattico, nella scuola secondaria di II grado. Per questi motivi, nell'ultimo capitolo ci addentreremo in una presentazione didattica per poter introdurre in una scuola secondaria di II grado, vedendo anche gli obiettivi proposti dai programmi ministeriali di matematica, un modello materiale della geometria sferica, quello di Lenàrt. Si farà inoltre riferimento anche a un uso della geometria sferica tramite il software Cinderella, che è stato progettato proprio per introdurre le geometrie non euclidee. Uno degli obiettivi finali, infatti, di questa tesi è quello di poter presentare in modo generale, ma allo stesso tempo con qualche dettaglio aspetti della Geometria *moderna*. E faranno da sfondo strumenti matematici moderni, quali gli *spazi proiettivi*. Sarà quindi necessario, come premessa del percorso proposto, avere un'idea chiara di cosa siano gli *spazi vettoriali* (indispensabili per introdurre quelli proiettivi). Ed inoltre, conoscere in parte i principali risultati (che verranno brevemente richiamati) di *Algebra lineare e multilineare*. Non si è potuto essere troppo specifici nei dettagli teorici, per poter dare spazio alla storia della matematica, ed in particolare della geometria. Ci si augura che questa tesi possa fornire qualche spunto di approfondimento per costruire un buon percorso storico-didattico nella Geometria, in modo da conoscere l'evoluzione storica che ha portato alla moderna teoria matematica.

Capitolo I

Dalla Geometria Euclidea alle non-euclidee

"La matematica non è una marcia in perfetto ordine lungo un corso sgombro e diritto, ma è un viaggio in una strana terra selvaggia, dove spesso gli esploratori si perdono. Il rigore dovrebbe essere un segnale per lo storico che le mappe sono state tracciate e che i veri esploratori sono andati altrove" (WS. Anglin)

Per inquadrare il percorso che ha portato alla nascita delle geometrie non-euclidee, ed in particolare alla modalità di studiare e sviluppare la geometria in senso 'moderno', così come la si conosce, è bene partire dal contesto storico in cui la matematica ha avuto la sua svolta (aritmetizzazione dell'analisi, metodo assiomatico, sistema logico formale, ecc.). E, per tale ragione, si partirà dalla Geometria euclidea, proprio come la si conosceva fino al XVIII secolo, attraverso gli *Elementi* di Euclide, mai prima di allora messi in discussione. Si vedranno tutti i passaggi che hanno portato al più grande risultato della Geometria, ovvero il Programma di Erlangen, che ha contribuito ad avere un'idea unitaria di come si possano definire le varie geometrie nate in questo periodo storico. E, inoltre, così facendo, si riesce a percepire che la matematica è decisamente dinamica e che, quindi, è in continua ricerca ancora oggi, portando contributi sempre nuovi di scoperte altrettanto interessanti, nonché la curiosità di molti studenti.

1. Gli *Elementi* di Euclide

La matematica come la conosciamo oggi, ovvero distaccata da attività umane quali il commercio, agrimensure, catasto (da cui è nata la matematica come calcolo, conti e raffigurazioni geometriche di problemi quotidiani; si vedano fonti storiche dalla Mesopotamia all'Egitto) ha le sue prime origini nell'antica Grecia. In particolare dal primo filosofo-matematico Talete di Mileto (640/625 a.C. - 548/545 a.C.). I motivi per cui la matematica (ma, in generale, la cultura Occidentale come la conosciamo oggi) nasca effettivamente proprio in Grecia è dovuta alla struttura politico-economica di tale regione in questo periodo storico in cui ci stiamo addentrando. Infatti, l'antica Grecia era costituita da città-stato (le famose *polis*) in cui vigeva una

struttura democratica: nelle *agorà* era permesso il dialogo e la discussione. La mentalità greca, in sostanza, era molto aperta (condizione indispensabile per un matematico, in grado di poter avere un punto di vista più ampio[1]; *cfr. capitolo 0*). Inoltre, queste *polis* erano molto legate commercialmente a tante altre culture e popoli.
Questo tipo di organizzazione politico-commerciale aveva, di certo, favorito uno sviluppo enorme culturale dell'antica Grecia. E, in più, costituivano le basi per una *astrazione* della matematica e non solo legata ad attività pratiche di uso quotidiano. Non è, perciò, un caso che la matematica e la filosofia (confuse in tale periodo storico, dove i filosofi sono matematici, e viceversa) nascano proprio in queste città-stato. Tuttavia, la più grande opera matematica pervenutaci dall'epoca è sicuramente l'opera degli *Elementi* di Euclide (IV-III secolo a.C.). Infatti, essa costituisce una raccolta sistematica di tutti i risultati più o meno noti al tempo per quanto riguarda la Geometria. Erano presenti teoremi di vari matematici precedenti ad Euclide, quali Talete e Pitagora.
Gli *Elementi* cercavano, perciò, di mettere ordine ad una serie di risultati conosciuti nella matematica dell'epoca, organizzandola in un'unica teoria matematica. Essa risulta, in poche parole, il primo esempio di *metodo assiomatico*, costituito da *assiomi*, *definizioni* e *teoremi* con le relative *dimostrazioni*.
E' lo stesso tentativo che più avanti, nel Novecento, porterà lo stesso David Hilbert (Königsberg, 23 gennaio 1862 – Gottinga, 14 febbraio 1943) nel mettere appunto la moderna geometria Euclidea, correggendone le lacune dell'opera antica (il famoso *Grundlagen der Geometrie*, 1899). Un tentativo ancora più amplificato di unire le varie teorie esposte dell'epoca (l'azione di unire sempre più le branche del sapere è proprio del matematico; non a caso, la parola *Algebra* deriva dall'arabo *(al-jabr)* che significa *"restaurazione"*) sarà rappresentata dall'opera di Felix Klein (Düsseldorf, 25 aprile 1849 – Gottinga, 22 giugno 1925), ovvero il *Programma di Erlangen* (ultimo paragrafo appunto del capitolo corrente).
L'opera degli *Elementi* di Euclide è costituita da una raccolta di 13 libri, così organizzata: dall'1 al 6 viene trattata la Geometria piana (euclidea), dal 7 al 10 i rapporti tra grandezze e l'incommensurabilità di certe grandezze, gli ultimi la geometria solida.
Euclide parte il suo percorso di presentazione della raccolta, fornendo una serie di *definizioni* e *nozioni comuni*. Tra le definizioni, c'è una grande distinzione tra le *definizioni reali* e le *definizioni nominali*. Le prime cercano di descrivere, attraverso enti "reali" un oggetto di studio matematico, ad esempio la definizione di *punto*, che, secondo Euclide negli *Elementi* è *ciò che non ha parti*. Come si vede, appunto, una definizione poco formale e chiara. Di che *parti* si intende? Si nota fin da subito che il linguaggio utilizzato è di tipo comune. La definizione di punto risulta essere più chiara se

[1] *"but to discern them we shall have to put aside our habitual point of view and be open to considering a new viewpoint" - "ma per discernerli dovremo mettere da parte il nostro abituale punto di vista guardare ed essere aperti a considerare un nuovo punto di vista"* [17]

si comprende il percorso a cui si è arrivati per definirla: prima il punto era considerato un oggetto di piccolissime dimensioni, come un granello di sabbia, fino alla definizione di punto come oggetto privo di dimensioni, inesteso, diverso da qualsiasi oggetto che possiamo percepire, un oggetto sensibile. Si può, in un qualche senso, avere solamente l'idea di punto (proprio come Platone la intende), senza poterla effettivamente disegnare.
Invece, tra le *definizioni nominali*, per esempio, c'è quella di *circonferenza*, così come la conosciamo anche noi:

XV. *Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea, [cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro*

Tra le *nozioni comuni*, invece, si trovano quelle che noi chiameremmo *assiomi logici*, come per esempio:

I. *Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro*

Infine, si presentano anche i famosi 5 postulati di Euclide, che sono le assunzioni considerate valide da cui si deducono i *teoremi*, attraverso le *dimostrazioni*, come normalmente si procede oggi in matematica. I teoremi si dividono in *ciò che si doveva dimostrare* e in *ciò che si doveva costruire.*
I postulati di Euclide sono:

1. Un segmento di linea retta può essere disegnato unendo due punti qualsiasi.

2. Un segmento di linea retta può essere esteso indefinitamente in una linea retta

3. Dato un segmento di linea retta, un cerchio può essere disegnato usando il segmento come raggio ed uno dei suoi estremi come centro

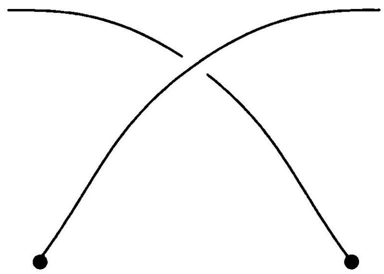
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro

5. Se due linee sono disegnate in modo da intersecarne una terza in modo che la somma degli angoli interni, da un lato, sia minore di due angoli retti, allora le due linee si intersecheranno tra loro dallo stesso lato se sufficientemente prolungate. [2]

Come si vede, i primi tre postulati sono di tipo *costruttivo*, cioé viene detto ciò che effettivamente si può costruire tramite gli strumenti che erano disponibili all'epoca, ovvero la *riga* ed il *compasso.* La *riga* ed il *compasso* che prende in considerazione Euclide sono *ideali*: la *riga* è infinita e non-graduata, che permette di tracciare la retta passante per due punti qualunque assegnati e distinti; il *compasso* è collassabile, nel senso che si richiude

[2] *Traduzione italiana* da A. Frajese, L. Maccioni, *Gli Elementi di Euclide*

su se stesso appena viene staccata la punta dal foglio.
Il quarto postulato enuncia una proprietà tra gli angoli retti. L'ultimo, invece, è il più distinto tra gli altri, tanto è vero che lo stesso Euclide non usa questo postulato fino alla **proposizione 32** del Libro I degli *Elementi*. Tanto che la Geometria costruita senza l'uso di questo postulato è chiamata *Geometria assoluta*[3] (valida, per esempio, anche in *Geometria iperbolica*).
L'opera euclidea non fu mai messa in discussione nel corso degli anni, seppure contenesse delle lacune, come ad esempio la prima proposizione, ovvero *Su una retta terminata (segmento, ndr) data costruire un triangolo equilatero.* Euclide, per dimostrare tale teorema, costruisce con riga e compasso i due cerchi che hanno come raggio il segmento dato e come centro ognuno degli estremi dello stesso. Così facendo, si costruisce il terzo vertice del triangolo equilatero.



Prop.I.1. *Costruire triangolo equilatero da data retta terminata*

Tuttavia, ad esempio, come si accorgerà Gauss molti secoli dopo, non c'è motivo (perché non presente come postulato) che esista effettivamente questo punto di intersezione delle due circonferenze costruite.
Ci vorrà David Hilbert per poter proporre un riassetto più rigoroso della Geometria Euclidea, con la sua opera *Grundlagen der Geometrie* del 1899.

DAVID HILBERT

FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

CON I SUPPLEMENTI DI PAUL BERNAYS

Introduzione all'edizione italiana
di Carlo Felice Manara

Prima edizione italiana: febbraio 1970
Copyright by
©
Giangiacomo Feltrinelli Editore
Milano

[3]termine coniato da J. Bolyai nel 1832

Grundlagen der Geometrie, 1899

Infatti, Hilbert cercò di formalizzare al meglio la teoria della *Geometria euclidea*, colmando le lacune. Infatti, i soli 5 postulati di Euclide non bastavano a derivare tutti i teoremi del libro (come, ad esempio, la costruzione del triangolo equilatero, visto prima), perché portavano con sé diverse lacune.
L'importanza di tale libro dei *Fondamenti della geometria* fu in particolare per l'approccio logico con cui fu affrontato il discorso. Fu uno dei primi esempi di *sistema assiomatico formale* moderno. Non bastava per Hilbert, infatti, esporre le nozioni, gli assiomi ed i teoremi della *Geometria euclidea*, ma volle curare anche l'aspetto logico, per non incappare negli stessi errori di Euclide. In particolare, si interessò della *completezza*, *consistenza* e *indipendenza* degli assiomi che aveva preso in considerazione.
Per fare ciò, però, doveva intraprendere una discussione profonda, quasi *epistemologica* del problema, perché la geometria, secondo lui, doveva liberarsi delle definizioni intuitive (che avevamo chiamato *reali*), liberandosi di qualsiasi ambiguità. Non erano, infatti, tanto importanti le definizioni, ma gli assiomi scelti (che dovevano avere le caratteristiche citate prima). Tanto che al posto di definizioni quali "punto, retta e piano", potevano essere presi in considerazione (celebre fu questa affermazione di Hilbert) persino "tavoli, sedie e boccali di birra". E la geometria, con gli stessi assiomi, continuava ad avere la sua validità logica e la sua coerenza. In pratica, diversamente da come procedeva Euclide, più legato alla natura fisica degli enti geometrici, e quindi interessato alla *costruibilità* di tali teoremi, Hilbert era più legato all'aspetto e alla struttura logica della teoria, ovvero al fatto che le deduzioni tra i diversi enti con le diverse proprietà descritte fossero corrette da un punto di vista logico.
Questo modo di procedere di Hilbert non trovò subito approvazione da parte dell'intera comunità matematica. Infatti, per esempio, Friedrich Frege (Wismar, 8 novembre 1848 – Bad Kleinen, 26 luglio 1925), logico matematico affermava (cercando quasi di impartire una lezione di logica allo stesso Hilbert):

> *Resto dubbioso di fronte alle affermazioni che per mezzo degli assiomi della geometria si raggiunge la descrizione completa e precisa delle relazioni, e che gli assiomi definiscono il concetto del "fra". Con ciò si ascrive agli assiomi qualcosa che è compito delle definizioni. Così facendo vengono - a mio parere - seriamente confusi i confini tra assiomi e definizioni, e accanto al significato tradizionale della parola "assioma" - quale risulta nell'affermazione che gli assiomi esprimono fatti fondamentali dell'intuizione - mi sembra ne affiori un secondo, che peraltro non mi riesce di cogliere esattamente.*

La risposta di Hilbert fu altrettanto puntigliosa:

> *Se si cercano altre definizioni di "punto", ricorrendo per esempio a perifrasi come "privo di estensione", ecc., si capisce che debbo oppormi nel modo più deciso a*

> *siffatti tentativi; si va infatti alla ricerca di qualcosa là dove non la si potrà mai trovare, per il semplice motivo che non è là dove la si cerca.*

Il pensiero di Frege era legato ad una visione epistemologica *tradizionalista*, per cui tutto era portato ai dati del mondo fisico e sensibile della realtà, e non ci si cura più di tanto della struttura logica che tali enti portano con sé. Sarà questo il modo di procedere di Hilbert, e della matematica moderna, apportando una *astrazione* elevata della matematica. Ma non per questo, come direbbe Hilbert, meno valida e più limitata. Perché su quelli stessi assiomi, per così dire *astratti*, possono esserci diversi modelli di essa, senza, come abbiamo detto prima, ricorrere per forza al "punto, retta, piano". Allargando, in pratica, l'orizzonte di tale applicazione teorica.

In effetti, Hilbert, nel presentare la *Geometria euclidea*, inizia in questo modo:

> *Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti (oggi chiameremo <u>insiemi</u>): chiameremo <u>punti</u> gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A, B, C...; chiamiamo <u>rette</u> gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con a, b, c...; chiamiamo <u>piani</u> gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con α, β, γ,...*

Come si vede, Hilbert non cerca nemmeno di dare altre caratteristiche di questi oggetti (elementi) di questi insiemi.
Come abbiamo già detto, Hilbert colmò le lacune presenti nel libro degli *Elementi*, apportando nuovi assiomi. Per esempio, nella dimostrazione che abbiamo visto prima, che portava il problema dell'esistenza del punto di intersezione degli archi di cerchio, Hilbert risolve la questione esponendo un nuovo assioma, l'*assioma di continuità*, che assicura, appunto, che non esistono "buchi" all'interno degli archi di cerchio.
Ultima considerazione che rende l'opera di Hilbert sui *Fondamenti della Geometria* veramente importante fu l'intuizione di dover, come già detto, mostrare che la teoria della *Geometria euclidea* è consistente e non contraddittoria. Per fare questo, però, era necessario offrire un modello di tale geometria, al di fuori della teoria stessa appena esposta. In sostanza, Hilbert doveva cercare un modello che seguiva dalla *consistenza* di un'altra teoria esterna, per mostrare che valgono in questo modello tutti i teoremi della *Geometria euclidea.* E cercò questo modello nella *Geometria analitica* (o *cartesiana*), dove ad ogni punto viene associato una coppia di numeri (reali). E quindi, tale modello era fondato sulla teoria dei *numeri reali.* Per cui, la consistenza della *Geometria euclidea* era *relativa* alla teoria dei *numeri reali*: se quest'ultima era consistente, doveva esserlo, in pratica, anche la teoria euclidea.
Più avanti,Kurt Gödel (Brno, 28 aprile 1906 – Princeton, 14 gennaio 1978), tramite i famosi *teoremi di incompletezza*, dimostrerà che se un sistema formale è logicamente coerente, la sua non-contradditorietà non potrà essere dimostrata all'interno del sistema logico interno stesso. E quindi, per verificare la consistenza di una teoria, bisogna ricorrere a teorie esterne ad essa, perciò alla costruzione di modelli di che si fondano su teorie esterne ma descrivono la teoria di cui voglio dimostrare la validità.

Come vedremo nel prossimo capitolo, alcuni matematici riuscirono a trovare modelli per cui non valesse il V postulato di Euclide; e questo metterà in crisi la considerazione che la *Geometria euclidea* fosse l'unica possibile, come geometria assoluta per tutto l'universo.

