

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Approssimazione WKB e sue applicazioni

Relatore

Prof. Fabio Zwirner

Laureando

Alessandro Pennacchio

Anno Accademico 2023/2024



---

## Abstract

L'approssimazione WKB è un metodo per trovare soluzioni approssimate dell'equazione di Schrödinger uni-dimensionale indipendente dal tempo nella condizione in cui il potenziale varia lentamente. In particolare è possibile calcolare la probabilità che una particella attraversi una barriera di potenziale per effetto tunnel; proprio questo calcolo trova svariate applicazioni in diversi campi della fisica. In questa tesi ripercorreremo dapprima le caratteristiche generali del metodo e alcune accortezze necessarie per applicarlo correttamente, illustrandole con alcuni esempi idealizzati. Andremo poi a considerare due applicazioni di particolare rilevanza fisica. Il primo riguarda la teoria di Gamow che spiega il decadimento  $\alpha$  dei nuclei atomici. Il secondo è una generalizzazione che consente di descrivere le perturbazioni della metrica di un buco nero calcolandone i modi quasi-normali, con importanti implicazioni per l'astrofisica delle onde gravitazionali.



# Indice

<b>1</b>	<b>Approssimazione WKB</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Regione classicamente permessa e classicamente non-permessa . . . . .	2
1.2.1	Validità dell'approssimazione . . . . .	3
1.3	Condizioni di raccordo ai punti di inversione . . . . .	4
1.4	Buca di potenziale . . . . .	6
1.5	Barriera di potenziale ed effetto tunnel . . . . .	9
1.6	Approssimazione WKB come approssimazione semiclassica . . . . .	12
1.6.1	Validità dell'approssimazione . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Decadimento <math>\alpha</math></b>	<b>15</b>
2.1	Fenomenologia . . . . .	15
2.2	Teoria di Gamow . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Modi quasi-normali dei buchi neri: approccio WKB</b>	<b>19</b>
3.1	Introduzione . . . . .	19
3.2	Teoria perturbativa dei buchi neri . . . . .	21
3.2.1	Perturbazione scalare . . . . .	22
3.2.2	Perturbazione gravitazionale . . . . .	23
3.3	Approccio WKB . . . . .	23
3.3.1	Applicazione al buco nero di Schwarzschild . . . . .	26
3.3.2	Applicazione al buco nero di Kerr . . . . .	28
3.4	Conclusioni . . . . .	30



# Capitolo 1

## Approssimazione WKB

### 1.1 Introduzione

L'approssimazione WKB venne introdotta nel 1926 da tre fisici: G. Wentzel, H. A. Kramers e L. Brillouin, da cui il nome WKB [1–3]. Essa è un metodo per trovare soluzioni approssimate all'equazione di Schrödinger uni-dimensionale indipendente dal tempo con l'ipotesi che il potenziale varia lentamente. In questo primo capitolo, basandoci sulle trattazioni in [4–6], ripercorreremo le caratteristiche generali del metodo e alcune accortezze necessarie per applicarlo correttamente, illustrandole con alcuni esempi idealizzati.

Consideriamo una particella quantistica in una dimensione infinita, cui è associato lo spazio di Hilbert  $L_2(\mathbb{R})$ , che è lo spazio delle funzioni modulo-quadro integrabili. Sia  $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$  la funzione d'onda che ne rappresenta lo stato. L'operatore hamiltoniano associato al sistema sia:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

dove  $m > 0$  è la massa della particella,  $\hbar = h/2\pi = 1.054571817 \times 10^{-34}$  Js è la costante di Planck ridotta e  $V(x)$  è un potenziale indipendente dal tempo. Gli autostati dell'hamiltoniano si ottengono risolvendo il problema agli autovalori (o eq. di Schrodinger indipendente dal tempo):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (1.1.1)$$

dove  $E \in \mathbb{R}$  è l'energia del sistema. È conveniente riscrivere l'equazione esplicitando la derivata seconda:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{p^2(x)}{\hbar^2} \psi(x), \quad (1.1.2)$$

dove:

$$p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

Se  $E > V(x)$  allora  $p$  è l'impulso, poiché  $p^2/2m = E - V(x)$  è l'energia cinetica. Nel seguito considereremo anche il caso in cui  $E < V(x)$ , in tale caso  $p$  è immaginario.

Il metodo WKB si basa sull'ipotesi che il potenziale varia lentamente rispetto alle scale rilevanti del sistema. La lunghezza d'onda di De Broglie è:

$$\lambda(x) = \frac{h}{p(x)} = \frac{2\pi}{k(x)},$$

dove  $k(x) = p(x)/\hbar$  è il numero d'onda. Nel corso della trattazione definiremo formalmente l'ipotesi necessaria e vedremo che questa è equivalente al fatto che lungo una lunghezza d'onda la variazione del potenziale è piccola rispetto all'energia cinetica.

**Esempio:** Potenziale costante  $V$

Essendo il potenziale costante, segue che

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$$

è costante. Allora il problema agli autovalori possiamo riscriverlo come:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 \psi(x).$$

Distinguiamo due casi:

1. se  $E > V$  allora  $k \in \mathbb{R}$  e l'equazione è armonica; le soluzioni dell'equazione sono le onde piane  $e^{\pm ikx}$ . La soluzione generale è:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

2. se  $E < V$  allora  $k = i\rho$  con  $\rho = \sqrt{2m(V - E)}/\hbar \in \mathbb{R}$ ; il problema agli autovalori diventa:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \rho^2\psi(x).$$

La soluzione generale è:

$$\psi(x) = Ce^{\rho x} + De^{-\rho x}, \quad C, D \in \mathbb{C}.$$

Dall'esempio ci aspettiamo che se il potenziale varia lentamente, ovvero lungo una lunghezza d'onda esso è circa costante, la soluzione sarà circa un'onda piana oppure sarà circa un esponenziale. Allora ipotizziamo che la funzione d'onda si possa scrivere come:

$$\psi(x) = A(x) e^{ik(x)x}, \quad (1.1.3)$$

dove  $A(x)$  e  $k(x)$  sono funzioni reali che dipendono dalla posizione e quindi dalla differenza  $E - V(x)$ . Questa ipotesi ci permetterà di determinare una soluzione approssimata nella regione classicamente permessa  $\{x \in \mathbb{R} \mid E > V(x)\}$  e nella regione classicamente non-permessa  $\{x \in \mathbb{R} \mid E < V(x)\}$ . Il problema del metodo sta attorno ai punti di inversione, ossia i punti  $x \in \mathbb{R} \mid E = V(x)$ , poiché vicino a tali punti si ha che  $p(x) \rightarrow 0$  e quindi  $\lambda(x) \rightarrow \infty$ . Se  $\lambda \rightarrow \infty$  la condizione che il potenziale varia lentamente lungo una lunghezza d'onda non è mai rispettata (a meno che il potenziale non sia costante). Questo fa sì che le soluzioni approssimate non sono valide vicino ai punti di inversione. Per risolvere il problema si andrà a linearizzare il potenziale e a determinare delle condizioni di raccordo.

## 1.2 Regione classicamente permessa e classicamente non-permessa

Poniamoci nella regione classicamente permessa o nella regione classicamente non-permessa, sufficientemente distante dai punti di inversione. Come visto in eq. (1.1.3), supponiamo che la soluzione sia:

$$\psi(x) = A(x) e^{i\phi(x)}, \quad A, \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sostituendo nel problema agli autovalori (1.1.2), separando parte reale e parte immaginaria, otteniamo due equazioni reali:

$$\begin{cases} A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A \\ 2A'\phi' + A\phi'' = 0 \end{cases},$$

dove è implicita la dipendenza da  $x$ . Moltiplicando la seconda equazione per  $A \neq 0$  otteniamo:

$$\frac{d}{dx}(A^2\phi') = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2\phi' = C^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pm \frac{C}{\sqrt{\phi'}},$$

con  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se  $\phi' > 0$  oppure  $C = iC'$ ,  $C' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se  $\phi' < 0$ , per garantire  $A$  reale.

La prima equazione del sistema possiamo riscriverla come:

$$\frac{A''}{A} = (\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2}. \quad (1.2.1)$$

In generale questa equazione non è risolvibile esattamente. Ipotizziamo che

$$\frac{A''}{A} \approx 0, \quad (1.2.2)$$

che significa che il potenziale varia lentamente. Al momento utilizziamo questa condizione semplicemente come ipotesi formale; dopo aver determinato la soluzione analizzeremo nel dettaglio il significato dell'ipotesi per capire quando l'approssimazione è valida.

In tale ipotesi l'equazione diventa:

$$(\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx + \bar{C}, \quad \bar{C} \in \mathbb{R}.$$

In conclusione la soluzione WKB è:

$$\psi(x) = \pm \frac{C}{\sqrt{\pm p(x)/\hbar}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx + \bar{C}\right).$$

Inglobando i vari fattori in un'unica costante e distinguendo regione classicamente permessa, dove  $p(x)$  è reale, e regione classicamente non-permessa, dove  $p(x)$  è puramente immaginario, cioè  $p(x) = i|p(x)|$ , la soluzione WKB del problema agli autovalori è:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right) & \text{regione classicamente permessa} \\ \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx\right) & \text{regione classicamente non-permessa} \end{cases}, \quad (1.2.3)$$

dove  $C \in \mathbb{C}$  (avendo inglobato in  $C$  anche fattori complessi). In una data regione la soluzione generale sarà combinazione lineare delle due possibili soluzioni; l'integrale è un integrale reale sulla regione di interesse.

### 1.2.1 Validità dell'approssimazione

La soluzione WKB è una buona approssimazione quando è soddisfatta l'ipotesi (1.2.2). Se analizziamo attentamente l'equazione (1.2.1) l'ipotesi che facciamo è:

$$\left| \frac{A''}{A} \right| \ll \left| (\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare otteniamo la disequazione:

$$\left| \frac{A''}{A} \right| \ll |(\phi')^2| + \left| \frac{p^2}{\hbar^2} \right|. \quad (1.2.4)$$

Essendo  $A(x) = C/\sqrt{p(x)}$  nella regione classicamente permessa e  $A(x) = C/\sqrt{|p(x)|}$  nella regione classicamente non-permessa, si ha che:

$$\frac{A''}{A} = \frac{m}{2} \left[ \frac{V''}{p^2} + \frac{5m}{2} \frac{(V')^2}{p^4} \right].$$

Ci aspettiamo che se il potenziale varia lentamente, la derivata seconda sia molto minore della derivata prima, pertanto il primo termine nella parentesi quadra è trascurabile. Inoltre abbiamo ricavato che  $\phi' = \pm p/\hbar$ . Sostituendo queste due espressioni nella disuguaglianza (1.2.4) si ottiene:

$$\left| \frac{5m^2}{4} \frac{(V')^2}{p^4} \right| \ll 2 \left| \frac{p^2}{\hbar^2} \right|.$$

Ricordando che  $\lambda = h/p$ , riscriviamo la disuguaglianza come:

$$|\lambda^2 (V')^2| \ll \frac{128\pi^2}{5} \left| \frac{p^4}{4m^2} \right|.$$

Trascurando il fattore numerico e prendendo la radice otteniamo la disuguaglianza:

$$\lambda \left| \frac{dV}{dx} \right| \ll \frac{|p|^2}{2m}. \quad (1.2.5)$$

Osserviamo che nella regione classicamente permessa il termine di destra è l'energia cinetica, perciò la disuguaglianza significa che lungo una lunghezza d'onda la variazione del potenziale è piccola rispetto all'energia cinetica. Questo è il significato di potenziale che varia lentamente.

Quando ci avviciniamo a un punto di inversione abbiamo che  $p \rightarrow 0$  e  $\lambda \rightarrow \infty$ , di conseguenza l'ipotesi di potenziale che varia lentamente non è più soddisfatta e la soluzione WKB non è più valida.

### 1.3 Condizioni di raccordo ai punti di inversione

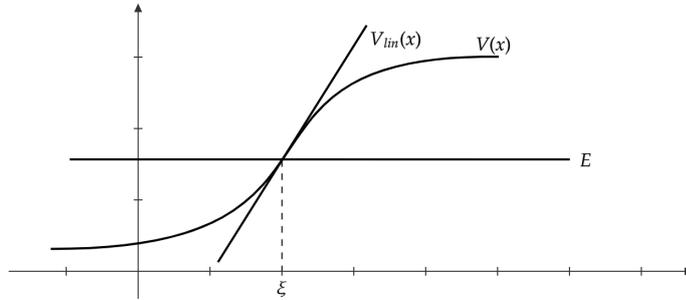


Figura 1.1: Potenziale  $V(x)$  dove si applicano le condizioni di raccordo.

Consideriamo un potenziale come quello in fig. 1.1 dove  $x = \xi$  è l'unico punto di inversione. Detta  $\psi_{WKB}$  la soluzione approssimata (1.2.3), si ha:

$$\psi_{WKB}(x) = \begin{cases} \frac{B}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^\xi p(x') dx'\right) + \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^\xi p(x') dx'\right) & x < \xi \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_\xi^x |p(x')| dx'\right) & x > \xi \end{cases}.$$

Nella regione classicamente non-permessa perché  $\psi_{WKB} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$  è necessario che il coefficiente dell'esponenziale crescente sia nullo. Come già sottolineato la soluzione vale per  $x$  sufficientemente distante da  $x = \xi$ .

