

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Meccanica e Meccatronica

SINTESI CINEMATICA DI MECCANISMI D-DRIVE

Kinematic synthesis of D-Drive mechanisms

RELATORE: CH.MO PROF. DARIO RICHIEDEI

LAUREANDO: GIACOMO FIORINI

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

*“Viandante, non esiste il cammino,
lo si fa camminando...”*

A. Machado

*Ai miei genitori e a Matilde,
che camminano con me.
Ai miei nonni Angelo e Danilo,
che mi guardano da lassù.
Alle mie nonne, agli zii e ai cugini,
a tutta la mia grande famiglia.
A Lorenzo e a tutti i miei amici,
ma anche a tutti coloro che hanno fatto con me
questo lungo cammino,
chiamato Scuola, chiamato Università...*

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | 1 |
| CAPITOLO 1 - I meccanismi base della meccanica | 3 |
| 1.1. Il quadrilatero articolato..... | 3 |
| 1.2. Il biella-manovella | 4 |
| 1.3. Caratteristiche comuni tra il quadrilatero articolato e il biella-manovella..... | 5 |
| 1.3.1. I gradi di libertà..... | 5 |
| 1.3.2. La catena cinematica | 5 |
| CAPITOLO 2 - I meccanismi D-Drive | 7 |
| 2.1. Caratteristiche comuni al quadrilatero articolato e al biella-manovella | 7 |
| 2.2. Contesti applicativi attuali | 8 |
| CAPITOLO 3 - Sintesi cinematica di un quadrilatero articolato | 9 |
| 3.1. Sintesi per generazione di funzioni | 10 |
| 3.2. Sintesi per generazione di traiettorie | 11 |
| 3.3. Sintesi per generazione di moto piano | 11 |
| CAPITOLO 4 - Applicazione ai meccanismi D-Drive | 13 |
| 4.1. Considerazioni per il D-Drive | 13 |
| 4.2. La regola di Grashof | 14 |
| 4.3. Precisazioni geometriche | 16 |
| 4.4. Metodo della generazione grafica di traiettorie – coppia rotoidale tra cedente e telaio nota | 16 |
| 4.4.1. Dati di input: | 17 |
| 4.4.2. Dati di output: | 17 |
| 4.4.3. Inserimento dei dati | 17 |
| 4.4.4. Svolgimento | 17 |
| 4.4.5. Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi | 18 |
| 4.5. Metodo della generazione grafica di traiettorie – coppia rotoidale tra cedente e biella nota | 20 |
| 4.5.1. Dati di input | 20 |
| 4.5.2. Dati di output | 20 |
| 4.5.3. Inserimento dei dati | 20 |
| 4.5.4. Svolgimento | 21 |
| 4.5.5. Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi | 21 |
| 4.6. Metodo della generazione grafica di moto piano | 23 |
| 4.6.1. Dati di input | 23 |
| 4.6.2. Dati di output | 23 |
| 4.6.3. Inserimento dei dati | 23 |
| 4.6.4. Svolgimento | 24 |
| 4.6.5. Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi | 24 |

| | |
|---|-----------|
| 4.7. Metodo della generazione analitica di traiettorie..... | 26 |
| 4.7.1. Dati di input | 26 |
| 4.7.2. Dati di output | 26 |
| 4.7.3. Primo stadio | 26 |
| 4.7.4. Secondo stadio..... | 27 |
| 4.7.5. Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi | 28 |
| CAPITOLO 5 - Analisi cinematica dei meccanismi D-Drive | 29 |
| 5.1. Analisi cinematica di posizione..... | 29 |
| 5.2. Analisi cinematica di velocità..... | 34 |
| 5.3. Analisi cinematica di accelerazione..... | 36 |
| 5.4. La singolarità cinematica..... | 37 |
| CAPITOLO 6 - Analisi della traiettoria rettilinea | 39 |
| 6.1. Regressione lineare | 39 |
| 6.2. Media prevista, media osservata, range di biella e scostamenti | 42 |
| 6.3. La disuguaglianza di Schwarz. Il prodotto scalare..... | 42 |
| 6.4. Raggi di curvatura..... | 44 |
| 6.5. Risultati e rappresentazione delle indagini di traiettoria..... | 45 |
| CAPITOLO 7 - Analisi dinamica dei meccanismi D-Drive | 51 |
| 7.1. Polo di equilibrio alle sollecitazioni | 51 |
| 7.1.1. Polo fisso..... | 51 |
| 7.1.2. Centro di istantanea rotazione | 52 |
| 7.1.3. Centro di massa | 53 |
| 7.2. Scrittura delle equazioni di equilibrio del corpo rigido..... | 53 |
| 7.2.1. Asta movente e asta cedente | 53 |
| 7.2.2. Corpo di biella | 55 |
| 7.3. Analisi dinamica e illustrazione risultati | 57 |
| Conclusioni..... | 61 |
| Bibliografia | 63 |
| Sitografia..... | 63 |

Introduzione

In ambito industriale e produttivo è molto importante la gestione delle risorse disponibili, come la materia prima, l'energia, gli spazi. In questo senso la meccanica applicata alle macchine gioca un ruolo non trascurabile. Ogni componente, soprattutto se si tratta di un organo in movimento, deve essere adeguato, a livello sia cinematico che dinamico, alla prestazione richiesta.

In meccanica un esempio degli fenomeni più studiati è l'attrito, generato in presenza di contatti striscianti tra due o più organi. Gli effetti negativi dell'attrito, quando indesiderato, sono i seguenti e connessi tra loro:

- dissipazione di energia, sotto forma di calore: il contatto in questione genera un aumento di temperatura locale dovuto allo strofinio;
- usura dei componenti: se il calore generato diventa eccessivo si può avere una ricristallizzazione parziale della microstruttura degli organi. Ciò può variarne le proprietà con conseguenti cali di prestazione e di resistenza a fatica.

Nei casi in cui l'attrito è evidente si può intervenire con opportuni sistemi di raffreddamento o lubrificazione, anch'essi però con degli svantaggi:

- il raffreddamento a fluido esterno (aria o acqua) richiede degli opportuni circuiti;
- i lubrificanti devono essere periodicamente rinnovati, e implicano metodi non sempre ecologici di smaltimento dei residui.

Un altro aspetto con cui bisogna fare i conti è il costo dei componenti, crescenti con materiali più pregiati o forme più complicate. Gli alloggiamenti delle coppie prismatiche rappresentano spesso dei limiti in questo senso.

Prendendo spunto da due meccanismi base, come il quadrilatero articolato e il biella-manovella, la finalità di questo elaborato è quella di sintetizzare, tramite i punti di precisione, una catena cinematica che converte un moto rotatorio continuo in un moto rettilineo alternato.

Il meccanismo in questione, noto come D-Drive, è composto esclusivamente da coppie rotoidali, e uno dei suoi punti è vincolato, numericamente o graficamente, a percorrere una traiettoria rettilinea. Infatti alcune applicazioni industriali vedono impossibile, per ragioni di spazio, l'inserimento di una guida per un pattino nel caso in cui sia richiesto un sistema manovella-pistone.

Le sintesi del D-Drive e del quadrilatero articolato si effettuano con metodi molto simili, scelti tra quelli già noti per il secondo: metodi di generazione di funzioni, di traiettorie e di moto piano. I dati in ingresso comuni a tutte le prove svolte sono gli spostamenti rettilinei del punto di biella, mantenuti sempre uguali in lunghezza e inclinazione: la ragione di questa restrizione, oltre a una maggiore semplicità di confronto, risiede nella

definizione a meno della scala del disegno. Di volta in volta cambieranno gli altri dati, e i valori assegnati a questi ultimi saranno scelti ad arbitrio.