2. La nascita delle geometrie non-euclidee

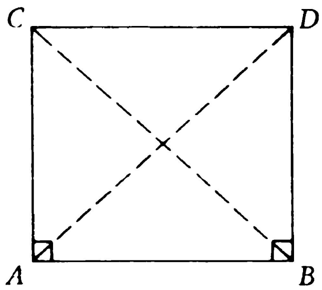
Nel capitolo III, del V libro de *I fratelli Karamazov* di Fëdor Dostoevskij (Mosca, 11 novembre 1821 – San Pietroburgo, 9 febbraio 1881) si vede quanto, verso il 1880, si conoscessero le geometrie non-euclidee:

> *Ma ecco, quello che dobbiamo notare: se Dio esiste e se è stato davvero lui a creare la terra, allora l'ha creata, come sappiamo tutti, secondo la geometria di Euclide, e ha creato la mente umana con la concezione delle sole tre dimensioni spaziali. Eppure ci sono stati, e ci sono ancora, matematici e filosofi, e anche fra i più illustri, che mettono in dubbio che il mondo, o per dirla in termini più ampi, l'universo sia stato creato unicamente in conformità alla geometria euclidea; osano persino ipotizzare che due linee parallele, che secondo la geometria euclidea non possono incontrarsi mai, possano in realtà incontrarsi in qualche punto dell'infinito. Io, fratellino caro, sono giunto alla conclusione che, se non riesco a capire nemmeno questo, come posso aspettarmi di comprendere l'idea di Dio?*

Le geometrie non-euclidee, cioè quelle per cui non vale il V postulato di Euclide (anche se poi viene esteso per qualsiasi geometria per cui non vale almeno uno dei 5 postulati di Euclide; ad esempio la geometria ellittica, come vedremo, per cui non vale anche il postulato per cui per due punti passi una sola retta) nascono cercando di colmare quelle lacune della Geometria euclidea (a cui abbiamo accennato nel paragrafo precedente), proprio a partire, in particolare, dal V postulato. Infatti, per secoli, molti matematici provarono a dimostrare il V postulato.
In effetti, tale postulato sembra più un teorema (anzi, il suo inverso è proprio un teorema del Libro I degli *Elementi*, **prop. 17, Libro I**). Allora, tanti furono i tentativi, da parte di matematici dopo Euclide (fino al 1800), di trovare delle forme logicamente equivalenti di tale postulato, ma ben più semplici, più immediate. Per cui, fin dal I secolo a.C., commentatori da Posidonio a Gemino, cercarono di ri-definire, per esempio, la nozione di *rette parallele*, perché il problema, pensarono, fu proprio nella nozione stessa di rette parallele, che per Euclide erano:

XXIII. *Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti*

Così, Posidonio diede una nuova definizione di *rette parallele* come *rette equidistanti.* Tuttavia, sorge un problema con quelle rette che non si incontrano (e quindi, dalla definizione euclidea, sono parallele tra loro), ma non sono di certo equidistanti: per esempio, le *rette asintotiche*, che si avvicinano sempre più, ma si sfiorano solamente, senza mai intersecarsi in un punto (all'infinito).
Il ruolo più importante per la nascita delle *geometrie non-euclidee* fu quello di un gesuita, Gerolamo Saccheri (Sanremo, 5 settembre 1667 – Milano, 25 ottobre 1733). Nel 1697, egli pubblicò il libro *Logica dimostrativa*, in cui spiega l'importanza della cosiddetta *consequentia mirabilis.* Ovvero un sofisticato modo di dimostrare una tesi: essa si afferma, negandone la proposizione, e mostrando che questa implica l'affermazione stessa, arrivando, perciò, ad una contraddizione.
Un esempio pratico è l'affermazione "ci sono delle verità". Per dimostrarla, neghiamo la proposizione, e quindi diciamo che "non ci sono verità". E si nota, allora, che se fosse vera, essa stessa sarebbe una verità. E quindi è falso che "non ci sono verità". Per cui, abbiamo mostrato che "ci sono delle verità".
Saccheri spiega che questo modo di procedere doveva essere usato esclusivamente per proposizioni veramente complicate. Come appunto il V postulato di Euclide. Pensando che si potesse derivare dagli altri assiomi e dai teoremi degli *Elementi* che non usufruiscono dello stesso.
L'esistenza di almeno una retta parallela era già stato dimostrato da Euclide (**prop. 31, Libro I**, dimostrabile senza il V postulato, e quindi valido in *geometria assoluta* o *neutrale*), ma non si poteva arrivare a dire che questa fosse l'unica retta parallela possibile. Quindi, o ce n'era una o infinite. Se fossero infinite, ovviamente non potevano essere *equidistanti.* Così, Saccheri ebbe una intuizione, derivata dallo studio di Omar Khayyam (matematico persiano del XI secolo), quella di studiare il cosiddetto *quadrilatero birettangolo* (oggi detto comunemente *di Saccheri*).



Quadrilatero di Saccheri

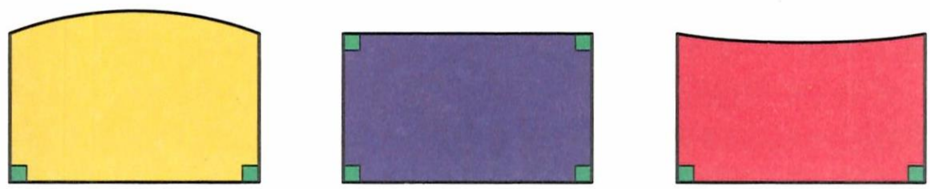
Infatti, Khayyam era partito da una sua assunzione assiomatica equivalente al V postulato di Euclide, ovvero che *se due rette iniziano a convergere, continuano a convergere.* E quindi, Saccheri prese una base (AB) di un quadrilatero e innalza su di essa due lati ortogonali ed uguali, come in figura, ovvero AC e BD. Il lato opposto della base è chiamata *sommità.* Come si

uniranno i punti C e D? Non ci sono teoremi o postulati che ci dicano che tale quadrilatero sia effettivamente un rettangolo, ovvero che gli angoli $\hat{C}$ e $\hat{D}$ siano retti. L'unica cosa che si riesce a dimostrare, e che fa lo stesso Saccheri, è che $\hat{C} = \hat{D}$ (si applicano i criteri di uguaglianza per i triangoli costruiti nel quadrilatero, dopo aver tracciato le due diagonali).
E, così facendo, allora Saccheri ipotizzò tre possibilità:

1. **ipotesi dell'angolo retto**: i due angoli sono entrambi di 90°

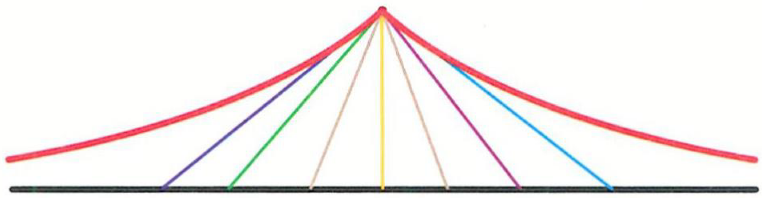
2. **ipotesi dell'angolo acuto**: i due angoli sono entrambi $< 90°$

3. **ipotesi dell'angolo ottuso**: i due angoli sono entrambi $> 90°$.



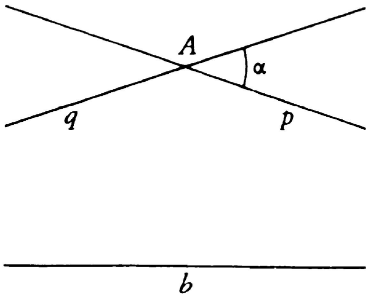
Le tre ipotesi per il Quadrilatero di Saccheri

L'importanza dell'opera di Saccheri fu che sviluppò tutte le conseguenze che si potevano dimostrare per ciascuna delle tre possibilità sopra indicate. E quindi, trovò dei risultati per le future geometrie non-euclidee, seppure lui volesse dimostrare la proposizione del V postulato di Euclide. Nel primo caso, si sviluppa la *Geometria euclidea*, come la conosciamo già dagli *Elementi*. Mentre, nel secondo caso si sviluppa la *Geometria iperbolica*. L'ultimo caso, era relativo alla *Geometria ellittica*, anche se questa all'inizio non fu considerata proprio una geometria non-euclidea, perché negava anche la possibilità della costruzione di una retta parallela (tanto che lo stesso Saccheri arrivò a tale contraddizione con la *geometria assoluta*).
Ecco perché Saccheri può essere considerato anche lui un precursore delle geometrie non-euclidee, seppure involontariamente, perché aveva contribuito allo studio di teoremi propri di queste geometrie diverse da quella euclidea. Tuttavia, studiosi quali Gauss, Lambert, Riemann e Beltrami, presero in esame le conseguenze sviluppate da Saccheri e notarono che non c'erano delle contraddizioni. Bensì, erano ugualmente valide alla teoria della *Geometria Euclidea*.
La svolta per confermare che tali nuove geometrie, le geometrie non-euclidee, non sono contradditorie, bensì consistenti e valide, fu la realizzazione, da parte di diversi matematici del tempo, di alcuni modelli per ciascuna di queste nuove teorie. Ad esempio, furono tanti i modelli per la Geometria iperbolica, nella quale ci sono più rette parallele, tra cui anche *rette asintotiche* (pensate come rette *limite* tra quelle incidenti e quelle parallele). Il primo modello di tale Geometria fu redatto da Beltrami nel 1867.



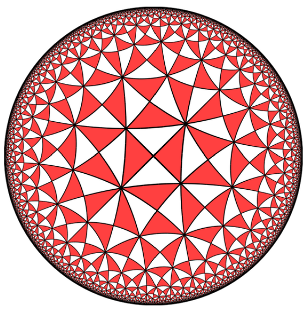
Rette asintotiche e incidenti

Più in generale, queste rette asintotiche fanno da spartiacque proprio tra le rette parallele e quelle incidenti, proprio come nella figura sottostante:



Modello iperbolico

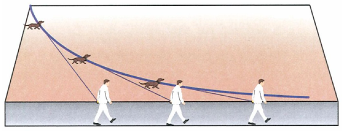
Le rette p e q sono le asintotiche, mentre ci sono rette parallele che entrano nell'angolo α e sono infinite queste (sono una parte di un fascio di rette di centro A).
Questo tipo di studio, portò al modello del *disco di Poincaré*, un modello piano.



Disco di Poincaré

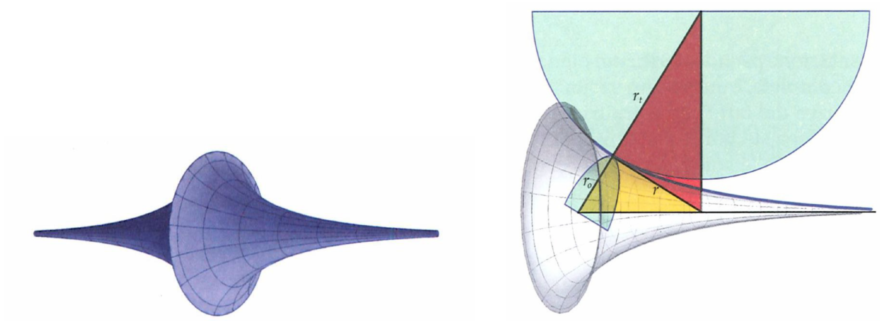
Mentre, un modello interessante, che prendevano spunto dallo studio differenziale sulle geometrie non-euclidee svolto da Gauss e da Riemann fu costruito da Eugenio Beltrami (Cremona, 16 novembre 1835 – Roma, 18 febbraio 1900), che costruì la cosiddetta *pseudosfera (di Beltrami)*, facendo ruotare su di un asse la *trattrice* [4], una curva particolare. Questo modello di geometria iperbolica era un modello tridimensionale.

[4]curva che si pensa come una corda tirata come guinzaglio da un cane, come in figura



Trattrice

Questo modello era sicuramente di geometria iperbolica, considerando la sua *curvatura negativa* (come era pensato, secondo la teoria *differenziale* delle geometrie non-euclidee sviluppato in questo periodo; alternativo a quello *proiettivo*, che trattiamo in questa tesi, ma del tutto equivalente). Infatti, in un punto della pseudosfera, bisogna vedere le sezioni perpendicolari al piano tangente. Quella di minima curvatura è proprio la trattrice, da cui viene generato questo solido. Quella di massima curvatura, invece, un ovale, rivolta nella direzione opposta. E quindi le due curvature estreme sono di segno opposto, tale per cui viene una curvatura complessivamente negativa, propria delle geometrie iperboliche. Questi modelli, come si vede, si costruiscono sfruttando la *Geometria Euclidea*, in quanto, come abbiamo detto nel paragrafo precedente, la validità di una teoria è sempre relativa ad un'altra teoria al di fuori di quella che si vuole convalidare.



La pseudosfera di Beltrami e le curvature su di essa

Con la nascita di queste nuove geometrie, si era persa una visione unitaria della geometria e della stessa matematica, perché molti concetti, per esempio, dell'Analisi (quali, ad esempio, il concetto di *derivata*) si fondavano sulle nozioni proprie della *Geometria euclidea*, proprio sulle nozioni di rette (ma che tipo di rette, appunto?). E quindi, si era persa la speranza di fondare la matematica sui concetti propri della Geometria. Erano molte le contraddizioni (almeno apparenti) apportate con l'avvento delle *geometrie non-euclidee*, mancavano dei fondamenti solidi, delle basi stabili per tutte queste geometrie.
Tuttavia, stava per arrivare una unificazione della geometria, che poteva portare una maggior solidità per dei fondamenti della Geometria, per tutte le geometrie. E questo era dovuto al famoso *Programma di Erlangen.*

3. Unificazione della geometria: il "programma di Erlangen"

Nel 1865, Julius Plücker (Elberfeld, 16 luglio 1801 – Bonn, 22 maggio 1868), professore di matematica e fisica all'università di Bonn, incontra, tra i suoi studenti, un giovane dotato di un grande talento matematico, Felix Klein (Düsseldorf, 25 aprile 1849 – Gottinga, 22 giugno 1925). A soli 17 anni, infatti, diventa suo assistente. Uno degli ambiti di studio di Plücker era la geometria proiettiva. Però, vigeva una aspra discussione delle metodologie di studio di tale teoria: Jean Victor Poncelet (di cui parleremo nel prossimo capitolo) ritiene che sia sufficiente individuare intuitivamente le proprietà proiettive delle figure per stabilire i principi ed i teoremi della geometria proiettiva;Joseph Diaz Gergonne (Nancy, 19 giugno 1771 – Montpellier, 4 maggio 1859) sostenne, invece, che il metodo proposto da Poncelet fosse poco rigoroso e che quindi bisognasse ricorrere al metodo algebrico cartesiano.
Questo dibattito fu molto centrale nella cultura tedesca che portò la corrente di Poncelet a generare figure più complesse , attraverso le proprietà proiettive, ovvero le coniche e le superficie e riescono a dimostrare l'indipendenza delle proprietà metriche da quelle proiettive, e viceversa; mentre, i secondi, sulla falsariga di Gergonne (tra cui lo stesso Plücker), giungono a determinare le coordinate geometriche di un punto e, quindi, a formalizzare gran parte dei risultati noti della geometria proiettiva. In particolare, Plücker riuscì a concepire che, per descrivere i punti all'*infinito* degli *spazi proiettivi* non bastavano le *coordinate cartesiane* (così come le si conoscono ancora oggi persino alle scuole secondarie), ma bisognasse ricorrere alle cosiddette *coordinate omogenee* (*vedasi capitolo 2*).
Quando morì Plücker, a fare da guida per Klein fu il matematico Alfred Clebsch (Königsberg, 19 gennaio 1833 – Gottinga, 20 giugno 1872). Infatti, nel 1868 venne nominato professore di Geometria a Gottinga e seguì la tesi di laurea di Klein dal titolo *"Sulla trasformazione dell'equazione generale di secondo grado a una forma canonica, per mezzo delle coordinate di retta"*.
Agli inizi del 1869, l'editore Teubner di Lipsia, per non lasciare incompiuta l'opera di Plücker, chiede a Clebsch di curarne la seconda parte. Clebsch, colpito quanto Plücker dalle straordinarie capacità matematiche del giovanissimo Klein, ritenne che fosse quest'ultimo la persona più adatta per un tale incarico.
Clebsch ha interessi ben più ampli del precedente professore di Klein, perché oltre alla geometria proiettiva, era molto interessato anche alla *Teoria degli invarianti (algebrici)*, in pratica alla cosiddetta *Geometria algebrica*, che in quegli anni trovava una base molto solida (studiare la geometria secondo le forme algebriche ad esse associate). Quest'ultima, infatti, individua le caratteristiche globali di una curva o di una superficie e studia quelle equazioni algebriche, che sono in grado di rappresentare la totalità dei punti di una figura. È Clebsch che, quindi, trasmette al giovane Klein l'interesse per l'unità dei metodi in geometria, terreno fertile per il futuro *programma di Erlangen.*
L'influenza di Clebsch non ha solo spinto Klein ad allargare i propri interessi ai vari metodi della geometria, ma ha anche generato il desiderio del giovane studioso di comprendere le ragioni del dibattito teorico fra le diverse

scuole tedesche di matematica. Problema questo che, in età matura, Klein affermerà essersi posto sin da giovane. In ragione di ciò, dopo avere pubblicato il secondo volume dell'opera di Plücker, si trasferisce da Gottinga a Berlino. Siamo nel 1869. A Berlino, frequenta il *Seminario Matematico*, dove ha la possibilità di conoscere il matematico norvegese Sophus Lie (Nordfjordeid, 17 dicembre 1842 – Oslo, 18 febbraio 1899). Quest'ultimo ha una formazione molto simile a quella di Klein e conosce a fondo la geometria di Plücker. Questa circostanza spiega il sodalizio che s'instaura fra i due giovani studiosi. Al "seminario matematico", Lie presenta una relazione nella quale avanza l'ipotesi che sia possibile ricondurre lo studio dei complessi di rette di Plücker allo studio di un insieme continuo di trasformazioni geometriche. A Klein una simile idea sembra originale. Pertanto, aiuta Lie a redigere un articolo in tedesco su questo tema e si preoccupa di farlo pubblicare da Clebsch sul "Notiziario" dell'Università di Gottinga. Il lavoro di Lie induce Klein ad approfondire la conoscenza dei contributi di A. Cayley alla geometria proiettiva. Il matematico inglese Arthur Cayley (Richmond upon Thames, 16 agosto 1821 – Cambridge, 26 gennaio 1895) aveva sviluppato la teoria degli invarianti algebrici, cioè di quelle proprietà delle forme algebriche che restano invariate per una trasformazione lineare delle variabili. In un secondo momento, Cayley ha l'idea di applicare la teoria degli invarianti algebrici alla geometria, assimilando le trasformazioni algebriche lineari alle trasformazioni proiettive e gli invarianti algebrici agli invarianti proiettivi. Da ciò consegue che la geometria proiettiva è, per Cayley, *tutta la geometria*. La geometria di Euclide è quindi un caso particolare di geometria proiettiva, nel senso che solo alcuni teoremi della Geometria euclidea valgono anche in Geometria proiettiva, ma non il viceversa.
Inoltre, proprio in quegli anni, Klein viene a conoscenza delle *geometrie non-euclidee*. E, proprio anche attraverso lo studio dettagliato della ricerca apportata da Cayley, fa intuire allo stesso Klein che anche le stesse *geometrie non-euclidee* sono dei casi particolari della *Geometria euclidea*.
Poco più avanti, Klein e Lie si trasferiscono a Parigi, e stringono una forte amicizia con matematici quali Gaston Darboux (Nîmes, 14 agosto 1842 – Parigi, 23 febbraio 1917) e Camille Jordan (Lione, 5 gennaio 1838 – Parigi, 22 gennaio 1922). Insieme si accorgono di essere sulla strada giusta, in quanto molti dei risultati da loro ottenuti sullo studio delle diverse geometrie in ambito *proiettivo* sono comuni a quelli dell'ambito *metrico-differenziali* svolti, appunto, da Jordan e Darboux, oltre che da Gauss e Riemann. Questo ultimo ambito, richiede uno studio ed un confronto tra l'analisi e la geometria, perché venivano studiate le curve e le superficie a livello locale (indispensabili, quindi, i concetti teorici di *calcolo infinitesimale*).
Così, i due (Klein & Lie) riprendendo l'idea centrale dei loro precedenti lavori, i due giovani studiosi dimostrano che una famiglia di curve o di superfici può essere studiata per mezzo di una classe infinita di trasformazioni lineari.
Agli inizi del 1871 Klein ritorna a Gottinga, dove consegue l'abilitazione all'insegnamento universitario e dove, sempre in collaborazione con Lie, approfondisce il problema della struttura delle trasformazioni geometriche. E

così, Klein riprende quindi il progetto di costruire le geometrie non euclidee, servendosi degli invarianti di Cayley.
Premette che è suo proposito riconsiderare sia la geometria di Gauss, Lobacevskij e Bolyai, sia quella di Riemann, evitando di prendere le mosse dal problema delle parallele. Quest'ultimo modo di trattare la questione introdurrebbe surrettiziamente in geometria considerazioni di tipo filosofico. Intenzione di Klein è invece dimostrare che la trattazione algebrica della geometria proiettiva consente di affermare che le geometrie non euclidee altro non sono che casi particolari di geometria proiettiva. Klein precisa che si servirà dell'idea di Cayley in maniera generalizzata, e quindi estendendo il discorso dal piano allo spazio. Egli vuole definire la distanza fra due punti dello spazio, partendo dalla geometria proiettiva.
E così, assume una superficie di secondo grado come *conica fondamentale* (o *assoluto non-degenere*, come vedremo nel prossimo capitolo). Considera poi due punti qualsiasi dello spazio. La retta che unisce questi due punti interseca la superficie fondamentale in altri due punti. Quattro punti formano un birapporto. Dato che il birapporto (come vedremo più dettagliatamente nel prossimo capitolo) è un invariante proiettivo, il logaritmo del suo valore assoluto può essere usato per definire la distanza fra i due punti dello spazio. In ragione di ciò, la superficie assoluta diventa la superficie dei punti all'*infinito*. Considerato poi che essa può essere scelta arbitrariamente, consegue che, se la conica è reale, i due punti all'*infinito* sono reali e distinti, mentre, se essa è degenere, i due punti all'*infinito* sono reali e coincidenti. Infine, se la conica è immaginaria, i due punti all'*infinito* sono immaginari. Dato che l'iperbole ha due punti reali all'infinito, la parabola ne ha uno e l'ellisse nessuno, Klein denota rispettivamente questi tre sistemi metrici come geometrie iperbolica, parabolica ed ellittica. Nel primo caso si costruisce la geometria di Gauss, Bolyai e Lobacevskij, nel secondo quella di Euclide e nel terzo quella di Riemann.
L'ultimo quesito a cui doveva ancora rispondere Klein era la relazione tra questo ambito *proiettivo* e quello *differenziale*.
E allora, utilizzando l'idea di Lie, per la quale le proprietà proiettive delle rette possono essere convertite in proprietà differenziali delle sfere, Klein perviene alla convinzione che, assumendo la sfera come elemento fondamentale dello spazio, le trasformazioni di Lie consentono di affermare che geometria proiettiva e geometria differenziale conseguono identici risultati, pur essendo due modi diversi di trattare la geometria. L'aver compreso che geometria differenziale e geometria proiettiva hanno lo stesso grado di generalità spinge Klein a rendersi conto che il proprio lavoro di unificazione dei metodi geometrici non è ancora terminato.
E alla fine, Klein riesce a comprendere come il suo lavoro e quello di Bernhard Riemann (Breselenz, 17 settembre 1826 – Selasca, 20 luglio 1866) sono lo stesso: entrambi hanno dedotto geometrie metriche da una geometria più generale (*proiettiva* o *differenziale*). E, il linguaggio da loro usato era diverso: Klein si è servito dell'algebra, mentre Riemann si è servito dell'analisi. Lo scopo il medesimo: dimostrare che le tre geometrie metriche corrispondono

a tre distinte "varietà", precisamente quelle a curvatura costante, negativa, nulla o positiva. Scopo di Klein è quindi quello di stabilire un legame fra le varietà riemanniane a curvatura costante e le varietà proiettive. Per compiere una simile operazione si serve dei gruppi di trasformazioni. Diviene allora possibile reinterpretare la geometria metrica sia come caso particolare della geometria proiettiva, sia come caso particolare della geometria differenziale di Riemann.
Jordan ha dimostrato che i movimenti delle figure nello spazio formano un *gruppo* [5]