Sviluppando il potenziale in serie di Taylor attorno a  $x = \xi$  e troncando al primo ordine:

$$V_{lin}(x) = E + V'(\xi)(x - \xi).$$

Sostituendo il potenziale linearizzato nel problema agli autovalori (1.1.1):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_P}{dx^2} + [E + V'(\xi)(x - \xi)]\psi_P = E\psi_P \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\psi_P}{dx^2} = \alpha^3(x - \xi)\psi_P \quad \alpha = \left[ \frac{2m}{\hbar^2} V'(\xi) \right]^{1/3}.$$

Tale equazione va a determinare la soluzione di raccordo  $\psi_P$ . Definendo  $z = \alpha(x - \xi)$  si ottiene l'equazione di Airy:

$$\frac{d^2\psi_P}{dz^2} = z\psi_P. \quad (1.3.1)$$

La soluzione generale a tale equazione è la combinazione lineare delle funzioni di Airy  $Ai(z)$  e  $Bi(z)$ , cioè  $\psi_P(z) = a Ai(z) + b Bi(z)$ , dove  $a$  e  $b$  sono costanti da determinarsi e:

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds, \quad Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \exp\left(-\frac{s^3}{3} + sz\right) + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) \right] ds.$$

Il comportamento asintotico di tali funzioni è:

$$\begin{aligned} Ai(z) &\simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & Bi(z) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & z &\gg 1, \\ Ai(z) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & Bi(z) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & z &\ll -1. \end{aligned}$$

Una trattazione approfondita sulle funzioni di Airy e sul loro comportamento asintotico è fatta in [5, 6]. In figura 1.2 si osservano le funzioni di Airy e le rispettive formule asintotiche per  $z \gg 1$  e  $z \ll -1$ .

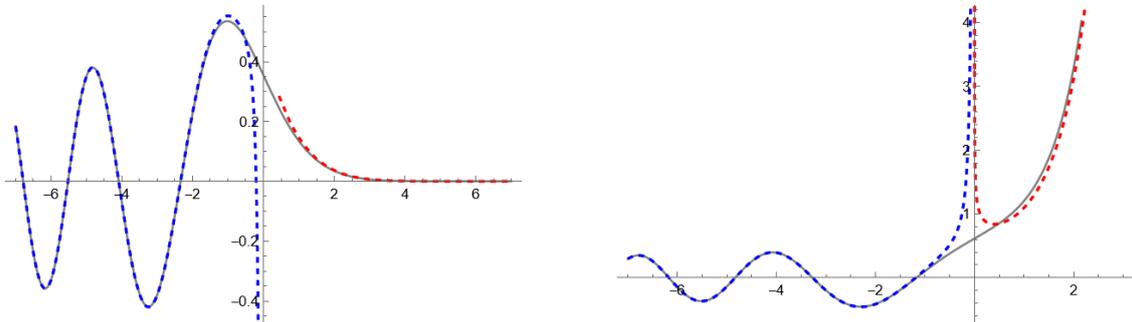


Figura 1.2: Funzioni di Airy  $Ai(z)$  (sinistra) e  $Bi(z)$  (destra) in linea continua e rispettive formule asintotiche per  $z \gg 1$  (rosso) e  $z \ll -1$  (blu) in linea tratteggiata.

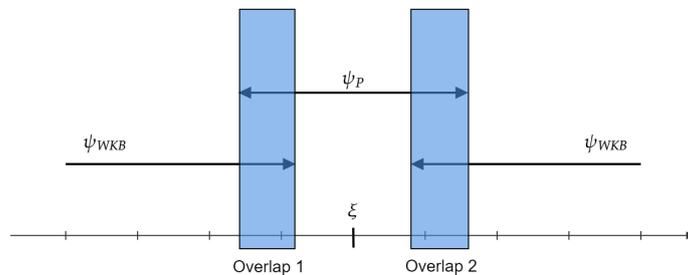


Figura 1.3: Regioni di overlap.

Come si osserva in fig. 1.3 esistono due regioni, dette regioni di overlap, sufficientemente distanti dal punto di inversione perché valga la soluzione approssimata  $\psi_{WKB}$ , ma sufficientemente vicine a tale punto perché valga la linearizzazione del potenziale, e quindi  $\psi_P$ . Siccome in tale regioni  $V(x) \simeq V_{lin}(x)$  si ha che:

$$p(x) \simeq \sqrt{2m[E - V_{lin}(x)]} = \begin{cases} \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{\xi - x} & x < \xi \\ \hbar\alpha^{3/2}i\sqrt{x - \xi} & x > \xi \end{cases}. \quad (1.3.2)$$

Sostituendo tale approssimazione in  $\psi_{WKB}$  si ottiene una soluzione esplicita, che vale esclusivamente nelle regioni di overlap; confrontando tale soluzione con la soluzione di raccordo  $\psi_P(x) = a Ai[\alpha(x - \xi_1)] + b Bi[\alpha(x - \xi_1)]$  si ottengono delle condizioni che raccordano la soluzione  $\psi_{WKB}$  in  $x < \xi$  con la soluzione  $\psi_{WKB}$  in  $x > \xi$ .

Consideriamo la regione di overlap 2, in cui  $x > \xi$ ; sostituendo eq. (1.3.2) in  $\psi_{WKB}$  si ottiene:

$$\int_\xi^x |p(x')| dx' \simeq \frac{2}{3}\hbar[\alpha(x - \xi)]^{3/2} \Rightarrow \psi_{WKB}(x) \simeq \frac{D}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}(x - \xi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}[\alpha(x - \xi)]^{3/2}\right).$$

Come già anticipato in tale regione vale  $\psi_P$ ; usando le formule asintotiche delle funzioni di Airy per  $z \gg 1$ :

$$\psi_P(x) \simeq \frac{a}{2\sqrt{\pi}[\alpha(x-\xi)]^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}[\alpha(x-\xi)]^{3/2}\right) + \frac{b}{\sqrt{\pi}[\alpha(x-\xi)]^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}[\alpha(x-\xi)]^{3/2}\right).$$

Allora confrontando la soluzione  $\psi_{WKB}$  con  $\psi_P$  si ottengono le condizioni:

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar\alpha}} D, \quad b = 0.$$

Nonostante siamo vicino al punto di inversione e  $x - \xi$  è una quantità "piccola", possiamo usare le formule asintotiche delle funzioni di Airy per  $z = \alpha(x - \xi) \gg 1$  poiché  $\alpha \propto \hbar^{-1/3} \sim 10^{11} \text{ (Js)}^{-1/3}$  è "grande". Alla fine del capitolo analizzeremo meglio tale problema nell'esempio dell'oscillatore armonico.

Similmente nella regione di overlap 1, in cui  $x < \xi$ , sostituendo eq. (1.3.2) in  $\psi_{WKB}$  si ottiene:

$$\psi_{WKB}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}(\xi-x)^{1/4}} \left[ B \exp\left(i\frac{2}{3}[\alpha(\xi-x)]^{3/2}\right) + C \exp\left(-i\frac{2}{3}[\alpha(\xi-x)]^{3/2}\right) \right].$$

Come prima usando le formule asintotiche delle funzioni di Airy per  $z = \alpha(x - \xi) \ll 1$  e sfruttando la condizione  $b = 0$  trovata in overlap 2, la soluzione di patching è:

$$\psi_P(x) \simeq \frac{a}{\sqrt{\pi}[\alpha(\xi-x)]^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}[\alpha(\xi-x)]^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Pertanto usando le formule di Eulero per riscrivere il sin e confrontando  $\psi_{WKB}$  con  $\psi_P$ , si ottiene:

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}}, \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

Dalla condizione determinata in overlap 2 per  $a$  si ottiene:

$$B = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) D, \quad C = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) D. \quad (1.3.3)$$

Sostituendo tali condizioni nella soluzione  $\psi_{WKB}$  e utilizzando le formule di Eulero si ottiene:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^\xi p(x') dx' + \frac{\pi}{4}\right) & x \leq \xi \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_\xi^x |p(x')| dx'\right) & x > \xi \end{cases},$$

che è valida anche in  $x = \xi$ .  $D$  è determinata (a meno di una fase) dalle condizioni di normalizzazione.

## 1.4 Buca di potenziale

Consideriamo un potenziale come quello in figura 1.4 dove i punti di inversione sono  $\{\xi_1, \xi_2\}$ . Detta  $\psi_{WKB}$  la soluzione approssimata (1.2.3), si ha:

$$\psi_{WKB}(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^{\xi_1} |p(x')| dx'\right) & x < \xi_1 \\ \frac{B}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^{\xi_2} p(x') dx'\right) + \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^{\xi_2} p(x') dx'\right) & \xi_1 < x < \xi_2 \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{\xi_2}^x |p(x')| dx'\right) & x > \xi_2 \end{cases},$$

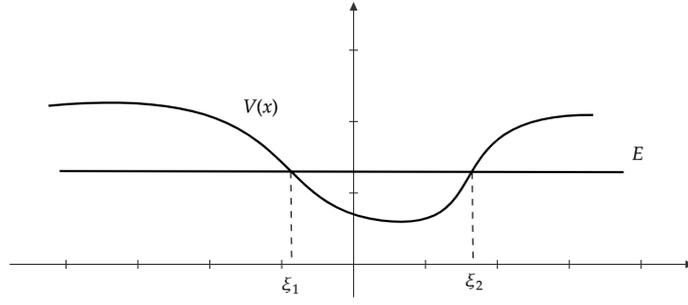


Figura 1.4: Buca di potenziale.

dove abbiamo già tenuto in considerazione che  $\psi_{WKB} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Attorno al punto di inversione  $\xi_2$  abbiamo già risolto il problema, trovando le condizioni di raccordo (1.3.3). Osserviamo che nella regione classicamente permessa possiamo riscrivere l'integrale:

$$\int_x^{\xi_2} p(x') dx' = I - \int_{\xi_1}^x p(x') dx', \quad I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(x') dx'.$$

Attorno al punto di inversione  $\xi_1$  possiamo riscrivere la soluzione nella regione classicamente permessa come:

$$\psi_{WKB} = \frac{C'}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{\xi_1}^x p(x') dx'\right) + \frac{B'}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{\xi_1}^x p(x') dx'\right),$$

dove:

$$C' = C \exp\left(-\frac{i}{\hbar} I\right), \quad B' = B \exp\left(\frac{i}{\hbar} I\right).$$

Si può ripetere l'operazione di raccordo attorno a  $\xi_1$  andando a confrontare  $\psi_{WKB}$  con la soluzione di patching  $\psi_P(x) = a Ai[\alpha(x - \xi_1)] + b Bi[\alpha(x - \xi_1)]$ . In tale punto si ha che  $V'(\xi_1) < 0$ , pertanto  $\alpha < 0$ . Allora nella regione di overlap con  $x < \xi_1$  per scrivere la soluzione di patching si possono usare le formule asintotiche delle funzioni di Airy per  $z = \alpha(x - \xi_1) \gg 1$ , da cui si ottengono le condizioni:

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar(-\alpha)}} A, \quad b = 0.$$

Nella regione di overlap con  $x > \xi_1$  per scrivere la soluzione di patching si possono usare le formule asintotiche delle funzioni di Airy per  $z \ll 1$ , da cui si ottengono le condizioni:

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{C'}{\sqrt{\hbar(-\alpha)}}, \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{B'}{\sqrt{\hbar(-\alpha)}}.$$

Seguono le condizioni di raccordo:

$$C' = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) A, \quad B' = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) A. \quad (1.4.1)$$

Sostituendo le rispettive espressioni per  $C'$  e  $B'$  e ricordando le condizioni di raccordo attorno a  $\xi_2$  si ottengono due equazioni:

$$D \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} I\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) A, \quad D \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} I\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) A.$$

Confrontando le due equazioni si ottiene:

$$\exp\left(\frac{2i}{\hbar} I\right) = \exp(i\pi),$$

da cui la condizione di quantizzazione:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4.2)$$

Inoltre sostituendo la condizione di quantizzazione in una delle due equazioni si ottiene  $A = D$ ; pertanto la soluzione approssimata è:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^{\xi_1} |p(x')| dx'\right) & x < \xi_1 \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{\xi_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}\right) & \xi_1 \leq x \leq \xi_2 \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{\xi_2}^x |p(x')| dx'\right) & x > \xi_2 \end{cases},$$

che vale anche nei punti di inversione.

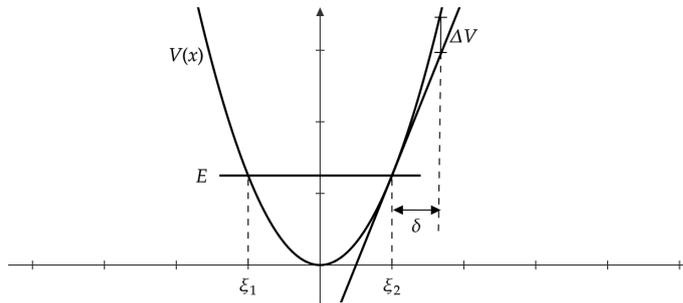


Figura 1.5: Oscillatore armonico.