Per valutare la qualità di ogni metodo di sintesi del D-Drive si effettua un'analisi della traiettoria realmente descritta dal punto vincolato a priori a spostamenti rettilinei. Si controlla in particolare che questa non registri scostamenti eccessivi dalla traiettoria prevista e presenti un'adeguata rettilineità. Si introduce anche la seguente ipotesi, da rispettare all'interno del range tra le configurazioni estreme del D-Drive risolvente: il suddetto punto, detto punto di biella, passa per le posizioni desiderate senza costrizione al distacco dei membri.

Infine potrebbero presentarsi dei meccanismi, tra quelli idonei, molto simili da un punto di vista costruttivo: se ne sceglieranno due a campione per poi studiare le differenze sui profili di accelerazione, delle forze scambiate negli accoppiamenti cinematici e del momento richiesto al movente.

CAPITOLO 1

I meccanismi base della meccanica

Il D-Drive è un meccanismo che, dato un moto rotatorio, e senza l'ausilio di guide di supporto e pattini, disegna una traiettoria rettilinea. I vincoli tra i suoi membri consistono esclusivamente in coppie rotoidali, i cui assi di rotazione sono perpendicolari allo stesso piano: con questa ipotesi possiamo parlare di catena cinematica piana ed è definito il piano di moto.

Il problema della sintesi cinematica di un D-Drive riguarda, in maniera più o meno diretta, quello di due meccanismi base: il quadrilatero articolato e il biella-manovella. Per semplicità di trattazione di seguito sono raffigurati gli schemi cinematici, grazie ai quali è possibile risalire alle proprietà dei membri, ai poligoni di chiusura, e infine stabilire di questi la variabilità nel tempo.

1.1. Il quadrilatero articolato

È composto da quattro coppie rotoidali che permettono solamente la rotazione relativa tra quattro membri. Tre di essi variano la loro posizione angolare nel tempo. Assegniamo per ora le seguenti denominazioni (figura 1.1), le cui problematiche saranno discusse nel paragrafo 4.5:

- telaio: è posto nel sistema di riferimento assoluto poiché è fisso nel tempo;
- movente: è il membro a cui è applicato il motore, fissato al telaio;
- cedente: è il membro opposto al movente, anch'esso fissato al telaio;
- biella di rimando: è agganciata al movente e al cedente e opposta al telaio.

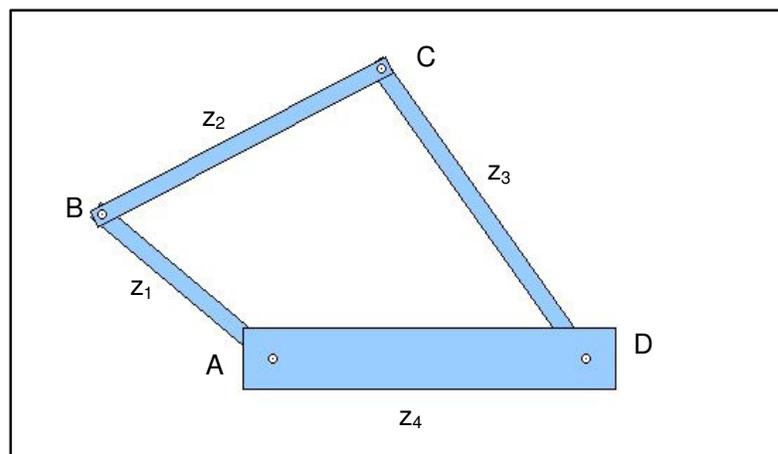


Figura 1.1: schema cinematico del quadrilatero articolato.

| Membro | Modulo | Fase | Modulo nel tempo | Fase nel tempo |
|------------|--------|-------------|------------------|----------------|
| Movente AB | z_1 | φ_1 | costante | variabile |
| Biella BC | z_2 | φ_2 | costante | variabile |
| Cedente CD | z_3 | φ_3 | costante | variabile |
| Telaio DA | z_4 | φ_4 | costante | costante |

Tabella 1.1: variabilità nel tempo delle dimensioni significative del poligono di chiusura del quadrilatero articolato.

1.2.II biella-manovella

È composto da tre membri collegati tra loro attraverso tre coppie rotoidali. Una di queste, e sicuramente non quella centrale, è solidale al pattino, che scorre lungo una prefissata direzione. Dei vettori significativi mobili sotto elencati, due non variano la loro lunghezza nel tempo, mentre il terzo è divisibile in due, essendo duplice la funzione del telaio (figura 1.2):

- manovella: è unita al telaio e generalmente compie una rotazione completa;
- biella: è il collegamento tra il pattino e la manovella, e come quest'ultima varia nel tempo solo la sua fase, ma in moto alternato;
- guida: è solidale al telaio ed è schematizzata con una componente che varia nel tempo solo la sua lunghezza (geometricamente è la proiezione sulla guida stessa della distanza tra la coppia rotoidale a telaio e il pattino);
- distanziale a telaio: è la distanza tra la coppia rotoidale a telaio della manovella e la guida di scorrimento della coppia prismatica.

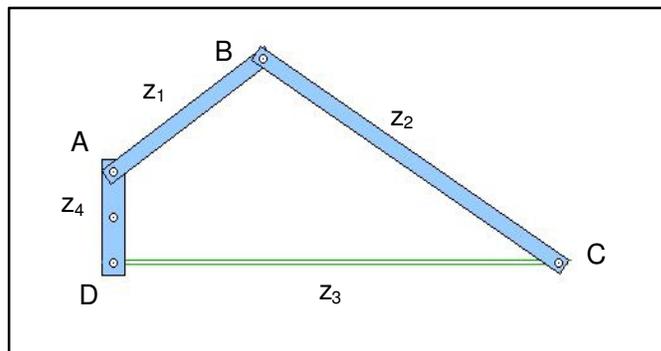


Figura 1.2: schema cinematico del biella-manovella.

| Membro | Modulo | Fase | Modulo nel tempo | Fase nel tempo |
|-------------------------|--------|-------------|------------------|----------------|
| Manovella AB | z_1 | φ_1 | costante | variabile |
| Biella BC | z_2 | φ_2 | costante | variabile |
| Guida CD | z_3 | φ_3 | variabile | costante |
| Distanziale a telaio DA | z_4 | φ_4 | costante | costante |

Tabella 1.2: variabilità nel tempo delle dimensioni significative del poligono di chiusura del biella-manovella.

1.3.Caratteristiche comuni tra il quadrilatero articolato e il biella-manovella

I due meccanismi hanno uno schema cinematico differente, ma sono in qualche modo imparentati. Per questioni geometriche, una retta e un segmento possono essere considerati, rispettivamente, una circonferenza e un arco di cerchio di raggio infinito. Se osserviamo il biella-manovella notiamo che il pattino scorre sul membro rettilineo z_3 . Proprio il membro z_3 del biella-manovella altro non sarebbe che un arco di cerchio descrivibile dal cedente z_3 del quadrilatero articolato se quest'ultimo avesse una lunghezza infinita.

Di seguito sono illustrate le analogie cinematiche tra i due meccanismi sopra citati.

1.3.1.I gradi di libertà

Il numero dei gradi di libertà è il numero delle coordinate necessario a definire la posizione di un meccanismo (Giovagnoni, Rossi, p.18), ovviamente date le proprietà dei membri e la loro variabilità nel tempo. Le coordinate in questione sono dette coordinate libere. Considerando direttamente il caso planare scriviamo l'equazione di struttura, o di Grubler, per il calcolo dei gradi di libertà:

$$n = 3(M - 1) - 2c_1 - c_2$$

Dove M è il numero dei membri compreso il telaio, e c_k il numero delle coppie di classe k -esima, che permettono cioè k gradi di libertà impedendone $3 - k$ (per $k=1, 2$).

