



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "G. GALILEI"

Corso di studi in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

Solitoni nell'equazione di Gross-Pitaevskii: teoria e confronto con gli esperimenti

Relatore:

Prof. Luca SALASNICH

Laureando:

Martino CALZAVARA

ANNO ACCADEMICO 2016-17

14 settembre 2017

Sommario

Studiamo i solitoni come forma della funzione d'onda macroscopica per un condensato di Bose-Einstein (BEC) costituito da un gas diluito ultrafreddo di atomi alcalini. La peculiarità dei solitoni è quella di propagarsi senza che la loro forma sia alterata da effetti dispersivi, in quanto questi sono bilanciati dall'interazione non-lineare fra gli atomi del condensato. Dimostriamo che essi sono soluzioni analitiche dell'equazione di Gross-Pitaevskii, che deriveremo con un approccio variazionale nel caso libero e nel caso di confinamento armonico trasversale. Studiamo sia il "bright soliton", ossia di un massimo nella densità di probabilità, che il "dark soliton", che invece costituisce un minimo; l'interazione sarà attrattiva nel primo caso e repulsiva nel secondo. Consideriamo infine quattro esperimenti in cui sono stati generati dei solitoni e verifichiamo che le proprietà trovate sperimentalmente combacino con quelle dedotte.

Indice

1	Introduzione	2
2	L'equazione di Gross-Pitaevskii	3
2.1	Problema a molti corpi	3
2.2	Derivazione variazionale	3
2.2.1	Approssimazione di Hartree	4
2.3	Potenziale di confinamento	5
3	Soluzioni solitoniche	6
3.1	Soluzioni a profilo costante	6
3.1.1	Fase	6
3.1.2	Modulo	7
3.1.3	Parità	8
3.2	Bright soliton	8
3.2.1	Modulo	8
3.2.2	Fase	9
3.3	Black soliton	10
3.3.1	Modulo	10
3.3.2	Fase	11
3.4	Gray soliton	12
3.4.1	Modulo	12
3.4.2	Fase	13
4	Confronto con gli esperimenti	16
4.1	Bright soliton	16
4.2	Dark soliton	17
5	Conclusioni	20
	Bibliografia	21

Capitolo 1

Introduzione

I solitoni sono pacchetti d'onda che si propagano senza che la loro forma venga alterata da effetti dispersivi. Questo è possibile qualora nella dinamica siano presenti termini non-lineari che compensano questo effetto. Per questa loro natura piuttosto generale, i solitoni possono avere luogo nei sistemi fisici più disparati: come onde nelle acque di un canale, come impulsi luminosi in fibre ottiche, come onde nei plasmi e non solo. Il nostro studio si limita al contesto dei gas diluiti ultrafreddi di atomi alcalini, per i quali l'interazione fra gli atomi è ben descritta da uno pseudopotenziale di contatto. Questa dà luogo ad un'equazione di Schrödinger non-lineare (con non linearità cubica) nota come equazione di Gross-Pitaevskii (GPE), che deriviamo con un approccio variazionale nell'approssimazione di Hartree. Seguendo i primi esperimenti che evidenziarono la generazione di solitoni in gas confinati da trappole magneto-ottiche, studiamo le soluzioni della GPE nel caso di confinamento armonico trasversale, nel quale il problema tridimensionale si riduce ad unidimensionale. Sia il caso di "bright solitons", cioè di massimi nella densità di probabilità [1, 2] che quello di "dark solitons", che rappresentano invece minimi [3, 4], sono presi in considerazione scegliendo diverse condizioni al contorno. La tecnica risolutiva utilizzata prevede la riduzione dell'ordine dell'equazione per mezzo di un integrale primo. Confrontando infine le caratteristiche delle soluzioni analitiche trovate con le osservazioni sperimentali, saremo in grado di riscontrare le stesse peculiarità, ed anche di dare una spiegazione di alcune tecniche sperimentali utilizzate per generare i solitoni.

Capitolo 2

L'equazione di Gross-Pitaevskii

2.1 Problema a molti corpi

Nell'ambito della meccanica quantistica lo stato di un sistema di N particelle dotate di spin è descritto da una funzione d'onda Ψ data da

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N), \quad (2.1)$$

dove abbiamo esplicitato i gradi di libertà spaziali \mathbf{r}_i e di spin σ_i delle singole particelle. Tratteremo solamente sistemi costituiti da bosoni identici: le Ψ dovranno perciò essere simmetriche nello scambio simultaneo di due gradi di libertà spaziali e di spin, cioè

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \dots, \mathbf{r}_i, \sigma_i, \dots, \mathbf{r}_j, \sigma_j, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N) = \Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \dots, \mathbf{r}_j, \sigma_j, \dots, \mathbf{r}_i, \sigma_i, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N). \quad (2.2)$$

Consideriamo un operatore hamiltoniano \hat{H} per un sistema di N particelle interagenti sottoposte ad un potenziale, dato da

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]. \quad (2.3)$$

Un operatore \hat{H} di questa forma non contiene dipendenze da σ , pertanto non ci sono condizioni sulle dipendenze dallo spin delle autofunzioni. Ne consegue che ai fini del problema in questione è possibile omettere i gradi di libertà relativi allo spin delle particelle.

A causa del termine di interazione V l'operatore \hat{H} non è separabile, ossia non soddisfa

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i. \quad (2.4)$$

dove \hat{h}_i è l'operatore hamiltoniano di particella singola. Non è dunque possibile procedere come nel caso in cui le particelle non interagiscano, in cui una Ψ prodotto di autofunzioni di particella singola ψ è autofunzione esatta. Se però siamo disposti ad introdurre un'approssimazione, è comunque possibile cercare autostati del sistema sotto la forma di prodotto di autostati di particella singola, utilizzando il metodo variazionale.

2.2 Derivazione variazionale

Il metodo variazionale consiste nel dedurre le equazioni del moto di un sistema come condizioni di minimizzazione di un certo funzionale S , caratteristico del sistema e del suo stato. Nell'ambito di una teoria di campo, tale funzionale, che prende il nome di azione, è da cercarsi nella forma di un integrale di una densità di Lagrangiana L reale, funzione del campo Ψ e delle sue derivate prime

$$S[\Psi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_N L(\Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial r_{11}}, \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial r_{n3}}, \frac{\partial\Psi}{\partial t}). \quad (2.5)$$

Le equazioni del moto si ottengono richiedendo la stazionarietà di S rispetto a variazioni $\delta\Psi$; si richiede cioè che

$$\delta S[\Psi] = \frac{\partial}{\partial \lambda} S[\Psi + \lambda \delta\Psi](\lambda = 0) = 0, \forall \delta\Psi, \quad (2.6)$$

dove $\delta\Psi$ sono funzioni nulle agli estremi temporali t_1, t_2 dell'intervallo di integrazione e che si annullano sufficientemente velocemente all'infinito da dare ivi un flusso nullo; queste richieste sono necessarie perchè si annullino i cosiddetti "termini di bordo", come vedremo nel caso particolare in esame.