**Esempio:** Oscillatore armonico

Consideriamo il potenziale  $V(x) = 1/2 m \omega^2 x^2$  in fig. 1.5. I punti di inversione sono  $\xi_1 = \sqrt{-2E/(m\omega^2)}$  e  $\xi_2 = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ . Allora per l'impulso  $p(x)$  segue:

$$p(x) = \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right)} = \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\xi_2^2}} \Rightarrow \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(x) dx = \sqrt{2mE} \xi_2 \frac{\pi}{2}.$$

Dalla condizione di quantizzazione (1.4.2) otteniamo lo spettro in energia dell'oscillatore armonico:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Fissiamo  $n$ , quindi l'energia  $E$  e i punti di inversione  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Tali punti possono essere espressi in funzione del numero quantico  $n$  come  $\xi_{2,1} = \pm \sqrt{\hbar/(m\omega)(2n+1)}$ . Consideriamo il punto di inversione  $\xi_2$  e la regione a destra di esso  $x > \xi_2$ . Sia  $\Delta V(x) = V(x) - V_{lin}(x)$ , dove  $V_{lin}(x) = E + m\omega^2 \xi_2(x - \xi_2)$ . Si determina  $\delta$  tale che  $\Delta V(\xi_2 + \delta) = \epsilon$ , dove  $\epsilon$  è una quantità arbitrariamente piccola:

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{E}} \xi_2 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m\omega^2}}.$$

Pertanto nella regione  $\xi_2 \leq x \leq \xi_2 + \delta$  la linearizzazione del potenziale è corretta entro una certa percentuale; ad esempio se  $\Delta V(x)/V(\xi_2) = 0.05$ , la linearizzazione del potenziale è corretta entro il 5%. Consideriamo il margine destro di tale regione  $x = \xi_2 + \delta$  e valutiamo l'errore che si commette nell'utilizzare le formule asintotiche delle funzioni di Airy. Risulta  $\alpha = (2/\hbar)^{1/3} [m\omega \xi_2]^2$  e:

$$z_\delta = \alpha \delta = 2^{1/3} \sqrt{\frac{\epsilon}{E}} (2n+1)^{2/3}. \quad (1.4.3)$$

Assumiamo che la linearizzazione sia corretta entro il 5%, cioè  $\epsilon = 0.05 E$ ; segue che  $z_\delta = (\sqrt{5} 2^{1/3})/10 (2n + 1)^{2/3}$ . Se il sistema si trova nello stato fondamentale  $n = 0$ , si ha che  $z = (\sqrt{5} 2^{1/3})/10 \simeq 0.282$  che è minore di 1 e valutando l'errore nelle formule asintotiche delle funzioni di Airy:

$$\frac{|Ai(z_\delta) - Ai_{exp}(z_\delta)|}{Ai(z_\delta)} \sim 25\%, \quad \frac{|Bi(z_\delta) - Bi_{exp}(z_\delta)|}{Bi(z_\delta)} \sim 15\%,$$

dove  $Ai_{exp}$  e  $Bi_{exp}$  indicano le formule asintotiche delle rispettive funzioni di Airy per  $z \gg 1$ . Si osserva che in tali condizione la soluzione approssima attorno al punto di inversione che si costruisce a partire dalle formule asintotiche delle funzioni di Airy non è "buona". Viceversa possiamo determinare il minimo valore di  $n$  affinché l'errore nelle formule asintotiche sia inferiore al 5%. perché valga ciò è necessario che  $z \geq 2$ , quindi invertendo eq. (1.4.3) si ottiene  $n \geq 9$ .

## 1.5 Barriera di potenziale ed effetto tunnel

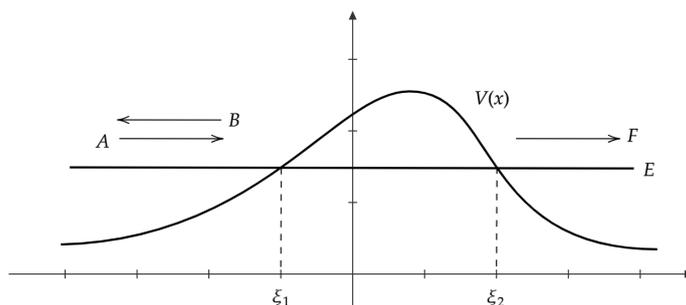


Figura 1.6: Particella che arriva da  $-\infty$  e attraversa la barriera di potenziale per effetto tunnel.

Consideriamo un potenziale come quello in figura 1.6. La soluzione approssimata per una particella che arriva da  $-\infty$  è:

$$\psi_{WKB}(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^{\xi_1} p(x') dx'\right) + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^{\xi_1} p(x') dx'\right) & x < \xi_1 \\ \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{\xi_1}^x |p(x')| dx'\right) + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{\xi_1}^x |p(x')| dx'\right) & \xi_1 < x < \xi_2 \\ \frac{F}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{\xi_2}^x |p(x')| dx'\right) & x > \xi_2 \end{cases} .$$

Innanzitutto vogliamo determinare le condizioni di raccordo in  $x = \xi_1$  e  $x = \xi_2$ . A differenza della buca di potenziale, dove nella regione classicamente non-permessa l'esponenziale crescente ha coefficiente nullo, in questo caso tale coefficiente non è nullo; questo complica i conti, ma la procedura da seguire è quella descritta nella sezione precedente. Una volta raccordate le soluzioni vogliamo calcolare il coefficiente di trasmissione, ossia il rapporto tra il modulo-quadro dell'ampiezza dell'onda uscente e il modulo-quadro dell'ampiezza dell'onda incidente:

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} .$$

Se questo non è nullo significa che c'è una certa probabilità che la particella attraversi la barriera, nonostante nella regione classicamente non-permessa  $E < V(x)$ . Questo fenomeno, non permesso in meccanica classica, si chiama effetto tunnel.

Consideriamo il punto di inversione  $x = \xi_1$ . Nella regione di overlap con  $x > \xi_1$  si ottengono le condizioni:

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar\alpha}} D, \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar\alpha}} C .$$

Nella regione di overlap con  $x < \xi_1$  si ottengono le condizioni:

$$A = \sqrt{\frac{\hbar\alpha}{4\pi}} (b - ia) \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), \quad B = \sqrt{\frac{\hbar\alpha}{4\pi}} (b + ia) \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) .$$

Seguono allora le condizioni di raccordo in tale punto di inversione:

$$A = \left( \frac{C}{2} - iD \right) \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), \quad B = \left( \frac{C}{2} + iD \right) \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).$$

Consideriamo ora il punto di inversione  $x = \xi_2$ . Come per la buca di potenziale riscriviamo l'integrale come:

$$\int_{\xi_1}^x |p(x')| dx' = I - \int_x^{\xi_2} |p(x')| dx', \quad I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} |p(x')| dx'.$$

In questo modo possiamo applicare la procedura come fatto nella sezione precedente. Nella regione di overlap con  $x < \xi_2$  si ottengono le condizioni:

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar(-\alpha)}} C \exp\left(\frac{I}{\hbar}\right), \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar(-\alpha)}} D \exp\left(-\frac{I}{\hbar}\right).$$

Nella regione di overlap con  $x > \xi_2$  si ottengono le condizioni:

$$F = \sqrt{\frac{\hbar(-\alpha)}{4\pi}} (b - ia), \quad b + ia = 0.$$

La seconda condizione è necessaria poiché stiamo considerando una particella che arriva da  $-\infty$ , pertanto nella regione  $x > \xi_2$  il coefficiente dell'onda riflessa è nullo. Tale condizione implica:

$$D = -2iC \exp\left(\frac{2I}{\hbar}\right).$$

Segue la condizione di raccordo nel punto di inversione:

$$F = -2iC \exp\left(\frac{I}{\hbar}\right).$$

Inoltre tenendo conto di tale vincolo nelle condizioni di raccordo in  $x = \xi_1$  si ha:

$$A = 2C \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \left[ \frac{1}{4} - \exp\left(\frac{2I}{\hbar}\right) \right], \quad B = 2C \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \left[ \frac{1}{4} + \exp\left(\frac{2I}{\hbar}\right) \right].$$

Sostituendo le varie condizioni trovate si ha la soluzione approssimata. Tutti i coefficienti sono espressi in funzione di  $C$ , questa è determinabile (a meno di una fase) dalle condizioni di normalizzazione. Più che alla soluzione finale siamo interessati a calcolare il coefficiente di trasmissione  $T = |F|^2/|A|^2$ :

$$T = \left[ \frac{\exp\left(\frac{I}{\hbar}\right)}{\frac{1}{4} - \exp\left(\frac{2I}{\hbar}\right)} \right]^2 = \left[ \frac{\exp\left(-\frac{I}{\hbar}\right)}{1 - \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{2I}{\hbar}\right)} \right]^2.$$

Nel caso in cui l'argomento dell'esponenziale è "piccolo", cioè  $I \gg \hbar$ , allora il denominatore è approssimabile a 1; pertanto, esplicitando  $I$ :

$$T = e^{-2\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{\xi_1}^{\xi_2} |p(x)| dx. \quad (1.5.1)$$

La condizione  $I \gg \hbar$  può essere soddisfatta in due casi: quando la barriera è molto estesa, cioè  $\xi_2 \gg \xi_1$ ; oppure quando la barriera è molto alta, ossia quando, almeno intorno al punto di massimo, si ha  $E \ll V(x)$ .

**Esempio:** Barriera di potenziale quadra

Consideriamo una barriera di potenziale quadra:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & -x_0 < x < x_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

In diversi testi questo caso è trattato applicando direttamente la formula dell'effetto tunnel (1.5.1). Tuttavia vogliamo sottolineare che, poiché in  $x = \pm x_0$  la derivata prima del potenziale diverge, non

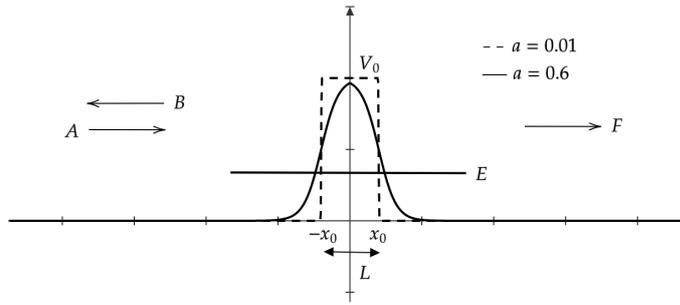


Figura 1.7: Potenziale che dipende dai parametri  $a$  e  $x_0$  e che tende a una barriera di potenziale quadra per  $a \rightarrow 0$ .

è possibile linearizzare il problema agli autovalori. Nonostante questo possiamo trattare la buca di potenziale quadra come limite. Consideriamo il potenziale in fig. 1.7:

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{|x|-x_0}{a}\right)},$$

che dipende dai parametri  $a$  e  $x_0$ .  $x_0$  è il punto in cui il potenziale si dimezza  $V(x_0) = V_0/2$ , inoltre si ha  $V(0) = V_0/(1 + \exp(-x_0/a))$ . Si possono esprimere i punti di inversione in funzione di  $E$  come  $\xi_{2,1} = \pm[x_0 + a \ln(V_0/E - 1)]$ .

Nel limite in cui  $a \rightarrow 0$  il potenziale tende alla barriera quadra. In tale limite si ha che il top della barriera è  $V_0$  e i punti di inversione sono  $\xi_{2,1} \rightarrow \pm x_0$ . La quantità  $L = 2x_0$  è detta larghezza della barriera.

Per ogni valore di  $a$  vale la procedura di raccordo descritta sopra. Nella condizione barriera molto alta o estesa vale la formula (1.6) per calcolare la probabilità che una particella che arriva da  $-\infty$  attraversi la barriera. Per calcolare tale probabilità è necessario calcolare  $\gamma$ , siccome il potenziale è simmetrico rispetto all'asse  $y$ :

$$p(x) = \sqrt{2m \left( E - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{|x|-x_0}{a}\right)} \right)} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{\hbar} \int_0^{\xi_2} \sqrt{2m \left( \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{x-x_0}{a}\right)} - E \right)} dx.$$

Nel limite in cui  $a \rightarrow 0$  il calcolo è semplice poiché:

$$\gamma \rightarrow \frac{2}{\hbar} \int_0^{x_0} \sqrt{2m(V_0 - E)} dx = \frac{L}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}.$$

Di conseguenza:

$$T_{WKB} = \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right).$$

Per una barriera di potenziale quadra si può risolvere il problema agli autovalori senza utilizzare approssimazioni. Si distinguono le tre regioni  $x < x_0$ ,  $x_0 < x < x_0$  e  $x > x_0$  dove il potenziale è costante. Avendo già determinato le soluzioni per un potenziale costante si impone la continuità della funzione d'onda e si ottiene il coefficiente di trasmissione:

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{L}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right).$$

Nelle condizioni in cui abbiamo ricavato  $T_{WKB}$  si ha che  $T \ll 1$ , allora sviluppando il sinh questo risultato si può approssimare a:

$$T \simeq 16 \frac{E}{V_0} \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right).$$

Osserviamo che rispetto a  $T_{WKB}$  abbiamo un fattore  $16 E/V_0$  di differenza, comunque la dipendenza esponenziale, che è quella che ha il maggior peso, è la stessa.

## 1.6 Approssimazione WKB come approssimazione semiclassica

L'approssimazione WKB viene detta anche approssimazione semiclassica. Infatti un modo alternativo per ottenere la soluzione approssimata (1.2.3) è quello di sviluppare la funzione d'onda in serie di potenze di  $\hbar$ .

Per ricavare la soluzione approssimata abbiamo ipotizzato che la funzione d'onda sia  $\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$ , possiamo riscrivere tale ipotesi condensando le due funzioni  $A$  e  $\phi$  in un'unica funzione complessa  $S$ :

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x)\right), \quad S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Sostituendo nel problema agli autovalori (1.1.2), invece di due equazioni reali per  $A$  e  $\phi$ , si ha un'equazione complessa per  $S$ :

$$i\hbar S'' - (S')^2 + p^2 = 0.$$

Assumiamo che  $S(x)$  sia sviluppabile in serie di potenze di  $\hbar$ :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hbar^k S_k(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \hbar^2 S_2(x) + \dots$$

Sostituendo nell'equazione per  $S$  si ha:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} i\hbar^{k+1} S_k'' - \sum_{k=0}^{+\infty} \hbar^{2k} (S_k')^2 - \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{k<l} 2\hbar^{k+l} S_k' S_l' + p^2 = 0.$$

Possiamo riscrivere questa equazione esplicitando le potenze di  $\hbar$  di ordine 0 e 1:

$$[(S_0')^2 - p^2] + \hbar [2S_0' S_1' - iS_0''] + \mathcal{O}(\hbar^2) = 0. \quad (1.6.1)$$

Ponendo a 0 i coefficienti delle prime due potenze si hanno le due equazioni:

$$\begin{cases} (S_0')^2 = p^2 \\ iS_0'' = 2S_0' S_1' \end{cases}.$$

Dalla prima equazione otteniamo:

$$S_0' = \pm p \quad \Rightarrow \quad S_0(x) = \pm \int p(x) dx + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{C}.$$

Sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$i(\pm p') = 2(\pm p)S_1' \quad \Rightarrow \quad S_1' = \frac{i}{2} \frac{p'}{p}.$$

Da ciò risolvendo per  $S_1$ :

$$S_1(x) = \frac{i}{2} \ln(p(x)) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{C}.$$

Allora la funzione  $S$  si scrive:

$$S(x) = \pm \int p(x) dx + C_0 + \hbar \frac{i}{2} \ln(p(x)) + \hbar C_1 + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Troncando al primo ordine e sostituendo nella funzione d'onda si ottiene:

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right), \quad C \in \mathbb{C},$$

come già trovato sopra.