Nei casi in oggetto si è di fronte a degli accoppiamenti cinematici che prevedono $k=1$: la coppia prismatica impedisce la rotazione e una traslazione, la coppia rotoidale le due traslazioni, sempre che queste ultime siano trattate sotto forma di componenti parallele agli assi cartesiani. Applichiamo l'equazione di Grubler, per $M = 4$, al quadrilatero articolato (4 rotoidali) e al biella-manovella (3 rotoidali e una prismatica), ottenendo:

$$n_{QA} = 3(4 - 1) - 2 * 4 = 1, \quad n_{BM} = 3(4 - 1) - 2 * 4 = 1$$

I due meccanismi hanno in comune la necessità di una sola coordinata libera per definire la posizione, la velocità e l'accelerazione. In particolare il pattino in C è a tutti gli effetti un membro del biella-manovella, mentre i vettori z_3 e z_4 sono di fatto compresi nel telaio.

1.3.2.La catena cinematica

Nell'introduzione al capitolo si è accennato al concetto di poligono di chiusura. La catena cinematica si può presentare in quattro diverse modalità, spaziale o piana, aperta o chiusa.

In entrambi i casi parliamo di catene cinematiche piane. Mentre per le coppie rotoidali valgono le restrizioni già poste per il D-Drive, per la prismatica nel biella-manovella occorre precisare che essa deve scorrere su una retta appartenente o parallela al piano di moto.

Entrambi gli schemi cinematici sono a catena chiusa. Da quelli proposti si può risalire ai poligoni associati: questi altro non sono che delle semplificazioni vettoriali, dei membri dei meccanismi, che evidenziano le dimensioni significative.

La condizione di chiusura del poligono si può esprimere, in forma vettoriale, con la seguente uguaglianza:

$$f = \sum_{i=1}^n \vec{z}_i = 0$$

Questa relazione, detta equazione di chiusura, deve valere indipendentemente dalla particolare configurazione del meccanismo. Se la somma dei vettori non venisse nulla si avrebbe la disarticolazione del meccanismo per distacco o rottura.

L'equazione di chiusura vede le componenti di ciascun vettore proiettate negli assi x e y del piano di moto, perciò si può scrivere in forma geometrica. Il generico vettore diventa quindi:

$$\vec{z}_i = z_i \begin{Bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{Bmatrix}$$

E l'equazione di chiusura esplicitata per i meccanismi suddetti è

$$f = z_1 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{Bmatrix} + z_2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{Bmatrix} + z_3 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 \end{Bmatrix} + z_4 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_4 \\ \sin \varphi_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Dopo l'analisi cinematica di posizione sia il quadrilatero articolato che il biella-manovella rispettano questa proprietà di chiusura della maglia.

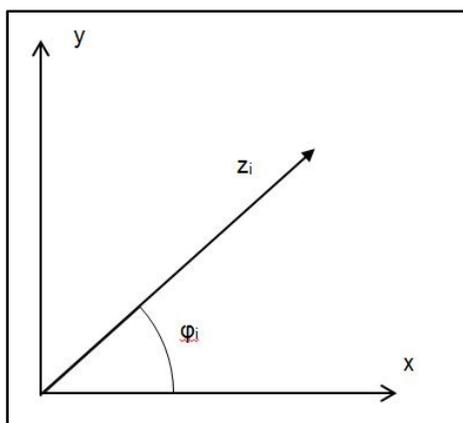


Figura 1.3: convenzione di misura degli angoli vettoriali indicati nelle ultime formule. Vedere anche la figura 5.2 per l'applicazione.

CAPITOLO 2

I meccanismi D-Drive

2.1. Caratteristiche comuni al quadrilatero articolato e al biella-manovella

I D-Drive sono degli speciali meccanismi i cui membri sono connessi tra loro attraverso solamente accoppiamenti cinematici rotoidali. Il loro scopo è quello di convertire un moto circolare in un moto rettilineo, senza che questo sia supportato da guide fisiche di scorrimento. In altre parole, almeno un punto di uno dei suoi membri deve disegnare un tratto rettilineo.

I meccanismi in questione hanno la struttura del quadrilatero articolato: il poligono di chiusura principale ne riassume vettorialmente il movente, il cedente, la biella e il telaio (figura 2.1).

Consideriamo il vettore che schematizza la biella, concepita inizialmente come un corpo di estensione infinita: il punto che descrive la traiettoria cercata, che sarà chiamato punto di biella, è da ricercarsi all'interno di questa estensione. La sua posizione deve essere espressa in funzione di quella delle coppie rotoidali della biella a movente e a cedente: è definito così un triangolo interessato rigidamente da moto di rototraslazione. Gli altri membri di collegamento tra il punto e gli accoppiamenti (gli altri due lati del triangolo di biella), sempre in forma vettoriale, saranno chiamati bielle secondarie al movente e al cedente.

Il legame tra il D-Drive e il biella-manovella, invece, è di tipo concettuale: si riflette nell'insieme movente-biella secondaria a movente, con il pattino rimosso, o meglio sostenuto nella sua corsa dall'altro insieme cedente-biella secondaria al cedente.

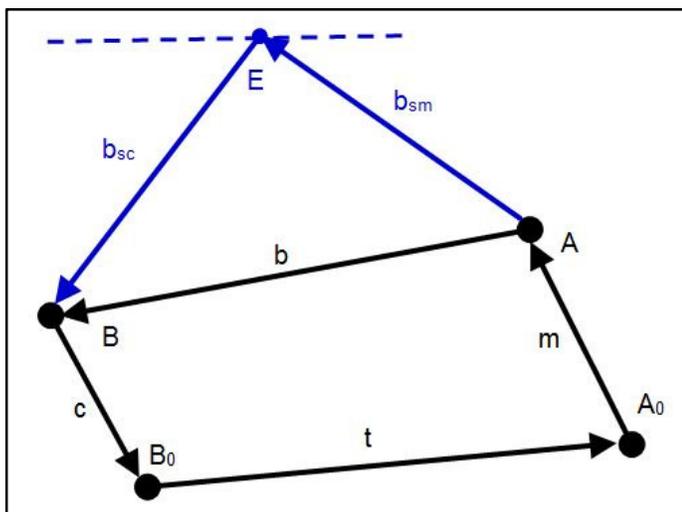


Figura 2.1: struttura di un meccanismo D-Drive. In blu sono rappresentate le bielle secondarie, in nero il quadrilatero articolato principale.

Nella seguente legenda sono raccolte le informazioni sui membri schematizzati e sui punti rappresentati nella figura 2.1:

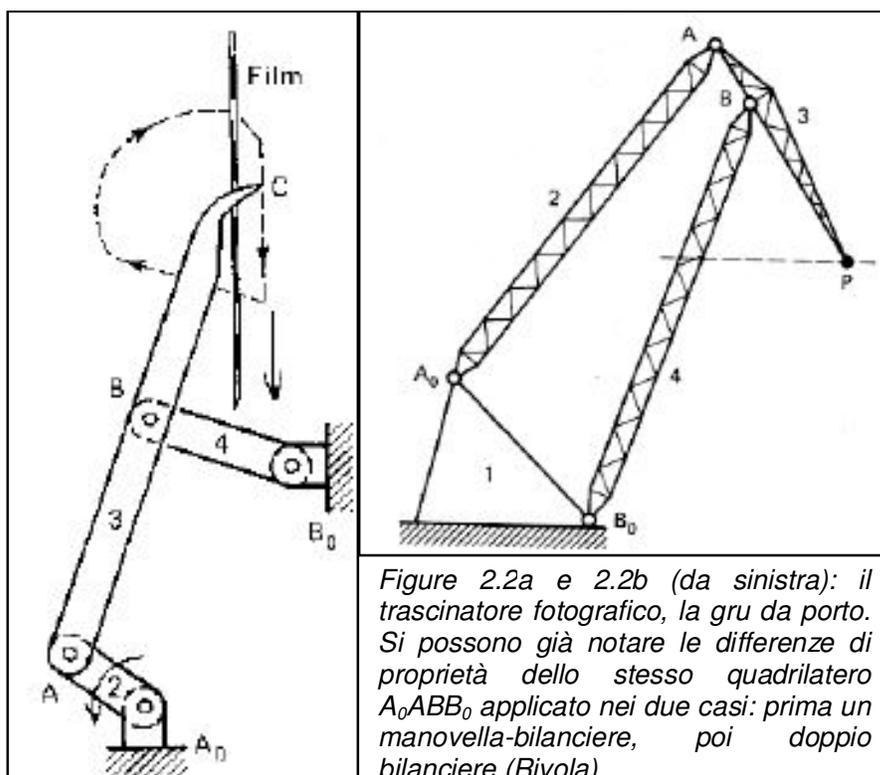
- Movente (m): collega le due coppie rotoidali A e B, con la prima a telaio;
- Biella (b): collega le due coppie rotoidali B e C a movente e a cedente;
- Cedente (c): collega le due coppie C e D, con la seconda a telaio;
- Telaio (t): supporto rigido, già discusso nel precedente capitolo;
- Biella secondaria al movente (b_{sm}): collega la coppia B al punto di biella E;
- Biella secondaria al cedente (b_{sc}): collega il punto di biella E alla coppia C.