Al fine di ricavare l'espressione del funzionale azione per questo sistema, è utile notare che in generale l'equazione di Schrödinger di un sistema il cui stato è descritto da una funzione d'onda Ψ e con operatore hamiltoniano \hat{H} può essere dedotta tramite la minimizzazione del funzionale di Eq.(2.7),

$$S[\Psi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_N \Psi^*(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right] \Psi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (2.7)$$

Chiaramente se ne prendiamo la variazione rispetto alla sola Ψ^* (considerando variazioni indipendenti di Ψ e Ψ^*) otteniamo l'equazione cercata

$$\delta S[\Psi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_N \delta\Psi^* \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right] \Psi = 0, \forall \delta\Psi^* \Rightarrow \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right] \Psi = 0. \quad (2.8)$$

Se invece si prendono le variazioni rispetto alla Ψ si ottiene l'equazione complessa coniugata. La densità di Lagrangiana corrispondente all'Eq.(2.7) è pertanto

$$L = \Psi^* \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \right] \Psi. \quad (2.9)$$

Purtroppo questa L non è reale, ma possiamo sceglierne una reale che dia una δS uguale a meno di termini di bordo, che saranno nulli grazie alle ipotesi sulle variazioni. Una possibile scelta per la densità di Lagrangiana risulta essere

$$L = \frac{i\hbar}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i \Psi^* \cdot \nabla_i \Psi + U(\mathbf{r}_i) |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) |\Psi|^2 \right). \quad (2.10)$$

Valgono infatti le identità

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}_i \Psi \frac{\partial \delta\Psi^*}{\partial t} = \int d^3\mathbf{r}_i (\delta\Psi^* \Psi)(t_2) - (\delta\Psi^* \Psi)(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}_i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \delta\Psi^*, \quad (2.11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}_i \nabla_i \delta\Psi^* \cdot \nabla_i \Psi = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_\infty} d\Sigma_i \cdot (\delta\Psi^* \nabla_i \Psi) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r} \delta\Psi^* \nabla_i^2 \Psi, \quad (2.12)$$

dove i termini di bordo sono i primi addendi dei termini a destra delle identità. Essi sono entrambi nulli: il primo perchè le variazioni sono valutate agli estremi dell'intervallo di integrazione, il secondo perchè rappresenta un flusso all'infinito.

2.2.1 Approssimazione di Hartree

Introduciamo ora un'approssimazione che consiste nel seguente ansatz variazionale per Ψ

$$\Psi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \psi(t, \mathbf{r}_1) \cdots \psi(t, \mathbf{r}_N). \quad (2.13)$$

Questa corrisponde all'approssimazione di Hartree, con la quale si assume appunto che la Ψ sia prodotto di funzioni d'onda ψ relative alle singole particelle. Nel contesto dei condensati di Bose-Einstein, essa implica che tutto il sistema sia nella fase condensata, pertanto vale $T = 0$.

Sostituiamo la forma di Ψ dell' Eq.(2.13) nell'azione data dalla densità di Lagrangiana di Eq.(2.10). L'azione risultante è

$$S[\psi] = N \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r} \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \\ - U(\mathbf{r}) |\psi|^2 - \frac{(N-1)}{2} \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\psi(t, \mathbf{r}')|^2 |\psi(t, \mathbf{r})|^2. \quad (2.14)$$

dove abbiamo supposto la normalizzazione della funzione d'onda di particella singola

$$\int d^3\mathbf{r} |\psi(t, \mathbf{r})|^2 = 1. \quad (2.15)$$

Si noti che nell'approssimazione di Hartree il potenziale di interazione $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ si traduce nel potenziale di campo medio $V_{mf}(\mathbf{r})$, dato da

$$V_{mf}(t, \mathbf{r}) = \frac{(N-1)}{2} \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi(t, \mathbf{r}')|^2. \quad (2.16)$$

Per ottenere l'equazione che cerchiamo, dobbiamo richiedere che l'azione sia stazionaria con il vincolo dato dall'Eq.(2.15). Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, sommando all'azione l'equazione del vincolo moltiplicata per il parametro μ , ed annullandone la variazione rispetto a ψ^* per ogni $\delta\psi^*$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r} \delta\psi^* \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) - (N-1)V_{mf}(t, \mathbf{r}) + \mu \right] \psi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.17)$$

Ma allora è necessario che sia nullo l'integrando, senza la $\delta\psi^*$ a fattore. Se ora supponiamo che l'interazione fra le particelle sia di contatto (ragionevole nel nostro caso di gas diluito, in cui vale $a_s \ll n^{-\frac{1}{3}}$), allora

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (2.18)$$

dove g è il parametro che determina la "forza" dell'interazione non-lineare; vale $g > 0$ se l'interazione è repulsiva e $g < 0$ se è attrattiva. L'equazione ottenuta è chiamata equazione di Gross-Pitaevskii

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + g(N-1)|\psi(t, \mathbf{r})|^2 - \mu \right] \psi(t, \mathbf{r}). \quad (2.19)$$

Nel limite termodinamico possiamo considerare $N-1 \sim N$.

L'Eq.(2.19) si presenta dunque come un'equazione di Schrödinger non lineare (con non-linearità cubica) per la funzione d'onda ψ .

2.3 Potenziale di confinamento

Studiamo ora il caso di un potenziale di confinamento armonico a simmetria cilindrica

$$U_{\perp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.20)$$

in cui la particella è libera lungo la direzione z . Introduciamo ora un ansatz variazionale per ψ , fattorizzando la dipendenza spaziale radiale mediante l'autofunzione ad energia minima di un oscillatore armonico 2D e la relativa evoluzione temporale, cioè

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \phi(t, z) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2a_{\perp}^2}}}{\sqrt{\pi a_{\perp}^2}} e^{-i\omega_{\perp} t}, \quad (2.21)$$

dove $a_{\perp}^2 = \frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}$. Vediamo che sostituendo questa forma nell'azione di Eq.(2.14) e minimizzandola ottengo un equivalente unidimensionale dell'Eq.(2.19)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, z) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma |\phi(t, z)|^2 - \mu \right] \phi(t, z), \quad (2.22)$$

dove $\gamma = \frac{gNm\omega_{\perp}}{2\pi\hbar}$.

Capitolo 3

Soluzioni solitoniche

3.1 Soluzioni a profilo costante

Studiamo ora delle eventuali soluzioni dell'Eq.(2.22), di forma

$$\phi(t, z) = f(z - vt)e^{i\alpha(t, z)}, \quad (3.1)$$

dove assumiamo f e α funzioni reali. Queste soluzioni traslano rigidamente di moto rettilineo uniforme a velocità v mantenendo inalterata la forma del modulo della funzione d'onda.

A seconda del segno della costante g , che dà luogo ad interazione repulsiva ($g > 0$) o attrattiva ($g < 0$), affinché tali soluzioni esistano è necessario scegliere condizioni al contorno diverse, che daranno luogo a classi di soluzioni con proprietà diverse.

Sostituendo nell'Eq.(2.22) la forma data dall'Eq.(3.1) per ϕ , ottengo un'equazione complessa. Per essere risolta, è necessario che le equazioni relative alla parte reale e alla parte immaginaria siano soddisfatte, dando luogo al sistema

$$f'' = \frac{2m}{\hbar^2} \left[f \left(\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)^2 - \mu \right) + \gamma f^3 \right], \quad (3.2)$$

$$f'v = \frac{\hbar}{m} \left(f' \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{1}{2} f \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right). \quad (3.3)$$

Consideriamo innanzitutto l'Eq.(3.3): perchè sia verificata, è necessario che il membro a destra sia, al pari di quello a sinistra, funzione della sola ζ . Perchè questo accada $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$ dev'essere funzione della sola ζ . Assumiamo pertanto la seguente forma per α :

$$\alpha(z, t) = \theta(z - vt) + \beta(t). \quad (3.4)$$

Sostituendo l'Eq.(3.4) nel sistema Eq.(3.2-3.3) otteniamo

$$f'' = \frac{2m}{\hbar^2} \left[f \left(\hbar \frac{d\beta}{dt} - \hbar v \theta' + \frac{\hbar^2}{2m} (\theta')^2 - \mu \right) + \gamma f^3 \right], \quad (3.5)$$

$$f'v = \frac{\hbar}{m} \left(f' \theta' + \frac{1}{2} f \theta'' \right). \quad (3.6)$$