Tuttavia questa derivazione permette di sviluppare l'approssimazione a ordini superiori. Ad esempio per sviluppare la soluzione a un ordine superiore riscriviamo l'equazione (1.6.1) come:

$$[(S'_0)^2 - p^2] + \hbar[2S'_0S'_1 - iS''_0] + \hbar^2[2S'_0S'_2 + (S'_1)^2 - iS''_1] + \mathcal{O}(\hbar^3) = 0.$$

Ponendo a 0 i coefficienti delle potenze di  $\hbar$  abbiamo tre equazioni. Le prime due di cui abbiamo già trovato la soluzione e la terza equazione:

$$2S'_0S'_2 + (S'_1)^2 - iS''_1 = 0.$$

Sostituendo i risultati delle prime due equazioni si ha un'equazione per  $S'_2$ :

$$S'_2 = \mp \frac{1}{4p^2} \left[ p'' - \frac{2(p')^2}{p} \right].$$

da cui integrando:

$$S_2 = \mp \frac{1}{4} \int \frac{1}{p^2} \left[ p'' - \frac{2(p')^2}{p} \right] dx + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{C}.$$

Similmente si può procedere a ordini superiori.

### 1.6.1 Validità dell'approssimazione

Inoltre questa derivazione permette di mettere in luce diversi aspetti interessanti sui limiti di applicazione dell'approssimazione. Riprendiamo l'equazione (1.6.1):

$$[(S'_0)^2 - p^2] + \hbar[2S'_0S'_1 - iS''_0] + \mathcal{O}_2(\hbar) = 0.$$

Si ha che un qualsiasi termine di ordine 1, in valore assoluto, è molto minore di un termine di ordine 0. Ad esempio, trascurando un fattore 2, si ha che:

$$|\hbar S'_0S'_1| \ll |S'_0|^2.$$

Cancellando un fattore  $|S'_0|$  e avendo posto  $(S'_0)^2 = p^2$  si ottiene:

$$|\hbar S'_1| \ll |p|.$$

Inoltre sostituendo  $S'_1 = i/2 p'/p$  e trascurando un fattore 1/2 si giunge alla disuguaglianza:

$$\left| \hbar \frac{p'}{p} \right| \ll |p|. \quad (1.6.2)$$

Ci sono due modi interessanti per interpretare questa relazione. Innanzitutto trascurando un fattore  $2\pi$  possiamo scrivere:

$$\left| \frac{h}{p} \right| \left| \frac{dp}{dx} \right| \ll |p|.$$

Ricordando che la lunghezza d'onda di De Broglie è  $\lambda = h/p$  abbiamo che:

$$\lambda \left| \frac{dp}{dx} \right| \ll |p|,$$

che significa che lungo una lunghezza d'onda di De Broglie la variazione del momento è piccola rispetto al momento stesso. Alternativamente riscriviamo (1.6.2) come:

$$\left| \hbar \frac{p'}{p^2} \right| \ll 1,$$

trascurando un fattore  $2\pi$  si ottiene:

$$\left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\hbar}{p} \right) \right| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1 = \frac{\lambda}{\lambda},$$

che significa che la lunghezza d'onda varia lentamente; ovvero lungo una lunghezza d'onda, la variazione di  $\lambda$  è piccola rispetto alla lunghezza d'onda stessa.

Ricordando la definizione di momento  $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$  si ha che:

$$|p p'| = m \left| \frac{dV}{dx} \right|.$$

Moltiplicando ambo i lati per  $\lambda = \hbar/p$  si ha:

$$\left| \lambda \frac{dV}{dx} \right| = \frac{2\pi\hbar}{m} |p'|.$$

Trascurando un fattore  $4\pi$ , dalla relazione (1.6.2) si ottiene:

$$\lambda \left| \frac{dV}{dx} \right| \ll \frac{|p|^2}{2m},$$

che è la stessa disuguaglianza trovata sopra (1.2.5).

In conclusione le due derivazioni sono equivalenti: partono dalla stessa ipotesi e giungono alla medesima soluzione.

# Capitolo 2

## Decadimento $\alpha$

### 2.1 Fenomenologia

Il decadimento  $\alpha$  è il fenomeno per cui un nucleo pesante, con numero di massa  $A \geq 200$ , decade in un nucleo più leggero emettendo una particella  $\alpha$ . Schematicamente:



Una particella  $\alpha$  è un nucleo di  ${}^4\text{He}$ , composto da due protoni e due neutroni. Sperimentalmente si misura la massa  $M_\alpha = 3727.3794118(12) \text{ MeV}/c^2$  [7]. Segue che l'energia di legame è:

$$B_\alpha = (2m_p + 2m_n - M_\alpha) c^2 = 28.29561094 \text{ MeV}, \quad (2.1.2)$$

dove  $m_p = 938.27208943(29) \text{ MeV}/c^2$  [7] e  $m_n = 939.56542194(48) \text{ MeV}/c^2$  [7] sono la massa del protone e del neutrone, rispettivamente.

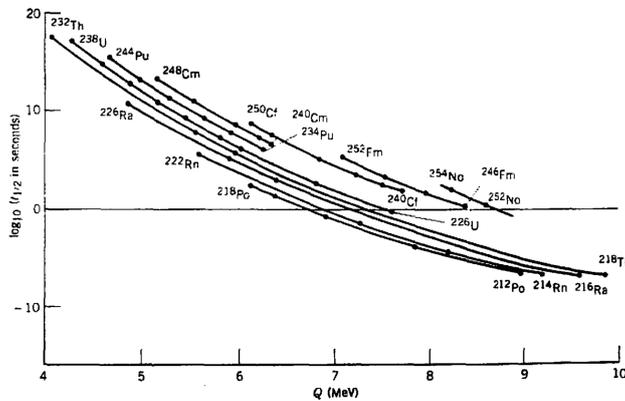


Figura 2.1: Tempi di dimezzamento per decadimento  $\alpha$  per alcuni nuclei pari-pari. Immagine da [8].

Si osserva che il tempo di dimezzamento di un nucleo che decade  $\alpha$  varia da  $10^{-8} \text{ s}$  a  $10^{16} \text{ anni}$ . Inoltre come si osserva in fig. 2.1 il tempo di dimezzamento diminuisce all'aumentare dell'energia  $Q$  emessa nel processo e aumenta al crescere di  $Z$ . Queste osservazioni empiriche si condensano nella formula di Geiger-Nuttall (1911):

$$\ln t_{1/2} \propto \frac{Z}{\sqrt{Q}}, \quad (2.1.3)$$

L'energia  $Q$  è pari alla differenza delle masse:

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2, \quad (2.1.4)$$

e coincide con l'energia cinetica del nucleo figlio e della particella  $\alpha$ ; tuttavia, essendo  $M_Y \gg M_\alpha$ , possiamo trascurare il rinculo del nucleo figlio e assumere che l'energia emessa durante il decadimento

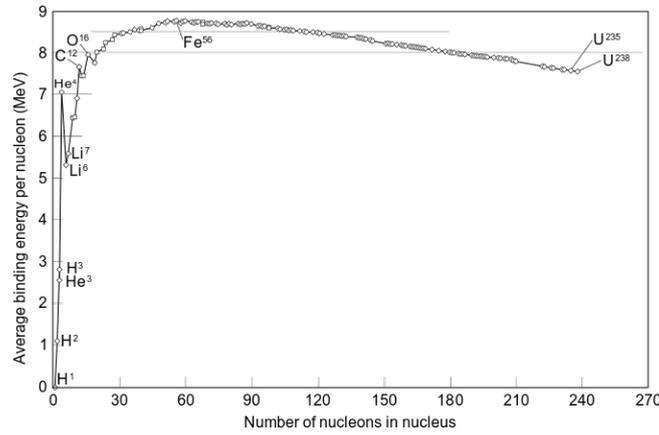


Figura 2.2: Dati sperimentali dell'energia di legame per nucleone  $\bar{B}(A)$  in funzione del numero di massa  $A$ .

sia interamente energia cinetica della particella  $\alpha$ , ovvero  $Q = E_\alpha$ . Si osserva che le particelle  $\alpha$  sono emesse con un'energia  $E_\alpha = (4 - 10)$  MeV.

La condizione affinché il decadimento avvenga spontaneamente è che il sistema nucleare vada in uno stato a energia minore, cioè  $Q > 0$ :

$$M_X > M_Y + M_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad A(\bar{B}_Y - \bar{B}_X) > 4(\bar{B}_Y - \bar{B}_\alpha),$$

dove  $\bar{B} = B/A$  indica l'energia di legame *per nucleone*.

Si osserva in fig. 2.2 che  $\alpha$  ha un'energia di legame grande rispetto ai nuclei vicini,  $\bar{B}_\alpha = 7.07$  MeV/ $c^2$ , per questo motivo i nuclei possono emettere spontaneamente particelle  $\alpha$  e non altri nuclei.

## 2.2 Teoria di Gamow

Nel 1928 Gamow [9] presentò una teoria che spiegava il decadimento  $\alpha$  basata sulla meccanica quantistica. In particolare questa teoria si basa sul fatto che la particella  $\alpha$  possa attraversare una barriera di potenziale per effetto tunnel. La teoria di Gamow fu una delle prime prove a sostegno della neonata teoria quantistica.

Assumiamo che il nucleo sia sferico con raggio  $R = r_0 A^{1/3}$ , sperimentalmente si misura  $r_0 = (1.20 - 1.25)$  fm. Supponendo che la particella  $\alpha$  sia preformata all'interno del nucleo, usando un modello classico, essa ha una velocità  $v_\alpha = \sqrt{2E_\alpha/M_\alpha}$ . Pertanto il tempo che impiega a percorrere il nucleo lungo un diametro è:

$$\Delta t = \frac{2R}{v_\alpha} = 2R \sqrt{\frac{M_\alpha}{2E_\alpha}}. \quad (2.2.1)$$

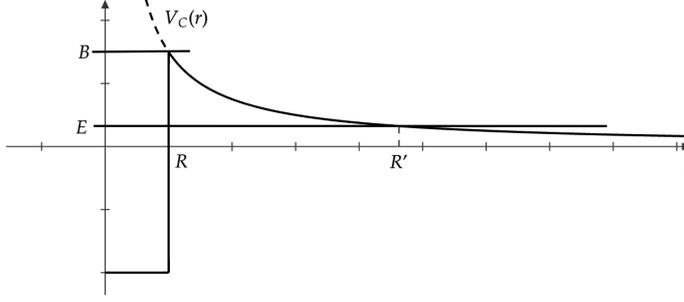
Se  $E_\alpha \sim 5$  MeV e  $R \sim 5$  fm, allora  $\Delta t \sim 10^{-21}$  s. Eppure si misurano tempi di dimezzamento molto maggiori; capiamo quindi che deve esserci qualcosa che impedisce alla particella di lasciare il nucleo. Questo qualcosa è una barriera di potenziale coulombiano. Approssimando l'interazione nucleare forte come una buca di potenziale con fondo  $V_0$  a simmetria sferica, il potenziale a cui è soggetta la particella  $\alpha$  è:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Z_Y e^2}{r} & r \geq R \end{cases}. \quad (2.2.2)$$

dove  $r$  è la distanza tra il centro del nucleo figlio e il centro della particella  $\alpha$ . In  $r = R$  il potenziale coulombiano vale:

$$B = V_C(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Z_Y}{R}. \quad (2.2.3)$$

Ad esempio nel decadimento  ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$ , la barriera di potenziale vale  $B \simeq 30$  MeV  $> E_\alpha$ . Pertanto classicamente la particella  $\alpha$  non può essere emessa; è solo grazie alla teoria quantistica che la particella può attraversare la barriera di potenziale per effetto tunnel.


 Figura 2.3: Potenziale a cui è soggetta la particella  $\alpha$  nella teoria di Gamow.

La particella  $\alpha$  entra nella barriera in  $r = R$  ed esce in  $r = R' \mid V_C(R') = E_\alpha$ . Segue che

$$R' = \frac{B}{E_\alpha} R. \quad (2.2.4)$$

Per  $E_\alpha \sim 5$  MeV e  $B \sim 30$  MeV risulta  $R' \sim 6R$ .

