Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Relazione per la prova finale
«Il metodo delle coniche rattoppate nei trasferimenti interplanetari: descrizione e sviluppo per modelli a gravità completa»

Tutor universitario: Prof. Carlo Bettanini Fecia di Cossato

Laureando: *Gianluigi Ghidoni*

N. matricola 1217503

Padova, 13/07/2023

INTRODUZIONE E OBIETTIVI DEL LAVORO

Negli anni, l'esplorazione spaziale è aumentata notevolmente di importanza, soprattutto a causa del continuo e crescente interesse dell'uomo in:

- Esplorazione scientifica
- Colonizzazione futura
- Ricerca di vita extraterreste

Uno dei metodi alla base dei trasferimenti interplanetari è proprio il metodo delle coniche rattoppate

OBIETTIVI DEL LAVORO

- Presentare il modello della sfera di influenza
- Descrivere il metodo delle «patched conics» nei trasferimenti interplanetari con i rispettivi svantaggi
- Illustrare gli step principali del metodo di «continuità» che consente di passare del modello delle coniche rattoppate al modello di gravità completa

LA SFERA DI INFLUENZA

Si prenda come riferimento un sistema a tre corpi composto da:

- Sole s di massa m_s
- Pianeta p di massa m_p
- Generico satellite v di massa m_v

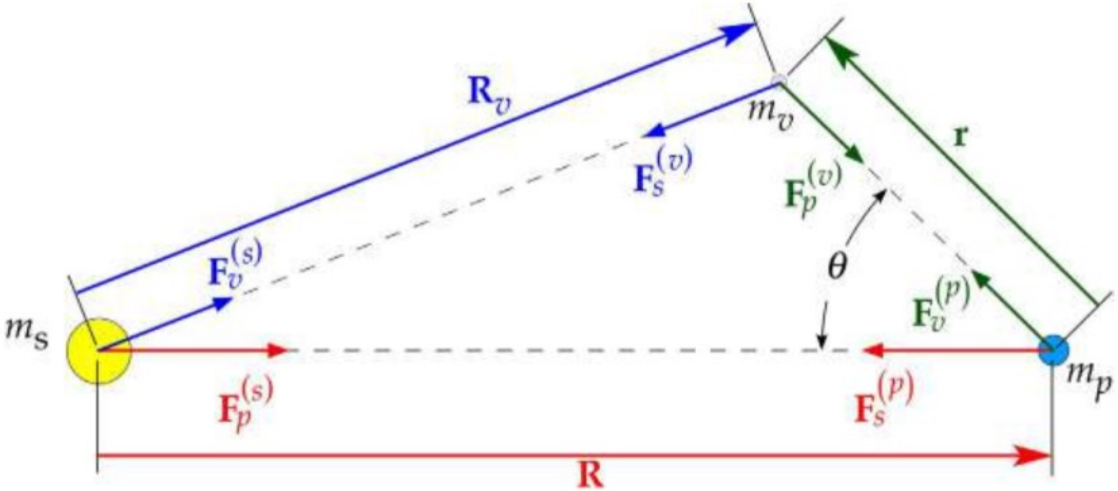

Fig 1 Sistema di riferimento a tre corpi e relative forze gravitazionali

Equazione del moto del satellite nel sistema di riferimento inerziale

$$m_v \ddot{\boldsymbol{R}}_v = \boldsymbol{F}_{sv} + \boldsymbol{F}_{pv}$$

Equazione del moto del satellite nel sistema di riferimento relativo

$$m_v \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_{sv} + \boldsymbol{F}_{pv}$$

$$\boldsymbol{F}_{sv} = -\frac{G m_s m_v}{R_v^3} \boldsymbol{R}_v$$

$$\boldsymbol{F}_{pv} = -\frac{G m_p m_v}{r^3} \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{F}_{sp} = -\frac{G m_p m_s}{R^3} \boldsymbol{R}$$

LA SFERA DI INFLUENZA

Risolvendo le equazioni rispettivamente per $\ddot{\boldsymbol{R}}_v$ e per $\ddot{\boldsymbol{r}}$, si può riscrivere:

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_v = \boldsymbol{A_s} + \boldsymbol{P_p} \qquad\qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}_p + \boldsymbol{p}_s$$

dove $\boldsymbol{A_s}$ e $\boldsymbol{a}_p$ sono le accelerazioni primarie e $\boldsymbol{P_p}$ e $\boldsymbol{p}_s$ sono le perturbazioni.