2.2. Contesti applicativi attuali

Le applicazioni di questo meccanismo oggi non sono molto diffuse, ma ci sono due esempi in cui è interessante notare la sua funzione (figura 2.2).

Una prima applicazione si trova nelle macchine di trascinamento delle pellicole fotografiche: i suoi membri principali sono una manovella e un uncino solidale alla biella. La prima viene attivata subito dopo lo scatto e compie un giro a velocità costante. Durante la fase di lavoro l'uncino afferra la pellicola e la trascina per un breve tratto, per poi rilasciarla e proseguire fino al completo ritorno alla posizione iniziale.

Un'altra applicazione è quella delle gru da porto. Non sempre è possibile installare delle guide rettilinee orizzontali per lo scorrimento del gancio: la soluzione è quella di ricorrere nuovamente a un quadrilatero articolato.



CAPITOLO 3

Sintesi cinematica di un quadrilatero articolato

In questo capitolo sono introdotti i principali metodi di sintesi adottati per i quadrilateri articolati, facendo particolare attenzione al concetto di punto di precisione. Qui si parlerà di sintesi cinematica diretta, e dove richiesto si osserveranno i moti relativi.

Lo scopo della sintesi cinematica è quello di creare un meccanismo che, data una variabile cinematica in ingresso α e una variabile cinematica in uscita β , possa collegarle tramite una legge nella forma:

$$\beta = f(\alpha)$$

Le problematiche qui sorgenti sono collegate tra loro:

- il limitato numero di parametri gestibili;
- la presenza di un errore strutturale, o scostamento tra le variabili in uscita osservata e prevista.

La sintesi cinematica verrà condotta per punti di precisione. Il punto di precisione è una configurazione prefissata del meccanismo che vede l'annullamento dell'errore strutturale (Magnani, Ruggieri, p.276): tale condizione è posta dal progettista in alcune posizioni di interesse. L'errore strutturale si può presentare nella forma:

$$e(\alpha) = g(\alpha) - f(\alpha)$$

dove $g(\alpha)$ è la legge a cui effettivamente il meccanismo sintetizzato perviene.

Definiamo lo spostamento da un punto di precisione j -esima al successivo come:

$$\beta_{j+1} - \beta_j = f(\alpha_{j+1}) - f(\alpha_j)$$

Gli intervalli di variazione dei valori in uscita, al di fuori dei punti di precisione, presentano andamenti sconosciuti a priori per le problematiche suddette.

Le sintesi qui presentate si rifanno a costruzioni con riga e compasso e non richiedono il tracciamento di curve speciali. Questa semplificazione impone una drastica riduzione del numero di punti di precisione utilizzabili: tenendo presente che la curva più semplice passante per essi è un cerchio, tale non è definibile per più di tre punti nel piano. Si può concludere che le sintesi seguenti sono dette a tre punti di precisione; esistono però degli artifici che da più punti ne portano alcuni a sovrapporsi, ma in questa sede non saranno ulteriormente approfonditi.

Nella sintesi cinematica possiamo immaginare le entità degli spostamenti del cedente in funzione di quelli del movente, ma nulla si conosce a priori sull'effettiva natura dei

membri. Nei precedenti capitoli si è fatta attenzione a non usare i termini manovella o bilanciere proprio per questo motivo, che sarà trattato nel capitolo 4.

I metodi di sintesi più ricorrenti sono quelli per generazione di funzioni, generazione di traiettorie e generazione di moto piano.

3.1.Sintesi per generazione di funzioni

Il problema qui è correlare, per $j = 1 \dots n$, le rotazioni del movente ϕ_j e del cedente ψ_j . Le incognite sono le lunghezze dei membri e la posizione iniziale dell'asta movente. Si determina il meccanismo risolvendo prima nella posizione iniziale, poi in quelle corrispondenti ai vari punti di precisione. Occorre perciò precisare che, per semplicità di correlazione, le rotazioni suddette sono poste rispetto alla posizione angolare iniziale, anch'essa in certi casi incognita.

Si può facilmente notare che la soluzione è determinata a meno della scala del disegno: ciò significa che i tre membri mobili (movente, cedente, biella), a parità di rotazioni imposte, possono essere espressi con dei rapporti adimensionali rispetto al telaio, e proprio questi ultimi influenzano la soluzione.

L'errore strutturale si riflette nelle rotazioni delle due aste movente e cedente (A_0A e B_0B in figura 3.1) al di fuori dei punti di precisione.

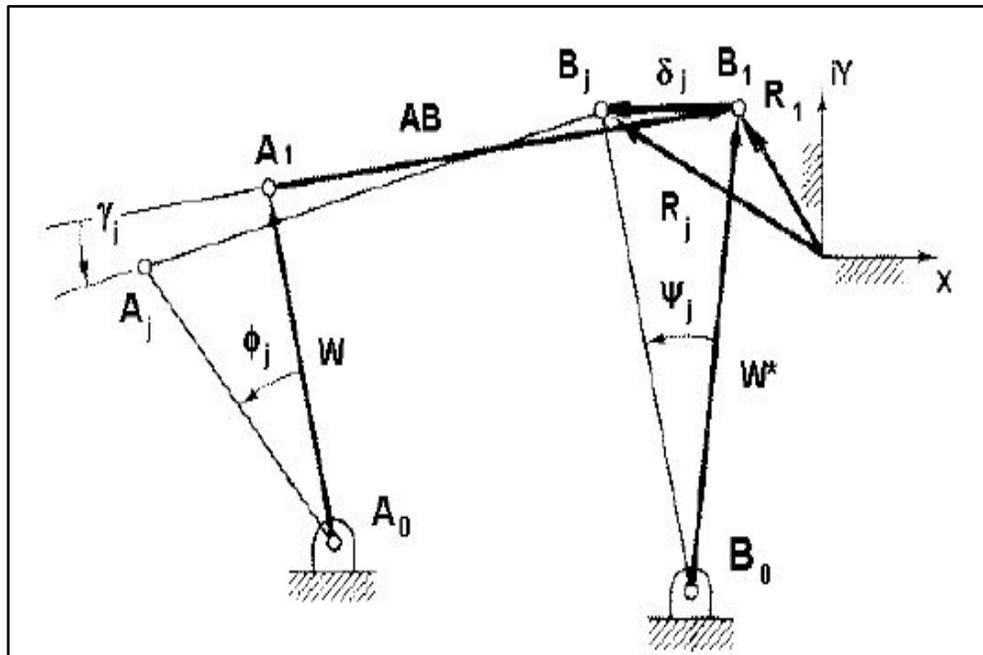


Figura 3.1: metodo di sintesi per generazione di funzioni. Si nota come una rotazione ψ_j del cedente è posta in funzione di quella del movente ϕ_j .