La probabilità che la particella  $\alpha$  attraversi la barriera di potenziale per effetto tunnel è data da eq. (1.5.1):

$$T = e^{-2\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2M_\alpha[V_C(r) - E]}. \quad (2.2.5)$$

L'integrale risulta:

$$\gamma = \frac{\sqrt{2M_\alpha}}{\hbar} \left[ R' \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{R}{R'}} \right) - \sqrt{R(R' - R)} \right].$$

Avendo osservato che  $R/R' \sim 1/6$  si può sviluppare l'arcsin. Inoltre definendo:

$$K_1 = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi\sqrt{2M_\alpha}}{\hbar} = 1.980 \text{ MeV}^{1/2}, \quad K_2 = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{M_\alpha}}{\hbar} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2},$$

l'integrale risulta:

$$\gamma = K_1 \frac{Z_Y}{\sqrt{E_\alpha}} - K_2 \sqrt{Z_Y R}. \quad (2.2.6)$$

Di conseguenza ogni volta che la particella  $\alpha$  colpisce le "pareti" del nucleo essa ha una probabilità  $T = e^{-2\gamma}$  di essere emessa. La frequenza con cui la particella  $\alpha$  colpisce le pareti del nucleo si ottiene invertendo eq. (2.2.1):

$$f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2E_\alpha}{M_\alpha}}.$$

In conclusione la probabilità che la particella  $\alpha$  venga emessa nell'unità di tempo è:

$$\lambda = P_\alpha f e^{-2\gamma}, \quad (2.2.7)$$

dove  $P_\alpha$  è la probabilità che la particella  $\alpha$  sia preformata all'interno del nucleo padre. Denotando con  $|X\rangle$  lo stato del nucleo padre e con  $|Y, \alpha\rangle$  lo stato del nucleo con particella  $\alpha$  preformata, la probabilità che la particella  $\alpha$  sia preformata è:

$$P_\alpha = |\langle Y, \alpha | X \rangle|^2.$$

Si può assumere  $P_\alpha \sim 1$ .

La probabilità nell'unità di tempo si dice anche costante di decadimento ed è legata alla vita media  $\tau$  dalla relazione:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{P_\alpha f} e^{2\gamma}.$$

Segue che il tempo di dimezzamento è:

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{P_\alpha f} e^{2\gamma}.$$

Abbiamo quindi che la teoria di Gamow spiega la legge di Geiger-Nuttal:

$$\ln t_{1/2} \propto \gamma \propto \frac{Z_Y}{\sqrt{E_\alpha}}.$$

A	$E_\alpha$ (MeV)	$t_{1/2}$ (s) misurato	$t_{1/2}$ (s) Gamow
220	8.95	$10^{-5}$	$3.3 \times 10^{-7}$
222	8.13	$2.8 \times 10^{-3}$	$6.3 \times 10^{-5}$
224	7.31	1.04	$3.3 \times 10^{-2}$
226	6.45	1854	$6.0 \times 10^1$
228	5.52	$6.0 \times 10^7$	$2.4 \times 10^6$
230	4.77	$2.5 \times 10^{12}$	$1.0 \times 10^{11}$
232	4.08	$4.4 \times 10^{17}$	$2.6 \times 10^{16}$

Tabella 2.1: Tempi di dimezzamento per il decadimento  $\alpha$  degli isotopi del Torio [8].

Consideriamo gli isotopi del Torio e confrontiamo i valori per  $t_{1/2}$  previsti dalla teoria di Gamow con quelli sperimentali [8]. Come possiamo osservare in tab. 2.1, la teoria di Gamow non riproduce esattamente i dati sperimentali, ma ne riproduce il corretto andamento. Il motivo è che abbiamo fatto delle ipotesi semplificative. Innanzitutto abbiamo assunto che il nucleo sia sferico, nella realtà il nucleo ha una forma ellissoidale. Di conseguenza l'ipotesi che l'emissione di particelle  $\alpha$  sia isotropa (cioè che il potenziale a cui è soggetta la particella  $\alpha$  non dipenda dalle coordinate angolari) non è vera. Inoltre abbiamo assunto che la particella  $\alpha$  sia preformata all'interno del nucleo ( $P_\alpha = 1$ ). Rinunciare a queste due ipotesi complicherebbe di molto il problema e richiederebbe di sviluppare una teoria ben più complessa. Questo va oltre l'interesse di questa tesi. Nonostante questo la conclusione che vogliamo rimarcare è che la particella  $\alpha$  attraversa la barriera di potenziale grazie all'effetto tunnel, confermando che a livello microscopico la meccanica quantistica è la corretta descrizione della natura.

## Capitolo 3

# Modi quasi-normali dei buchi neri: approccio WKB

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo vogliamo illustrare l'applicazione del metodo WKB, opportunamente adattato, alla determinazione delle frequenze complesse dei modi quasi-normali (QNM) dei buchi neri. Questa tecnica è stata sviluppata in una serie di articoli negli anni '80 del secolo scorso [10–14], ed è tuttora utilizzata accanto ad altre in diversi contesti rilevanti per la fisica e l'astrofisica dei buchi neri.

Introduciamo innanzitutto il concetto di modi normali, che è un concetto che si utilizza in diversi campi della fisica sia a livello classico che a livello quantistico. Consideriamo un sistema dinamico unidimensionale classico o quantistico, suscettibile a oscillazioni, i modi normali sono soluzioni periodiche dell'equazione differenziale che determina l'evoluzione del sistema:

$$\psi(t, x) = A(x) e^{-i\omega t},$$

accompagnate da opportune condizioni al contorno. Imponendo tali condizioni al contorno si può trovare che soltanto alcune frequenze sono ammesse, cioè lo spettro delle frequenze può risultare discreto. In tale caso ciascun modo è caratterizzato da una ben determinata frequenza  $\omega_n$  reale. L'insieme dei modi normali forma un'insieme completo, pertanto la generica soluzione è una combinazione lineare dei modi normali:

$$\psi(t, x) = \sum_n a_n \psi_n(t, x).$$

Se la soluzione è esprimibile in tali termini l'energia del sistema si conserva, tuttavia un sistema fisico reale dissipa energia. Per incorporare tale effetto si generalizza il concetto di modi normali a quello di modi quasi-normali. Quest'ultimi sono soluzioni dell'equazione dinamica con una frequenza complessa  $\omega = \text{Re}(\omega) + i \text{Im}(\omega)$ :

$$\psi(t, x) = A(x) e^{\text{Im}(\omega)t} e^{-i \text{Re}(\omega)t}.$$

La parte reale della frequenza corrisponde alla frequenza di oscillazione, mentre la parte immaginaria determina quanto velocemente il modo è smorzato (se  $\text{Im}(\omega) < 0$ ) oppure quanto rapidamente il modo esplose (se  $\text{Im}(\omega) > 0$ ). Per un sistema dissipativo i modi sono smorzati.

Per un corpo elastico in oscillazione è lecito studiare il limite idealizzato in cui la dissipazione di energia è trascurabile, dunque le oscillazioni sono esprimibili in termini di modi normali con frequenze reali. Nel caso di un buco nero il concetto di oscillazione non è ovvio poiché non vi è materia che oscilla, infatti il buco nero è una configurazione dello spazio-tempo. Nonostante questo quando un buco nero è perturbato si comporta come un corpo elastico ed è proprio lo spazio-tempo all'esterno dell'orizzonte degli eventi a oscillare. Tuttavia nel caso dei buchi neri la dissipazione di energia insita a causa dell'orizzonte degli eventi rende il problema non-hermitiano e costringe fin da subito a considerare i modi quasi-normali associati a frequenze complesse.

Le frequenze complesse di tali QNM dipendono dalle caratteristiche del buco nero, che, secondo il teorema *no-hair*, sono: massa  $M$ , carica elettrica  $Q$  e momento angolare  $J$ . Sulla base di queste tre caratteristiche si distinguono quattro tipi di buco nero, riportati in tabella 3.1. I buchi neri che effettivamente si osservano in astrofisica hanno carica elettrica trascurabile e sono ben approssimati dal buco nero di Kerr.

	Non-rotante ( $J = 0$ )	Rotante ( $J \neq 0$ )
Senza carica ( $Q = 0$ )	Schwarzschild	Kerr
Con carica ( $Q \neq 0$ )	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Tabella 3.1: Tipi di buchi neri distinti in base alle caratteristiche: massa, carica e momento angolare.

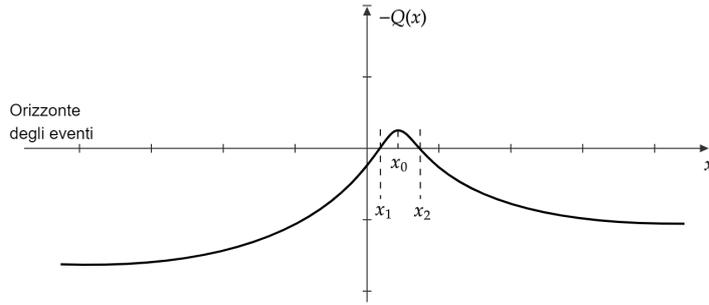
È interessante studiare i QNM dei buchi neri poiché giocano un ruolo fondamentale nei processi di produzione delle onde gravitazionali. Dopo che un buco nero è stato perturbato inizia la cosiddetta fase di "ringdown" durante la quale il buco nero si diseccita emettendo radiazione gravitazionale. In particolare i QNM caratterizzano la seconda fase di questo processo, quando il buco nero è ormai nello stato stazionario e si può usare una teoria perturbativa lineare. La prima rivelazione diretta di onde gravitazionali è stata fatta dalla collaborazione LIGO/VIRGO nel 2015 (evento GW150914) [15]. Tali onde gravitazionali sono state prodotte da un buco nero generatosi a seguito della collisione di due buchi neri. Da allora sono state rivelate onde gravitazionali prodotte dalla collisione di un buco nero con una stella di neutroni e dalla collisione di due stelle di neutroni, ma in questi casi la radiazione è meno intensa. Un altro caso ancora in cui si possono osservare onde gravitazionali è la fase di ringdown di un buco nero generatosi a seguito del collasso di una supernova. Tuttavia in questo ultimo caso la radiazione è ancora meno intensa e attualmente tali onde non sono ancora state rivelate. Essendo che le frequenze complesse dei QNM dipendono soltanto dalle caratteristiche del buco nero, misurando le frequenze e i tempi di smorzamento delle onde gravitazionali è possibile determinare le caratteristiche del buco nero. Inoltre grazie ai QNM è possibile studiare la stabilità di un buco nero: se fossero ammesse frequenze la cui parte immaginaria è positiva, allora concluderemmo che tale buco nero è instabile. Infine lo studio dei QNM mette alla prova la teoria della Relatività Generale stessa: infatti se le previsioni della teoria dovessero essere incompatibili con i dati sperimentali, allora la Relatività Generale dovrebbe essere modificata.

L'equazione fondamentale che descrive la perturbazione di un buco nero si riduce a un'equazione differenziale del secondo ordine analoga all'equazione di Schrödinger uni-dimensionale indipendente dal tempo:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi = 0. \quad (3.1.1)$$

Nel caso del buco nero  $\psi$  è la parte radiale della variabile di perturbazione. Assumiamo che tale variabile di perturbazione abbia dipendenza temporale  $e^{-i\omega t}$  e dipendenza angolare che dipende dal tipo di buco nero e dal tipo di perturbazione. La coordinata  $x$  è una "coordinata tartaruga" (alternativamente si denota con  $r_*$ ) e varia da  $-\infty$  all'orizzonte degli eventi a  $+\infty$  all'infinito spaziale. In analogia con il caso quantistico la funzione  $-Q(x)$  viene detta "potenziale". Essa è costante per  $x \rightarrow \pm\infty$ , ma può assumere valori diversi ai due estremi, ed è massima in un certo punto  $x = x_0$ . Tale funzione dipende dal tipo di perturbazione, dalle caratteristiche del buco nero e dalla frequenza. Poiché  $-Q(x)$  tende a una costante per  $x \rightarrow \pm\infty$  sappiamo che per  $x \rightarrow \pm\infty$   $\psi$  è una combinazione lineare di onde piane. In particolare per  $x \rightarrow +\infty$   $\psi$  è combinazione lineare di  $e^{\pm i\alpha_+ x}$  e per  $x \rightarrow -\infty$   $\psi$  è combinazione lineare di  $e^{\pm i\alpha_- x}$ ;  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  sono opportune costanti e possono essere diverse poiché  $-Q(x)$  può assumere valori diversi ai due estremi.

In generale, come per il problema quantistico, non è possibile trovare una soluzione analitica esatta all'equazione; pertanto si utilizzano diversi approcci per determinare i QNM di un buco nero. Un primo approccio è quello numerico, questo venne utilizzato nei primi studi sui QNM dei buchi neri [16]. Tale approccio richiede di selezionare un valore per la frequenza complessa, integrare l'equazione fondamentale e verificare che soddisfi le corrette condizioni al contorno. Siccome in generale tali


 Figura 3.1: Tipica forma della funzione  $-Q(x)$  nel caso dei buchi neri.

condizioni non sono soddisfatte è necessario valutare tutte le possibili frequenze, rendendo la tecnica lenta e difficile per un'analisi sistematica su un vasto range di parametri. Un secondo metodo è quello di sostituire il potenziale  $-Q(x)$  con una funzione parametrica che approssimi bene il potenziale per cui si sanno trovare soluzioni analitiche esatte [17]. I risultati di questo metodo sono compatibili con quelli del primo; tuttavia anche questo secondo metodo presenta un problema, siccome è necessario determinare una funzione che approssimi il potenziale non è possibile determinare sistematicamente l'errore o migliorare l'accuratezza. Un terzo modo è un'ibrido tra il metodo analitico e il metodo numerico e fa uso delle frazioni continue [18]. Proprio quest'ultimo è uno dei metodi più efficienti per determinare i QNM dei buchi neri e attualmente fornisce le stime più accurate.