La geometria euclidea è pertanto lo studio delle proprietà che restano invariate rispetto a un certo gruppo, che Klein chiama principale. La geometria proiettiva è invece lo studio delle proprietà che restano invariate rispetto al gruppo delle trasformazioni proiettive. Da quest'ultima affermazione segue che il gruppo principale o euclideo è solo una parte del gruppo proiettivo, precisamente quella che lascia invariati i punti del cerchio immaginario all'*infinito*. Più in generale, si ottiene dalla geometria proiettiva una qualsiasi geometria metrica, quando si passa dal gruppo di tutte le trasformazioni proiettive a quelli che lasciano inalterata un'equazione di secondo grado. Si ricordi che la conica fondamentale di secondo grado, della quale si è in precedenza parlato, è appunto espressa da un'equazione di secondo grado.
Verso la fine del 1871, Clebsch è convinto che Klein sia ormai maturo per essere nominato professore di geometria. Ne propone la candidatura all'Università di Erlangen, la cui cattedra è vacante dal 1867, anno della scomparsa di von Staudt. Nell'ottobre del 1872, Klein riceve la nomina e, secondo la consuetudine, deve illustrare nella prolusione inaugurale le linee direttrici della propria ricerca. Il 7 dicembre Klein rende pubblica la memoria *Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche* (da noi oggi comunemente chiamato, semplicemente, *Programma di Erlangen*).

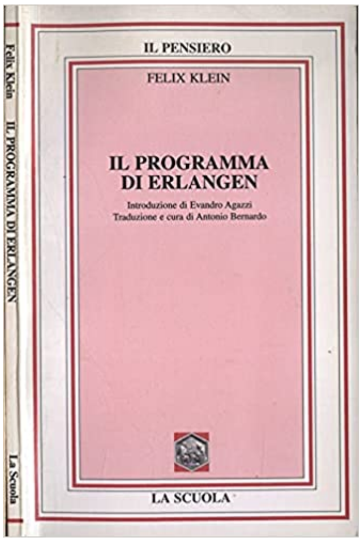
[5]La teoria dei gruppi fu esposta per la prima volta da Évariste Galois (Bourg-la-Reine, 25 ottobre 1811 – Parigi, 31 maggio 1832); brevemente, dicesi un gruppo un insieme G munito di una operazione binaria $*$, in particolare quindi indicato con $(G, *)$, per cui, prendendo elementi qualsiasi di G (indicati con a, b, c) valgano le seguenti proprietà:

- *associativa*: $(a*$ b) $*$ c=a$*$ $(b*$ c)

- *esistenza elemento neutro* e: $a * e = e * a = a$

- *esistenza elemento inverso* a^{-1}: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

.



Il programma di Erlangen

Stando alle dichiarazioni dello stesso Klein, lo scritto in questione era già pronto da circa un anno. In esso, l'autore portava a compimento il progetto di unificazione dell'intera geometria sotto il titolo *"Metodi della geometria"*. Pare che Lie, pur giudicando il saggio di grande interesse, lo abbia arricchito con numerosi spunti critici. Inoltre, sarebbe stato Lie a convincere Klein che l'indagine non riguardasse metodi diversi ma in realtà differenti ricerche. Comunque stiano le cose, Clebsch non ebbe la ventura di vedere il lavoro compiuto, essendo scomparso a soli trentanove anni nel novembre del 1872. Scopo essenziale del lavoro di Klein è l'individuazione di un principio atto a unificare le diverse ricerche geometriche. Il progetto era reso necessario dall'avvento della geometria proiettiva, che aveva sconvolto l'assetto della geometria euclidea: la geometria proiettiva è stata infatti costruita sulle trasformazioni per proiezioni e prescindendo da qualsiasi riferimento al concetto di misura. Per cui la misura non è più considerata una proprietà intrinseca degli oggetti, ma soltanto un sistema di relazioni.
Da ciò consegue che il problema della fondazione di qualsiasi geometria può essere espresso in questi termini: "Data una varietà e un gruppo di trasformazioni di essa, si sviluppi la teoria degli invarianti relativi al gruppo." I moderni indirizzi geometrici, secondo Klein, sono caratterizzati dal fatto che, invece di prendere in considerazione il gruppo principale, trattano gruppi di trasformazioni più estesi: gruppi cioè che contengono al proprio interno il gruppo principale. Il contrasto tra le nuove geometrie e la geometria euclidea si spiega con il fatto che, quando si passa a un gruppo più esteso, solo una parte delle proprietà geometriche si conserva. In altre parole, alcune proprietà delle figure della geometria euclidea non sono più tali, quando si passi a una geometria che usa un gruppo più ampio. Uno di questi gruppi è quello delle trasformazioni proiettive. Il gruppo principale si caratterizza all'interno del gruppo proiettivo per il fatto che le sue trasformazioni lasciano inalterata una particolare figura dello spazio, il cerchio immaginario all'infinito (in effetti, un cerchio che resta tale per qualsiasi trasformazione dello spazio diventa un sistema di misura, rappresentando il luogo dei punti equidistanti da

un punto dato). Le proprietà metriche diventano allora relazioni proiettive delle figure con questa forma immaginaria. Klein introduce a questo punto la nozione di equivalenza delle teorie geometriche o, in termini più moderni, l'isomorfismo tra strutture geometriche: due teorie sono equivalenti, quando i loro gruppi si equivalgono. Con questa osservazione, dimostra senza dirlo esplicitamente che la geometria euclidea è equivalente alle geometrie non euclidee e la geometria metrico-proiettiva alla teoria delle forme binarie.
Formalizzando, quindi, e riassumendo quanto detto, si prenda un insieme S (delle figure) e si studino le proprietà che sono *invarianti* rispetto ad un *gruppo di trasformazioni* G. Per cui, si indichino con i seguenti simboli:

G_E = gruppo ortogonale
W_E = geometria elementare

G_M = gruppo affine di modulo 1
W_M = geometria metrica

G_A = gruppo affine
W_A = geometria affine

G_P = gruppo proiettivo
W_P = geometria proiettiva

G_T = gruppo trasformazioni topologiche
W_T = topologia

Si avranno perciò le seguenti inclusioni:

$G_E \subset \mathrm{G}_M \subset \mathrm{G}_A \subset \mathrm{G}_P \subset \mathrm{G}_T \Longleftrightarrow W_E \supset \mathrm{W}_M \supset \mathrm{W}_A \supset \mathrm{W}_P \supset \mathrm{W}_T$

Per cui, se, rispettivamente, per ciascuna delle geometrie elencate sopra, si hanno le seguenti caratteristiche invarianti:

- W_E: la lunghezza, l'ampiezza angolare, le dimensioni e la forma di qualsiasi figura

- W_M: le aree

- W_A: il parallelismo, la natura di una conica

- W_P: l'allineamento, la collinearità, i birapporti, i gruppi armonici, la proprietà di essere una sezione conica

- W_T: indice di connessione e proprietà topologiche varie.

Per cui, le inclusioni dei gruppi sono l'inverso delle inclusioni delle rispettive geometrie ad esse associate, dove si conservano le proprietà che abbiamo elencato (in breve, come riassunto) per ciascuna geometria.
Quindi, osservando le inclusioni delle geometrie (i W_i), si nota che certi teoremi si conservano da una geometria all'altra. Ad esempio, il *teorema di Talete* che si serve esclusivamente delle relazioni di *parallelismo*, una proprietà propriamente *affine*, vale anche per la *Geometria euclidea* (o come scritto sopra *elementare*). Mentre, ad esempio, il *Teorema di Pitagora*, propria della *Geometria euclidea*, non vale nella geometria *affine*, che si serve delle sole proprietà *affini* (serve il concetto di *distanza* e/o *ortogonalità*, proprie della *Geometria euclidea*). Ed ecco perché tali inclusioni sono proprie.

Capitolo II

Introduzione alle geometrie non euclidee nell'ambito della geometria proiettiva

""La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse" (H. Poincaré)

Il programma di Erlangen, come già accennato nel capitolo precedente, sorge dalla nascita e dall'evoluzione della Geometria proiettiva: gli spazi proiettivi sono considerati il più grande spazio ambiente su cui vivono lo spazio euclideo e quello affine. Per questo, è decisamente importante porre alcuni richiami di tale geometria per poter comprendere a fondo le geometrie non-euclidee in ambito proiettivo. D'altronde, molto interessante anche comprendere le motivazioni che hanno portato allo sviluppo di questa geometria (soluzioni sistemi lineari, proiettività e punti all'infinito). E proprio questo suo contesto storico-didattico, per cui è nata la geometria proiettiva, che ci permetterà di definire le coniche e le quadriche, che saranno utili più avanti per comprendere come poter studiare una geometria non-euclidea e dettagliarne modelli più o meno noti, definendo propriamente una *metrica-proiettiva.*

1. Nascita della Geometria proiettiva

La geometria proiettiva ha le sue prime origini nell'Antica Grecia con autori quali Pappo (290 d.C. - 350 d.C.), ma ancor prima Apollonio di Perga (Perga, 262 a.C. – Alessandria d'Egitto, 190 a.C.). Tuttavia, la fioritura della Geometria proiettiva sbocciò nell'epoca rinascimentale, con le grandi opere artistiche che facevano uso della teoria della *prospettiva* e quindi delle *proiezioni* e *proiettività*. L'Italia era il centro della cultura rinascimentale, in particolare la città di Firenze. E nel 1435 fu compilato il primo manuale della nuova tecnica pittorica sulla *prospettiva*, il *Della pittura* da Leon Battista Alberti (Genova, 18 febbraio 1404 – Roma, 25 aprile 1472). A cui seguì *La prospettiva per la pittura* di Piero della Francesca (Borgo Sansepolcro, 1412 circa – Borgo Sansepolcro, 12 ottobre 1492) nel 1480.
Un esempio di tale uso prospettico lo si può vedere nel famoso dipinto di Raffaello Sanzio (Urbino, 6 aprile 1483 – Roma, 6 aprile 1520), ovvero la *Scuola di Atene*, dove si trovano raffigurati maggiori esponenti della cultura greca, quali Platone, Aristotele e lo stesso Euclide.

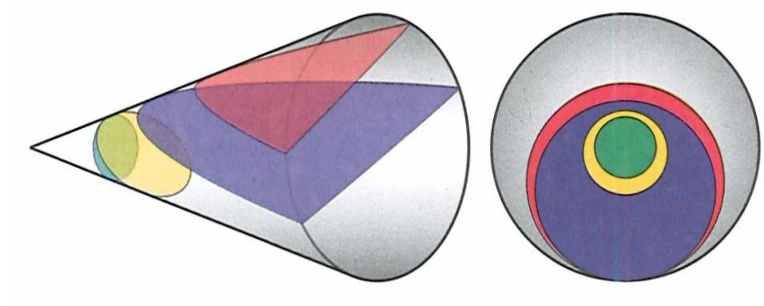
La scuola di Atene, Raffello Sanzio, 1509-1511, Musei Vaticani

Come si nota dalla figura, le linee di profondità del quadro convergono tutte in un unico punto, seppure siano linee *parallele*. Un po' come accade se si dovesse guardare all' *infinito* l'orizzonte delineato dalle rotaie rettilinee di un binario.

Rotaie di un binario in cui il punto di fuga è il sole all'orizzonte

Tale punto è chiamato *punto di fuga*.
Questa tecnica pittorica prende il nome di *prospettiva centrale* (come vedremo, è un esempio di trasformazione del piano detta *proiettività*). Da questa tecnica pittorica, quello che si inizia ad intuire matematicamente è che esiste un nuovo tipo di geometria tale per cui le rette *parallele* non esistono, perché si incontrano sempre in un punto; al più questo punto è un

punto all'*infinito*. Ed, inoltre, questa nuova geometria è relativamente correlata allo studio delle *proiezioni* e delle *sezioni*, in particolare le *sezioni coniche*. Infatti, come si nota anche dal quadro sopra riportato, le linee che si incontrano al centro del dipinto, sembrano appunto formare un cono, con vertice il *punto di fuga*. Infatti, come vedremo, la geometria proiettiva (tale sarà il nome che verrà dato più avanti quando verrà formalizzata la teoria matematica ad essa connessa) è legata allo studio delle *coniche*, che saranno uno strumento indispensabile per poter comprendere lo studio proiettivo delle geometrie non-euclidee.
Il primo matematico che iniziò a formalizzare più in dettaglio la geometria proiettiva fu Girard Desargues (Lione, 21 febbraio 1591 – Lione, ottobre 1661). Nel 1639 pubblicò *Abbozzo di un progetto d'indagine sulle conseguenze delle intersezioni del cono con un piano*. Quello che notò è che, dal punto di vista della prospettiva, guardando dal vertice dello stesso cono, si nota che tutte le sezioni coniche che si possono fare con un piano sono semplicemente cerchi (scompare, perciò, la distinzione delle coniche tra ellissi, parabole ed iperboli, distinzione prettamente di geometria affine, in particolare euclidea, e non proiettiva).



Sezioni coniche

Ed inoltre, scompare un'altra distinzione, come già accennato, quella tra *rette incidenti* e *rette parallele*. Infatti, come già detto, queste ultime si incontrano comunque nel punto all'*infinito*. Questa aggiunta permette di rendere simmetrico il rapporto tra *punti* e *rette*, con una sorta di *dualità*, per cui:

1. Due punti individuano una ed una sola retta

2. Due rette individuano uno ed un solo punto

Questi sono i due assiomi della Geometria proiettiva, dove, come si vede, il primo risulta identico a quello euclideo, il secondo (*duale* al primo) sostituisce il V postulato di Euclide sulle rette *parallele* che ora non esistono più in tale geometria.
Da questi assiomi, si capisce che non esiste un *solo* punto all'infinito, in quanto, date due rette, esiste sempre un unico punto di intersezione tra le

due,al finito o all'infinito. Ma allora, si parla di *retta all'infinito*, che si aggiunge al piano euclideo, formando il cosiddetto *piano proiettivo*, indicato usualmente come $\mathbb{P}^2$.
Per cui, partendo da un piano euclideo π e da un punto P esterno ad esso, si ha il seguente modello:

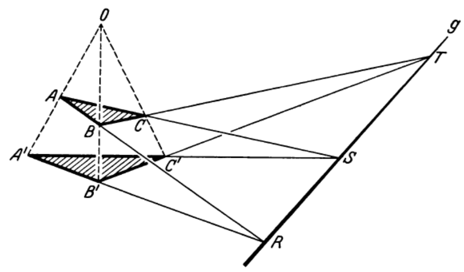
1. i *punti proiettivi* che sono le rette euclidee passanti per il punto P e che o intersecano il piano (punti al finito) o non lo intersecano (punti all'infinito);

2. le *rette proiettive* che sono i piani che passano per P e che o intersecano il piano o no (come prima);

3. le *curve proiettive* che sono insieme di punti proiettivi.

Da questo si capisce che due rette proiettive sono sempre incidenti, perché i relativi piani corrispondenti hanno sempre come punto in comune il punto P.

Il secondo padre della geometria proiettiva fu il generale Jean-Victor Poncelet (Metz, 1º luglio 1788 – Parigi, 22 dicembre 1867). Nel suo *Trattato delle proprietà proiettive delle figure*, scritto in una prigione russa, in seguito alla disastrosa campagna napoleonica, enunciò il *principio di dualità*, cui avevamo accennato sopra. Esso enuncia che *se in un teorema della geometria proiettiva si scambiano tra loro le parole "punti" e "rette", si ottiene ancora un teorema.* Un esempio è proprio uno dei teoremi della geometria proiettiva enunciati dallo stesso Desargues: *Se due triangoli sono in prospettiva da un punto sono anche in prospettiva da una retta, e viceversa.* E questo teorema, appunto, da come è enunciato, è *autoduale*, per cui, per dimostrarne la validità, basterebbe mostrare che vale solo in uno dei due versi, valendo proprio il *principio di dualità.*



Teorema di Desargues

2. Elementi di Geometria proiettiva

Cerchiamo di formalizzare più dettagliatamente quello che rappresenta (in senso moderno) la *Geometria proiettiva*, servendoci principalmente dell'*Algebra lineare* (e anche, per certi aspetti, di quella *multilineare*). Quindi, indispensabile sarà il prerequisito della conoscenza sugli *spazi vettoriali* ed *affini.*

Infatti, troppo complicato sarebbe presentare tale geometria in modo assiomatico.
Come abbiamo detto, l'idea di fondo della nascita di tale geometria si basa sul fatto di *eliminare* il concetto di *parallelismo*, per poter evitare le "ambiguità" derivate dal V postulato di Euclide, prendendo un punto di vista nuovo, più generalizzato. Ed, infatti, come abbiamo visto (per esempio nei quadri), le rette si incontrano o all'*infinito* o al finito (quelle che erano già rette *incidenti* negli *spazi affini*).
Per questo, il problema si sposta nello studiare i sistemi lineari (che sono lo strumento utile per risolvere i problemi di *incidenza* di rette o di qualsiasi tipo di *varietà* [6] *affine*), del tipo:

$$AX = b$$

Dalla teoria dell'algebra lineare [7], sappiamo che tale sistema non sempre ammette soluzione (ecco il concetto di *parallelismo*, dove l'intersezione è l'insieme $\emptyset$). Eppure, come sappiamo, il sistema omogeneo ad esso associato ($AX = 0$), ammette sempre soluzione, perché tuttalpiù ammette soluzione banale ($X = 0$).
Questo ci suggerisce di trasformare, in qualche modo, il nostro sistema lineare di partenza in un sistema omogeneo, in quanto sappiamo che ammette sempre soluzione (almeno quella banale). Per cui il nostro sistema diventa:

$$AX = bX_0$$

Abbiamo, pertanto, introdotto una nuova variabile. E quindi, se il nostro spazio vettoriale di partenza, che faceva da riferimento per gli spazi affini, fosse quello (prendiamo quelli standard per semplicità) di K^n (ove K è un campo, ad esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), ora, aggiungendo una variabile, diventa K^{n+1}.
Perciò, il sistema nuovo ha due tipi di soluzioni:

1. per $X_0 = 1$: abbiamo le soluzioni del sistema originario del tipo $\left\langle \binom{1}{x} \right\rangle$ con $Ax = b$

2. per $X_0 = 0$: abbiamo le soluzioni particolari del tipo $\left\langle \binom{0}{y} \right\rangle$ con $Ay = 0$

Da queste considerazioni, possiamo iniziare a comprendere come poter descrivere, allora, questi nuovi *spazi proiettivi.* La nuova coordinata introdotta, x_0 sarà la coordinata all'*infinito.* Infatti, le nuove soluzioni, all'infinito, sono derivate dal fatto che si ponga, come visto, $x_0 = 0$. Questa equazione sarà l'equazione dell'*iperpiano all'infinito* (a seconda della dimensione dello spazio vettoriale di partenza, esso sarà un punto, una retta, ecc...). Inoltre,

[6] il concetto di varietà è abbastanza complicato qui da sintetizzare; l'idea è quella di approssimare certe raffigurazioni a figure conosciute, come le carte geografiche della Terra (una sfera) su una mappa (piano)

[7] questo accade, come sappiamo dal *Teorema di Rouché-Capelli (R-C)* quando il rango della matrice completa supera quello della matrice incompleta

abbiamo visto che ci siamo posti in una dimensione in più, da n a $n+1$. Di tutte le soluzioni viste, quella banale, del sistema nuovo omogeneo, non ci interessa, in quanto banale di un sistema che non fa fede al problema originario. Quindi, riassumendo in termini matematici di isomorfismo, possiamo dire che gli *spazi proiettivi* sono vettori di $(K^{n+1} \setminus \{0\}) \ / \ K^{\times}$[8].