3.1.1 Fase

Risolviamo ora l'Eq.(3.6) per ottenere θ' in funzione di f , scrivendola come

$$v \frac{(f^2)'}{f} = \frac{\hbar}{m} \frac{(f^2 \theta')'}{f}, \quad (3.7)$$

valida per $f(\zeta) \neq 0$. Per integrazione nella variabile ζ segue che

$$f^2(\zeta) \left(v - \frac{\hbar}{m} \theta'(\zeta) \right) = \xi, \quad (3.8)$$

dove ξ è una costante di integrazione, il cui valore dipende dalle condizioni al contorno che scegliamo per la f . In generale assumiamo che valgano le condizioni

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} |f(\zeta)| = f_\infty, \quad (3.9)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \theta'(\zeta) = 0. \quad (3.10)$$

Ne consegue che

$$\xi = v f_\infty^2. \quad (3.11)$$

L'espressione di θ' risulta essere in definitiva

$$\theta'(\zeta) = \frac{mv}{\hbar} \left(1 - \frac{f_\infty^2}{f^2(\zeta)} \right), \quad (3.12)$$

valida per $f(\zeta) \neq 0$.

3.1.2 Modulo

Consideriamo ora l'Eq.(3.2) e sostituiamo l'espressione trovata in Eq.(3.12) per θ'

$$f'' = \left(\frac{2m}{\hbar} \right) \frac{d\beta}{dt} f - \left(\frac{mv}{\hbar} \right)^2 f + \left(\frac{mv}{\hbar} \right)^2 \frac{f_\infty^4}{f^3} - \frac{2m}{\hbar^2} \mu f + \frac{2m}{\hbar^2} \gamma f^3. \quad (3.13)$$

Bisogna ora supporre una forma specifica per β , in quanto abbiamo un'unica equazione ed essa serve a determinare f . La forma che dà luogo all'equazione più semplice è

$$\beta(t) = \frac{mv^2}{2\hbar} t, \quad (3.14)$$

che sostituito nell'Eq.(3.13) dà

$$f'' = \left(\frac{mv}{\hbar} \right)^2 \frac{f_\infty^4}{f^3} - \frac{2m}{\hbar^2} \mu f + \frac{2m}{\hbar^2} \gamma f^3. \quad (3.15)$$

L'Eq.(3.15) è integrabile per quadrature: si può trovare un integrale del moto, se trattiamo la funzione d'onda come una coordinata spaziale e la variabile ζ come un tempo fittizio. Così facendo otteniamo la forma di un'equazione di Newton 1D per un campo di forze conservativo in cui la massa è unitaria

$$f'' = -\frac{dW}{df}, \quad (3.16)$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{mv}{\hbar} \right)^2 \frac{f_\infty^4}{f^2} + \frac{m}{\hbar^2} \mu f^2 - \frac{m}{2\hbar^2} \gamma f^4. \quad (3.17)$$

Possiamo dunque utilizzare l'integrale del moto dato dall'energia totale

$$K = \frac{1}{2} f'^2 + W, \quad (3.18)$$

ed esprimendo la conservazione dell'energia otteniamo un'equazione differenziale del prim'ordine che contiene la costante di integrazione energia K

$$K = \frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mv}{\hbar} \right)^2 \frac{f_\infty^4}{f^2} + \frac{m}{\hbar^2} \mu f^2 - \frac{m}{2\hbar^2} \gamma f^4, \quad (3.19)$$

che in forma normale dà luogo a due rami di segno opposto

$$f' = \pm \frac{1}{|f|} \sqrt{2K f^2 - \left(\frac{mv}{\hbar} \right)^2 f_\infty^4 - \frac{2m}{\hbar^2} \mu f^4 + \frac{m}{\hbar^2} \gamma f^6} = \pm F(f). \quad (3.20)$$

Si noti che a causa della non-Lipschitzianità di $F(f)$ nell'origine, l'equazione non soddisfa le ipotesi necessarie ad assicurare l'unicità della soluzione in quel punto. Tuttavia il Teorema di Esistenza e Unicità locale della soluzione vale ovunque meno che nell'origine, pertanto, dato che $f(\zeta) = 0$ è soluzione del sistema originario Eq.(3.2-3.3), allora le soluzioni diverse da quella banale non possono annullarsi se non nell'origine.

3.1.3 Parità

Fra le possibili soluzioni C^2 , è inoltre possibile scegliere quelle a parità definita (compatibilmente con le condizioni al contorno), utilizzando il ramo adatto dell'equazione. Nel caso si cerchi una soluzione pari, basta trovare una $f(\zeta)$ che soddisfi un ramo dell'equazione per $\zeta > 0$. Così facendo $f(-\zeta)$ soddisfa il ramo con segno opposto per $\zeta < 0$, pertanto la soluzione pari è data da $f(|\zeta|)$

$$f'(\zeta) = \pm F(f), \quad \forall \zeta > 0 \Rightarrow -f'(-\zeta) = \mp F(f), \quad \forall \zeta < 0. \quad (3.21)$$

Invece per la soluzione dispari si può verificare che $-f(-\zeta)$ soddisfa il ramo con lo stesso segno dell'equazione per $\zeta < 0$, quindi $\text{sign}(\zeta)f(|z|)$ è una soluzione ed è dispari. Dato che cercheremo soluzioni a parità definita, supporremo d'ora in poi di studiare la soluzione di uno dei due rami nel primo quadrante, ossia $f(\zeta) > 0$, $\zeta > 0$. Non bisogna dimenticare però che questa è una convenzione e che le soluzioni ottenute scegliendo i rami opposti sono altrettanto valide.

Notiamo infine che sotto queste ipotesi il segno della derivata non può cambiare al di fuori dell'origine, di conseguenza f non può assumere massimi o minimi locali se non nell'origine.

L'Eq.(3.20) è a variabili separabili: si può pertanto integrare scrivendo

$$\zeta - \zeta_0 = \pm \int_{f(\zeta_0)}^{f(\zeta)} df \frac{f}{\sqrt{2Kf^2 - \left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2 f_\infty^4 - \frac{2m}{\hbar^2} \mu f^4 + \frac{m}{\hbar^2} \gamma f^6}}, \quad (3.22)$$

in cui sceglieremo $\zeta_0 = 0$. L'integrazione del membro di destra dell'Eq.(3.22) nei vari casi, contraddistinti da diverse condizioni al contorno e quindi da diversi valori delle costanti f_∞ e K , proseguirà d'ora in poi separatamente per ciascuno di essi.

3.2 Bright soliton

Il caso più semplice è quello del "bright soliton", la cui densità di probabilità presenta un massimo isolato; vedremo che nel caso libero nella direzione z questo trasla di moto rettilineo uniforme a velocità v . Bisogna assumere un potenziale attrattivo ($g < 0 \Rightarrow \gamma < 0$), come è intuitivo pensare, se stiamo cercando una soluzione con un addensamento "self-bound".