Un approccio alternativo è quello WKB che vogliamo esplorare in questa tesi. Il vantaggio di questo approccio rispetto a quelli precedenti è che permette uno studio sistematico dei QNM e di migliorare l'accuratezza sviluppando i calcoli a ordini superiori. Questa tecnica è giustificata dal fatto che, come anticipato prima, le due equazioni (1.1.2) e (3.1.1) sono simili. Inoltre come si osserva in fig. 3.1 il potenziale  $-Q(x)$  assomiglia a una barriera di potenziale. Pertanto il problema dei QNM dei buchi neri è analogo al problema quantistico di una particella incidente su una barriera di potenziale. Tuttavia le condizioni al contorno dei due problemi sono differenti. Nel sistema quantistico con potenziale di cui in fig. 1.6 abbiamo considerato un'onda incidente e abbiamo calcolato che la probabilità che tale onda venga trasmessa al di là della barriera (per effetto tunnel) è  $T = e^{-2\gamma}$ . Nel caso del buco nero le condizioni al contorno sono ben diverse. Innanzitutto un modo normale è un'oscillazione libera del buco nero, il che significa che all'infinito spaziale  $x \rightarrow +\infty$  non vi è onda entrante, ma soltanto onda uscente dal potenziale. Per causalità è necessario che anche all'orizzonte degli eventi il flusso sia soltanto uscente dal potenziale, ovvero le onde attraversano l'orizzonte degli eventi verso l'interno del buco nero. Cioè, ricordando che per  $x \rightarrow \pm\infty$   $\psi$  è una combinazione lineare di onde piane, possiamo esprimere le condizioni al contorno come:

$$\psi \sim e^{i\alpha_+ x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \psi \sim e^{-i\alpha_- x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.1.2)$$

con  $\text{Re}(\alpha_{\pm}) > 0$ . Fino ad ora non siamo entrati nello specifico della teoria perturbativa dei buchi neri, di conseguenza un qualsiasi problema fisico la cui equazione fondamentale ha la forma (3.1.1) e che soddisfi le condizioni al contorno (3.1.2) può essere trattato utilizzando l'approssimazione WKB. Prima di sviluppare questa trattazione però vogliamo entrare nello specifico dei buchi neri determinando che cosa è il potenziale  $-Q(x)$ .

## 3.2 Teoria perturbativa dei buchi neri

Fino ad ora abbiamo considerato  $-Q(x)$  come un generico potenziale che soddisfa le condizione di cui abbiamo parlato sopra e ha una forma del tipo fig. 3.1. Come anticipato questa funzione dipende dal tipo di buco nero (Schwarzschild, Kerr, Reissner-Nordström o Kerr-Newman) e dal tipo di perturbazione (campo scalare, campo di neutrini, campo elettromagnetico o campo gravitazionale).

Il caso più semplice, che è l'unico per cui svilupperemo i calcoli, è quello di un buco nero di Schwarzschild. In questo caso l'equazione fondamentale (3.1.1) assume la forma:

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + \left[ \omega^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{\lambda}{r^2} + \frac{2\beta M}{r^3} \right) \right] \psi(r_*) = 0, \quad (3.2.1)$$

cioè si ha  $Q(x) = \omega^2 - V(r)$ , con:

$$V(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{\lambda}{r^2} + \frac{2\beta M}{r^3} \right), \quad (3.2.2)$$

dove  $\lambda = l(l+1)$ , con  $l$  indice delle armoniche sferiche;  $\beta$  identifica il tipo di perturbazione:  $\beta = 1, 0, -3$  per perturbazione scalare, elettromagnetica e gravitazionale, rispettivamente. La coordinata tartaruga  $r_*$  è legata alla coordinata radiale  $r$  dalla relazione  $dr/dr_* = 1 - 2M/r$ .

### 3.2.1 Perturbazione scalare

Consideriamo un campo scalare privo di massa  $\phi$ . Vogliamo determinarne l'evoluzione in un buco nero di Schwarzschild. La metrica di Schwarzschild, che è soluzione delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto, è detta metrica di background:

$$g_{\mu\nu}^{BG} dx^\mu dx^\nu = -A(r)dt^2 + A(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

dove  $A(r) = 1 - 2M/r$ . La metrica di Schwarzschild vale per  $r \in (R_S, +\infty)$ , dove  $R_S = 2M$  è il raggio di Schwarzschild. Osserviamo che la metrica diventa singolare per  $r \rightarrow R_S$ . Supponendo che il campo scalare  $\phi$  sia un campo di prova, cioè trascurando il fatto che tale campo apporti un contributo alla metrica, l'evoluzione del campo scalare è data dall'equazione di Klein-Gordon:

$$\square\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g_{BG}}} \partial_\mu [\sqrt{-g_{BG}} g_{BG}^{\mu\nu} \partial_\nu] \phi = 0,$$

dove  $g_{BG}$  è il determinante della metrica. Data la simmetria sferica del buco nero di Schwarzschild espandiamo  $\phi$  come:

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\psi(t, r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi),$$

dove  $Y_l^m(\theta, \phi)$  sono le armoniche sferiche, caratterizzate dagli indici  $(l, m)$ . Sostituendo nell'equazione di Klein-Gordon si ottiene:

$$\frac{A}{r} [\partial_r (A r \partial_r \psi) - A \partial_r \psi] - \partial_t^2 \psi - A \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \psi = 0.$$

Introduciamo le coordinate tartaruga  $r_*$  che sono legate a  $r$  dalla relazione  $dr/dr_* = A$ . Sostituendo  $\partial_r = A^{-1}\partial_{r_*}$  ed esplicitando  $A$  otteniamo l'equazione:

$$\left\{ \partial_{r_*}^2 - \partial_t^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \right\} \psi(t, r_*) = 0.$$

Possiamo separare ulteriormente la parte spaziale da quella temporale utilizzando la trasformata di Fourier rispetto alla variabile temporale:

$$\widehat{\psi}(\omega, r_*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \psi(t, r_*) e^{i\omega t}, \quad \psi(t, r_*) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \widehat{\psi}(\omega, r_*) e^{-i\omega t}. \quad (3.2.3)$$

Nel seguito scriveremo semplicemente  $\widehat{\psi}(\omega, r_*) = \psi(r_*)$ . Sfruttando la proprietà che  $\widehat{\partial_t \psi}(\omega, r_*) = -i\omega \widehat{\psi}(\omega, r_*)$  l'equazione diventa:

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + \left[ \omega^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right) \right] \psi(r_*) = 0,$$

che è proprio l'equazione (3.2.1) nel caso  $\beta = 1$ .

### 3.2.2 Perturbazione gravitazionale

Il caso gravitazionale risulta abbastanza lungo da dimostrare e i dettagli vanno oltre l'obiettivo di questa tesi, si rimanda a [19] per una trattazione approfondita. Ci limitiamo a evidenziarne gli aspetti peculiari.

Come prima consideriamo la metrica di Schwarzschild come metrica di background. Una perturbazione gravitazionale è una perturbazione della metrica:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{BG} + h_{\mu\nu}.$$

Consideriamo il caso in cui della materia esterna al buco nero, descritta da un tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ , perturbi il buco nero. La metrica  $g_{\mu\nu}$  si ottiene dalle equazioni di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{4} T_{\mu\nu},$$

dove  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein. Assumiamo che la perturbazione sia sufficientemente piccola in modo da poter espandere il tensore di Einstein in modo lineare:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{BG} + \Delta G_{\mu\nu}.$$

Siccome la metrica di Schwarzschild è soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto si ha  $G_{\mu\nu}^{BG} = 0$ ; pertanto le equazioni che governano la perturbazione sono:

$$\Delta G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.2.4)$$

A questo punto procediamo a presentare i risultati. Le possibili perturbazioni gravitazionali sono di due tipi: assiali (o dispari) e polari (o pari). In entrambi i casi eq. (3.2.4) assume la forma:

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]\psi(r_*) = 0.$$

Nel primo caso il potenziale prende il nome di potenziale di Regge-Wheeler e assume la forma:

$$V^{RW}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right].$$

Nel secondo caso esso prende il nome di potenziale di Zerilli e ha la forma:

$$V^Z(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 6\lambda^2Mr^2 + 18\lambda M^2r + 18M^3}{r^3(\lambda r + 3M)^2}.$$

Osserviamo che l'equazione (3.2.1) comprende soltanto il caso di perturbazione assiale. Tuttavia non è necessario studiare nello specifico il caso di perturbazione polare poiché le due perturbazioni sono isospettrali, cioè i due potenziali hanno lo stesso spettro di modi quasi-normali. Questo risultato fu dimostrato da Chandrasekhar [20].

### 3.3 Approccio WKB

Continuiamo ora la trattazione WKB che come abbiamo anticipato non vale solo nel caso dei buchi neri, ma un per qualsiasi problema la cui equazione fondamentale ha la forma:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi = 0,$$

il cui potenziale  $-Q(x)$  ha la forma in fig. 3.1 e sono soddisfatte le condizioni al contorno:

$$\psi \sim e^{i\alpha+x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \psi \sim e^{-i\alpha-x}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

con  $\text{Re}(\alpha_{\pm}) > 0$ . In particolare abbiamo visto nella sezione precedente che nel caso di buco nero di Schwarzschild la funzione  $Q(x)$  ha la forma  $Q(x) = \omega^2 - V(r)$ . Osserviamo in eq. (3.2.2) che  $V(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow R_S$  e  $r \rightarrow +\infty$ , cioè in termini delle coordinate tartaruga  $Q(x) \rightarrow \omega^2$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Allora in questo caso le condizioni al contorno possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \psi &\sim e^{i\omega x}, & x &\rightarrow +\infty, & \psi &\sim e^{-i\omega x}, & x &\rightarrow -\infty, & \text{Re}(\omega) &> 0; \\ \psi &\sim e^{-i\omega x}, & x &\rightarrow +\infty, & \psi &\sim e^{i\omega x}, & x &\rightarrow -\infty, & \text{Re}(\omega) &< 0, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

cioè il ruolo di onda entrante o uscente dal potenziale si scambiano in base al segno della parte reale della frequenza.

Innanzitutto riscriviamo l'equazione fondamentale nella stessa forma del problema agli autovalori (1.1.2):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\tilde{Q}^2}{\epsilon^2}\psi,$$

dove  $\epsilon$  è il parametro di perturbazione e  $\tilde{Q}(x) = \epsilon\sqrt{Q(x)}$ . La soluzione WKB è quella ricavata nel caso quantistico (1.2.3) sostituendo  $p(x) \rightarrow \tilde{Q}(x)$  e  $\hbar \rightarrow \epsilon$ . Con riferimento alla fig. 3.1 nella regione  $\{x \mid Q(x) < 0\}$  la soluzione WKB è:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{\tilde{Q}(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_{x_1}^{x_1} \tilde{Q}(x') dx'\right) + \frac{B}{\sqrt{\tilde{Q}(x)}} \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{x_1}^{x_1} \tilde{Q}(x') dx'\right) & x < x_1 \\ \frac{C}{\sqrt{\tilde{Q}(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_{x_2}^x \tilde{Q}(x') dx'\right) + \frac{D}{\sqrt{\tilde{Q}(x)}} \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{x_2}^x \tilde{Q}(x') dx'\right) & x > x_2 \end{cases}.$$

Perché siano soddisfatte le condizioni al contorno (3.3.1) si distinguono i due casi. Se  $\text{Re}(\omega) > 0$  allora necessariamente  $B = 0$  e  $C = 0$ . Invece se  $\text{Re}(\omega) < 0$  si ha che  $A = 0$  e  $D = 0$ .

Mentre nel caso quantistico di una particella incidente su una barriera di potenziale procederemmo a determinare la soluzione WKB nella regione classicamente non permessa e poi a raccordare le soluzioni nei punti  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , in questo caso tale procedura non funziona. Infatti come già anticipato le condizioni al contorno dei due problemi sono ben diverse. Nel caso quantistico consideriamo un'onda incidente da  $x = +\infty$  e abbiamo che l'onda riflessa a  $x = +\infty$  ha ampiezza paragonabile all'ampiezza dell'onda incidente, mentre l'onda trasmessa a  $x = -\infty$  ha ampiezza molto minore. Correttamente con l'approssimazione WKB abbiamo calcolato che il rapporto tra l'ampiezza dell'onda trasmessa e l'ampiezza dell'onda incidente è un'esponenziale decrescente  $e^{-\gamma}$ . Invece nel caso dei QNM si ha che l'ampiezza dell'onda riflessa è paragonabile all'ampiezza dell'onda trasmessa e l'ampiezza dell'onda incidente è nulla. Allora sembrerebbe che l'approssimazione WKB non possa essere utilizzata per il problema dei QNM, poiché con tale approssimazione ci aspetteremmo che il rapporto tra l'ampiezza dell'onda trasmessa e l'ampiezza dell'onda riflessa sia un fattore esponenzialmente piccolo, invece di un fattore circa 1. Nonostante questo c'è un caso in cui questa affermazione è falsa: il caso il cui il massimo del potenziale  $-Q(x)$  è esattamente 0. Nel caso quantistico questo si avrebbe quando il massimo del potenziale coincide con l'energia del sistema e sappiamo che in questo caso l'ampiezza dell'onda riflessa è uguale all'ampiezza dell'onda trasmessa e pari a  $1/\sqrt{2}$  dell'ampiezza dell'onda incidente (per conservazione della probabilità). Allora ci aspettiamo che se i QNM esistono, alcuni di essi si hanno per frequenze per cui il massimo del potenziale sia circa nulla, cioè se  $x_0$  è il punto di massimo, si ha  $-Q(x_0) \approx 0$ . Nel caso in cui  $-Q(x_0) \gtrsim 0$  si ha che i punti di inversione  $x_1$  e  $x_2$  sono vicini tra loro, di conseguenza la soluzione WKB non è valida nella regione  $x_1 < x < x_2$ . Pertanto dobbiamo modificare il metodo utilizzato nelle sezioni precedenti per raccordare le soluzioni in  $x < x_1$  e  $x > x_2$ .