Cioè, in pratica, si munisce l'insieme $K^{n+1} \setminus \{0\}$, di una *relazione di equivalenza* (per cui valgono le proprietà *riflessiva*, *simmetrica*, *transitiva*). E quindi, l'insieme così formato (proprio $K^{n+1} \setminus \{0\} \ / \ K^{\times}$) si può pensare come :

$$x,\, y \in K^{n+1} \setminus \{0\},\, x \sim y \Longleftrightarrow x = \lambda y \text{ con } \lambda \neq 0$$

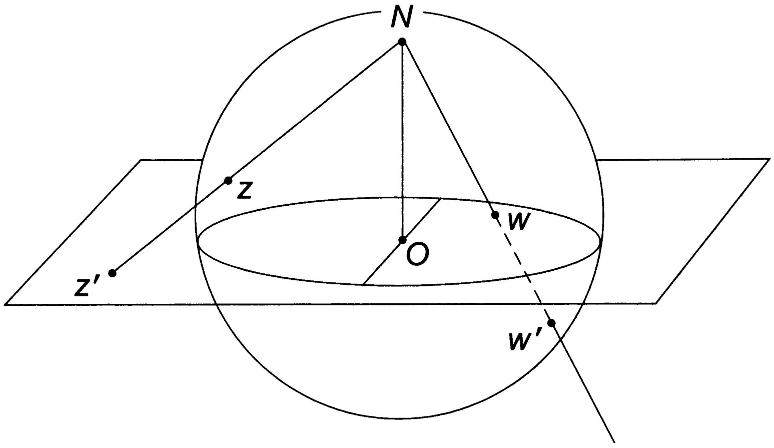
Un altro modo di vedere gli spazi proiettivi è, associando le soluzioni del sistema lineare, come unione disgiunta. Per cui, indicando con $\mathbb{P}^n(K)$, un qualsiasi spazio proiettivo n-dimensionale [9], si avrà che:

$$\mathbb{P}^n(K) = \{ \ \tbinom{1}{x} : \mathrm{x} \in K^n \ \} \sqcup \{ \ \left\langle \tbinom{0}{x} \right\rangle : \mathrm{x} \in K^n \ \}^{10} \cong \mathbb{A}^n(K) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K)$$

Perciò, lo spazio proiettivo è una estensione dello spazio affine con un iperpiano all'infinito. Ad esempio, il piano proiettivo ($n = 2$) è generato dal piano affine con la retta proiettiva all'infinito.
Studiamo più dettagliatamente il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Come sappiamo, per verificare la validità di una teoria matematica, bisogna vedere che sia consistente, fornendone un modello, sfruttando la consistenza della *Geometria euclidea.* Per cui, mostriamo come il piano proiettivo sia isomorfo alla superficie della sfera euclidea.
Allora, dobbiamo trovare una mappa che sia biiettiva tra i punti del piano proiettivo (piano affine con punti all'infinito) e la sfera euclidea (indicata con $\mathbb{S}^2$; essa viene anche chiamata in modo più preciso *sfera di Riemann*). Questa mappa si chiama *proiezione stereografica*: da uno dei poli (vedasi figura sottostante), ad esempio il polo nord N, vengono mandate le rette del fascio per N sul piano equatoriale. Come si vede, allora, esiste un'unica intersezione tra questa retta ed il piano (in figura indicati con l'apice '). E, inoltre, interseca la sfera $\mathbb{S}^2$ in un altro unico punto (z e w).

[9] n-dimensionale rispetto alla dimensione proiettiva, mentre, vettorialmente, sarebbe n+1-dimensionale

[10] infatti, per R-C, la soluzione del sistema lineare è data da una soluzione particolare $\binom{1}{x}$ più lo spazio generato dalle soluzioni della omogenea associata, ovvero $\left\langle \binom{0}{x} \right\rangle$



Proiezione stereografica quale modello di piano proiettivo $\mathbb{P}^2$

L'unica retta per cui non c'è intersezione con il piano equatoriale è una retta parallela al piano passante per N. Si può pensare, quindi, che l'unica intersezione sia all'infinito, aggiungendo altri punti al piano (che chiamiamo $\mathbb{R}^2$). Ovvero, topologicamente, stiamo *compattificando* il piano. Così, facendo, si deve aggiungere una nuova coordinata x_0. E, quindi, alle coordinate affini si hanno ora, come già accennato, le *coordinate omogenee* $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$.
Una volta introdotti gli spazi proiettivi, ci viene automatico studiare le trasformazioni naturali che avvengono in questo tipo di spazi proiettivi, che lasciano invariate certe proprietà proprie, dette proprietà *proiettive* (vedremo in particolare il *birapporto*, perché ci servirà per introdurre le metriche-proiettive di Cayley-Klein (vedasi l'ultimo paragrafo).
Partiamo, perciò, dalle applicazioni proiettive. Se, ad ogni spazio proiettivo è associato il suo spazio vettoriale da cui viene costruito (noi, per semplicità dei discorsi, abbiamo preso fino ad ora spazi vettoriali standard K^n). Quindi, non risulta complicato pensare che ad ogni applicazione proiettiva si associa una applicazione lineare (che usa lo spazio vettoriale ad esso associato). E, risulta abbastanza ovvio che due applicazioni lineari f, g sono sovrastanti la stessa applicazione proiettiva se e solo se $g = \lambda f$, $\forall\ \lambda \in K^{\times}$ (così come erano identificati gli elementi di ogni spazio proiettivo, attraverso la relazione di equivalenza $\sim$).
Quando l'applicazione proiettiva risulta un automorfismo (biettivo in sé), allora si chiamerà specificatamente *proiettività*. Il nucleo di tale mappa sarà, quindi, il vuoto proiettivo, a cui sarà associato il sottospazio banale nullo per lo spazio vettoriale ad esso associato. Per cui, anche tra gli spazi vettoriali ci sarà un isomorfismo, a meno di proporzionalità, come indicato sopra.
Per cui, il gruppo delle proiettività di un qualsiasi spazio proiettivo, con associato il relativo spazio vettoriale V, sotto l'operazione di composizione, sarà isomorfo a $GL(V)/K^{\times}$, e verrà indicato con $PGL(\mathbb{P})$.
Per poter definire una applicazione proiettiva, è indispensabile definire innanzitutto cosa sia un *sistema di riferimento proiettivo*.
Sia $\mathbb{P}^n(K)$, ovvero la dimensione proiettiva è n, ma come visto $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$. Prendendo quindi $n+1$ punti P_i, per $i = 0, ..., n$ con le rispettive

coordinate omogenee $[x_0, x_1, ..., x_n]$ per ciascun punto P_i, equivale a prendere $n+1$ vettori dello spazio vettoriale K^{n+1} con una base di riferimento, che per semplicità prendiamo quella canonica $\mathcal{E} = \{e_0, e_1, ..., e_n\}$.
Questi punti (o vettori) siano in *posizione generale* (cioé i vettori siano *linearmente indipendenti*). Infatti, essendo che ogni vettore $v_i = \lambda_i u_i$, con $\lambda_i \neq 0$, allora, per vedere che sono lin. indipendenti e per ipotesi siano vettori indipendenti:

$$\textstyle\sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i = 0 \implies \sum_{i=0}^{n} \mu_i \lambda_i u_i = 0 \implies \mu_i \lambda_i = 0$$

Ma, i $\lambda_i \neq 0$. Quindi, risulta che tutti i μ_i devono essere nulli.
Per cui, si ha che questi punti P_i sono *ben definiti*, appunto a meno di proporzionalità. E allora sono detti *punti fondamentali.* Da notare che, inoltre, questi definiscono un altro punto $U = [e_0 + e_1 + ... + e_n]$. Anche questo ultimo punto, detto *punto unità*, è in posizione generale con gli altri punti P_i, proprio per il fatto che i vettori siano definiti a meno di proporzionalità.
Quindi, si ha che un sistema di riferimento proiettivo (di uno spazio proiettivo n dimensionale, con spazio vettoriale associato K^{n+1}), con coordinate omogenee, forma una base determinata da $n+2$ punti, quelli fondamentali e quello unità.
Una volta definito una base degli spazi proiettivi, con il riferimento proiettivo associato da quei punti, si può dedurre un analogo teorema di struttura delle applicazioni proiettive come era per gli spazi vettoriali, ovvero:

Teorema di struttura delle applicazioni proiettive: Esiste un'unica applicazione proiettiva che manda ordinatamente il primo riferimento di uno spazio proiettivo nel secondo, se questi hanno la stessa dimensione, e si tratta proprio di una proiettività.

Per introdurre l'invariante del *birapporto*, è importante studiare le proiettività sulla retta proiettiva, ovvero su $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$.
Si prenda, perciò, un punto P qualsiasi di coordinate $[x_0, x_1]$. La mappa su P sarà data da una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL(2, K)$ tale che:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}$$

Per cui, in coordinate affini, ponendo $x = x_1/x_0$, si può scrivere questa mappa $\phi(x)$ come:

$$\phi(x) = \tfrac{c+dx}{a+bx}$$

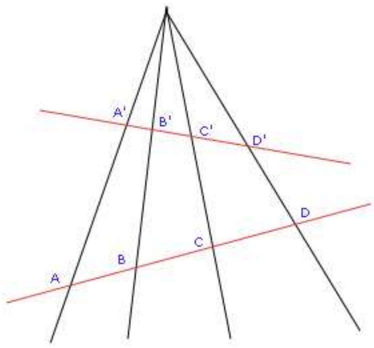
Dal teorema di struttura, si prenda l'unica proiettività tale per cui un punto a viene mandati all'infinito, un punto b viene mandato a 0, ed un punto c viene mandato ad 1. E allora, si vede chiaramente che questa proiettività è definita da:

$$\phi(x) = \frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}$$

Possiamo, allora, definire il *birapporto* come il valore della trasformazione precedente, che come si vede, per come è definito dal teorema di struttura, è invariante per proiettività. Per cui, il birapporto sarà così definito:

$$CR(a,b,c,x) = (a,b,c,x) := \frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}$$

Da un punto di vista geometrico, si osservi la figura sottostante.



Birapporto su rette intersecate da un fascio per un punto

Il birapporto è inteso, data la sequenza dei punti in figura, come:

$$CR(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$

Utilizzando il *teorema dei seni* per i vari triangoli costruiti dal fascio e dalle trasversali, si osserva che il birapporto dipende solo dagli angoli tra le quattro rette scelte del fascio e non dalle trasversali: proiettando da centro O i quattro punti su un'altra retta ancora, la quantità scritta rimane invariata. Mentre, ciò non accade per il *rapporto semplice* tra due segmenti (esso varia al variare delle rette secanti!).

3. Coniche e quadriche degli spazi proiettivi

L'oggetto più semplice dopo i sottospazi lineari, di primo grado (*affini* o *proiettivi* che siano), ci sono le cosiddette *quadriche*, ovvero gli "zeri di polinomi di secondo grado". Se ci troviamo negli spazi proiettivi, presentati brevemente nel paragrafo precedente, indicheremo allora la quadrica con una espressione del tipo $f(x_0, x_1, ..., x_n)$, dove $f \in K[x_0, x_1, ..., x_n]_h$, ovvero f è un polinomio omogeneo (pedice h), con $degf = 2$ (grado 2). Se $n = 2$, le quadriche vengono dette propriamente *coniche*.
Più in dettaglio, abbiamo detto che cerchiamo gli zeri di tali polinomi, che rappresentano l'equazione della quadrica, ovvero dell'iperpiano di secondo grado. Infatti, come si nota facilmente, i punti che soddisfano tale equazione sono definite a meno di proporzionalità, in coordinate omogenee. In particolare, $f(\lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_0, x_1, ...x_n)$. E quindi, l'equazione

$f(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$ è ben definita, negli spazi proiettivi. Mentre, determinare un qualsiasi valore di $f(x_0, x_1, ...x_n)$, in genere, perché dipende dal valore $\lambda \neq 0$, scelto arbitrariamente. Tuttavia, per essere più precisi, bisognerebbe definire i punti della quadrica sul *supporto* della stessa, ovvero:

$$supp\mathscr{Q} = \{X =< v >\in \mathbb{P}^n(K) : Q(v) = 0\}$$

Questo perché vogliamo che quadriche diverse abbiano supporti diversi. Per esempio, si prenda $Q(v) = X_0^2 + a^2X_1^2$ (con $a \neq 0$). Al variare di a, sono quadriche tutte distinte, anche se in $\mathbb{R}$, il supporto reale sarebbe lo stesso (il vuoto proiettivo), mentre in $\mathbb{C}$ (*campo algebricamente chiuso*)[11], il supporto è formato da coppie di punti distinti (*coniugati*).
Qualsiasi polinomio di secondo grado si può scrivere in maniera generalizzata nel seguente modo:

$$f(x_0, x_1, ...x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Ma, essendo K un campo, e quindi valendo la proprietà *commutativa* ed *associativa* in particolare, posso raccogliere tutti i termini dei monomi simili e, quindi, si può associare biunivocamente una matrice A e scrivere l'espressione sopra nel seguente modo (con A matrice simmetrica):

$$f(x_0, x_1, ...x_n) = \mathbf{X}^tA\mathbf{X}$$

Con $\mathbf{X}$ si indica il vettore $\mathbf{X} = [x_0, x_1, ..., x_n]$.
Per cui, si capisce subito che lo studio delle coniche (e quadriche più in generale) si riduce ad uno studio delle forme bilineari simmetriche, studiandone gli invarianti algebrici ad esso associati, che corrisponderanno a proprietà geometriche ad esse correlate.
Infatti, due quadriche a cui sono associate rispettivamente due matrici simmetriche A e B, si dicono congruenti tra loro se $\exists$ P tale per cui $B = P^tAP$. Perciò, si classificheranno le quadriche (nel nostro caso particolare che ci interessa, le coniche) in base al variare delle trasformazioni P. Per cui, se P indica trasformazione proiettiva (e abbiamo visto che questo equivale a dire che $P \in PGL(\mathbb{P})$), allora la classificazione delle quadriche sarà di tipo proiettivo e verranno conservate le proprietà proiettive (come il birapporto, definito stavolta tra punti del supporto della conica). E così per gli altri tipi di trasformazioni, come abbiamo generalizzato ad esempio già nel paragrafo sul *Programma di Erlangen*.
Per quanto detto prima, si ha che $f(\lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_0, x_1, ...x_n)$ (nel nostro caso, stiamo studiando le quadriche, quindi il $deg(f) = 2$, per quello si ha λ^2). Per cui, la classificazione proiettiva non solo è a meno di proporzionalità, ma in particolare a meno di una proporzionalità di un quadrato. Ovvero, dipenderà dalla struttura del gruppo moltiplicativo $K^\times$ / $(\mathrm{K}^\times)^2$.

[11]Si dice campo algebricamente chiuso, un qualsiasi campo per cui ogni polinomio non costante ammette soluzione nel campo

Per cui, se il campo è algebricamente chiuso, come $\mathbb{C}$, si avrà che ogni elemento di tale campo è un quadrato. Mentre, se il campo non è chiuso, come $\mathbb{R}$ (che è un campo ordinato), si avrà un altro tipo di classificazione.
Per capire che tipo di classificazione si avrà nei due casi sopra indicati, bisogna vedere (per quanto detto prima) come sono classificate le forme bilineari simmetriche. E, come sappiamo, si possono diagonalizzare tutte queste forme simmetriche in una forma semplice (detta forma *canonica*), per cui si avranno gli autovalori sulla diagonale.
Da quello che si intuisce, nei campi algebricamente chiusi come $\mathbb{C}$, si avranno degli autovalori canonici del tipo 0 o 1. Mentre, per campi ordinati come $\mathbb{R}$, si avranno anche autovalori di tipo -1. Tutto questo è riassunto, e dimostrato, dai seguenti teoremi:

Teorema di classificazione di forme simmetriche con K chiuso per radici quadrate: Se nel campo K ogni elemento è un quadrato, allora le forme bilineari simmetriche su uno spazio V sono classificate dal rango (di una qualunque matrice associata).

Teorema di Sylvester (o legge di inerzia di Sylvester): Sia K campo ordinato, g una forma bilineare simmetrica su V spazio vettoriale. Allora, esistono due interi p,q $\in$ N tale per cui $p + q = r$[12] (r è il rango della forma/matrice). Sia che per ogni base ortogonale per g vi siano p vettori di forma positiva e q vettori di forma negativa. Per cui, le forme simmetriche sono classificate dalla coppia (p,q) (detta *segnatura* della forma o della matrice ad essa associata). [13]

Questi teoremi non li dimostriamo [14], ma rimandiamo a qualsiasi manuale di algebra multilineare un approfondimento a riguardo, per non dover distogliere lo sguardo degli obiettivi che erano stati prefissati nella introduzione di questa tesi. L'unica cosa, che era importante accennare, era il rapporto tra le forme quadratiche, le quadriche, le forme bilineari, i polinomi omogenei e le loro classificazioni in base alle trasformazioni scelte, a seconda degli spazi su cui vogliamo studiare le proprietà geometriche che si conservano, in base proprio al *Programma di Erlangen.*
L'ultima nozione che ci interessa, prima di addentrarci allo studio delle diverse geometrie non-euclidee, è quella di quadrica *degenere*. In pratica, una quadrica è *degenere* se la matrice ad essa associata (come visto prima) è degenere, ovvero non ha rango massimo, e quindi il *determinante* della matrice è uguale a zero.