3.2.1 Modulo

Cerchiamo pertanto una soluzione positiva, che sia pari e che si annulli all'infinito con le sue derivate

$$f_\infty = f'_\infty = 0. \quad (3.23)$$

Studiamo pertanto il ramo con derivata negativa nel primo quadrante. Segue subito dall'Eq.(3.19), valutandola all'infinito, che $K = 0$. L'Eq.(3.22) allora diventa

$$\zeta = - \int_{f(0)}^{f(\zeta)} \frac{df}{f \sqrt{\alpha - \beta f^2}}, \quad (3.24)$$

dove è stato posto

$$\alpha = -\frac{2m}{\hbar^2} \mu, \quad \beta = \frac{m}{\hbar^2} |\gamma|. \quad (3.25)$$

Il segno di β è positivo, mentre il segno di α può essere determinato imponendo

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, & K &= T + W \\ \alpha f^2(0) - \beta f^4(0) &= 0 \\ f^2(0) &= 0 \vee \alpha = \beta f^2(0). \end{aligned}$$

La derivata di una funzione pari è dispari, pertanto si annulla nell'origine; viene ivi assunto un massimo, come si deduce dal segno della derivata. Dato che esso è l'unico massimo locale è anche il massimo globale, visto che $f_\infty = 0$. Ma allora f non può annullarsi nell'origine, a meno che non sia la soluzione banale. Pertanto α è positivo, e conosciamo anche il valore f_0 del massimo di f

$$f_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{2|\mu|}{|\gamma|}} \quad (3.26)$$

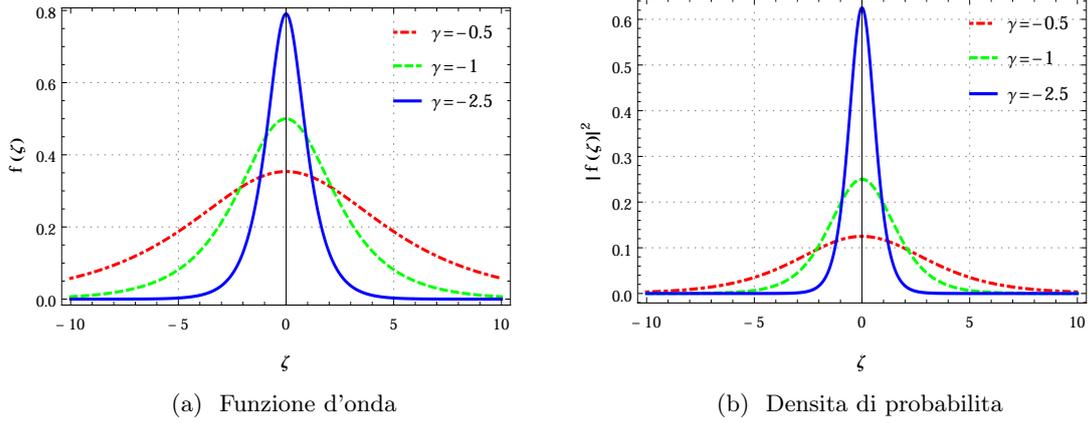


Figura 3.1: Bright soliton

Consideriamo infine la condizione di esistenza per la radice a denominatore

$$\begin{aligned} \alpha f^2(\zeta) - \beta f^4(\zeta) &\geq 0 \\ 0 &\leq f(\zeta) \leq f_0 \end{aligned}$$

essa esprime proprio il fatto noto che f_0 sia massimo globale.

Il membro a destra dell'Eq.(3.24) può essere integrato con il cambio di variabile di integrazione

$$f = f_0 \cos(\eta), \quad (3.27)$$

dando luogo all'integrale indefinito

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{d\eta}{\cos(\eta)} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} [\log(1 + \sin(\eta)) - \log(1 - \sin(\eta))] + C. \quad (3.28)$$

Calcoliamo ora l'integrale definito in termini di f : otteniamo un'equazione che, una volta invertita, da $f(\zeta)$

$$2\sqrt{\alpha}\zeta = \log \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}}} \right]. \quad (3.29)$$

Per invertire l'Eq.(3.29) basta sommare ad ogni membro il suo inverso, e fatte le semplificazioni si ottiene

$$f(\zeta) = f_0 \operatorname{sech} \left(f_0 \sqrt{\beta} \zeta \right). \quad (3.30)$$

Il risultato, valido per $\zeta > 0$, è una funzione pari, quindi per quanto detto è soluzione su tutto \mathbb{R} . La normalizzazione fissa f_0 e di conseguenza anche μ

$$f_0 = \sqrt{\frac{m|\gamma|}{4\hbar^2}}, \quad \mu = -\frac{m\gamma^2}{8\hbar^2}; \quad (3.31)$$

la forma normalizzata di f è pertanto

$$f(\zeta) = \sqrt{\frac{m|\gamma|}{4\hbar^2}} \operatorname{sech} \left(\frac{m|\gamma|}{2\hbar^2} \zeta \right), \quad (3.32)$$

il cui grafico è rappresentato in Fig.(3.1), per $m = \hbar = 1$.

3.2.2 Fase

Resta da discutere la fase: nel caso $f_\infty = 0$ l'Eq.(3.12) dà

$$\theta'(\zeta) = \frac{mv}{\hbar} \quad (3.33)$$

che si integra immediatamente ottenendo

$$\theta = \frac{mv}{\hbar} \zeta. \quad (3.34)$$

La costante di integrazione determina uno shift di fase, pertanto viene implicitamente posta uguale a zero. La fase complessiva si ottiene sommando β

$$\alpha(z, t) = \frac{mv}{\hbar} \left(z - \frac{vt}{2} \right). \quad (3.35)$$

3.3 Black soliton

Consideriamo ora il caso di un "dark soliton", cioè una soluzione che presenti un minimo isolato nella densità di probabilità; la funzione d'onda non si annulla dunque all'infinito, ma tende in modulo ad un valore f_∞ . In questo caso è necessario sopporre l'interazione repulsiva ($g > 0 \Rightarrow \gamma > 0$), poichè dobbiamo ottenere uno stato "self-bound" con una diminuzione locale della densità. Ci focalizziamo sul caso particolare del "black soliton", cioè quello in cui f si annulla nell'origine

$$f(0) = 0. \quad (3.36)$$

Vedremo che questa evenienza si verifica solo per solitoni stazionari.

3.3.1 Modulo

Cerchiamo una soluzione dispari, che da quindi luogo ad una densità di probabilità pari e che si annulla nell'origine. Studiamo pertanto il ramo positivo dell'Eq.(3.22) nel primo quadrante; supponiamo anche che le derivate si annullino all'infinito

$$f'_\infty = f''_\infty = 0. \quad (3.37)$$

L'Eq.(3.20) non è definita in un intorno di $f = 0$, in quanto l'argomento della radice è una funzione continua di f e per $f = 0$ è negativo. Se però supponiamo che la velocità v del solitone sia nulla, allora l'equazione non ha più questo problema, in quanto abbiamo

$$f' = \sqrt{2K - \frac{2m}{\hbar^2} \mu f^2 + \frac{m}{\hbar^2} \gamma f^4}, \quad (3.38)$$

quindi basta verificare che $K \geq 0$ affinchè sia ben definita all'intorno di $f = 0$. Tuttavia grazie all'Eq.(3.19) vale

$$f(0) = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{2} f'^2(0) \geq 0. \quad (3.39)$$

L'Eq.(3.22) si riduce in questo caso a

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{df}{\sqrt{2K - \alpha f^2 + \beta f^4}}, \quad (3.40)$$

dove è stato posto

$$\alpha = \frac{2m}{\hbar^2} \mu, \quad \beta = \frac{m}{\hbar^2} \gamma. \quad (3.41)$$

Il segno di β è positivo, mentre il segno di α si deduce se prendiamo in considerazione gli altri vincoli sulla soluzione. Imponiamo ora la condizione sulla derivata seconda di f nell'Eq.(3.15)

$$f''_\infty = 0 \Rightarrow f_\infty (-\alpha + 2\beta f_\infty^2) = 0 \\ \alpha = 2\beta f_\infty^2,$$

dove si è escluso $f_\infty = 0$ perchè in tal caso avremmo $f(z) = 0$, in quanto dato che $f' \geq 0$ nel primo quadrante, f è crescente, quindi ha come estremo superiore f_∞ . Concludiamo dunque che $\alpha \geq 0$.