Andando ora a valutare il rapporto tra la perturbazione e l'accelerazione primaria si ottiene

$$\frac{|\boldsymbol{P_p}|}{|\boldsymbol{A_s}|} = \frac{Gm_p r}{r^3}\frac{R^3}{Gm_s R} = \frac{m_p}{m_s}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad\qquad \frac{|\boldsymbol{p_s}|}{|\boldsymbol{a_p}|} = \frac{Gm_s r}{R^3}\frac{r^2}{Gm_p} = \frac{m_s}{m_p}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

La ***sfera di influenza*** del pianeta è la sfera di raggio $\boldsymbol{r}$ tale per cui

$$\boxed{\frac{|\boldsymbol{p_s}|}{|\boldsymbol{a_p}|} \leq \frac{|\boldsymbol{P_p}|}{|\boldsymbol{A_s}|}}$$

LA SFERA DI INFLUENZA

$$\frac{|\boldsymbol{p}_s|}{|\boldsymbol{a}_p|} \leq \frac{|\boldsymbol{P}_p|}{|\boldsymbol{A}_s|} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_s}{m_p}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \leq \frac{m_p}{m_s}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r}{R}\right)^5 \leq \left(\frac{m_p}{m_s}\right)^{2/5}$$

Il ***raggio della sfera di influenza*** è dunque pari a

$$\boxed{\boldsymbol{r \leq R\left(\frac{m_p}{m_s}\right)^{2/5}}}$$

La sfera di influenza NON è la sfera di attrazione gravitazionale

METODO DELLE CONICHE RATTOPPATE

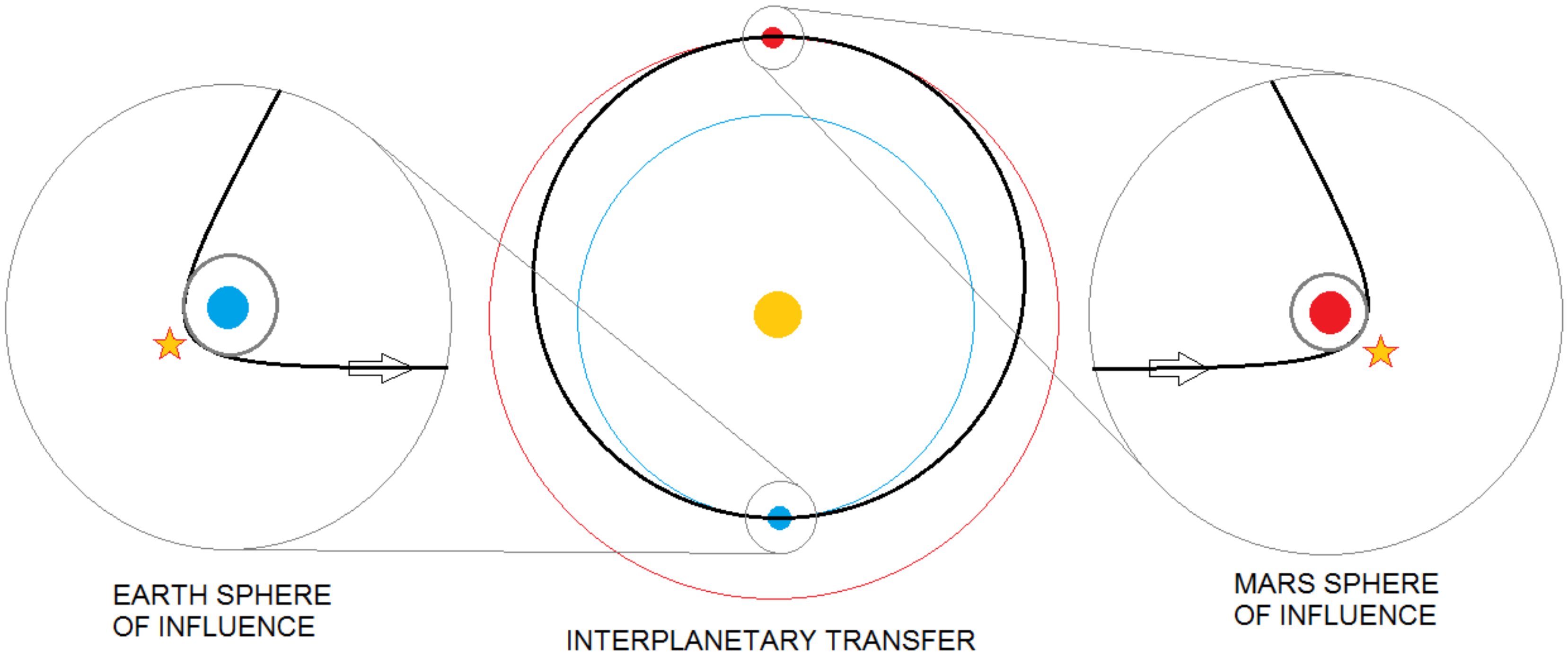

Fig 2 Fasi di un trasferimento interplanetario Terra-Marte

Il trasferimento può essere suddiviso in 3 fasi:

- Fuga dalla Terra ⇒ traiettoria iperbolica
- Trasferimento Terra-pianeta ⇒ traiettoria ellittica
- Avvicinamento al pianeta ⇒ traiettoria iperbolica

In tutte le fasi si applica il problema dei due corpi

PROBLEMI DEL METODO DELLE CONICHE RATTOPPATE

Utilizzate nella fase di progettazione preliminare

Ideali per rapide ricerche

Sistema dinamico semplificato

Modelli a gravità completa

METODO DI «CONTINUITÀ»