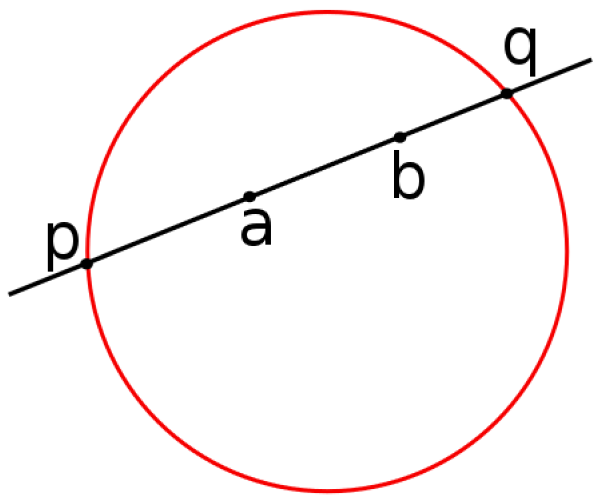
[12]esiste anche un indice di inerzia, ovvero: $p - q = i$, da cui questo teorema prende anche il nome in una forma totalmente equivalente, ma che non mostriamo...

[13]come si nota, non solo la segnatura determina la forma, ma anche il rango ad esso associato, in quanto $p + q = r$, come detto nel teorema stesso

[14]la dimostrazione parte dall'esistenza di basi ortogonali che permettano una decomposizione ortogonale degli spazi vettoriali associati, in modo tale da saper diagonalizzare la matrice; un procedimento di ortogonalizzazione molto interessante è proprio quella di Gram-Schmidt

4.Geometrie euclidee e non-euclidee dal punto di vista proiettivo

Finalmente, abbiamo tutti gli strumenti necessari per poter descrivere in modo più generalizzato lo studio delle varie geometrie, *euclidee* e *non-euclidee*. Infatti, come abbiamo visto nel corso della storia della Matematica, all'inizio le proprietà *metriche* furono completamente sconnesse con le proprietà *proiettive*. Alla fine, con un'attenta analisi di studio di Cayley-Klein, furono messe in relazione tra di loro. A tal punto da studiare le geometrie attraverso *metriche-proiettive*, chiamata proprio *metriche di Cayley-Klein*.
La strategia di fondo è quella di fissare una quadrica $\mathscr{Q}$ in uno specifico spazio proiettivo $\mathbb{P}$ n-dimensionale (noi approfondiremo lo studio dettagliato dello spazio 2-dimensionale). Tale quadrica verrà chiamata *quadrica assoluta*. Per avere la certezza dell'esistenza di punti, prendiamo sempre un campo algebricamente chiuso, in particolare $\mathbb{C}$. Infatti, vogliamo, una volta definita la quadrica assoluta, prendere due punti A, B, qualsiasi dello spazio proiettivo (ma non appartenenti a $\mathscr{Q}$) e la retta da loro definita $A \vee B$. Si ha, perciò, proprio perché siamo in uno spazio proiettivo in un campo algebricamente chiuso, l'esistenza di altri due punti P, Q, di intersezione tra la retta $A \vee B$ e la quadrica assoluta. [15] Avendo scelto i punti A e B in questo modo, la retta e la quadrica ammetteranno proprio due punti distinti tra loro (nello spazio 2-dimensionale, la quadrica è conica, e quindi di grado proprio $deg\mathscr{Q} = 2$).



Metriche di Cayley-Klein

Allora, la metrica che si vuole così definire, a partire dalla quadrica assoluta scelta arbitrariamente, è la seguente:

[15]In particolare, si veda il **Teorema di Bézout** sul numero di intersezioni tra due curve algebriche di gradi rispettivamente d e d'

$$d(A,B) := \alpha(A,B,P,Q)$$ [16]

In questo modo, si definisce una metrica che dipenderà solo da *proprietà proiettive*, ovvero il *birapporto* tra questi punti che giacciono su una retta, proprio $A \vee B$.
Così facendo, allora, la geometria che si vuole definire fissando una quadrica, dipenderà solamente dalla quadrica stessa scelta.
L'esempio più immediato è quello della *Geometria euclidea*. Infatti, come già in parte accennato, lo spazio euclideo si può definire come uno spazio proiettivo con un fissato iperpiano all'infinito. E su tale iperpiano, definire una forma quadratica positiva (la cosiddetta, appunto, *metrica euclidea*). Questo corrisponde a fissare una *quadrica degenere*. Ad esempio, nel caso 2-dimensionale, corrisponde a fissare la retta all'infinito (che verrà contata due volte, ovvero $x_0^2 = 0$) che interseca il cosiddetto *cerchio immaginario* [17], di forma $x_1^2 + x_2^2 = 0$.
La quadrica si può pensare come il duale dell'iperpiano all'infinito. Ovvero, se l'iperpiano $x_0^2 = 0$ è la quadrica Ω, allora il cerchio immaginario $x_1^2 + x_2^2 = 0$ sarà appunto Ω^*. Quadrica e retta all'infinito ammettono due punti di intersezione tra loro, i cosiddetti *punti ciclici*.
La quadrica duale della retta all'infinito ha una struttura matriciale del tipo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da questa forma matriciale, che descrive la forma quadratica positiva ad essa relativa, nasce, appunto, la *metrica euclidea*. Infatti, se si prendono due punti (proiettivi) qualsiasi X e Y, applicati contro tale forma Φ, si definisce proprio il *prodotto scalare* da cui la metrica euclidea dipende.
Infatti:

$$X^T \Phi Y = \sum_i x_i \cdot y_i$$ [18]

Il caso della *Geometria euclidea* è proprio un *caso limite* delle altre geometrie, *ellittica* e *iperbolica*.
Infatti, se non si prende una conica *degenere*, ma coniche assolute *non-degeneri*, si hanno gli altri due casi:

1. conica *senza punti reali*, di segnatura (3,0), si ha la **geometria ellittica** (che affronteremo più dettagliatamente nel prossimo capitolo), con la *metrica ellittica* ad essa associata; la conica assoluta è $\Omega(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$

[16] La costante $\alpha \neq 0$ esprime il fatto che la distanza così definita dipenda solo da proprietà proiettive, e quindi è definita *a meno di proporzionalità*. Tale costante potrà essere fissata, a seconda del tipo di unità di misura che si voglia imprimere nella struttura euclidea ad essa associata.

[17] come soluzioni, infatti, ammette solo soluzioni immaginarie

[18] dove x_i e y_i sono le componenti dei punti X ed Y

2. conica *con punti reali*, di segnatura (2,1), si ha la **geometria iperbolica**, con la *metrica iperbolica* ad essa associata; la conica assoluta è $\Omega(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$

Come si osserva, allora, nel piano proiettivo ci sono solamente queste tre possibilità di varie geometrie associate ad una quadrica assoluta.
Il caso euclideo è caso limite perché, come si vede, ponendo $x_0 = 0$ nelle coniche assolute nei due casi (ellittico o iperbolico), si ha la stessa quadrica del caso euclideo, ovvero $\Omega(x) = x_1^2 + x_2^2$.
L'importanza della conclusione a cui erano arrivati Cayley e Klein per lo studio di qualsiasi geometria con le metriche-proiettive era dovuto al fatto che non si dovesse più ricorrere al dilemma del V postulato di Euclide, non dovendo più ricorrere al concetto di *parallelismo*, perché tutto ricorreva alla *Geometria proiettiva.*

Capitolo III

Geometria ellittica

“”Allo stato attuale della scienza chiunque volesse potrebbe generalizzare e creare in geometria; non è più indispensabile il genio per aggiungere una pietra all’edificio” (Chasles)

Dopo aver introdotto lo studio dettagliato delle geometrie non-euclidee in ambito proiettivo, grazie al programma redatto da F. Klein, ovvero il *Programma di Erlangen*, verrà proposto un esempio di geometria non-euclidea: la geometria ellittica. Da un punto di vista terminologico, la geometria ellittica non è propriamente non-euclidea, perché non si ottiene dalla geometria assoluta con l’aggiunta della negazione del V postulato di Euclide. Tuttavia, si è conservato nel tempo questo termine anche per tale geometria. In base alla dimensione dello spazio proiettivo su cui viene proposta la geometria ellittica, ci sono vari modelli. Specificatamente, qui verrà proposta in dimensione (proiettiva) due un modello che conosciamo abbastanza, ovvero quello sferico.

1. Esempio di geometria non-euclidea

Ora studieremo più dettagliatamente il caso della *Geometria ellittica* nello spazio proiettivo 2-dimensionale, a partire dalla strategia introdotta nel paragrafo precedente. In questo modo, vedremo come si riusciranno a ricavare certi risultati di Geometria ellittica tra i più noti, come ad esempio che *non esistono rette parallele* (mentre in *Geometria iperbolica* ne esistono *infinite*).[19]
Si prenda, perciò, la conica ellittica che diventa la nostra *quadrica assoluta*. Ovvero, sia $\Omega(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. O più in generale, sia $\Omega(x, y) = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$, dove x e y sono due punti qualsiasi del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$. Si prenda, ora, la retta $x \vee y$. Essa avrà punti del tipo $\lambda x + \mu y$, con λ, $\mu \in \mathbb{R}$.
Per determinare i punti di intersezione della conica con la retta congiungente i punti x e y, allora, si ha che:

$$\Omega(\lambda x + \mu y) = 0$$

Ovvero, diventa, svolgendo i calcoli:

$$\lambda^2\Omega(x) + 2\lambda\mu\Omega(x, y) + \mu^2\Omega(y) = 0$$

[19] da qui i nomi: *ellittico* significa *mancanza*; *iperbole* significa *eccesso*.

Da cui, risolvendo l'equazione precedente di secondo grado in λ, si avrà che:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu\Omega(x,y) \pm |\mu|\sqrt{\Omega^2(x,y)-\Omega(x)\Omega(y)}}{\Omega(x)}$$

Senza perdita di generalità, si può porre $\mu = 1$ e quindi avere che:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega(x,y) \pm \sqrt{\Omega^2(x,y)-\Omega(x)\Omega(y)}}{\Omega(x)}$$

Così facendo, allora, si è riusciti a trovare i due punti di intersezione:

$$x', y' = \lambda_{1,2}x + y$$

Il discriminante delle soluzioni dell'equazione di II grado in λ è negativo, in quanto la forma $\Omega(x, y)$ è definita positiva e quindi vale la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**, ovvero $\Omega^2(x, y) \leq \Omega(x)\Omega(y)$.
Per cui, in definitiva $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Infatti, dal fatto che il discriminante è negativo (ed $= 0$ se e solo se $x = y$, ovvero se i due punti coincidono):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega(x,y) \mp i\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)-\Omega^2(x,y)}}{\Omega(x)}$$

Allora, una volta trovati i punti di intersezione, si può calcolare il birapporto che definisce la metrica ellittica di Cayley-Klein; ci poniamo in un eventuale sistema di riferimento che semplifica i calcoli a tal punto da avere $x = \infty$ e $y = 0$, avendo così:

$$(x, y, x', y') = (\infty, 0, \lambda_1 x + y, \lambda_2 x + y) = (\infty, 0, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{(\lambda_1-\infty)(\lambda_2-0)}{(\lambda_1-0)(\lambda_2-\infty)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Più specificatamente, allora, continuando i calcoli, si ha che:

$$(x, y, x', y') = \frac{\Omega(x,y)+i\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)-\Omega^2(x,y)}}{\Omega(x,y)-i\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)-\Omega^2(x,y)}}$$

Per arrivare ad una definizione più nitida di metrica ellittica, poniamo le seguenti semplificazioni:

$$\alpha = \Omega(x, y) \ , \ -\beta^2 = \Omega^2(x, y) - \Omega(x)\Omega(y)$$

Da cui, il birapporto (x, y, x', y') diventa più semplicemente:

$$\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}$$

E tale espressione diventa $= 1$ se e solo se $\beta = 0$, cioé se i due punti coincidono (alla *Cauchy-Schwarz*).

Ora, se si adotta per il numero complesso $\alpha+i\beta$ la rappresentazione *esponenziale* dei numeri in $\mathbb{C}$, ovvero sia $\alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}$. Da cui $\alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta}$, in quanto complessi coniugati. Il modulo di tali numeri complessi, ovvero il raggio ρ, è $\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)}$.[20]

Sapendo, inoltre, che $e^{i\theta}$=cos(θ) + $i$sen(θ), si ha che:

[20] basta applicare proprio il **Teorema di Pitagora** nel campo dei numeri complessi, come si è solito fare in $\mathbb{C}$.

$$\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho} = e^{i\theta} = \frac{\Omega(x,y)}{\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)}} + i\frac{\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)-\Omega^2(x,y)}}{\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)}} = cos(\theta) + isen(\theta)$$

Per cui, in definitiva, abbiamo:

$$cos(\theta) = \frac{\Omega(x,y)}{\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)}}\ ,\ sen(\theta) = \frac{\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)-\Omega^2(x,y)}}{\sqrt{\Omega(x)\Omega(y)}}$$

Da quanto detto, abbiamo che l'espressione del birapporto diventa:

$$(x, y, x', y') = \frac{i\theta}{-i\theta} = e^{2i\theta}$$

Quindi, il birapporto è di norma unitaria. In particolare, diventa 1 se e solo se i due punti coincidono e quindi conviene prendere come espressione della distanza dei due punti una funzione di esso che si annulli quando i punti coincidono. Tale è il *logaritmo* del birapporto, ovvero $log(x, y, x', y') = log(e^{2i\theta}) = 2i\theta$ (che si annulla quando l'argomento del logaritmo è 1, e quindi i due punti coincidono e la distanza $d(x, y) = 0 \iff x = y$, caratteristica principale di qualsiasi metrica/distanza).[21]

Siccome, poi, generalizziamo secondo le proprietà proiettive, tale logaritmo del birapporto, che definisce la *metrica ellittica*, si definisce a meno di una costante arbitraria R, che chiamiamo *raggio di curvatura*, il cui inverso è detto *curvatura*.[22]
Inoltre, poiché il valore del logaritmo del birapporto è del tipo $2i\theta$, volendo valori reali (proprio perché parliamo di distanze...), definiamo più propriamente la distanza nel **piano ellittico** (o **metrica ellittica** del piano) come la funzione del tipo:

$$\begin{gathered} d_e : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (P, Q) \longmapsto d_e(P, Q) = \frac{R}{2i}\, log(e^{2i\theta}) = R\theta. \end{gathered}$$ [23]

É facile verificare che, così definita la distanza tra punti di un piano ellittico, valgono effettivamente le proprietà di una qualsiasi metrica. Come, ad esempio, il fatto che la distanza si annulla se i due punti coincidono. O la simmetricità, verificabile facilmente attraverso la definizione di birapporto. Meno facile la *sub-additività* della metrica (ovvero, $d_e(P, Q) \leq d_e(P, S) + d_e(S, Q) \forall P, Q, S \in \mathbb{P}^2$, detta anche *disuguaglianza triangolare*), ma è verificata facilmente dalle proprietà del logaritmo (ed è questo anche uno dei motivi per cui viene utilizzato).
Il caso del piano ellittico è molto interessante, anche perché, come si può notare, la conica assoluta è auto-duale, ovvero $\Omega(x, y) = \Omega^*(x, y)$. Infatti, essa ha forma matriciale del tipo:

[21] tale espressione ricorda storicamente la **formula di Laguerre**

[22] che dipende dal raggio della sfera, come vedremo, scelta di tale modello di geometria ellittica

[23] il *log* qui è propriamente il *logaritmo principale* in $\mathbb{C}$, per la cui definizione dettagliata rimandiamo a qualsiasi manuale di *Analisi complessa* o di *Metodi matematici*

$$\Phi = \Phi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dualmente, si stanno prendendo non più punti ma rette. E allora, non si sta più calcolando la distanza tra punti, ma l'angolo tra rette. Ed i calcoli per calcolare tale angolo sono proprio lo stesso che abbiamo fatto prima, proprio perché la quadrica assoluta è auto-duale.
L'unica differenza a cui dobbiamo fare molta attenzione è che l'angolo non ha unità di misura; quindi, nella definizione di angolo tra rette nel piano ellittico, dobbiamo togliere la nozione di *raggio di curvatura* che avevamo inserito nella definizione di metrica ellittica, proprio perché l'angolo è un numero puro. Per cui, ripercorrendo gli stessi calcoli, si potrà definire così l'angolo tra rette r e s:

$$\alpha(r, s) = \tfrac{1}{2i} log(e^{2i\theta}) = \theta.$$

Questo ci permette di vedere una relazione interessante tra il concetto di distanza tra punti e angolo tra rette, che ci permette di estendere la dualità proiettiva anche per le nozioni di metrica ellittica.
In particolare si ha la seguente relazione:

$$\tfrac{d(P,Q)}{R} = \alpha(p, q).$$

Dove, P, Q sono punti qualsiasi del piano proiettivo e p, q i corrispondenti punti del piano proiettivo duale (ovvero le rette duali).

2. Risultati di geometria ellittica

Dall'ultima osservazione fatta nel paragrafo precedente, proprio sulla auto-dualità delle proprietà metriche ellittiche, possiamo annotare fin da subito dei risultati strabilianti della *Geometria ellittica* del piano ellittico. Ovvero che è *"due triangoli con lati uguali hanno angoli corrispondenti uguali"* e dualmente che *"due triangoli con angoli uguali hanno lati corrispondenti uguali"*.[24] Questo ci fa già arrivare ad un risultato molto interessante, che non vale in *Geometria euclidea*, ovvero che:

Prop.: *Nella Geometria ellittica, non esistono triangoli simili non uguali*

Questo è uno dei risultati storici che aveva conseguito lo stesso Saccheri, ma non aveva considerato come proposizione di una nuova Geometria, bensì come una formulazione logicamente equivalente al V postulato di Euclide; ma allora, in *Geometria euclidea "Esiste almeno una coppia di triangoli simili non uguali"*.

Un altro risultato importante della *Geometria ellittica*, che deriva proprio dalla definizione di metrica ellittica è il seguente:

[24] Si prenda proprio la relazione che abbiamo visto tra la distanza tra punti e l'angolo tra rette!

Prop.: *Per la Geometria ellittica, le rette sono forme chiuse di lunghezza finita*

Questo risultato è dovuto alla *periodicità* della funzione esponenziale complessa $e^{2i\theta}$ e alla definizione della funzione *logaritmo principale*:

$$log(x+iy) = log|x+iy| + i\beta(x,y),$$
$$\text{ove } \beta(x,y) \in (-\pi, \pi] \text{ è l'}\textit{argomento principale}$$

Per cui, nel caso del nostro logaritmo del birapporto:

$$log(e^{2i\theta}) = log|e^{2i\theta}| + 2i\theta = log(1) + 2i\theta = 2i\theta.$$ [25]

E analogamente, per come è definito l'argomento principale, si ha:

$$log(e^{2i(\theta+h\pi)}) = log|e^{2i(\theta+h\pi)}| + 2i\theta = 2i\theta \ \forall h \in \mathbb{Z}$$

Da cui:

$$\tfrac{R}{2i}log(e^{2i\theta}) = \tfrac{R}{2i}log(e^{2i(\theta+h\pi)})$$

E questo implica che $\frac{R}{2i}log(e^{2ih\pi}) = 0$.
Perciò, se P e Q sono punti distinti del piano ellittico tali che il birapporto descritto nella metrica ellittica sia $e^{2ih\pi}$, si ha che, per quanto detto, $d(P,Q) = 0$, $\forall h \in \mathbb{Z}$. Ma, allora, tutti i punti che formano tale birapporto coincidono e quindi tali rette sono *chiuse*, come dovevamo dimostrare.
Adesso cerchiamo di determinare la lunghezza massima di tali rette chiuse. Dal fatto che l'argomento principale "vive" nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, si ha che $\theta \leq \pi$, per cui si ha che:

$$d(A,B) = \tfrac{R}{2i}log(e^{2i\theta}) = \tfrac{R}{2i}2i\theta \leq R\pi \ \forall A, B \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Questo risultato oltre a dirci che le rette hanno lunghezza finita, si deduce che:

Prop.: *Le rette di lunghezza massima hanno misura*

$$R\pi$$

.