Queste considerazioni ci permettono anche di trovare μ

$$\mu = f_\infty^2 \gamma. \quad (3.42)$$

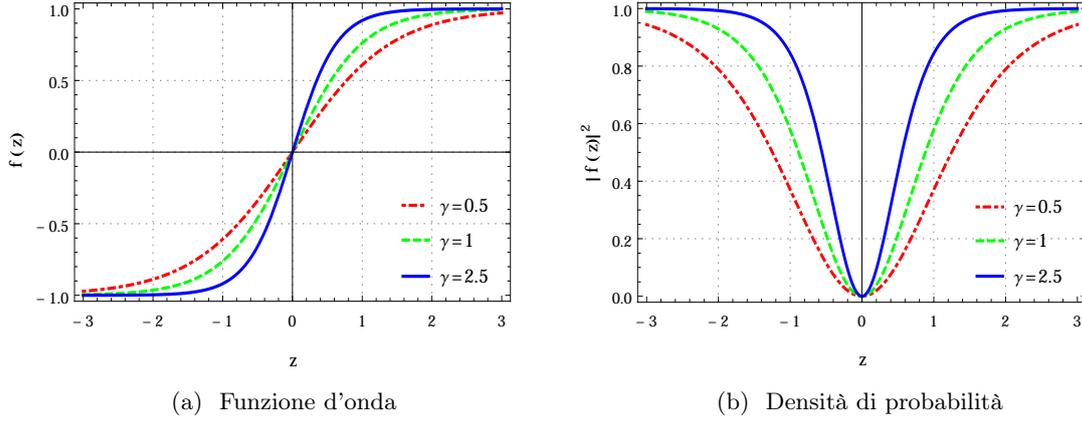


Figura 3.2: Black soliton

Per trovare K basta valutarlo all'infinito, per cui è noto il valore asintotico di f

$$K = \alpha \frac{f_\infty^2}{2} - \frac{f_\infty^4}{2} \beta = \beta \frac{f_\infty^4}{2}. \quad (3.43)$$

L'integrale in Eq.(3.40) diventa allora

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^{f(z)} \frac{df}{\sqrt{f_\infty^4 - 2f_\infty^2 f^2 + f^4}}. \quad (3.44)$$

Possiamo risolvere l'integrale indefinito tramite il cambio di variabile

$$x = \frac{f}{f_\infty}, \quad (3.45)$$

che fornisce

$$\frac{1}{\sqrt{\beta} f_\infty} \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \operatorname{arctanh}(x) + C. \quad (3.46)$$

Calcolando l'integrale definito otteniamo un'equazione che invertita dà $f(\zeta)$

$$f(z) = f_\infty \tanh(\sqrt{\beta} f_\infty z), \quad (3.47)$$

valida per $\zeta \geq 0$. La soluzione su \mathbb{R} dev'essere dispari. In effetti la funzione trovata è dispari, quindi è anche la soluzione valida su \mathbb{R} . La normalizzazione non è possibile nel caso di un "dark soliton", in quanto l'integrale su \mathbb{R} di $|f(z)|^2$ diverge. Possiamo scegliere tuttavia il valore di f_∞ , che fissiamo convenzionalmente a 1. Ne consegue che

$$\mu = \gamma, \quad (3.48)$$

mentre la soluzione diventa

$$f(z) = \tanh\left(\sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}} z\right) \quad (3.49)$$

La funzione non normalizzata è dunque interpretabile fisicamente solo come un'approssimazione della vera funzione d'onda, valida vicino al solitone; per ottenere l'integrabilità è necessario tener conto degli effetti di bordo. Grafici relativi alla soluzione sono riportati nelle Fig.(3.2), per $m = \hbar = 1$.

3.3.2 Fase

Passiamo ora alla fase: l'Eq.(3.12) vale ovunque tranne che nell'origine, pertanto

$$\theta'(z) = 0 \Rightarrow \theta(z) = C. \quad (3.50)$$

θ dà luogo ad un semplice shift di fase, che possiamo scegliere in modo arbitrario. Fissiamo pertanto $\theta(z) = 0$; la fase complessiva risulta quindi

$$\alpha(z, t) = \beta(t) = \frac{mv^2}{2\hbar}t. \quad (3.51)$$

Possiamo anche scrivere la soluzione nella forma

$$f(z) = f_\infty \tanh(\sqrt{\beta}f_\infty|z|)e^{i\pi H(-z)}, \quad (3.52)$$

dove $H(z)$ è la funzione a gradino, in cui si evidenzia il ruolo della fase. Sfruttando la singolarità dell'equazione nell'origine è infatti possibile ottenere una fase discontinua nell'origine, basta scegliere costanti diverse nell'integrazione di θ a seconda del segno di z .

3.4 Gray soliton

L'ultimo caso che prendiamo in considerazione è quello di un "dark soliton" in cui f non si annulli mai. Nel caso libero nella direzione z otteniamo dei solitoni che traslano di moto rettilineo uniforme.

3.4.1 Modulo

Cerchiamo una soluzione pari, e continuiamo a supporre le usuali condizioni sulle derivate

$$f'_\infty = f''_\infty = 0. \quad (3.53)$$

Studiamo la soluzione del ramo positivo dell'Eq.(3.22) nel primo quadrante. La soluzione assumerà questa volta il minimo globale nell'origine, in quanto essa è crescente e limitata per $\zeta \geq 0$. Applichiamo le condizioni sulla derivata seconda all'Eq.(3.15) e sulla derivata prima all'Eq.(3.19); otteniamo delle relazioni fra i parametri, come fatto negli altri casi

$$f''_\infty = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}mv^2 + \gamma f_\infty^2, \quad (3.54)$$

$$f'_\infty = 0 \Rightarrow 2K = 2\left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2 f_\infty^2 + \frac{m\gamma}{\hbar^2} f_\infty^4, \quad (3.55)$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow f^2(0) = \frac{mv^2}{\gamma} = f_0^2. \quad (3.56)$$

L'Eq.(3.56) ha un contenuto fisico importante: la velocità di propagazione del solitone è direttamente proporzionale all'altezza del minimo, vale infatti

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} f_0 \quad (3.57)$$

Questo è in accordo con il fatto che per un "black soliton" tale velocità sia nulla; al contempo questa caratteristica differisce molto da quelle del "bright soliton", per il quale la velocità è arbitraria (nel limite di validità del modello).

Un'altra verifica della validità dell' Eq.(3.57) è data dal fatto che per solitoni infinitesimi, in cui cioè $f_0 \rightarrow f_\infty$, abbiamo che la velocità di propagazione è pari alla velocità del suono di Bogoliubov v_s

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} f_\infty. \quad (3.58)$$

Dato che i solitoni in questo caso rappresentano piccole perturbazioni, essi per definizione devono viaggiare alla velocità del suono.