Invece di raccordare la soluzione interna al potenziale con quella esterna prima in  $x_2$  e poi in  $x_1$  (o viceversa), cerchiamo di raccordarle simultaneamente. Per farlo sviluppiamo il potenziale  $-Q(x)$  attorno al punto di massimo  $x = x_0$ , cioè  $x_0$  è punto di minimo per  $Q(x)$ :

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0)^2 + \mathcal{O}(x - x_0)^3,$$

dove  $Q_0 = Q(x_0)$  e  $Q_0'' = Q''(x_0) > 0$ . Definiamo:

$$k = \frac{1}{2}Q_0'', \quad t = (4k)^{1/4}e^{-i\pi/4}(x - x_0), \quad \nu + \frac{1}{2} = \frac{iQ_0}{\sqrt{2Q_0''}}.$$

Troncando al secondo ordine  $Q(x)$  è una parabola e possiamo riscriverla come:

$$Q(x) = -i\sqrt{4k} \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 \right).$$

Sostituendo in eq. (3.1.1) l'equazione fondamentale diventa:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 \right) \psi = 0.$$

Tale equazione prende il nome di equazione di Weber. Le soluzioni a questa equazione sono le funzioni paraboliche cilindriche  $D_\nu(t)$  e  $D_{-\nu-1}(it)$ . La soluzione generale è  $\psi = A D_\nu(t) + B D_{-\nu-1}(it)$ . Tale soluzione è valida quando il potenziale è approssimabile a una parabola. Assumiamo che nei pressi dei punti di inversione tale approssimazione sia ancora valida. Se  $k$  è sufficientemente grande allora vicino ai punti di inversione si ha  $|t| \rightarrow \infty$ . In tale regione si possono usare le formule asintotiche per le funzioni paraboliche cilindriche (si rimanda a [6] per una trattazione approfondita) e la soluzione  $\psi$  si scrive:

$$\begin{aligned} \psi(t) &\sim A t^\nu e^{-t^2/4} + B (it)^{-\nu-1} e^{t^2/4}, & |t| \rightarrow \infty, \arg(t) = -\pi/4, \\ \psi(t) &\sim \left[ A + B \frac{\sqrt{2\pi} e^{-i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right] t^\nu e^{-t^2/4} + \\ &+ \left[ B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{\sqrt{2\pi} e^{i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} \right] t^{-\nu-1} e^{t^2/4}, & |t| \rightarrow \infty, \arg(t) = 3\pi/4, \end{aligned}$$

dove  $\Gamma(\nu)$  è la funzione gamma di Eulero. La prima soluzione corrisponde a  $x > x_0$  e vi sostituiamo  $t = (4k)^{1/4}e^{-i\pi/4}(x - x_0)$ ; elevando  $t$  al quadrato si ha  $t^2 = -i2\sqrt{k}(x - x_0)^2$ . Invece la seconda soluzione corrisponde a  $x < x_0$  poiché possiamo riscrivere  $t$  come  $t = (4k)^{1/4}e^{i3\pi/4}[-(x - x_0)]$ , per cui si ha  $\arg(t) = 3\pi/4$ ; elevando  $t$  al quadrato si ha  $t^2 = -i2\sqrt{k}(x - x_0)^2$ . Pertanto la soluzione  $\psi$  si scrive:

$$\begin{aligned} \psi &\sim A (4k)^{\nu/4} e^{-i\pi\nu/4} (x - x_0)^\nu e^{i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2} + \\ &+ B (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{-i\pi(\nu+1)/4} (x - x_0)^{-(\nu+1)} e^{-i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2}, & |t| \rightarrow \infty, x > x_0, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} \psi &\sim \left[ A + B \frac{\sqrt{2\pi} e^{-i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right] (4k)^{\nu/4} e^{3i\pi\nu/4} [-(x - x_0)]^\nu e^{i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2} + \\ &+ \left[ B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{\sqrt{2\pi} e^{i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} \right] (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{-3i\pi(\nu+1)/4} \times \\ &\times [-(x - x_0)]^{-(\nu+1)} e^{-i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2}, & |t| \rightarrow \infty, x < x_0. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Nei pressi dei punti di inversione vale anche la soluzione WKB (3.3); in particolare in tale regione abbiamo assunto che si possa approssimare il potenziale a una parabola, pertanto si ha una forma esplicita della soluzione WKB. Allora in tale regione possiamo confrontare la soluzione WKB con quella appena determinata per raccordare la soluzione WKB in  $x < x_1$  con quella in  $x > x_2$ . Tuttavia siccome la soluzione WKB soddisfa le condizioni al contorno (3.3.1) possiamo già determinare una condizione di quantizzazione.

Ricordiamo che tali condizioni impongono che l'onda sia soltanto uscente dalla barriera di potenziale. Pertanto se  $\text{Re}(\omega) > 0$  si deve annullare il termine <sup>1</sup> con  $e^{-i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2}$ , di conseguenza deve essere

<sup>1</sup>Si noti che il termine  $e^{-i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2}$  è l'onda entrante nel potenziale sia in (3.3.2) che in (3.3.3), mentre il termine  $e^{i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2}$  è l'onda uscente in entrambe le soluzioni.

$B = 0$  e  $\Gamma(-\nu) = \infty$ . Quest'ultima condizione implica che  $\nu$  sia un intero non negativo, cioè  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . Viceversa se  $\text{Re}(\omega) < 0$  i ruoli di onda entrante e uscente dal potenziale si scambiano e si deve annullare il termine con  $e^{i\sqrt{k}/2(x-x_0)^2}$ . Segue che  $A = 0$  e  $\Gamma(\nu+1) = \infty$ . Quest'ultima condizione implica  $\nu = -1, -2, -3, \dots$

Abbiamo quindi la condizione per i QNM:

$$\frac{iQ_0}{\sqrt{2Q_0''}} = n + \frac{1}{2}, \quad (3.3.4)$$

con

$$n = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{Re}(\omega) > 0 \\ -1, -2, \dots & \text{Re}(\omega) < 0 \end{cases}.$$

Questa equazione va a determinare le frequenze permesse.

È possibile migliorare la soluzione sviluppando l'approssimazione WKB e il potenziale  $-Q(x)$  al terzo ordine (o addirittura a ordini superiori). Senza entrare nel dettaglio dei calcoli presentiamo il risultato ottenuto da Iyer e Will [11], questo è un'equazione analoga a eq. (3.3.4), ma che coinvolge anche gli ordini superiori:

$$\frac{iQ_0}{\sqrt{2Q_0''}} - \Lambda(n) - \Omega(n) = n + \frac{1}{2} \quad (3.3.5)$$

dove:

$$\Lambda(n) = \frac{1}{\sqrt{2Q_0''}} \left[ \frac{1}{8} \frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \left( \frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left( \frac{Q_0'''}{Q_0''} \right)^2 (7 + 60\alpha^2) \right],$$

$$\Omega(n) = \frac{\alpha}{2Q_0''} \left[ \frac{5}{6912} \left( \frac{Q_0'''}{Q_0''} \right)^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \frac{(Q_0''')^2 Q_0^{(4)}}{(Q_0'')^3} (51 + 100\alpha^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2304} \left( \frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right)^2 (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \frac{Q_0''' Q_0^{(5)}}{(Q_0'')^2} (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \frac{Q_0^{(6)}}{Q_0''} (5 + 4\alpha^2) \right],$$

dove con l'apice  $(n)$  indichiamo la derivata  $n$ -esima rispetto a  $x$  e con il pedice 0 intendiamo che la funzione è calcolata in  $x = x_0$ , con  $x_0$  punto di massimo del potenziale  $-Q(x)$ .

In particolare se, come per il buco nero di Schwarzschild, la funzione  $Q(x)$  ha la forma  $Q(x) = \omega^2 - V(x)$  e  $V(x)$  è indipendente dalla frequenza, allora soltanto  $Q_0 = \omega^2 - V_0$  dipende dalla frequenza. Pertanto si ottiene un'equazione esplicita per la frequenza:

$$\omega^2 = V_0 - i\sqrt{-2V_0''} \left[ n + \frac{1}{2} + \Lambda(n) + \Omega(n) \right], \quad (3.3.6)$$

dove in  $\Lambda$  e  $\Omega$  si sostituisce  $Q_0^{(n)} = -V_0^{(n)}$ .

### 3.3.1 Applicazione al buco nero di Schwarzschild

Entriamo nello specifico del buco nero di Schwarzschild utilizzando la forma esplicita di  $Q(x)$  (3.2.1). Usando la regola della catena, la derivata prima di  $Q(x)$  è:

$$Q'(x) = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dV(r)}{dr} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{\lambda}{r^3} \left( 2 - \frac{6M}{r} \right) + \frac{2\beta M}{r^4} \left( 3 - \frac{8M}{r} \right) \right].$$

Da questa si ottiene che il minimo per  $Q(x)$  si ha in  $r = r_0$  con:

$$r_0 = \frac{3M}{2} \lambda^{-1} \left( \lambda - \beta + \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 + \frac{14}{9} \lambda \beta} \right).$$

Segue che  $V_0 = V(r_0)$ . Inoltre usando la regola della catena si ha:

$$V_0^{(n)} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^n \frac{d^n V(r)}{dr^n} \Big|_{r=r_0}.$$

Sostituendo tali espressioni in eq. (3.3.6) si ottiene l'equazione:

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \left[ \frac{\lambda}{r_0^2} + \frac{2\beta M}{r_0^3} \right] - i\sqrt{2Q_0''} \left( n + \frac{1}{2} + \Lambda(n) + \Omega(n) \right). \quad (3.3.7)$$

Le frequenze risultanti sono espresse in funzione della massa  $M$ . Pertanto per presentare i risultati definiamo la frequenza adimensionale  $\sigma = M\omega$ .

Per la perturbazione gravitazionale ( $\beta = 3$ ), riportiamo in tabella 3.2 i risultati numerici ottenuti da Iyer ( $\sigma_{WKB}$ ) [12], quelli di Chandrasekhar e Detweiler ( $\sigma_{CD}$ ) con il metodo numerico [16] e quelli di Leaver ( $\sigma_{Leaver}$ ) con il metodo delle frazioni continue [18]. In particolare confrontiamo i risultati ottenuti con l'approccio WKB e quelli ottenuti con il metodo di Leaver.

$l$	$n$	$\sigma_{CD}$	$\sigma_{Leaver}$	$\sigma_{WKB}$	% Re( $\sigma$ )	% Im( $\sigma$ )
2	0	0.3737 - 0.0889 $i$	0.3737 - 0.0890 $i$	0.3732 - 0.0892 $i$	-0.13	-0.22
	1	0.3484 - 0.2747 $i$	0.3467 - 0.2739 $i$	0.3460 - 0.2749 $i$	-0.20	-0.36
	2		0.3011 - 0.4783 $i$	0.3029 - 0.4711 $i$	0.60	1.5
3	0	0.5994 - 0.0927 $i$	0.5994 - 0.0927 $i$	0.5993 - 0.0927 $i$	-0.02	0
	1	0.5820 - 0.2812 $i$	0.5826 - 0.2813 $i$	0.5824 - 0.2814 $i$	-0.03	-0.04
	2		0.5517 - 0.4791 $i$	0.5532 - 0.4767 $i$	0.27	0.5
	3		0.5120 - 0.6903 $i$	0.5157 - 0.6774 $i$	0.72	1.9
	4		0.4702 - 0.9156 $i$	0.4711 - 0.8815 $i$	0.19	3.7
4	0	0.8092 - 0.0941 $i$	0.8092 - 0.0942 $i$	0.8091 - 0.0942 $i$	-0.01	0
	1	0.7965 - 0.2844 $i$	0.7966 - 0.2843 $i$	0.7965 - 0.2844 $i$	-0.01	-0.04
	2	0.5061 - 0.4232 $i$	0.7727 - 0.4799 $i$	0.7736 - 0.4790 $i$	0.12	0.19
	3		0.7398 - 0.6839 $i$	0.7433 - 0.6783 $i$	0.47	0.82
	4		0.7015 - 0.8982 $i$	0.7072 - 0.8813 $i$	0.81	1.9

Tabella 3.2: QNM per il buco nero di Schwarzschild con perturbazione gravitazionale.

Possiamo osservare come ci sia buon accordo tra i risultati dei due metodi. In particolare si osserva che fissato  $n$  l'accuratezza migliora all'aumentare di  $l$ . Viceversa fissato  $l$  l'accuratezza diminuisce all'aumentare di  $n$ , questo perché all'aumentare di  $n$  i punti di inversione si allontanano, per cui lo sviluppo del potenziale troncato al terzo ordine non è più adeguato.

Inoltre grafichiamo i risultati in fig. 3.2. Possiamo osservare la simmetria tra frequenze con  $\text{Re}(\omega) > 0$  e quelle con  $\text{Re}(\omega) < 0$ , ciascuna frequenza con parte reale positiva ha la corrispettiva frequenza con parte reale di segno opposto e stessa parte immaginaria. Si osserva che la parte immaginaria non dipende da  $l$ , ma diminuisce all'aumentare di  $n$ .

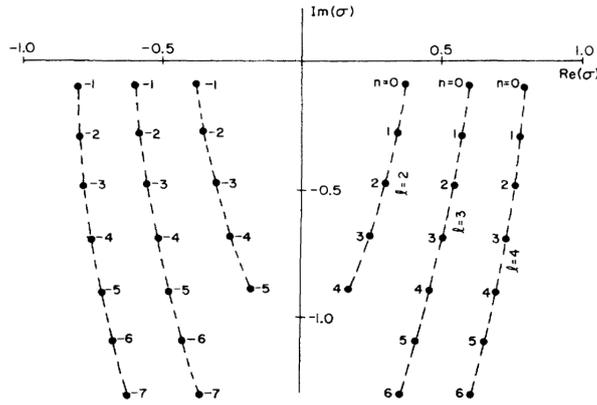


Figura 3.2: QNM per il buco nero di Schwarzschild con perturbazione gravitazionale. Immagine da [12].