Tuttavia, si dimostra che:

Prop.: *La distanza massima tra due punti è*

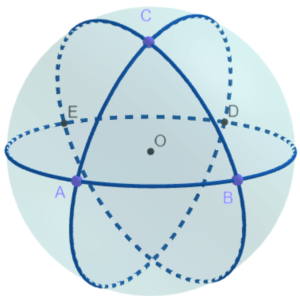
$$R\frac{\pi}{2}$$

[25] qui stiamo usando lo stesso simbolo tra log reale e log complesso...

Dim.: La distanza massima di due punti qualsiasi di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, P e P' si ha quando questi sono l'uno reciproco dell'altro rispetto alla conica degenere, ovvero quando $\Omega(P, P') = 0$. Ma, allora, dalle formule che abbiamo visto, questo implica che $cos(\theta) = 0$, ovvero $\theta = \frac{\pi}{2}$, da cui appunto $d(P, P') = R\frac{\pi}{2}$, c.d.d. [26] □

Questo risultato, proprio per quello che abbiamo affermato prima, della auto-dualità del *piano ellittico*, ci propone un risultato duale di quello di prima. Più propriamente, quindi:

Prop.: *Due punti P, P' sono opposti (e quindi di distanza massima) se e solo se $d(P, P') = R\frac{\pi}{2}$, cioé i punti sono uno reciproco dell'altro (ovvero, ciascuno passa per la retta polare dell'altra) se e solo se dividono armonicamente le intersezioni della loro retta con l'assoluto.*



A e D, B e E sono punti opposti e si visualizza in particolare cosa significa che le loro rette dividono armonicamente

Duale: *Due rette p, p' sono ortogonali se e solo se $cos(\theta) = 0$ (e quindi $\theta = \frac{\pi}{2}$), cioé le rette sono reciproche tra loro (ovvero, ciascuna contiene il polo dell'altra) se e solo se dividono armonicamente le tangenti della loro intersezione all'assoluto.*

Abbiamo detto con questo che è possibile trovare due rette ortogonali tra loro. La domanda che ci si pone, proprio perché vogliamo verificare che non vale il V postulato di Euclide, e quindi non ci troviamo in *Geometria euclidea*, è se *esistono rette parallele* nel piano ellittico.

Mostriamo il seguente risultato particolare della Geometria ellittica:

Prop.: *Nel piano ellittico non esistono rette parallele (intese come rette distinte...altrimenti è banale!).*

[26] In effetti, due punti di una retta di lunghezza massima $R\pi$ si trovano l'uno opposto dell'altro e quindi la loro distanza è a metà di questa retta massima, cioé proprio $R\frac{\pi}{2}$.

Dim.: Siano due rette r, s distinte tra di loro. Le rette sono parallele se $sen(\theta) = 0$. Guardando le formule sopra, si ha che deve essere:

$$\Omega(r)\Omega(s) - \Omega^2(r, s) = 0$$

Ma abbiamo già visto, per il criterio di **Cauchy-Schwarz**, che ciò è possibile solo se $r = s$. E noi abbiamo preso una coppia di rette distinte, quindi ciò non si verifica! □

Precedentemente, abbiamo visto che triangoli simili non uguali non esistono. Questo ci fa capire che, nel piano ellittico, non esistono le *similitudini*. In effetti, vediamo quali sono le isometrie (rispetto alla metrica ellittica, con quindi $\Phi = \mathbb{1}_3$ [27], come abbiamo visto) nel piano ellittico che stiamo studiando.

In particolare, sono quelle proiettività ϕ del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che lasciano globalmente fisso l'assoluto Ω, i.e. $\phi(\Omega) \subseteq \Omega$. Ma quindi, la matrice ad essa associata, $A \in PGL_3(\mathbb{R})$ sarà tale per cui:

$$A^T \Phi A = \Phi \iff A^T A = \mathbb{1}_3$$

Ma quindi, $A \in O_3(\mathbb{R})$, ovvero A appartiene alle cosiddette matrici *ortogonali.*

Prendendo opportunamente un sistema di riferimento proiettivo in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, si trovano, allora, le seguenti tipologie di matrici ortogonali per le isometrie ellittiche nel piano ellittico:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

oppure

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Queste matrici hanno determinante ± 1, proprio perché le matrici appartengono all'insieme $O_3(\mathbb{R})$.
Si vede che le isometrie ellittiche, in pratica, dipendono (a meno del sistema di riferimento) solamente da un parametro θ angolo. Questo ci aiuta ad intuire un risultato, che non dimostriamo, per cui:

[27] la matrice identità 3×3.

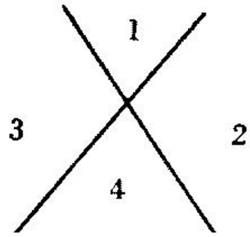
Prop.: *Ogni isometria del piano ellittico è una rotazione*

Questo tipo di risultati sta iniziando a costruire il modello del piano ellittico (che vedremo più in dettaglio nel prossimo paragrafo), per cui sembra, appunto, definire una *sfera euclidea*.
Però, prima di arrivare al modello, mostriamo un ultimo importante risultato di *trigonometria* [28]. Ovvero che:

Prop.: *In un triangolo del piano ellittico vale la seguente disuguaglianza degli angoli di esso:*

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Dim.: Due rette distinte del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ decompongono esso in due regioni angolari (1 e 4 in figura) chiamate *lunule*, come in figura.[29]



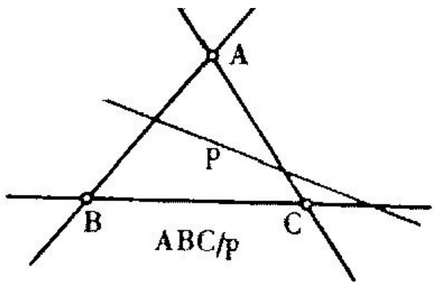
Lunule

Nella geometria ellittica del piano, le due lunule supplementari 3 e 2 sono uguali, come anche 1 e 4 (per quanto già detto, la *similitudine*, in pratica, è la *congruenza* in Geometria ellittica), per auto-dualità ellittica. [30]

Ripetendo la bisezione di queste lunule, si nota che *l'area di una lunula è direttamente proporzionale al suo angolo al vertice.*
Se, quindi, l'area di una lunula di angolo θ è $\mu\theta$, l'area di tutto il piano è:

$$\mu\theta + \mu(\pi - \theta) = \mu\pi.$$

Ora, si prenda un altro lato, per descrivere il triangolo Δ, di vertici A, B, C, come in figura:



[31]

[28] sarebbero tanti altri risultati di geometria ellittica 2-dimensionale, ma rimandiamo alla bibliografia per dettagli di approfondimento, per chi volesse

[29] Ha due lati ma solo un vertice!

[30] Anche perché hanno gli angoli opposti al vertice uguali tra loro; questo è un risultato di *geometria neutrale* o *assoluta*, che quindi vale anche in geometria ellittica

[31] Non si guardi la retta p, che in questa dimostrazione non ci sarà utile!

Allora, siano Δ, Δ_a, Δ_b, Δ_c le aree del triangolo ABC e i triangoli colunari associati. Allora, per quanto detto, si ha che:

$$\Delta + \Delta_a = \mu\alpha,\ \Delta + \Delta_b = \mu\beta,\ \Delta + \Delta_c = \mu\gamma$$

E, allora, diventa:

$$\Delta + \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = \mu\pi$$

Ed infine, si ha:

$$2\Delta = \mu(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

E siccome si tratta di aree, quindi positive, allora, si arriva alla conclusione richiesta:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

□

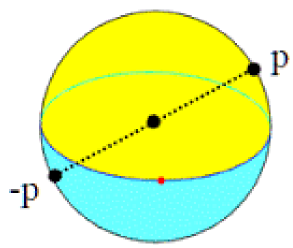
3. Modello di geometria ellittica

Cerchiamo, ora, di visualizzare da un punto di vista *euclideo* la geometria ellittica che abbiamo appena descritto. Prendiamo le cosiddette *coordinate cartesiane*:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$$

E poniamo $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_0$, come coordinate cartesiane ortogonali dello spazio euclideo standard. Allora, come sappiamo dalla geometria analitica dello spazio, l'equazione prima descritta rappresenta la sfera di centro l'origine e raggio 1.
Come già detto, la normalizzazione delle coordinate proiettive è determinata a meno del segno, per cui:

$$(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$



Punti antipodali o diametralmente opposti

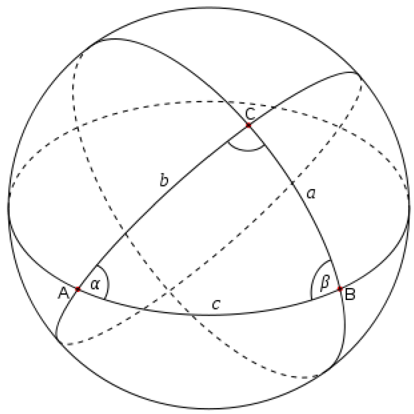
E questi sono punti diametralmente opposti della sfera e provengono da uno stesso punto del piano proiettivo.
Prendiamo più in generale una sfera di raggio R, e quindi si ha:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Provando a differenziare una parte infinitesima di sfera, ovvero per $dx_i \longrightarrow 0$ (con x_i le coordinate cartesiane) si ha che:

$$ds^2 = R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Questo tipo di equazione è relazionata alla metrica ellittica che abbiamo visto secondo Cayley-Klein. In particolare, stiamo mettendo in relazione la metrica-proiettiva con lo studio di Riemann della geometria sferica. Ed in particolare, possiamo dire che la Geometria del piano ellittico relativa alla costante R coincide con la geometria sulla sfera di raggio R (dello spazio euclideo) in cui si considerino come uno stesso punto due punti diametralmente opposti (detti punti *antipodali*).



Modello sferico della geometria ellittica

Perciò, per quanto detto, alle rette del piano ellittico corrispondono i cerchi massimi della sfera. Due cerchi massimi si incontrano in un solo punto. Si vede, per esempio dalla figura soprastante, che la retta ha lunghezza finita, calcolata prima, $R\pi$ e che non c'è modo di considerare sulla sfera rette parallele.

Come si vede anche dal grafico, il triangolo ha somma degli angoli interni maggiore di 180°, diversamente da cosa accade in geometria euclidea, dove la somma degli angoli di un triangolo è sempre = 180°.

Inoltre, come abbiamo visto, quando $R \longrightarrow \infty$, la metrica ellittica diventa praticamente la usuale metrica euclidea. Infatti, da un punto di vista modellistico, portando il raggio all'infinito della sfera euclidea, esso si "appiattisce" al piano usuale euclideo. Questo verifica che la *geometria euclidea* è un caso *limite* appunto della *geometria ellittica* (così come anche per la *geometria iperbolica*).

La riuscita di un modello della geometria ellittica, appunto la sfera, ci conferma la validità stessa di tale geometria, ovvero la sua *non-contradditorietà*, come ormai abbiamo capito si operi in tutte le geometrie possibili. E che quindi i risultati trovati nel paragrafo precedente sono corretti e validi nel contesto della geometria ellittica (2-dimensionale) e non in quella euclidea, ovviamente! Infatti, abbiamo trovato un modello di geometria ellittica nella geometria euclidea e che la validità di tale geometria, allora, è relativa a quella euclidea.

Capitolo IV

Proposta possibile per la scuola secondaria di II grado con uso del software Cinderella

"Insegnando la matematica agli altri finisci per comprenderla meglio tu stesso" (I. Stewart)

E' proprio vero che insegnando si comprende meglio quello che si è studiato nel corso dei propri studi. E una delle ragioni è perché devi presentare qualcosa di abbastanza complicato per uno studente che non maneggia della materia per cui ci si è specializzati, e quindi bisogna rendere alquanto semplice all'uditore quello che si sta presentando. Proprio per questi motivi, la mia prima e semplice esperienza da insegnante in questo anno particolare di pandemia, mi ha portato a questa sfida della Matematica, materia tanto ostile agli studenti, ovvero di cercare di rendere più accessibile, simpatica e, perché no, elegante qualche argomento per loro esoterico, quali, ad esempio, le diverse geometrie studiate nel mio percorso di studi matematici all'università corrente. Ed è stata un'esperienza che mi ha portato molta serenità, in quanto ho notato grande attenzione e curiosità, persino sorpresa, di quello che andavo a presentare in maniera molto generica e semplificata. Credo che uno dei compiti dell'insegnante sia osare quanto può con la propria classe, riconoscendo, caso per caso, l'ambiente ed il legame che si è creato tra alunni e professore, persino uscendo fuori dallo schema del programma e non viverlo come qualcosa di imposto, come "spunte" da svolgere di mese in mese. Il primo obiettivo, forse, dell'insegnante è quello di e-ducare i propri studenti, cioé, letteralmente, "tirare fuori" prima di tutto la curiosità degli argomenti trattati, aiutandoli a ricercare le relazioni tra le teorie presentate durante le lezioni, sviluppando proprio un percorso educativo-didattico di più ampio respiro.

1. Programma scolastico e il ruolo delle geometrie non euclidee

Insegnare Matematica è un impegno davvero arduo. Si tende, molto spesso, a perdere tempo ai dettagli insignificanti della materia senza approfondire ciò che è davvero essenziale per la stessa. Un insegnamento *ecologico* della Matematica è importante per comprenderne la bellezza del percorso didattico e quindi anche gli obiettivi pre-posti di volta in volta, di passo in passo. Un insegnamento dia-logico tra insegnante e studenti, cercando di trasmettere quell'interesse per la materia, delineandone le caratteristiche peculiari di cosa si intenda con il *fare matematica* ed *essere un matematico.* Cercando, il più possibile, di accedere ad un linguaggio proprio dello studente (in base all'età e al contesto in cui si trova). Cercando di far comprendere

allo studente che la matematica si applica alla quotidianità della vita, anche ai problemi di ogni giorno, soprattutto per il metodo, perché la matematica aiuta a pensare e ad allargare lo sguardo e a porsi dubbi e domande anche su quello che sembra apparentemente evidente.
Per cui, l'insegnante deve aiutare a far comprendere agli studenti il senso di quello che si sta svolgendo, incuriosendo con argomenti che possano accedere all'interesse dei fenomeni che lo circondano nella loro vita, mostrando quanto la Matematica abbia diversi campi di applicazione interessanti. E che non è un semplice *fare calcoli*!
Pensare all'insegnamento non tanto per *immediatezza*, nel senso che l'allievo deve acquisire semplici nozioni nell'oggi, ma *a lungo termine*, con un orizzonte di formazione dello studente stesso di quello che sta apprendendo.
Ad esempio, se si leggono i programmi ministeriali, interessante è che:

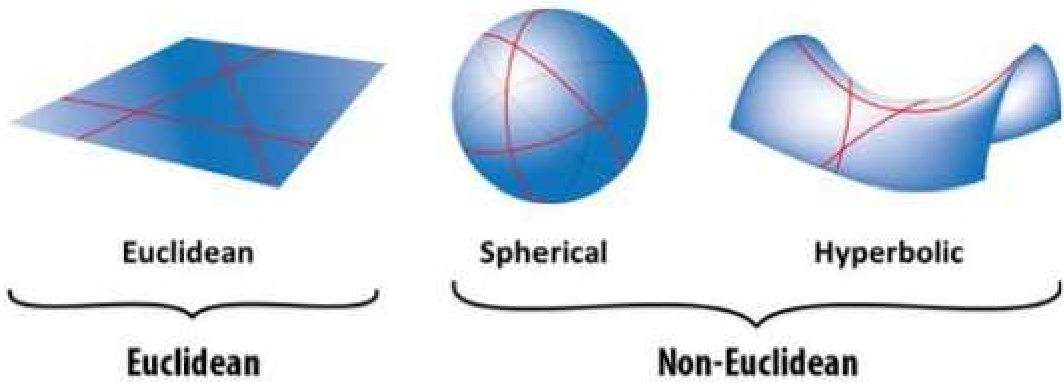
"Alla fine del triennio l'alunno dovrà possedere, sotto l'aspetto concettuale, i contenuti prescrittivi previsti dal programma ed essere in grado di ... inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee fondamentali"
"l'acquisizione di conoscenze a livelli più elevati di astrazione e di formalizzazione"
"la capacità di cogliere i caratteri distintivi dei vari linguaggi (teorico-naturali, formali, artificiali)"
"la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse"

E che quindi lo studente non deve solo acquisire nozioni, ma proprio la natura stessa della materia proposta, in questo caso la Matematica. E questi obiettivi pre-posti dovrebbero essere presi in considerazione dall'insegnante e poi trasmessi anche agli studenti, facendone capire l'importanza di quello che si sta svolgendo.

E' importante che l'insegnante trasmetta ai propri studenti un certo *capire relazionale* degli argomenti presentati durante l'anno, delle diverse teorie proposte: non vedere gli argomenti proposti come sezioni a sé stanti, ma come un percorso graduale, che aiuta ad approfondire sempre più i dettagli del pensiero matematico, arricchendo il proprio bagaglio del sapere. Procedendo in questo modo, lo studente potrà capire il senso di quello che gli viene proposto di volta in volta, perché capisce che si sta sviluppando un percorso didattico con obiettivi che vengono proposti di volta in volta. Come, ad esempio, quando si studia la *fattorizzazione dei polinomi*, potrebbe essere utile allo studente capire che è legato questo argomento alla ricerca degli *zeri dei polinomi* e alla *risoluzione di equazioni*, magari fornendo un problema concreto in cui è richiesto ricercare soluzioni ad alcune equazioni fornite.
Il procedere della Matematica non deve essere visto come un qualsiasi procedimento *matematico*, quasi robotico, nel senso che si apprendono semplicemente degli algoritmi, ma un certo *procedere graduale* degli argomenti incontrati. Un procedere che metta in *chiaro-scuro* il rapporto e le relazioni tra le diverse teorie proposte, facendo capire quanto ci sia *continuità* in quello

che si sta studiando. E che quindi è importante risolvere le diverse *lacune* ancora presenti negli studenti. Compito dell'insegnante è aiutare lo studente ad assimilare un metodo ed un approccio matematico del modo di pensare e risolvere diversi problemi di qualsiasi natura.
La Matematica è appunto un intreccio di relazioni tra le diverse branche del sapere, che cerca di trovarne le *chiavi* essenziali per poter comprenderne i diversi tipi di legami che si instaurano tra di loro. E questo non è immediato, ma richiede uno certo sforzo, più o meno pesante, da parte del gruppo classe (studenti-insegnante). Proprio perché, come si deve cercare di far comprendere anche agli stessi studenti, la Matematica è *dinamica*.

Ecco che, allora, presentare le Geometrie non-euclidee può portare lo stesso studente a riconoscere una certa dinamica nella Matematica. Ed, infine, con il *programma di Erlangen* si riesce a mettere in relazione le diverse geometrie proposte, attraverso l'uso dell'*Algebra* (la *Teoria dei gruppi*) e le *trasformazioni geometriche* ad esse associate. Senza entrare troppo nei dettagli (anche perché servirebbero degli strumenti che non sono accessibili a loro, come appunto *matrici* o la nozione di *metrica*). Cercando di non curare certi dettagli, come per esempio calcoli laboriosi, ma l'aspetto essenziale di quello che si sta presentando, incuriosendo gli studenti sulla vastità delle applicazioni matematiche che si possono acquisire nel tempo, con una certa gradualità. La geometria è la parte della Matematica che riesce al meglio di curare una certa intuizione visiva agli studenti. Presentare diverse geometrie oltre quella euclidea può essere quindi più semplice se aiutati con un supporto visivo, che possa stimolare gli allievi ad avere diversi punti di vista, diverse intuizioni differenti a seconda dei problemi proposti, anche al di fuori della Geometria stessa. Per cui, insegnare Geometria a scuola è utile per acquisire e coltivare un sapere ampio per poter risolvere problemi di diversa natura (analitica, algebrica, ecc...). Ed è per questo importante, per ogni geometria proposta, presentare diversi esempi, soprattutto per quelle geometrie meno intuitive e visibili nella realtà che ci circonda. Studiare ed approfondire la Geometria, presentando diversi modelli di geometrie, può aiutare gli studenti fin da subito a sviluppare un occhio nuovo ed attento per risolvere problemi complicati in modo anche semplice, sfruttando nozioni proprie della Geometria. Persino da un punto di vista educativo, studiare le diverse Geometrie, aiuta a portare gli studenti a sapersi confrontare in maniera dialogica con persone che hanno diversi punti di vista dal loro (come i diversi assiomi scelti, le diverse regole del gioco), con una realtà più ampia, multiculturale e diversificato, senza imporre il solo pensiero unico.