Proseguiamo sostituendo le identità appena trovate nell'Eq.(3.22). Il polinomio argomento della radice diventa

$$f^6 - (f_0^2 + 2f_\infty^2)f^4 + (2f_0^2f_\infty^2 + f_\infty^4)f^2 - f_0^2f_\infty^4. \quad (3.59)$$

Una volta fattorizzato questo polinomio, notando ad esempio che f_0 è uno dei suoi zeri, si può riscrivere l'equazione ottenendo

$$\zeta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m\gamma}} \int_{f_0}^{f(\zeta)} \frac{df f}{\sqrt{f^2 - f_0^2}(f_\infty^2 - f^2)}. \quad (3.60)$$

Calcoliamo ora questo integrale indefinito: facciamo il cambio di variabile $y = f^2$ e separiamolo in addendi

$$\frac{1}{2(f_\infty^2 - f_0^2)} \int dy \left(\frac{1}{\sqrt{y - f_0^2}} + \frac{\sqrt{y - f_0^2}}{f_\infty^2 - y} \right) = \frac{1}{2(f_\infty^2 - f_0^2)} \left(\sqrt{f^2 - f_0^2} + \frac{1}{2} \int dy \frac{\sqrt{y - f_0^2}}{f_\infty^2 - y} \right). \quad (3.61)$$

Effettuiamo nel secondo addendo il cambio $z = \sqrt{y - f_0^2}$

$$\int dz \left(\frac{z}{\sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} - z} - \frac{z}{\sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} + z} \right). \quad (3.62)$$

Infine i cambi di variabile, separatamente per ciascuno dei due addendi $\xi = \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} - z$ e $\eta = \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} + z$ danno luogo agli integrali immediati

$$\begin{aligned} \int d\xi \left(1 - \frac{\sqrt{f_\infty^2 - f_0^2}}{\xi} \right) &= \xi - \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} \log \xi, \\ \int d\eta \left(-1 + \frac{\sqrt{f_\infty^2 - f_0^2}}{\eta} \right) &= -\eta + \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} \log \eta. \end{aligned}$$

Se ora calcoliamo gli integrali definiti effettuando a ritroso le varie sostituzioni, otteniamo

$$\zeta = \frac{\hbar}{\sqrt{m\gamma} \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{f^2 - f_0^2}}{\sqrt{f_\infty^2 - f_0^2}} \right), \quad (3.63)$$

che una volta invertita dà la soluzione per $f(\zeta)$

$$f(\zeta) = \sqrt{f_0^2 + (f_\infty^2 - f_0^2) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar} \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} \zeta \right)}. \quad (3.64)$$

Anche in questo caso la normalizzazione non è possibile, pertanto fissiamo $f_\infty = 1$. Ne consegue che

$$\mu = \frac{1}{2} m v^2 + \gamma, \quad (3.65)$$

mentre la soluzione diventa

$$f(\zeta) = \sqrt{\frac{m v^2}{\gamma} + \left(1 - \frac{m v^2}{\gamma} \right) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar} \sqrt{1 - \frac{m v^2}{\gamma}} \zeta \right)}. \quad (3.66)$$

Grafici della densità di probabilità per vari valori di γ e v sono riportati nelle Fig.(3.3), per $m = \hbar = 1$.

3.4.2 Fase

Calcoliamo ora la fase corrispondente al modulo della soluzione trovata: sostituendolo nell'Eq.(3.12) si trova

$$\theta'(\zeta) = \frac{m v}{\hbar} \left(\frac{\tanh^2 x - 1}{\tanh^2 x + \delta} \right), \quad (3.67)$$

$$x = \frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar} \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} \zeta, \quad \delta = \frac{f_0^2}{f_\infty^2 - f_0^2}. \quad (3.68)$$

Per trovare θ basta dunque calcolare l'integrale indefinito di θ' in $d\zeta$. Questo è possibile tramite il cambio di variabile $y = \frac{\tanh x}{\sqrt{\delta}}$, che dà

$$-\frac{\hbar}{m|v|} \int \frac{dy}{y^2 + 1} = -\frac{\hbar}{m|v|} \operatorname{arctan} y + C. \quad (3.69)$$

Effettuando le dovute sostituzioni si ottiene θ

$$\theta(\zeta) = -\text{sign}(v) \arctan \left(\sqrt{\frac{f_\infty^2 - f_0^2}{f_0^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar} \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} \zeta \right) \right) + \theta_0. \quad (3.70)$$

Se ora imponiamo come fatto per il modulo $f_\infty = 1$ otteniamo

$$\theta(\zeta) = -\text{sign}(v) \arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma}{mv^2}} - 1 \tanh \left(\frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar} \sqrt{1 - \frac{mv^2}{\gamma}} \zeta \right) \right) + \theta_0, \quad (3.71)$$

di cui vediamo il grafico per $m = \hbar = 1$ e $\theta_0 = 0$ in Fig.(3.3d). La fase ha un andamento simile ad un gradino, e si riduce ad un gradino vero e proprio nel limite $f_0 \rightarrow 0$, coerentemente al caso di un "black soliton".

Calcoliamo ora la differenza di fase fra i valori asintotici di θ

$$\delta = \theta_{+\infty} - \theta_{-\infty}. \quad (3.72)$$

Dall'espressione in Eq.(3.70) otteniamo che

$$\tan \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{f_\infty^2 - f_0^2}{f_0^2}}, \quad (3.73)$$

da cui discende

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{f_0}{f_\infty} = \frac{v}{v_s}. \quad (3.74)$$

Quindi la velocità del solitone è collegata anche all'altezza del gradino nella fase.

In conclusione notiamo che è possibile esprimere il risultato per f , scegliendo la costante di integrazione $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$, come una funzione complessa

$$f(\zeta) = \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} \tanh \left(\frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar} \sqrt{f_\infty^2 - f_0^2} \zeta \right) + if_0. \quad (3.75)$$

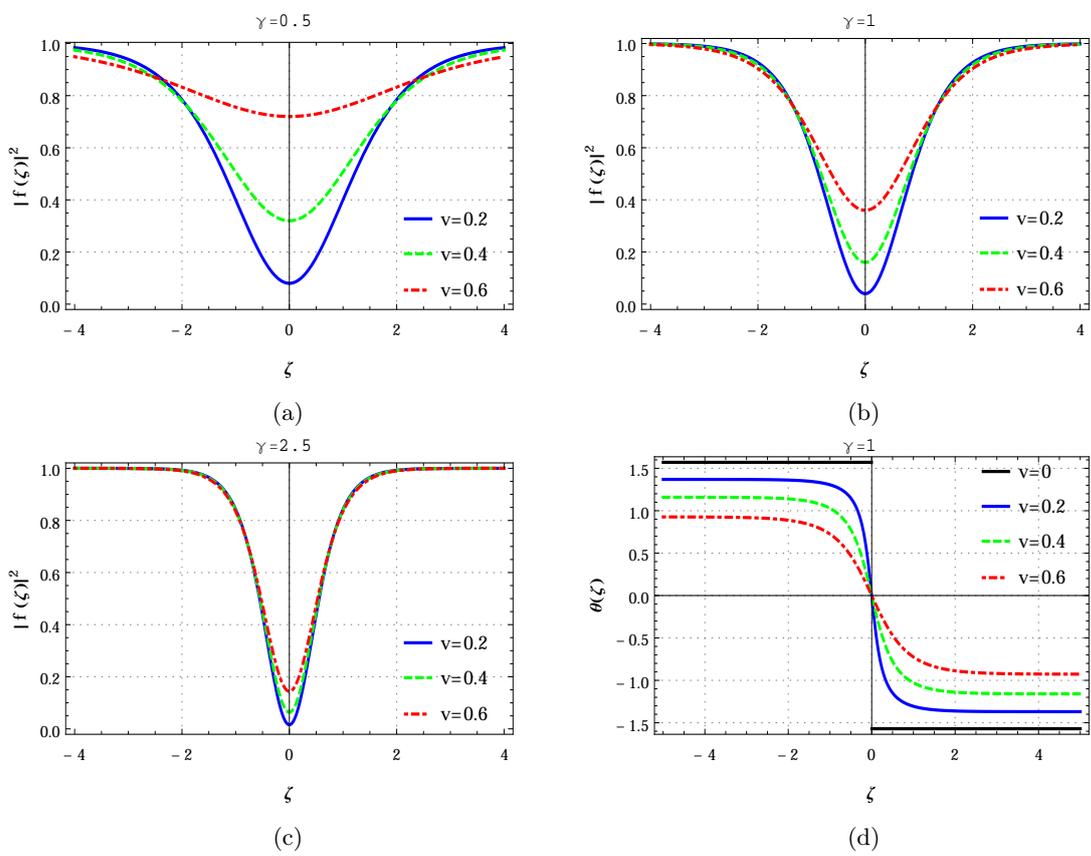


Figura 3.3: Gray soliton.