3.2.Sintesi per generazione di traiettorie

Qui il problema riguarda il punto di biella, che viene vincolato a percorrere una traiettoria nel piano, individuata a sua volta da alcuni punti che rappresentano di fatto le posizioni successive desiderate.

A differenza del caso precedente, a ciascuna rotazione rigida α_j dell'asta movente, dalla posizione iniziale, è associato uno spostamento ds_j nel piano. Per una sintesi a n punti di precisione possiamo aspettarci che il punto di biella (P in figura 3.2) passi esattamente nelle posizioni fissate sul sistema di riferimento assoluto.

L'errore strutturale si riscontra in quelle configurazioni dove la particolare rotazione del movente è diversa da quelle prefissate. La traiettoria è individuata solamente da alcuni punti nel piano, motivo per cui la conosciamo a livello qualitativo.

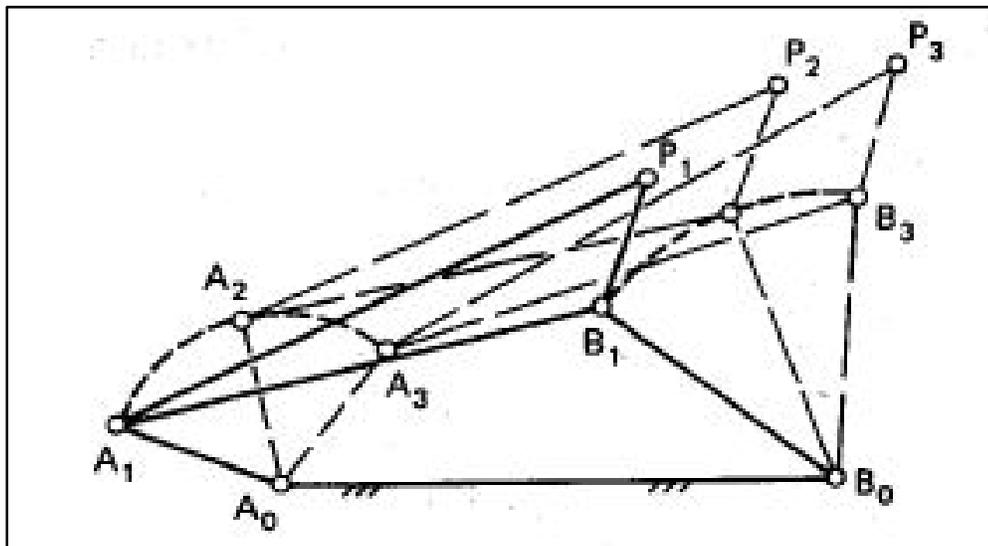


Figura 3.2: metodo di sintesi per generazione di traiettorie. Nelle prove che seguiranno il punto di biella P in figura sarà chiamato E , e col pedice j le sue posizioni successive, che il D-Drive vedrà allineate su un'unica retta comune.

3.3.Sintesi per generazione di moto piano

Con questo metodo ci si concentra su un corpo rigido, solidale alla biella del quadrilatero, che chiameremo corpo biella. Il problema ora è sintetizzare un meccanismo che lo porti in alcune posizioni prefissate sul piano.

Diversamente dai metodi precedenti, al posto delle rotazioni delle aste movente e cedente possono essere fissati degli altri parametri, e a seconda di essi considerare o meno il corpo infinitamente esteso a priori.

Questo metodo può essere considerato un'estensione del precedente, poiché è possibile vincolare il punto di biella a posizioni successive sul piano. Le rotazioni dei membri movente e cedente saranno invece le incognite del problema di sintesi.

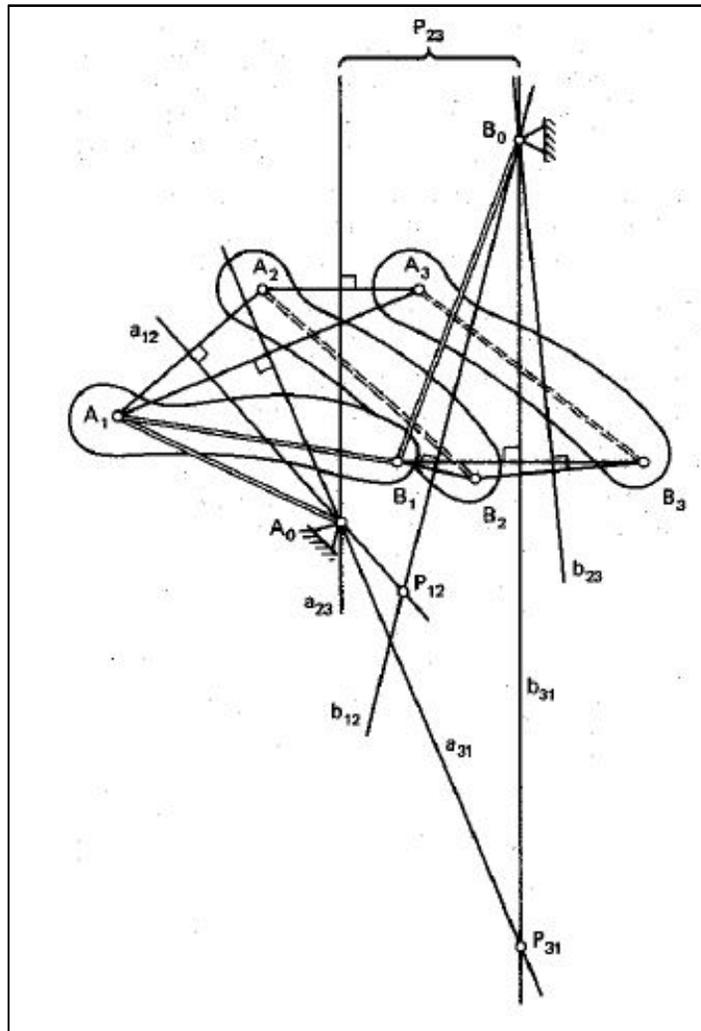


Figura 3.3: metodo di sintesi per generazione di moto piano. In questa figura si è tralasciato il punto di biella e focalizzata l'attenzione sul corpo biella, che può essere mosso a piacimento con le dovute restrizioni.

CAPITOLO 4

Applicazione ai meccanismi D-Drive

4.1. Considerazioni per il D-Drive

Nel prosieguo applicheremo i metodi migliori per la sintesi cinematica di un D-Drive che, come abbiamo già visto, ha la struttura di un quadrilatero articolato. Il motivo di questa scelta risiede nel fatto che si desidera un punto di biella, numericamente o geometricamente, vincolato a passare per determinate posizioni: la finalità di questo tipo di vincolo ottenere da esso un tratto rettilineo. I metodi in questione sono elencati di seguito:

- grafico di generazione di traiettorie;
- grafico di generazione di moto piano;
- analitico di generazione di traiettorie;
- analitico di generazione di moto piano.

Possiamo già affermare con certezza che il primo metodo si può dividere in due procedimenti, a seconda della scelta della coppia rotoidale nota. Gli ultimi due invece sono uguali da un punto di vista applicativo, quindi sarà proposta un'unica serie di prove.

In questo elaborato non saranno applicati i metodi di generazione di funzioni perché, dati i vincoli solo tra le rotazioni del movente e del cedente, e non essendoci adeguato controllo sul comportamento della biella, quest'ultima non vedrebbe necessariamente uno dei suoi punti descrivere un tratto rettilineo. Si potrebbero applicare a patto poi di cercare, su opportuni atlanti e a meno della scala del disegno, le traiettorie dei punti di biella desiderate. La scelta dei metodi delle traiettorie e del moto piano è dettata dall'esigenza di dimensionare, con maggiore facilità, dei meccanismi ragionevolmente grandi per le prestazioni e i movimenti richiesti: in altre parole si vuole creare una traiettoria attraverso il calcolo.