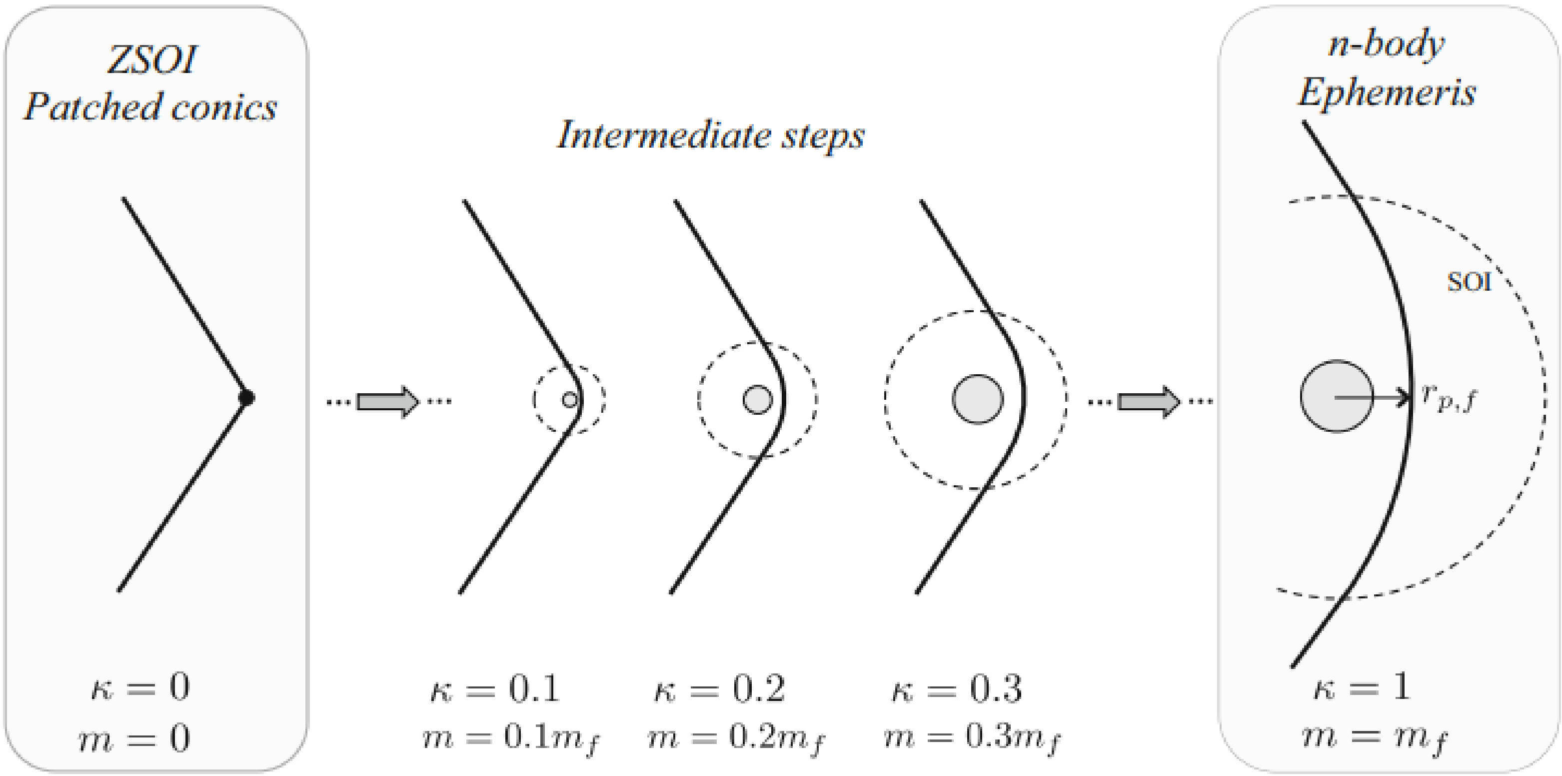

Fig 3 Modello del metodo di «continuità» con step intermedi

Attraverso l'incremento di un parametro di controllo k ∈ [0,1] è possibile passare da un modello a bassa fedeltà a un modello dinamico complesso dove rimangono inalterati turn angle e geometria di flyby.

METODO DI «CONTINUITÀ»

Il metodo prevede di convertire un semplice modello di partenza (ZSOI, zero sphere of influence) in un modello dinamico a n corpi.

Per favorire la continuità del metodo per ogni step vengono definite delle effemeridi «false» o ausiliarie

$$\boldsymbol{x}_{falsa}(k) = (1 - k)\boldsymbol{x}_{kepleriana} + k\boldsymbol{x}_{reale}$$

dove $\boldsymbol{x}$ è il vettore di stato $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}]^T$.

Le *effemeridi kepleriane* sono ottenute in due step:

1. una generazione geometrica
2. correzione ai minimi quadrati

Le *effemeridi reali* si estraggono da sistemi informativi (es. SPICE)

METODO DI «CONTINUITÀ»

Il parametro k influenza:

- massa del corpo
- raggio del corpo
- effemeride del corpo

In particolare, la massa del corpo centrale rimane la medesima per ogni valore di k mentre il raggio del corpo target ρ e il parametro di massa del corpo target μ dipendono linearmente da k:

$$\rho_{TB} = k \cdot \rho_{TB,finale}$$
$$\mu_{TB} = k \cdot \mu_{TB,finale}$$

Il metodo di continuità si basa sull'omotopia lineare, che in termini matematici si traduce in:

$$H : \mathbb{R}^{(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{M}$$
$$H\left(\mathbf{x}_p, \kappa\right) = \kappa G(\mathbf{x}_p, \kappa) + (1-\kappa) F(\mathbf{x}_p, \kappa)$$