Capitolo 4

Confronto con gli esperimenti

Gli esperimenti sui gas ultrafreddi di atomi alcalini sono accomunati dalla necessità di confinare un certo numero di atomi (di solito $\sim 10^8$) al fine di manipolarli, e di raffreddarli fino a temperature che permettano la condensazione di una frazione apprezzabile di essi ($\sim 10^5$) nello stato di BEC.

Il confinamento è ottenuto utilizzando trappole magnetiche e ottiche, combinate a seconda delle esigenze sperimentali. Tipicamente il processo di raffreddamento è composto da varie fasi, in cui vengono usate tecniche differenti. L'ultimo step è spesso un "evaporative cooling", in cui si abbassa la barriera del potenziale di confinamento, al fine di favorire la fuoriuscita degli atomi più energetici; la temperatura finale del gas è dell'ordine del μK , valore per il quale si ottiene un'adeguata frazione condensata.

Lo studio sperimentale dei solitoni spesso non avviene in una configurazione di particella libera in direzione assiale, ma piuttosto con potenziali di confinamento armonici prolatti. Se esprimiamo il potenziale sperimentale come

$$U_{sp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m [\omega_z^2 z^2 + \omega_\perp^2 (x^2 + y^2)] \quad (4.1)$$

avremo in tal caso che $\omega_z < \omega_\perp$. Possiamo quindi quantificare quanto prolato sia il potenziale mediante il parametro P

$$P = \frac{|\omega_\perp|}{|\omega_z|} > 1. \quad (4.2)$$

4.1 Bright soliton

Le prime verifiche sperimentali dell'esistenza di "bright solitons" nei gas diluiti ultrafreddi di atomi alcalini furono presentate nel 2002 da due gruppi [2, 1], ed entrambi utilizzarono atomi di 7Li . Altro punto in comune dei due esperimenti è la tecnica usata per ottenere i solitoni. Gli atomi di 7Li sono inizialmente intrappolati sia radialmente che assialmente da una trappola puramente ottica; il

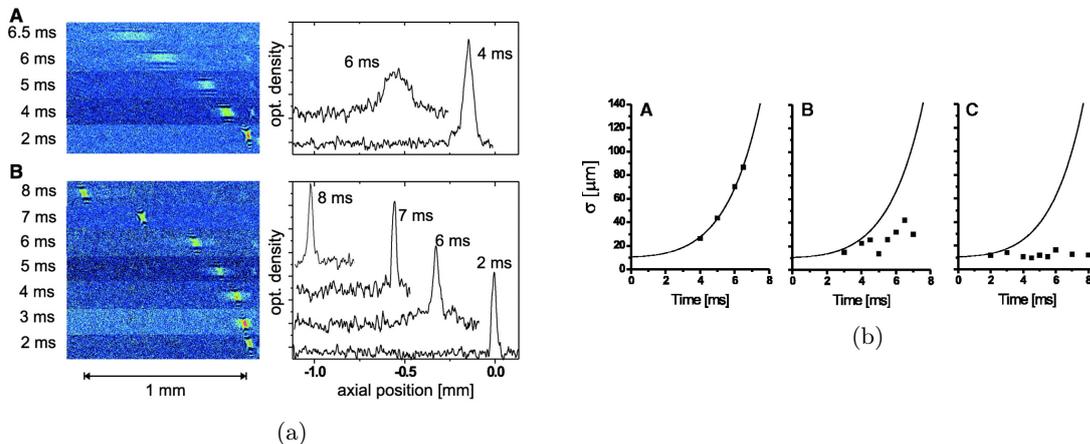


Figura 4.1: Dinamica di un solitone in un potenziale espulsivo.

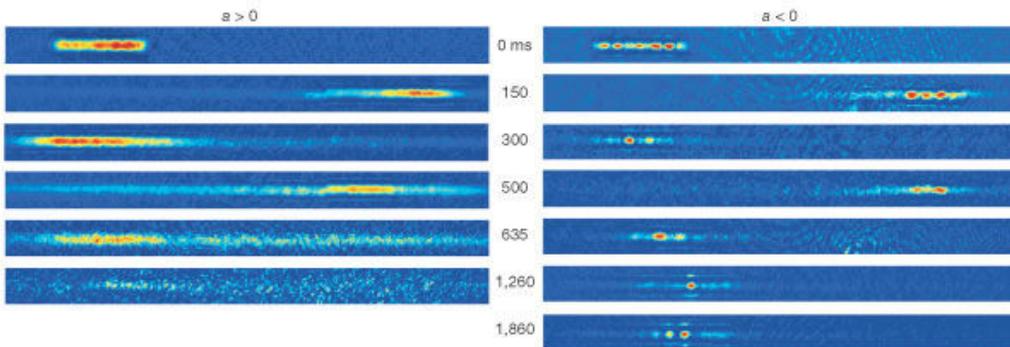


Figura 4.2

condensato è inoltre immerso in un campo magnetico uniforme. Quest'ultimo viene fatto variare ad un altro valore in un intervallo temporale di $\sim 50ms$ al fine di cambiare la lunghezza di scattering da onda- s a_s da positiva a negativa con il metodo della risonanza Feshbach. Dopo un certo lasso di tempo il condensato viene "liberato" eliminando il confinamento assiale, lasciando che i solitoni si propaghino. Vengono poi registrate delle immagini della densità del condensato in funzione del tempo.

L'esperimento di Khaykovich *et al.* [2] dà luogo ad un singolo solitone, che a causa della non-uniformità del campo magnetico di offset risente di un potenziale armonico espulsivo in direzione assiale, con $P \sim 9$. Il moto risultante è pertanto accelerato secondo una legge esponenziale, come si vede in Fig.(4.1a).

Viene inoltre misurata la deviazione standard σ del fit gaussiano del pacchetto d'onda in funzione del tempo di propagazione; le misure sono effettuate per $a_s = 0 nm$, $-0.11 nm$, $-0.21 nm$. Come si nota in Fig.(4.1b), mentre per $a_s = 0 nm$ σ aumenta come ci si aspetta nel caso di un gas non interagente in un potenziale armonico, per $a_s = -0.11 nm$ l'interazione attrattiva riduce l'aumento di σ e per $a_s = -0.21 nm$ σ rimane costante nei limiti di precisione dell'apparato di misura, $9(1) \mu m$ in direzione assiale.

Nell'esperimento di Strecker *et al.* [1], invece, viene prodotto un treno di solitoni in un potenziale ottico armonico con $P \sim 200$, cui viene sovrapposto un potenziale ottico a scatola; una volta eliminato quest'ultimo, questi vengono osservati mentre compiono un moto armonico collettivo in direzione assiale sotto l'azione del solo potenziale armonico. Le immagini della densità del condensato vengono poi registrate a vari istanti di tempo dopo il rilascio, per $a > 0$ e per $a < 0$.

Come si nota dalla Fig.(4.2), nel caso in cui l'interazione è repulsiva ($a_s = 10a_0$, dove a_0 è il raggio di Bohr) non si formano solitoni, e dopo alcune oscillazioni la nuvola iniziale non è più distinguibile a causa degli effetti dispersivi. Al contrario nel caso di interazione attrattiva ($a_s = -3a_0$), è possibile distinguere i solitoni come addensamenti che si propagano senza disperdersi.