Allo scopo di facilitare la lettura delle figure della sintesi, le quali schematizzano i membri del D-Drive, si è scelto di dare le seguenti denominazioni:

- A_0A : asta movente di sintesi, la cui rotazione associata è α ;
- AB : asta della biella, associata alla rotazione β , i cui estremi sono delle coppie rotoidali;
- B_0B : asta cedente di sintesi, la cui rotazione associata è γ ;
- B_0A_0 : membro telaio, alle cui estremità abbiamo altre due coppie rotoidali;
- AE : biella secondaria al movente di sintesi;
- EB : biella secondaria al cedente di sintesi.

La presenza o meno del pedice 0 indica quindi che l'accoppiamento in questione è appartenente al telaio o alla biella. È importante sottolineare che le due bielle secondarie sono una schematizzazione vettoriale che evidenzia le dimensioni significative per la sintesi e l'analisi: esse collegano rigidamente le coppie rotoidali mobili al punto di biella, definendo così un triangolo con vertici A, B ed E interessato a moto di rototraslazione.

Per quanto riguarda i tre punti mobili, e in sede di sintesi, possiamo aggiungere un pedice j ad indicarne la posizione corrispondente al punto di precisione j-esimo. È facile constatare che le coppie A e B dovranno descrivere due circonferenze con centri rispettivamente in A_0 e B_0 , e passanti per i punti A_j e B_j . Avendo ipotizzato una sintesi a tre punti di precisione è naturale porre $j = 1, 2, 3$.

4.2. La regola di Grashof

Nella sintesi cinematica sono stabiliti a priori il movente e il cedente. Queste denominazioni sono state utilizzate finora per stabilire quale asta vede applicato il motore, ma a priori è possibile immaginare solo qualitativamente la natura dei due membri adiacenti al telaio. Si può tentare geometricamente di definirla imponendo, dove richieste, opportune rotazioni al movente o posizioni del corpo biella. Può capitare anche che i membri ottenuti possano violare le condizioni di esistenza di un quadrilatero e quindi del D-Drive.

La natura del movente e del cedente si determina attraverso l'analisi di mobilità, definibile come la determinazione, in funzione della geometria e del tipo degli accoppiamenti, del campo ammissibile per gli spostamenti (Ghigliazza, Galletti, 1986, p.28). In altre parole, si vuole determinare l'ampiezza dei movimenti permessi ai membri mobili ottenuti per sintesi (figura 4.1). Ecco quindi che entrano in gioco due nuove denominazioni:

- manovella: può compiere una rotazione di 2π rad e quindi sostenere un moto a regime costante;
- bilanciere: ha uno spostamento limitato a un range angolare ed è soggetto a moto alternato.

Una delle vie di analisi di mobilità più battute è l'applicazione della regola di Grashof, avente valore generale per ogni tipo di quadrilatero. Indicando con l_{max} e l_{min} le aste significative più lunga e più corta, e con l_1 e l_2 quelle intermedie, il quadrilatero presenta almeno una manovella se vale la disuguaglianza:

$$l_{max} + l_{min} \leq l_1 + l_2$$

Questa relazione non è più conveniente nel caso si voglia determinare quale membro rappresenta la manovella o si vuole stabilire l'effettiva esistenza del meccanismo. Essa deriva da altre condizioni logiche che non necessitano di ordinare crescentemente le lunghezze significative.

Riprendiamo le denominazioni movente (m), cedente (c), biella (b) e telaio (t) utilizzate finora. La prima condizione logica impone l'esistenza del quadrilatero solo nell'intersezione tra due insiemi:

$$b + c \geq |m - t| \cap m + t \geq |b - c|$$

Ponendo altre due condizioni logiche è possibile individuare i ruoli da assegnare a ciascun membro:

$$b + c \geq m + t \cap |m - t| \geq |b - c| \quad (a)$$

$$b + m \geq c + t \cap |c - t| \geq |b - m| \quad (b)$$

In realtà sappiamo già i ruoli che ricoprono i membri b e t. Per quanto riguarda i membri m e c possiamo avere i seguenti sistemi:

- doppia manovella: sono rispettate entrambe le condizioni a) e b);
- doppio bilanciante: sono violate entrambe le condizioni a) e b);
- manovella-bilanciante: solo una delle due condizioni è rispettata, con m manovella nel caso a), c manovella nel caso b).

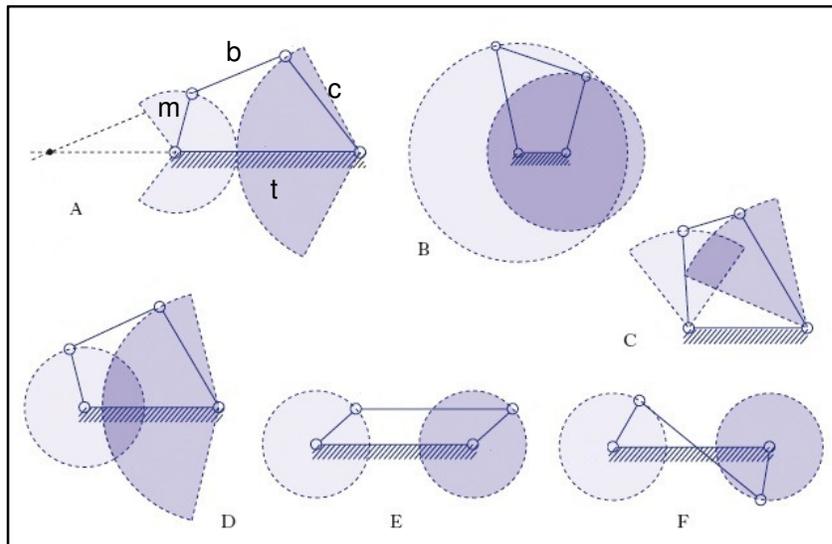


Figura 4.1: diversi casi del quadrilatero di Grashof:

- A) E C) doppio bilanciante
- B), E) e F) doppia manovella
- D) manovella-bilanciante

In colore più chiaro sono evidenziati i movimenti permessi al movente m, in scuro quelli al cedente c.

4.3.Precisazioni geometriche

Le prove di seguito presentate hanno differenti dati di input e di output. Ci sono però delle proprietà comuni a tutte le prove, come la denominazione, vista prima, delle coppie rotoidali in funzione del membro rappresentato.

In sede di sintesi si è deciso anche di porre degli spostamenti da un punto di precisione a un altro in modo che quello corrispondente del punto di biella sia uguale per tutte le prove; questa restrizione aiuta il confronto tra le traiettorie effettivamente tracciate dal suddetto punto, e ciò che varia nell'applicazione dello stesso metodo sono le rotazioni o le posizioni angolari. Inoltre il D-Drive è ottenuto a meno della scala del disegno, semplificando di conseguenza anche la comprensione delle sue dimensioni rispetto alla prestazione desiderata. Infine si è studiata una posizione relativa tra i membri in modo che le traiettorie previste siano parallele all'asse x.

Saranno poste, a seconda della formulazione del problema, delle rotazioni al movente α_j , delle rotazioni al cedente γ_j , degli spostamenti ds_j e delle posizioni successive del punto di biella E_j . La sintesi, vale la pena ricordarlo, viene eseguita a tre punti di precisione per la semplicità delle curve tracciabili, e le suddette variazioni sono considerate rispetto al punto di precisione iniziale.

4.4.Metodo della generazione grafica di traiettorie – coppia rotoidale tra cedente e telaio nota

Questo metodo viene utilizzato quando si desidera che il punto di biella descriva una traiettoria individuata da tre posizioni successive, stabilite a priori nel sistema di riferimento del telaio. Di quest'ultimo, in determinate situazioni, sono note la lunghezza e la fase, in funzione delle quali calcolare le coordinate relative tra le due coppie rotoidali a pedice zero.