Le diverse geometrie proposte

2. Presentazione delle diverse geometrie come approfondimento didattico-storico

Di fronte ad una delle mie prime classi, ho proposto questa attività interessante: convincere un "terra-piattista" che la Terra è sferica, usando argomenti via via sempre più convincenti.

I miei studenti avevano proposto diversi argomenti, che cercavo via via di far crollare, per andare a cercare una argomentazione che potesse essere più valida per chiunque, usando, appunto, la Matematica. E così, qualche studente mi aveva proposto che la Terra non è piatta, perché basta osservare che il Sole si alterna nel dì e la notte, e che quindi non poteva avere una forma piatta. Spiegai che, però, se si prende un foglio di carta, nulla vieta al Sole di passare da una parte del foglio alla parte opposta, facendo così alternare i diversi giorni dell'anno.
Un'altra argomentazione era stata quella di dire di poter andare a vedere sullo Spazio, ed accorgersi che la Terra non è piatta, con una attenta osservazione. Tuttavia, spiegai, che non ho gli strumenti ed il denaro necessario per poter svolgere una spedizione di questo tipo e che, inoltre, ci immergiamo nell'Ottocento, quando ancora non esistevano strumenti di questo tipo.
Dopo argomentazioni che tentavano di procurarsi osservazioni dall'esterno della Terra, qualche studente propose di osservare una nave che naviga sul mare. Ad un certo punto, toccando l'orizzonte, sparisce, proprio perché la Terra non è piatta, ma esiste una qualche curvatura. Se la Terra fosse piatta, dovrei vederla sempre, persino in lontananza. Tuttavia, argomentai che potrei avere problemi di vista e che quindi questo argomento crolla per il semplice fatto che abbiamo una visuale limitata del nostro spazio circostante.

Nave all'orizzonte

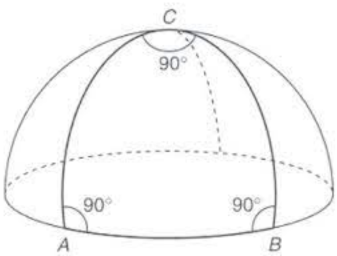
Era interessante vedere come gli studenti cercassero di spiegare, anche con argomentazioni più o meno valide, che la Terra non è piatta.
Quando furono abbastanza stanchi per la sfida, tentai di spiegare come ci riuscì un matematico nell'Ottocento, Gauss. Egli propose un teorema, ovvero:

Teorema "Egregium" di Gauss *La curvatura in ogni punto di una superficie regolare è una grandezza intrinseca.*

In pratica, questo teorema ci sta dicendo che un qualsiasi essere 'bidimensionale' che vive su una superficie riesce a stabilire su che tipo di superficie sta vivendo, senza elementi esterni (quali, ad esempio, il Sole).
E' un teorema alquanto potente, che garantisce il fatto che la Matematica, attraverso certi strumenti, possa stabilire con esattezza (a meno di errori di approssimazione) che la Terra non è piatta, senza bisogno di andare nello Spazio-ambiente su cui si trova il nostro pianeta.

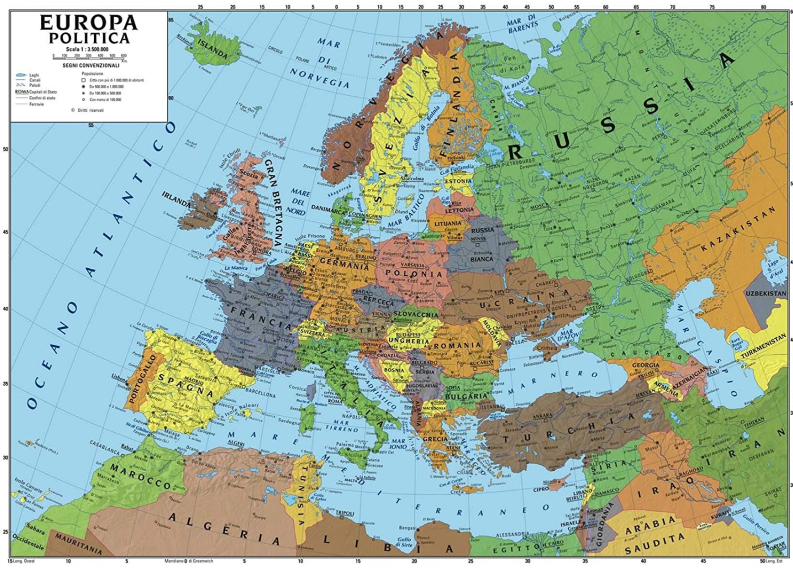
Così, ho proposto agli studenti una osservazione.

Come sanno, dalla Geometria euclidea studiata, la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Ma, se noi ci troviamo su una superficie incurvata, come una sfera (si prenda un pallone), questo non è più vero, come si nota anche nel seguente disegno.



Triangolo sferico

Per cui, prendendo tre punti geografici della Terra (ovvero un triangolo), si può notare che la somma degli angoli è maggiore di 180° e che quindi la superficie della Terra non è piatta, come si credeva un tempo, ma tonda (avendo curvatura positiva). Certo che bisogna prendere punti più distanti, perché localmente la sfera è isomorfa (cioé indistinguibile) ad un piano. Tanto che esistono delle carte geografiche che permettono di descrivere la Terra. Ma ci vogliono più carte per poter disegnare su un piano il nostro pianeta, in quanto, appunto, sono superficie non isomorfe (se non localmente). E quindi, si deve ricorrere ad un vero e proprio atlante geografico, formato da più cartine.

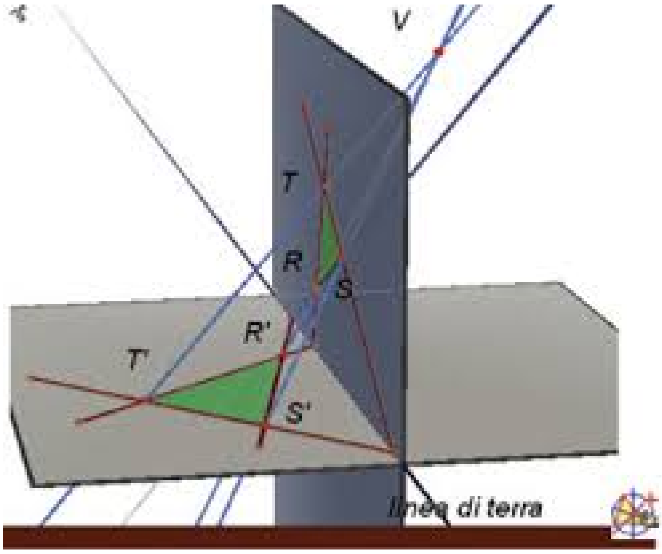


Cartina geografica della Terra che è localmente isomorfa ad un piano

Questo tipo di approfondimento mi ha permesso di presentare, appunto, le diverse geometrie che esistono e che sono tutte valide, proprio perché dipende dalle assunzioni scelte. Un po' come le regole di un gioco. La Matematica è, come cercai di spiegare, un gioco, dove si apprendono delle regole che si accettano per poter vincere determinate sfide interessanti del sapere. Ma, allo stesso tempo, spiegai che essere matematici è come essere dei detective, che devono poter investigare degli indizi nascosti e apprendere un linguaggio proprio della matematica. E, alla fine, cercare di trovare i diversi colpevoli, smascherando le diverse lacune del giallo.

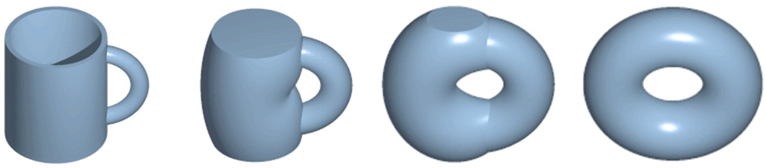
E così, ho presentato le diverse geometrie che si studiano in Matematica. L'interesse che cercai di trasmettere agli studenti fu quello di far comprendere quanto le geometrie si descrivano attraverso delle trasformazioni che vengono permesse (le regole del gioco), seguendo appunto il famoso *Programma di Erlangen*.

Ad esempio, presentai la Geometria proiettiva come quella geometria in cui si ammettono come trasformazioni le proiezioni. Ed è quella Geometria per cui non esistono, appunto, le rette parallele: se si pensa alle proiezioni da un punto (le cosiddette *proiezioni centrali*) non sono ammessi parallelismi, perché c'è sempre un punto di intersezione (il punto di proiezione, ad esempio!).



Esempio di proiezione

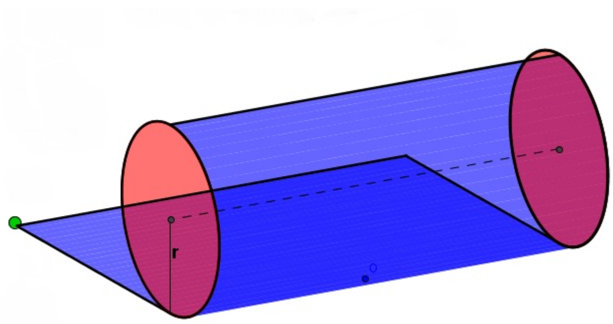
Un altro tipo di Geometria proposta è stata quella Topologica, dove le trasformazioni sono di *modellatura continua* delle figure, senza strappi o tagli. Un po' come quando si gioca con il pongo. E ci sono anche qui delle proprietà che rimangono invarianti.



Esempio di trasformazioni topologiche della Bottiglia di Klein

E così facendo, applicando diverse trasformazioni, si riescono a trovare, in base alla natura della trasformazione ammessa, diverse figure isomorfe tra di loro, rendendo più semplice lo studio di certe proprietà.

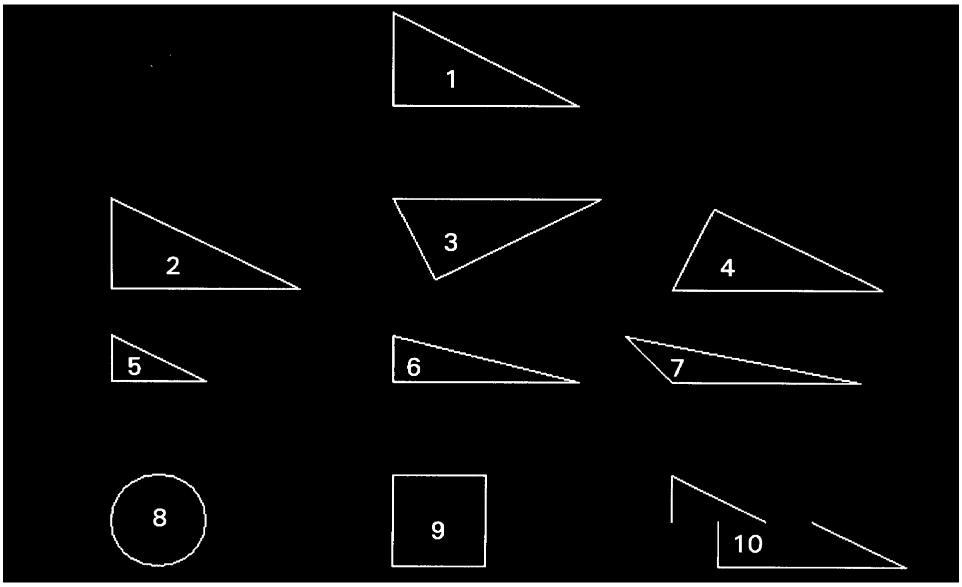
Ad esempio, se prendiamo un cilindro e lo *srotoliamo*, si nota essere *localmente* isomorfo ad un piano. Per cui, ad esempio, si nota, segnando delle rette infinite sul piano, che queste sono lunghezze finite sul cilindro, ovvero le *circonferenze* stesse.



Srotolamento del cilindro su un piano euclideo

Questo tipo di gioco si può proporre a degli studenti di qualsiasi ordine e grado: prendere determinate figure geometriche, applicare una trasformazione particolare e vedere cosa rimane invariato e cosa no, che tipo di isomorfismo c'è e che tipo di geometria si sta studiando.

Si presenti una raffigurazione simile ad una classe di studenti (o di appassionati della Matematica):



Si chieda quale delle figure presenti nel disegno sono "uguali" (o meglio, appunto, *isomorfi*) al triangolo 1. Probabilmente la maggioranza degli studenti sarà portato a rispondere che il triangolo 2 è uguale. Oppure, in un qualche modo, anche il 5, solo che è rimpicciolito in scala. Quasi nessuno risponderebbe che le figure 8, 9, 10 sono uguali in un qualche modo al triangolo 1. Ma, come si può far capire, dipende dai tipi di trasformazioni che si vogliono e si possono applicare. Cioé alle trasformazioni che si vogliono rendere ammissibili per la nostra geometria. E quindi, come già detto, alle regole del gioco che si vuole proporre. E così, allora, la Geometria non è una sola, ma una vasta gamma di geometrie, tutte valide. Quale sia più conveniente usare sta alla astuzia del detective, in base al tipo di problema proposto.

Inoltre, è molto interessante come questo modo di studiare della Geometria, come accennato anche alle classi a cui ho avuto modo di poter insegnare, è molto applicato alla Fisica. Tanto che ci si chiede, appunto, che tipo di forma abbia l'Universo e se esista un qualche **Teorema Egregium** simile a quello applicato da Gauss. Diciamo, in pratica, che la Fisica si avvale di gran parte della Geometria (in particolare quella *differenziale* e *topologica*). Tanto che, ad esempio, esiste proprio una Geometria particolare della Fisica, quella di *Minkowski*, quella dello *spazio-tempo*, 4-dimensionale, tre per lo *spazio* e una per il *tempo*. E si studia proprio Cayley-Klein, definendo una metrica particolare, con la seguente struttura di forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E' una forma non degenere di segnatura $(3, 1)$ nello spazio $\mathbb{R}^4$. Da questa metrica *minkowskiana* si derivano delle proprietà particolari dello spazio-tempo che si possono applicare alla *relatività*. É lo studio moderno della Fisica e della Matematica, studiate insieme, in grande sintonia tra di loro, con un forte senso di dialogo aperto.

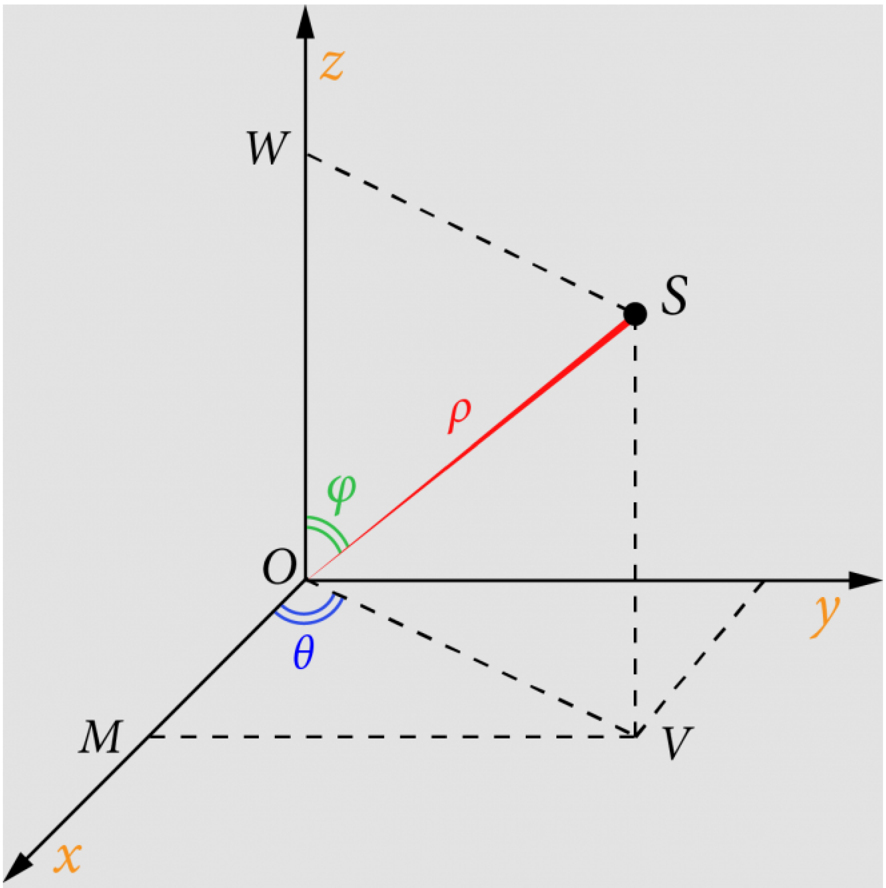
3. Il modello della sfera di Lenàrt

Adesso verranno presentati due modalità didattiche per poter presentare alcuni risultati, problemi o esercizi iterattivi per gli studenti, delle diverse geometrie euclidee e non, in particolare la *Geometria sferica*.
Inizieremo con il modello della *sfera di Lenàrt*, ovvero una sfera di plastica con pennarelli lavabili con panno umido con un kit particolare di righelli, compassi e goniometri sferici per poter creare diversi laboratori agli studenti della propria classe.

Kit della sfera di Lenàrt

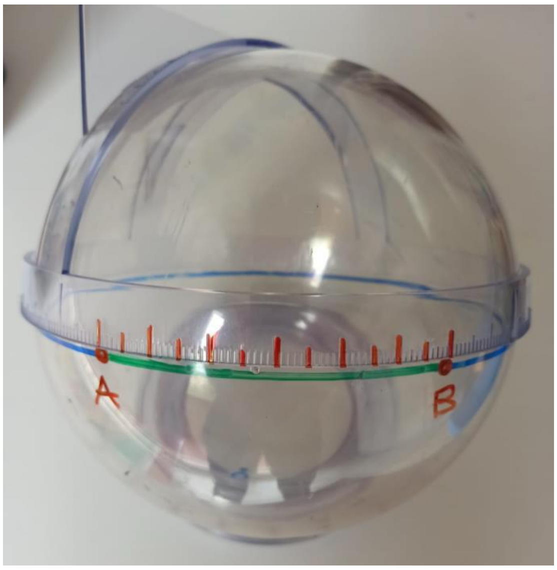
Iniziamo, quindi, a conoscere gli strumenti del mestiere che ci serviranno per poter disegnare e risolvere diversi problemi geometrici e comprendere la distinzione tra la *Geometria euclidea* e la *Geometria ellittica* (è un esempio di *Geometria comparativa*). In pratica, si sta prendendo nota degli strumenti costruttivi per tracciare e visualizzare didatticamente certi teoremi di *geometria sferica*.

Il righello sferico, ad esempio, non è dritto come quello per il piano euclideo, ma ha una struttura a *calotta* ed al posto della misurazione in *cm* (per le *lunghezze*), si ha la misurazione in ° (per gli *angoli*), proprio perché le *coordinate sferiche* sono essenzialmente due angoli θ e ϕ, chiamate storicamente *longitudine* e *latitudine*. Infatti, prendendo un punto S qualsiasi dello spazio euclideo 3-dimensionale, esso è determinato, come nella figura sottostante, dal raggio (fissato) ρ e dalle variabili coordinate dell'angolo tra il raggio e l'asse z in senso antiorario ($\phi \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) e l'angolo tra il segmento del raggio proiettato sul piano $x - y$ e l'asse x, di nuovo in senso antiorario ($\theta \in [0, 2\pi[$).



Coordinate sferiche

Non è un caso che la Geometria sferica sia molto studiata in campo nautico, servendosi proprio di tali coordinate *geografiche*.