### 3.3.2 Applicazione al buco nero di Kerr

Come anticipato il caso di maggior interesse è il buco nero di Kerr, poiché è quello che si osserva in astrofisica. La perturbazione di questo buco nero risulta più complicata del caso di Schwarzschild, pertanto ci limitiamo a presentarne gli aspetti fondamentali e i risultati ottenuti da Seidel e Iyer [14].

L'equazione che determina la perturbazione di un buco nero di Kerr prende il nome di equazione di Teukolsky. Nel caso di perturbazione scalare essa si riduce a:

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + \left[ \frac{K^2 - \Delta \lambda_{lm}}{(r^2 + a^2)^2} - G^2 - \frac{dG}{dr_*} \right] \psi = 0,$$

dove  $a$  è il parametro di rotazione del buco nero, pari al momento angolare per unità di massa, e:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad K = -(r^2 + a^2)\omega + am, \quad \lambda_{lm} = E + a^2\omega^2 - 2am\omega, \quad G = \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2},$$

e la coordinata  $r_*$  è definita da  $dr/dr_* = \Delta/(r^2 + a^2)$ . La quantità  $E$  che compare in  $\lambda_{lm}$  può essere espressa in serie di potenze di  $(a\omega)$ . Questo genera un problema, poiché per applicare l'equazione che determina le frequenze (3.3.5) dobbiamo determinare il punto di massimo del potenziale. Allora per procedere si sviluppa anche il potenziale in serie di potenze di  $(a\omega)$  fino allo stesso ordine con cui si conosce  $E$ . In questo modo si può determinare il punto di massimo del potenziale sempre come serie di potenze di  $(a\omega)$ . A questo punto si può utilizzare eq. (3.3.5) per determinare le frequenze. Si ottiene un'equazione del tipo:

$$\omega^2 - \phi_s(a, n, \omega, l, m) = 0.$$

Si nota che a differenza del buco nero di Schwarzschild la funzione  $\phi_s$  non è indipendente dalla frequenza. Dati  $a, n, l$  e  $m$  si può risolvere numericamente per  $\omega$ .

Presentiamo in fig. 3.3 i risultati ottenuti da Seidel e Iyer [14] nel caso  $l = 1$  con il parametro di rotazione  $a$  che varia tra 0 e 1.

Nel caso di perturbazione gravitazionale l'equazione di Teukolsky è complessa. Tuttavia Chandrasekhar e Detweiler hanno trovato un modo di trasformare tale equazione in una classe di potenziali che descrivono la stessa fisica. In particolare questi potenziali si riducono a potenziale di Regge-Wheeler o al potenziale di Zerilli nel limite  $a \rightarrow 0$  (limite di buco nero non-rotante). L'equazione che si ottiene è:

$$\frac{d^2X}{dr_*^2} - V(r)X = 0,$$

dove:

$$X = \Delta^{s/2} (r^2 + a^2)^{1/2} \left[ \alpha(r) R_{slm\omega}(r) + \beta(r) \Delta^{s+1} \frac{dR_{slm\omega}}{dr} \right],$$

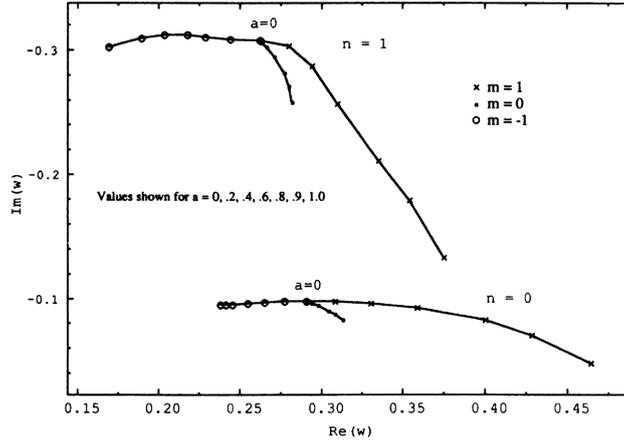


Figura 3.3: QNM per il buco nero di Kerr con perturbazione scalare, per  $l = 1$ . Immagine da [14].

dove  $\alpha(r)$  e  $\beta(r)$  soddisfano:

$$\alpha^2 - \alpha' \beta \Delta^{s+1} + \alpha \beta' \Delta^{s+1} - \beta^2 \Delta^{2s+1} V_S = \text{cost.},$$

dove:

$$V_S = -\frac{1}{\Delta} [K^2 + i s \Delta' K - \Delta(2i s K' + \lambda_{lm}^2)], \quad \lambda_{lm}^s = E + a^2 \omega^2 - 2am\omega - s(s+1),$$

$s = -2$ ,  $\Delta$  e  $K$  sono state definite nel caso scalare e  $R_{slm\omega}(r)$  è la funzione radiale della variabile di perturbazione. Inoltre  $V(r)$  ha la forma:

$$V = \frac{\Delta U}{(r^2 + a^2)^2} + G^2 + \frac{dG}{dr_*},$$

dove:

$$G = \frac{s(r-M)}{r^2 + a^2} + \frac{r \Delta}{(r^2 + a^2)^2}, \quad U = V_S + \frac{2\alpha' + (\beta' \Delta^{s+1})'}{\beta \Delta^2}. \quad (3.3.8)$$

Si può scegliere  $\alpha$  e  $\beta$  in modo che il potenziale sia reale. Di nuovo nell'espressione per  $\lambda_{lm}$  compare la quantità  $E$ , che è nota in serie di potenze di  $(a\omega)$ . Allora si può procedere come nel caso scalare a sviluppare il potenziale e determinare il punto di massimo del potenziale in serie di potenze di  $(a\omega)$ . Utilizzando eq. (3.3.5) si ottiene un'equazione per le frequenze che come nel caso scalare ha la forma:

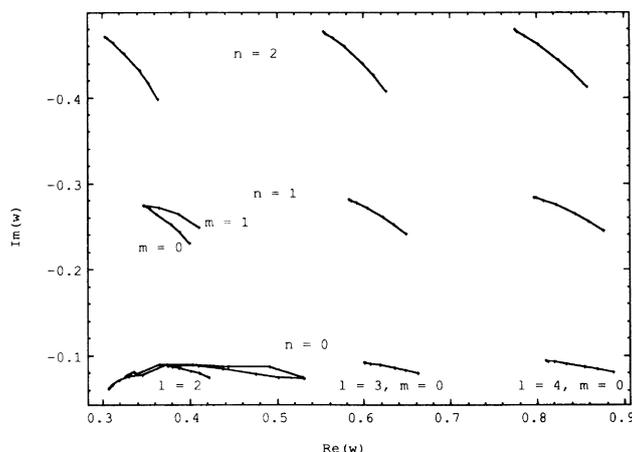
$$\omega^2 - \phi_g(a, n, \omega, l, m) = 0. \quad (3.3.9)$$

Tuttavia sorge un problema: il raggio di convergenza della serie di Taylor si riduce drasticamente, specialmente per  $m \neq 0$ . Per migliorare l'accuratezza si può utilizzare il metodo degli approssimanti di Padé. Si trova che in alcuni casi il metodo migliora il raggio di convergenza della serie.

Presentiamo in tab. 3.3 i risultati di Seidel e Iyer [14] per  $n = 0$ ,  $l = 2$  e  $m = 0$ , ottenuti usando solo la serie di Taylor ( $\sigma_{Taylor}$ ) e utilizzando il metodo degli approssimanti di Padé ( $\sigma_{Padé}$ ). Inoltre si confrontano i risultati ottenuti con il metodo degli approssimanti di Padé con quelli di Leaver ( $\sigma_{Leaver}$ ), ottenuti con il metodo delle frazioni continue [18]. Si osserva che i risultati ottenuti con gli approssimanti di Padé sono compatibili entro l'1% con quelli di Leaver. Nel caso  $n = 0$ ,  $l = 2$  e  $m = 1$  la compatibilità è entro l'1% per  $a \leq 0.8$ .

Infine presentiamo in fig. 3.4 i risultati ottenuti da Seidel e Iyer [14] per  $n = 0, 1, 2$ ,  $l = 2, 3, 4$  e  $m = 0$  e per  $n = 0, 1$ ,  $l = 2$  e  $m = 0, 1$ .

$a$	$\sigma_{Leaver}$	$\sigma_{Taylor}$	$\sigma_{Padé}$	% Re( $\omega$ )	% Im( $\omega$ )
0	$0.3737 - 0.0890 i$	$0.3732 - 0.0892 i$	$0.3732 - 0.0892 i$	-0.1	-0.2
0.2	$0.3751 - 0.0887 i$	$0.3746 - 0.0889 i$	$0.3746 - 0.0889 i$	-0.1	-0.2
0.4	$0.3797 - 0.0878 i$	$0.3790 - 0.0879 i$	$0.3790 - 0.0879 i$	-0.2	-0.1
0.6	$0.3881 - 0.0860 i$	$0.3872 - 0.0860 i$	$0.3872 - 0.0860 i$	-0.2	0
0.8	$0.4019 - 0.0827 i$	$0.4005 - 0.0824 i$	$0.4004 - 0.0824 i$	-0.4	0.4
0.9	$0.4120 - 0.0785 i$	$0.4098 - 0.0797 i$	$0.4096 - 0.0795 i$	-0.6	-1.2
1.0	$0.4251 - 0.0718 i$	$0.4215 - 0.0762 i$	$0.4211 - 0.0754 i$	-0.9	-5.0

 Tabella 3.3: QNM per il buco nero di Kerr con perturbazione gravitazionale, per  $n = 0$ ,  $l = 2$  e  $m = 0$ .

 Figura 3.4: QNM per il buco nero di Kerr con perturbazione gravitazionale, per  $n = 0, 1, 2$ ,  $l = 2, 3, 4$  e  $m = 0$ , per  $n = 0, 1$ ,  $l = 2$  e  $m = 0, 1$ . Immagine da [14].

### 3.4 Conclusioni

In conclusione l'approssimazione WKB é un potente strumento che può essere utilizzato anche per studiare i modi quasi-normali dei buchi neri. Questo studio é tuttora di grande interesse, e si estende anche a effetti non-lineari nelle perturbazioni, combinazione di WKB con altri metodi, tentativi di andare oltre la Relatività Generale di Einstein, spazi con costante cosmologica diversa da zero, ulteriori dimensioni spaziali, ecc. Basta consultare un database come Inspire [21] per verificare che continuano a uscire ogni anno decine di lavori sull'argomento. Anche a livello sperimentale la mole di dati sui buchi neri astrofisici si sta accrescendo e migliorerà sempre di più, anche grazie a nuovi apparati sperimentali come l'interferometro spaziale LISA [22] e l'Einstein Telescope [23], per analizzare i dati dei quali saranno richiesti strumenti teorici sempre più sofisticati.

# Bibliografia

- [1] Gregor Wentzel. “Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke der wellenmechanik”. In: *Zeitschrift für Physik* 38.6 (1926), pp. 518–529.
- [2] Hendrik Anthony Kramers. “Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung”. In: *Zeitschrift für Physik* 39.10 (1926), pp. 828–840.
- [3] Léon Brillouin. “Remarques sur la mécanique ondulatoire”. In: *J. phys. radium* 7.12 (1926), pp. 353–368.
- [4] David J Griffiths e Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [5] Barton Zwiebach. *Mastering quantum mechanics: essentials, theory, and applications*. MIT Press, 2022.
- [6] Carl M Bender e Steven A Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. McGraw-Hill, 1978.
- [7] NIST (National Institute of Standards and Technology). <https://www.nist.gov/pml>.
- [8] Kenneth S Krane. *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons, 1991.
- [9] George Gamow. “Zur quantentheorie des atomkernes”. In: *Zeitschrift für Physik* 51.3 (1928), pp. 204–212.
- [10] Bernard F Schutz e Clifford M Will. “Black hole normal modes: a semianalytic approach”. In: *The Astrophysical Journal* 291 (1985), pp. L33–L36.
- [11] Sai Iyer e Clifford M Will. “Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering”. In: *Physical Review D* 35.12 (1987), p. 3621.
- [12] Sai Iyer. “Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes”. In: *Physical Review D* 35.12 (1987), p. 3632.
- [13] Kostas D Kokkotas e Bernard F Schutz. “Black-hole normal modes: A WKB approach. III. The Reissner-Nordström black hole”. In: *Physical Review D* 37.12 (1988), p. 3378.
- [14] Edward Seidel e Sai Iyer. “Black-hole normal modes: A WKB approach. IV. Kerr black holes”. In: *Physical Review D* 41.2 (1990), p. 374.
- [15] Benjamin P Abbott et al. “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger”. In: *Physical review letters* 116.6 (2016), p. 061102.
- [16] Subrahmanyan Chandrasekhar e Steven Detweiler. “The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 344.1639 (1975), pp. 441–452.
- [17] Valeria Ferrari e Bahram Mashhoon. “New approach to the quasinormal modes of a black hole”. In: *Physical Review D* 30.2 (1984), p. 295.
- [18] Edward W Leaver. “An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 402.1823 (1985), pp. 285–298.
- [19] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, 2018.
- [20] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*. Vol. 69. Oxford University Press, 1998.
- [21] INSPIRE. <https://inspirehep.net/>.
- [22] NASA. *LISA (Laser Interferometer Space Antenna)*. <https://lisa.nasa.gov/>.

- [23] *Einstein Telescope*. <https://www.et-gw.eu/>.