Un aspetto da considerare è la teoria dei moti relativi: individuando dei membri mobili strategici, siano posti degli osservatori ad essi solidali, ciascuno con una propria percezione del movimento del punto di biella. Tale punto occupa perciò posizioni successive differenti a seconda del membro su cui poniamo l'osservatore.

Applicato alla sintesi di un D-Drive, il problema impone che i punti E_j siano allineati nel piano e che il punto di partenza sia uno dei due estremi. Il modo più semplice di porre questa condizione è la creazione di vettori, di lunghezze ds_j strettamente crescenti, con lo stesso punto di partenza e la stessa fase. Avendo a che fare con la sintesi a tre punti di precisione per $j = 1$ è posto $ds_j = 0$: si ha così la coincidenza tra il suddetto punto di partenza e il punto di arrivo del primo vettore. Anche le rotazioni α_j richieste al movente devono rispettare questa restrizione: infatti, corrispondendo a ciascuna di esse uno spostamento ds_j , è lecito aspettarsi $\alpha_1 = 0$. In questo modo è espresso più chiaramente

un particolare spostamento ds_j relativo alla posizione iniziale e se ne guadagna in semplicità implementativa.

4.4.1. Dati di input:

- posizioni successive del punto di biella;
- rotazioni del movente di sintesi;
- posizione della coppia rotoidale del movente a telaio;
- posizione della coppia rotoidale del cedente a telaio.

| Dati di input | Prova 1 | | | Prova 2 | | | Prova 3 | | |
|--------------------------|---------|------|----|---------|----|-----|---------|------|-----|
| Punto A_0 [m] | 0 | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | |
| Punto B_0 [m] | 2.5 | 1 | | -1 | -1 | | -2 | -1.5 | |
| Punto E_0 [m] | 1 | -0.5 | | -1 | 1 | | -2 | 0.5 | |
| Direzione γ_d [°] | 180 | | | 180 | | | 180 | | |
| Spostamenti ds_j [m] | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| Rotazioni α_j [°] | 0 | 30 | 60 | 0 | 75 | 150 | 0 | 80 | 180 |

Tabella 4.1: dati di input delle prove di sintesi a generazione grafica di traiettorie, con posizione della coppia rotoidale cedente-telaio nota. Ogni riga vede indicata la propria unità di misura.

4.4.2. Dati di output:

- lunghezze dei membri fondamentali del quadrilatero movente, biella, cedente e telaio;
- posizione relativa tra la biella e il punto di biella, e di conseguenza le lunghezze delle bielle secondarie.

4.4.3. Inserimento dei dati

- Punto di biella E : con la suddetta regola vettoriale potremo chiamare E_0 la posizione iniziale del punto di biella, porre una fase γ_r e lunghezze ds_j strettamente crescenti. I punti di arrivo dei tre vettori saranno E_1 , E_2 e E_3 , con $E_1 \equiv E_0$, ovvero le posizioni successive del punto di biella.
- Coppie rotoidali a telaio: chiamiamo A_0 quella del movente, B_0 quella del cedente. Ricordiamo che questa è la traduzione geometrica delle proprietà del telaio.
- Rotazioni del movente α_j : altro non sono che le rotazioni relative allo spostamento dalla posizione E_0 alla posizione E_j , quindi anch'esse strettamente crescenti in valore assoluto. Il senso di rotazione richiesto è determinato dal segno, uguale per tutte le α_j , posto positivo e antiorario in questo elaborato.

4.4.4. Svolgimento

- Moto relativo biella-movente: un osservatore solidale al movente A_0A , di lunghezza costante, vedrebbe il punto di biella E descrivere una circonferenza in senso

rotativo opposto a quello impartito allo stesso movente. Per $j = 1, 2, 3$ colleghiamo perciò il punto E_j con il punto A_0 , assumendo quest'ultimo come polo rotativo: il vettore A_0E_j , ruotato quindi di un angolo $-\alpha_j$, individuerà il punto E_{Pj} , nel piano di riferimento del telaio, ovvero E_j come lo percepirebbe il suddetto osservatore. Avremo anche $E_{P1} \equiv E_1$.

- Coppia rotoidale movente-biella: la circonferenza passante per i punti E_{Pj} ha un centro coincidente con un punto A_j . Tale denominazione è assegnata alla coppia rotoidale in questione nella posizione relativa al punto E_j , e la sua distanza dalla coppia A_0 determina la lunghezza del movente. Qui è posto $j = 1$ perché la soluzione trovata è relativa alla posizione iniziale. Le posizioni A_j successive si calcolano facilmente ruotando A_0A_1 di un angolo α_j .
- Biella secondaria al movente: la sua lunghezza corrisponde alla distanza A_jE_j .
- Moto relativo cedente-telaio: il punto B_0 è fisso sul telaio, ma se osservato dalla biella descrive anch'esso una circonferenza. Sempre per $j = 1, 2, 3$ tracciamo i triangoli con vertici A_j, E_j e B_0 e li riportiamo rigidamente sul segmento A_1E_1 , ricavando così i punti B_{0Pj} . Essi sono le posizioni successive, sul sistema di riferimento del telaio, viste dalla biella. Anche qui si può verificare che $B_{0P1} \equiv B_0$.
- Coppia rotoidale cedente-biella: la circonferenza passante per i punti B_{0Pj} ha un centro coincidente con un punto B_j . Tale denominazione è assegnata alla coppia rotoidale in questione nella posizione relativa al punto E_j , e la sua distanza dalla coppia B_0 , denominata B_0B_j , determina la lunghezza del cedente. Qui è posto $j = 1$ perché la soluzione trovata è relativa alla posizione iniziale. Le posizioni B_j successive si calcolano per trasporto rigido del triangolo $A_1E_1B_1$ sul lato A_jE_j .

4.4.5. Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi

| Membro | Prova 1 | Prova 2 | Prova 3 |
|----------------------|-------------------|------------------|------------------|
| Movente A_0A | 0.88 | 0.98 | 1.05 |
| Biella AB | 1.09 | 1.41 | 2.08 |
| Cedente B_0B | 2.04 | 0.9 | 1.72 |
| Telaio A_0B_0 | 2.69 | 1.41 | 2.5 |
| Biella secondaria AE | 1.38 | 2.19 | 3.05 |
| Biella secondaria EB | 2.37 | 2.01 | 1.12 |
| Sistema di Grashof | Doppio bilanciato | Manovella B_0B | Manovella A_0A |

Tabella 4.2: valori di output delle rispettive prove. Tutte le lunghezze sono riportate in metri e arrotondate alla seconda cifra decimale. L'ultima riga segnala invece la presenza di un'eventuale manovella.