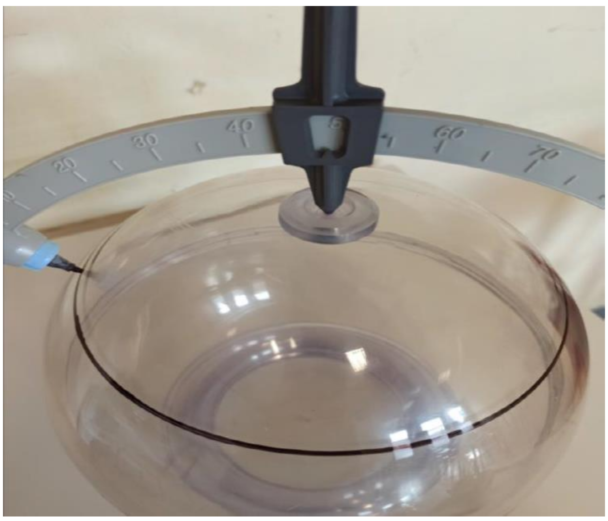


Righello sferico

Per misurare, invece, gli angoli sferici si utilizza il goniometro sferico, le cui linee più spesse rappresentano l'angolazione retta (cioé di 90°).

Goniometro sferico

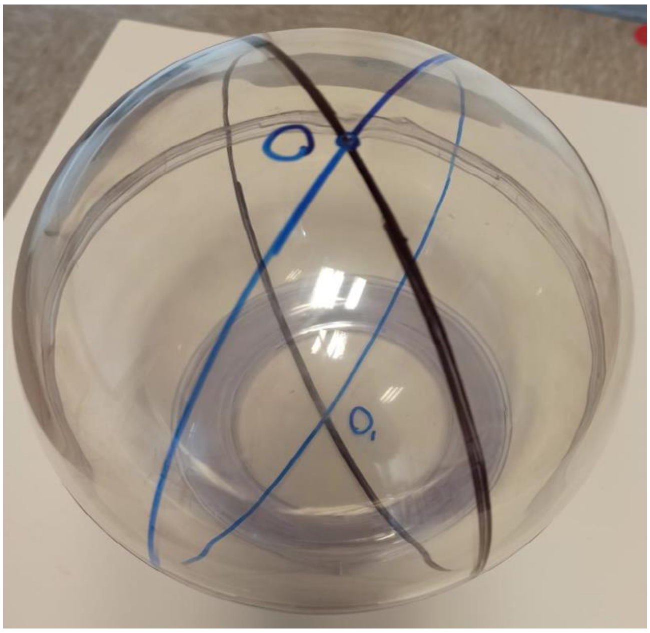
Infine, per poter tracciare linee sulla superficie sferica, oltre che ai pennarelli, è utile usufruire del cosiddetto compasso sferico.



Compasso sferico

Dopo aver individuato gli strumenti che servono agli studenti per poter risolvere determinati problemi.

Ad esempio, mostriamo che in Geometria sferica esistono più di una retta che passa per due fissati punti, differentemente dalla Geometria euclidea.
Si prendano due punti a caso sulla superficie sferica (per semplicità, si prendano i due poli, Nord e Sud). Si riesce a verificare che si possono tracciare due rette sferiche, come nella figura sottostante, ovvero i due circoli massimi (che esprimono la distanza minima tra due punti sulla sfera [32]).



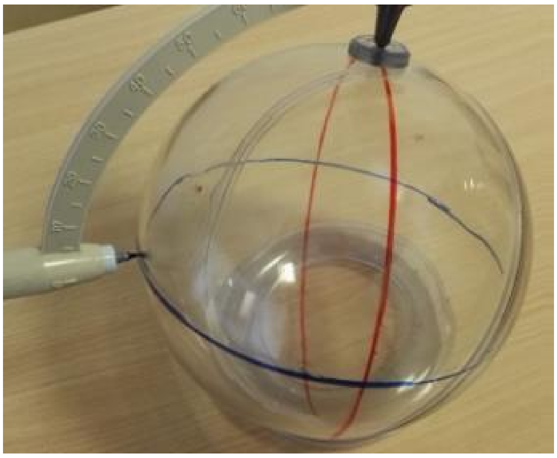
Due rette passanti per due punti qualsiasi sulla superficie sferica

Questo tipo di costruzione riesce a spiegare anche la nozione di *punti antipodali*, ovvero *diametralmente opposti*, come abbiamo visto nel capitolo precedente.

Un altro esempio di problema è quello di riuscire a tracciare e descrivere due rette ortogonali tra loro.

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, due rette sono perpendicolari tra loro se l'una contiene il polo dell'altra. Per cui, dopo aver tracciato una delle rette passanti per i due poli che abbiamo scelto (*punti antipodali*), prendiamo una retta che passi per queste due. Misurando con il goniometro sferico riusciamo a verificare che gli angoli tra queste rette sono di 90°. Inoltre, si è riusciti a tracciare così anche un triangolo sferico che ha angoli interni tutti di 90°. E questo verifica un altro teorema che avevamo dimostrato nel capitolo precedente, ovvero che la somma degli angoli interni di un triangolo in *Geometria ellittica* è superiore ai 180°, come si può osservare nella figura sottostante.

[32]chiamate in Geometria *geodetiche*, ovvero il segmento di distanza minima tra due punti di una qualsiasi superficie.



Due rette ortogonali tra loro e triangolo sferico con somma angoli interni $> 180°$

Così facendo, si è riusciti a vedere che la geometria descritta sulla superficie sferica è diversa da quella descritta sulla superficie piana euclidea, e che quindi sono geometrie distinte ma entrambe valide (proprio perché si ha un modello reale di entrambe). E ancor di più che la sfera ed il piano euclideo non possono essere superficie isomorfe (proprio perché hanno risultati geometrici differenti tra loro...)

4. Il software Cinderella

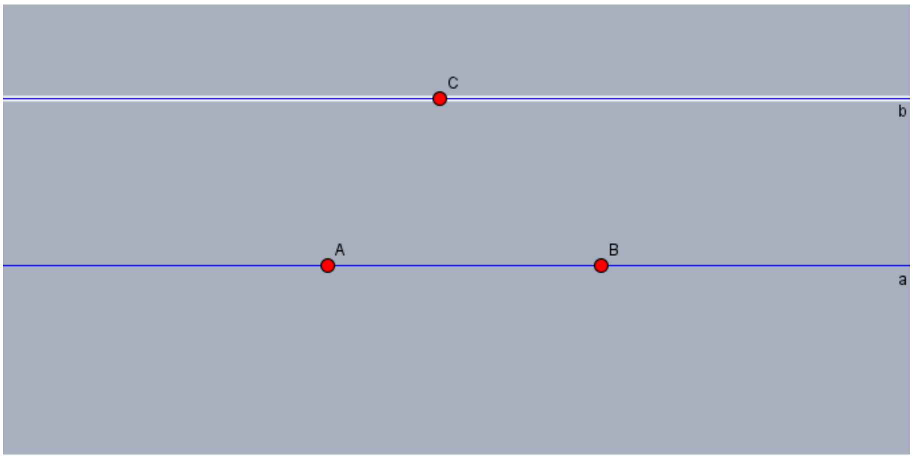
La seconda modalità che verrà proposta in questo paragrafo è l'uso di un software, ovvero *Cinderella*. Perché viene proposto proprio questo software e non altri?

Uno dei motivi fondanti è che questo software permette di visualizzare contemporaneamente dei risultati classici delle diverse geometrie, quella euclidea, quella ellittica e quella iperbolica. Ed inoltre, non è complicato come strumento, perché molto simile ad altri software di Geometria analoghi, come ad esempio *GeoGebra*, che però non ha una interfaccia propria delle diverse geometrie come Cinderella.

Per poter imparare ad utilizzare questo strumento, rimandiamo al sito del software o ad un qualsiasi manuale ad esso riguardante.

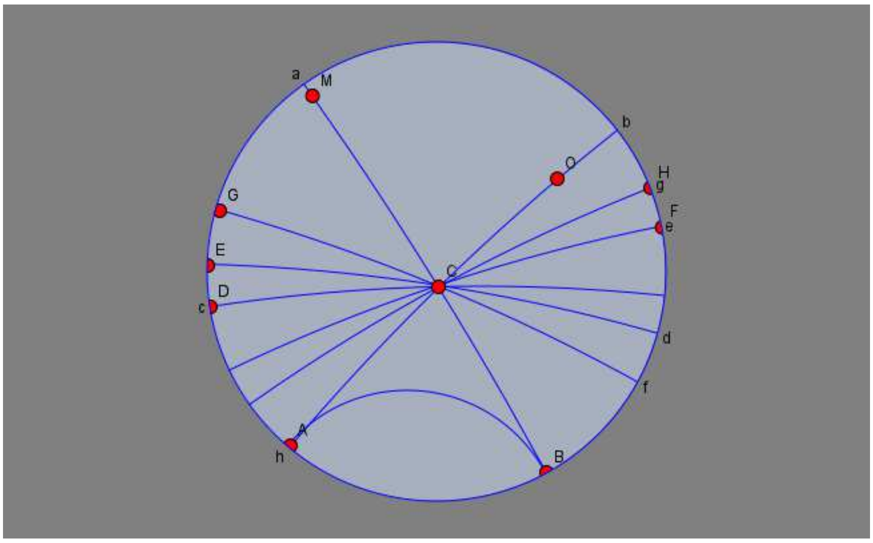
Presentiamo, ad esempio, un classico risultato che contraddistingue le tre geometrie accennate in questa tesi, ovvero riguardo alla *esistenza* e *unicità* o meno delle rette parallele ad una retta data passanti per un punto.

Come si vede, ad esempio, in geometria piana euclidea, data una retta ed un punto fuori di essa è possibile tracciare, usando i comandi ad esso associati, solo una retta, come nella figura sottostante.



V postulato di Euclide

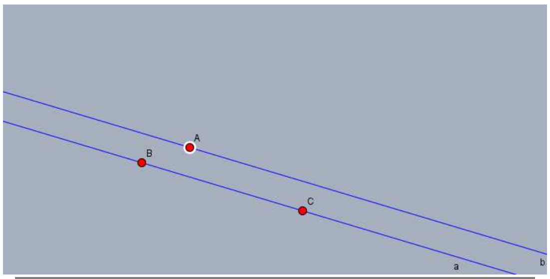
Per quanto riguarda, invece, la geometria iperbolica, si può notare che, dati due punti A e B e la retta tra questi ultimi, esistono infinite rette parallele ad AB. Si prenda, ora, un punto esterno C alla retta AB. Si traccino le rette AC e BC. Si possono tracciare, con i comandi corretti, infinite rette che non intersecano la retta AB. In particolare, si vede che queste rette vivono nella regione delle due *lunule* definite dagli angoli $A\hat{C}M$ e $B\hat{C}O$. Proprio come si definiva nel *modello del disco di Poincaré*.

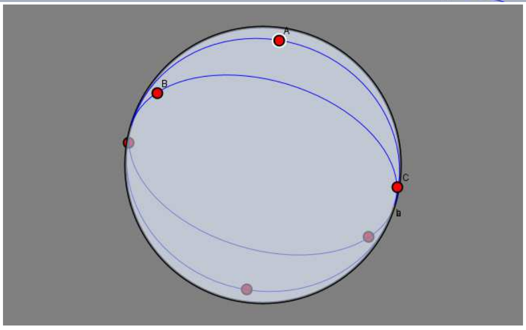


Infinite rette parallele

Un comando molto interessante in *Cinderella* è la possibilità di visualizzare quello che si sta costruendo su un modello (ad esempio, piano euclideo) contemporaneamente su un altro modello (ad esempio, sfera): basta andare sul comando **Viste** sulla barra strumenti del software e selezionare il tipo di visualizzazione che si vuole richiedere.

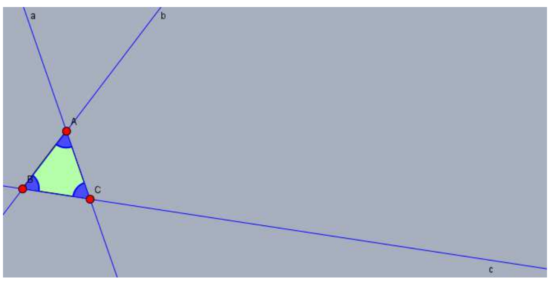
Per cui, ad esempio, prendendo di nuovo una retta ed un punto fuori di essa, nel piano, esiste solo una retta parallela ad essa. Mentre, visualizzando cosa si sta costruendo nel modello ellittico, si vede che queste non sono parallele, come si vede nella figura sottostante.

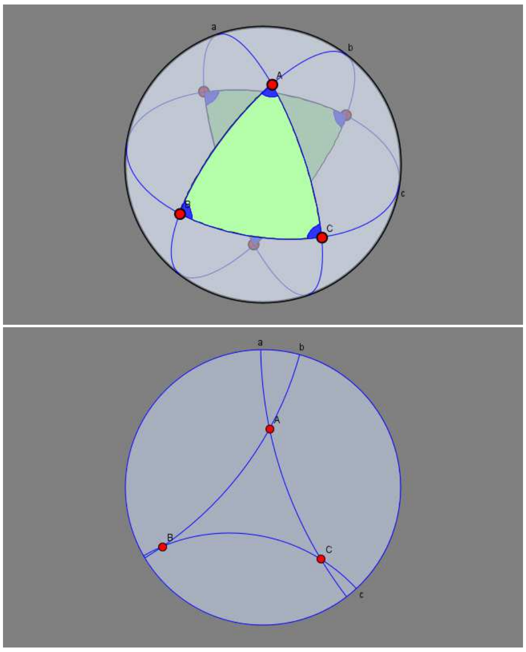




Visualizzazione contemporanea delle rette parallele, caso euclideo e caso ellittico

Un altro confronto che si può fare tra le diverse geometrie è riguardo alla nozione di retta e quindi di triangolo, rispettivamente euclideo, sferico ed iperbolico. Nel primo caso, sappiamo intuitivamente e figurativamente cosa si intenda con il termine di *retta* (e non possiamo definire più dettagliatamente, perché è proprio un *ente primitivo*).
Per quanto riguarda, invece, la retta sferica, come abbiamo già affermato nel capitolo precedente, essa è il circolo massimo sulla sfera. Mentre, la retta iperbolica è o uno dei *diametri* del cerchio che descrive il modello di *piano iperbolico* o un *arco di circolo ortogonale* alla circonferenza del modello iperbolico. Così, prendendo tre rette distinte qualsiasi sui diversi piani che rappresentano modelli delle diverse geometrie, si riescono a visualizzare contemporaneamente tre diversi tipi di triangoli. E come si nota, usando il comando di **misura angoli**, si riesce a vedere che la somma degli angoli interni di un triangolo è $=$, $>$ o $<$ di un angolo piatto (cioé di 180°) a seconda che la geometria (o il modello) corrispondente è quello *euclideo*, *ellittico* o *iperbolico*, come si può vedere dalla raffigurazione sottostante.





Confronto tra triangoli euclidei, sferici ed iperbolici

In questo modo, siamo riusciti a presentare in diversi modi alcune tra le geometrie più conosciute nel corso della Storia della Matematica, curandone gli aspetti essenziali di dinamicità ed evoluzione dello stesso pensiero matematico. Abbiamo, infatti, potuto vedere non solo l'evolversi storico delle idee, ma anche alcuni strumenti matematici indispensabili per poterli descrivere più in dettaglio. Inoltre, siamo riusciti a fornire un esempio di Geometria non-euclidea tra le più note, proprio perché la superficie del pianeta sulla quale abitiamo è proprio quella di una *sfera*. E siamo riusciti anche a presentare un livello didattico che può essere interessante per delle classi di qualsiasi ordine e grado, usufruendo strumenti a loro più o meno vicini, quali un modello plastico (da poter proporre a delle classi medie, ad esempio, ma anche a dei licei artistici o tecnici) e l'uso di un software specifico per la presentazione delle diverse geometrie proposte (da poter presentare in qualsiasi scuola, persino nelle stesse università scientifiche!).

Conclusione e ringraziamenti

Alla conclusione di questa tesi, vorrei ringraziare innanzitutto i miei insegnanti, ed in particolare il relatore ed il correlatore, per avermi fatto apprezzare il percorso di studio della Matematica.
Ringrazio cordialmente anche tutti gli insegnanti della università che mi hanno trasmesso la passione per la curiosità matematica.
E, inoltre, ringrazio gli autori dei libri che mi hanno permesso di redigere questa tesi. Un ringraziamento speciale va sicuramente alle scuole che mi hanno offerto la possibilità di insegnare, sia nelle lezioni ordinarie che nei vari corsi di recupero che si sono susseguiti. Infine, ringrazio i miei genitori, gli amici e la mia famiglia, che mi hanno sostenuto negli sforzi della realizzazione di questo elaborato e nell'intero mio percorso di studi fino a qui svoltosi.
Spero possa essere stato utile, interessante e stimolante questa tesi, e per di più, spero non sia stata poco chiara, ma di facile comprensione per chi fosse curioso e avesse accettato questa sfida matematica. E perché no, possa essere stato un grimaldello per potersi avventurare in ulteriori percorsi di lettura e approfondimento matematici.

Bibliografia e sitografia

[1] Klein F., *Il programma di Erlangen* / a cura di Lorenzo Magnani, Riccardo Dossena ; prefazione di Jean Dieudonné ; postfazione di Francois Russo, Springer, Milano, 2004

[2] Lolli G., *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino, Bologna, 2010

[3] Odifreddi P., *Abbasso Euclide! Il grande racconto della geometria contemporanea*, Mondadori, Milano, 2013

[4] Coxeter H.S.M, *Non-Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, Washington, 1998

[5] Lakoff G., Núñez Rafael E., *Da dove viene la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2005

[6] Bottazzini U., *Il flauto di Hilbert, Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET Università, Torino, 2017

[7] Bernardo A., *Felix Klein e il programma di Erlangen, quadro storico-biografico*, matematicamente.it, Maggio 2009

[8] Lolli G., *Tavoli, sedie, boccali di birra; David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina, Milano, 2016

[9] Sernesi E., *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000

[10] Coxeter H.S.M, *Projective Geometry*, Springer, 2013

[11] Odifreddi P., *C'è spazio per tutti, Il grande racconto della Geometria*, Mondadori, Milano, 2011

[12] Odifreddi P., *Una via di fuga, Il grande racconto della Geometria Moderna*, Mondadori, Milano, 2012

[13] Onishchik A.L., Sulanke R., *Projective and Cayley-Klein geometries*, Springer, 2006

[14] Bonola R., *La geometria non-euclidea, esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Zanichelli, Bologna, 1906

[15] Frajese A., Maccioni L., *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino, 1970

[16] Kline M., *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, 1999

[17] Byers W., *How mathematicians think*, Princeton University, 2010

[18] Mantovani W., Togliani L., *Sui gruppi di trasformazioni*, Mathesis, Mantova, 2004

[19] Cailotto M., *Algebra & Geometria, Lineari Quadratiche*, Dispense, Padova, 2019

[20] Bompiani E., *Metriche non-euclidee*, Dispense, Università di Roma, 1951-1952

[21] Courant R. (author), Robbins H. (author), Stewart I.N. (revised), *Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi*, 2a ediz., Boringhieri, Torino, 2000

[22] Ministero della Pubblica Istruzione, *L'insegnamento della geometria, Seminario di formazione per docenti*, Quaderni 19/1, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Lucca, 1995-1996

[23] https://www.miur.gov.it/scuola-secondaria-di-secondo-grado

[24] https://doc.cinderella.de/tiki-index.php

[25] https://it.wikipedia.org/

[26] https://www.formath.it/la-sfera-di-lenart/

[27] https://www.youtube.com/watch?v=QLl0O3QrxVU

[28] https://www.youtube.com/watch?v=efO6f4PkI-s

[29] https://www.youtube.com/watch?v=4cLFt$_F6tts$