4.2 Dark soliton

I "dark solitons" furono trovati sperimentalmente qualche anno prima, e presentati nel 1999 da S. Burger *et al.* [4] e nel 2000 da J. Denschlag *et al.* [3]. I gruppi utilizzarono rispettivamente gas diluiti ultrafreddi di atomi di ^{87}Rb e Na , confinati in un potenziale armonico prolato con $P \sim 30$ nel primo caso, mentre nel secondo in uno armonico triassiale con $\omega_x = \sqrt{2}\omega_y = 2\omega_z$.

In entrambi gli esperimenti si generano solitoni con il metodo di "phase-imprinting": utilizzando un laser pulsato e delle maschere, si proietta un potenziale ottico con dipendenza spaziale a gradino sul condensato, come in Fig.(4.3a). Esso fa evolvere la fase in maniera diversa a seconda dell'intensità locale, imprimendole un andamento a gradino, simile a quello caratteristico del "dark soliton". Una spiegazione analoga è che, a causa del gradiente di potenziale localizzato nell'origine, gli atomi in prossimità vengono spinti via, determinando una diminuzione locale della densità. Ad ogni modo il risultato è la comparsa di un solitone.

Dopo aver generato il solitone vengono registrate immagini della densità del condensato a vari tempi di propagazione. Nella Fig.(4.3c) da A a E vediamo le immagini sperimentali, mentre le altre sono simulazioni numeriche; in esse si distingue il "dark soliton" come una striscia più scura che si

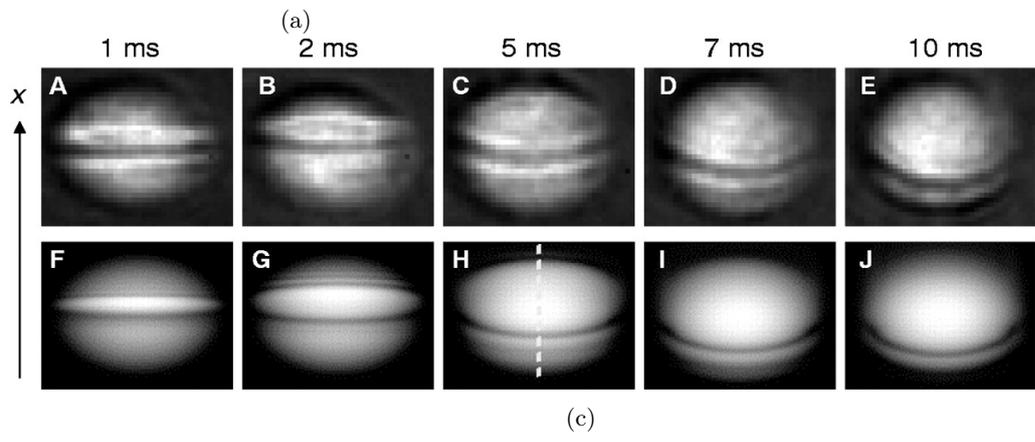
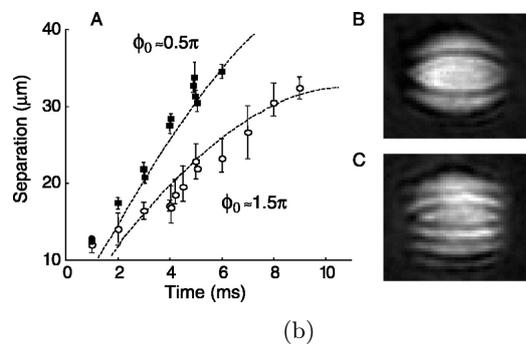
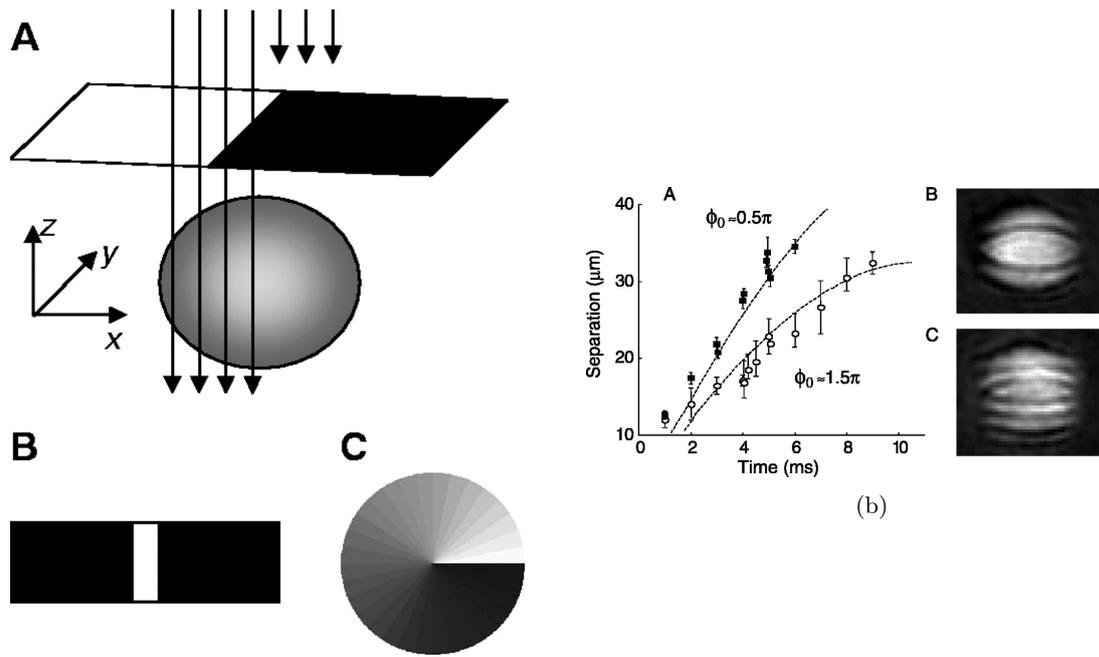


Figura 4.3: Dark soliton in condensato di Na [3].

propaga senza dispersione (la deformazione è dovuta sia ad effetti di bordo che alla geometria del confinamento).

Il solitone viene caratterizzato principalmente dalla sua velocità, che, a differenza delle onde sonore che si producono insieme ad esso, è minore della velocità del suono nel condensato. Come visto nell'Eq.(3.74), la velocità del solitone è in relazione con l'altezza δ del gradino nella sua fase. In entrambi gli esperimenti vengono pertanto misurate le velocità di propagazione per vari valori di δ , come si vede in Fig.(4.3b). In particolare, come ci aspettavamo, la velocità di propagazione è inferiore a quella del suono.

Capitolo 5

Conclusioni

Sono state esibite le forme analitiche per i solitoni nei principali casi di interesse, come soluzioni dell'equazione di Gross-Pitaevskii unidimensionale, Eq.(2.22). Mentre per i "bright solitons" la velocità di propagazione non influisce sulla forma del modulo della funzione d'onda, per i "dark solitons" invece tale velocità dipende dalla profondità del minimo, e tende alla velocità del suono nel limite di un solitone infinitesimo. Anche il gradino nella fase previsto teoricamente per quest'ultimo dipende dalla velocità, e questo è sfruttato negli esperimenti sui "dark solitons" [3, 4] per generare i solitoni tramite il metodo di "phase imprinting". Come ci aspettavamo da quanto trovato, anche negli esperimenti i solitoni si propagano senza apprezzabile dispersione, e la velocità è inferiore a quella del suono.

Bibliografia

- [1] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet. *Nature*, 417:150–153, 2002.
- [2] L. Khaykovich *et al.* *Science*, 296:1290–1293, 2002.
- [3] J. Denschlag *et al.* *Science*, 287:97–101, 2000.
- [4] S. Burger *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 83(25):5198–5201, 1999.