APPLICAZIONE: TRASFERIMENTO TERRA-GIOVE

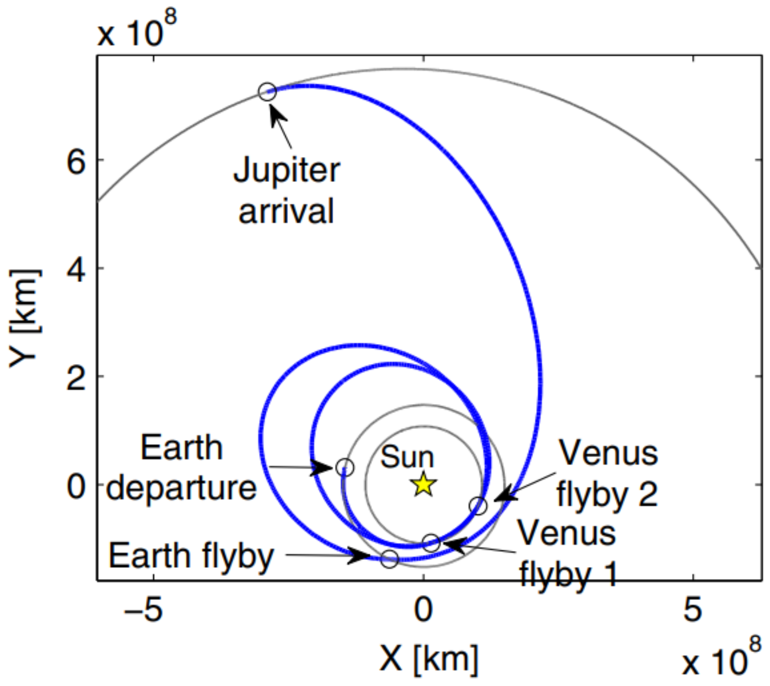

Fig 4 Traiettoria convergente Terra-Giove in 2D

Il trasferimento in questione prevede due flyby di Venere e uno della Terra, quindi, in particolare sarà:

Terra-Venere-Venere-Terra-Giove

Per la convergenza dell'algoritmo sono stati scelti i parametri

$$k_0 = 0{,}05 \qquad e \qquad \Delta k = 0{,}05$$

Traiettoria ZSOI iniziale ottenuta tramite EXPLORE

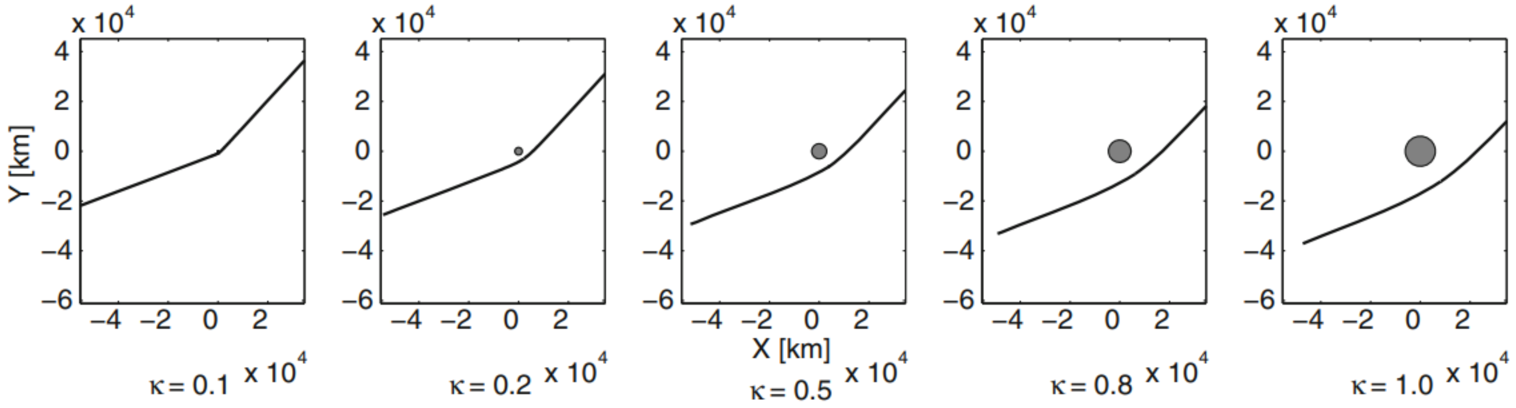

Fig 5 Iterazioni successive al secondo flyby di Venere

CONCLUSIONI

- Il metodo delle patched conics può essere usato nella fasi di progetto preliminare della missione, negli step di progetto di dettaglio si utilizzano i modelli a gravità completa
- Il metodo di continuità permette una transizione al modello di gravità completa attraverso più passi intermedi e questo consente di non stressare gli algoritmi di ottimizzazione
- Può essere applicato per il design di viaggi e flybys interplanetari molto accurati

Bibliografia:
[1] - Howard D. Curtis, «Orbital Mechanics for Engineering Students», Embry-Riddle Aeronautical University (Daytona Beach Florida), Elsevier Butterworth-Heinemann, 2020;
[2] - Nicholas Bradley, Ryan P. Russell, «A Continuation Method for Converting Trajectories from Patched Conics to Full Gravity Models», J of Astronaut Sci, 2014