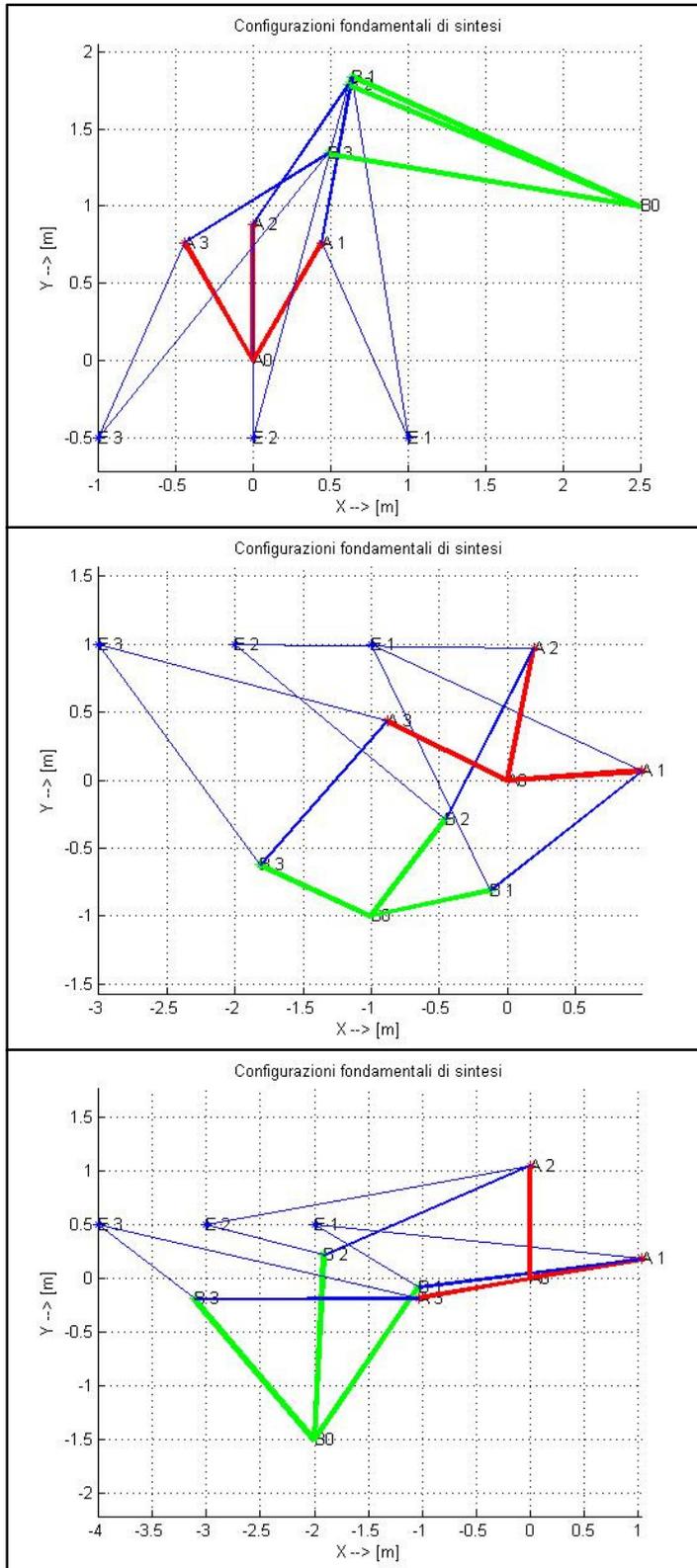


Figure 4.2, 4.3 e 4.4 (dall'alto): meccanismi risolvanti, ottenuti con la sintesi per generazione grafica di traiettorie a coppia rotoidale cedente-telaio nota, nelle configurazioni corrispondenti ai tre punti di precisione. Sono presentate, nell'ordine, le prove 1, 2 e 3. In rosso è evidenziato il movente, in verde il cedente, in blu il triangolo significativo del corpo biella (le bielle secondarie con spessore minore).

4.5. Metodo della generazione grafica di traiettorie – coppia rotoidale tra cedente e biella nota

Come il precedente metodo, questo viene utilizzato quando si desidera che il punto di biella descriva una traiettoria individuata da tre posizioni successive, stabilite a priori nel sistema di riferimento del telaio. Differisce dal metodo precedente per il semplice fatto che ora sono dati tutti e tre i punti notevoli della biella: le coppie rotoidali A e B e il punto di biella E. La coppia rotoidale cedente-biella è vincolata a essere solidale alla biella secondaria al movente, e prevedibilmente percorre un arco di cerchio.

4.5.1. Dati di input:

- posizioni successive del punto di biella;
- rotazioni del movente di sintesi;
- posizione della coppia rotoidale del movente a telaio;
- posizione iniziale della coppia rotoidale cedente-biella di sintesi.

| Dati di input | Prova 1 | | | Prova 2 | | | Prova 3 | | |
|--------------------------|---------|------|----|---------|-----|-----|---------|------|-----|
| Punto A_0 [m] | 0 | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | |
| Punto B_1 [m] | 1 | -1.5 | | -2 | 1.5 | | 0 | -1.5 | |
| Punto E_0 [m] | 1 | -0.5 | | -1 | 1 | | -1 | 0.5 | |
| Direzione γ_d [°] | 180 | | | 180 | | | 180 | | |
| Spostamenti ds_j [m] | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| Rotazioni α_j [°] | 0 | 30 | 60 | 0 | 75 | 150 | 0 | 80 | 180 |

Tabella 4.3: dati di input delle prove di sintesi a generazione grafica di traiettorie, con posizione della coppia rotoidale cedente-biella nota. Ogni riga vede indicata la propria unità di misura.

4.5.2. Dati di output:

- lunghezze dei membri fondamentali del quadrilatero movente, biella, cedente e telaio;
- posizione relativa tra la biella e il punto di biella, e di conseguenza le lunghezze delle bielle secondarie.

4.5.3. Inserimento dei dati

- Punto di biella E: rimane invariato quanto detto nel paragrafo 4.4.3.
- Coppia rotoidale a telaio: chiamiamo A_0 quella del movente e B_0 quella del cedente, ora incognita.
- Coppia rotoidale cedente-biella di sintesi: la si pone ad arbitrio, nella sua posizione iniziale.
- Rotazioni del movente α_j : rimane invariato quanto detto nel paragrafo 4.4.3

4.5.4.Svolgimento

- Moto relativo biella-movente: un osservatore solidale al movente A_0A , di lunghezza costante, vedrebbe il punto di biella E descrivere una circonferenza in senso rotativo opposto a quello impartito allo stesso movente. Per $j = 1, 2, 3$ colleghiamo perciò il punto E_j con il punto A_0 , assumendo quest'ultimo come polo rotativo: il vettore A_0E_j , ruotato quindi di un angolo $-\alpha_j$, individuerà il punto E_{Pj} , nel piano di riferimento del telaio, come lo percepirebbe il suddetto osservatore. Avremo anche $E_{P1} \equiv E_1$.
- Coppia rotoidale movente-biella A: la circonferenza passante per i punti E_{Pj} ha un centro coincidente con un punto A_j . Tale denominazione è assegnata alla coppia rotoidale in questione nella posizione relativa al punto E_j , e la sua distanza dalla coppia A_0 determina la lunghezza del movente. Qui è posto $j = 1$ perché la soluzione trovata è relativa alla posizione iniziale. Le posizioni A_j successive si calcolano facilmente ruotando A_0A_1 di un angolo α_j .
- Biella secondaria al movente: la sua lunghezza corrisponde alla distanza A_jE_j .
- Moto della biella: qui cominciano le differenze più evidenti rispetto al metodo precedente. La coppia rotoidale B è solidale alla biella AE . Essendo nota la sua posizione a $j = 1$, detta quindi B_1 , si va a tracciare un triangolo $A_1E_1B_1$, che per trasporto di rototraslazione vede il segmento A_1E_1 spostarsi su A_jE_j e individuare i punti B_j successivi.
- Coppia rotoidale cedente-telaio: i punti B_j così trovati individuano una circonferenza con centro in B_0 , coincidente con la seconda coppia rotoidale a telaio. Di quest'ultimo ora è facile risalire alle proprietà, così come possiamo determinare anche la lunghezza del cedente B_0B .

4.5.5.Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi

| Membro | Prova 1 | Prova 2 | Prova 3 |
|------------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| Movente A_0A | 0.88 | 0.98 | 1.07 |
| Biella AB | 2.33 | 3.31 | 1.99 |
| Cedente B_0B | 11.68 | 1.69 | 1.21 |
| Telaio A_0B_0 | 10.23 | 4.17 | 2.06 |
| Biella secondaria AE | 1.38 | 2.19 | 2.07 |
| Biella secondaria EB | 1 | 1.12 | 2.24 |
| Sistema di Grashof | Doppio bilanciere | Doppio bilanciere | Manovella A_0A |

Tabella 4.4: valori di output delle rispettive prove. Tutte le lunghezze sono riportate in metri e arrotondate alla seconda cifra decimale. L'ultima riga segnala invece la presenza di un'eventuale manovella.

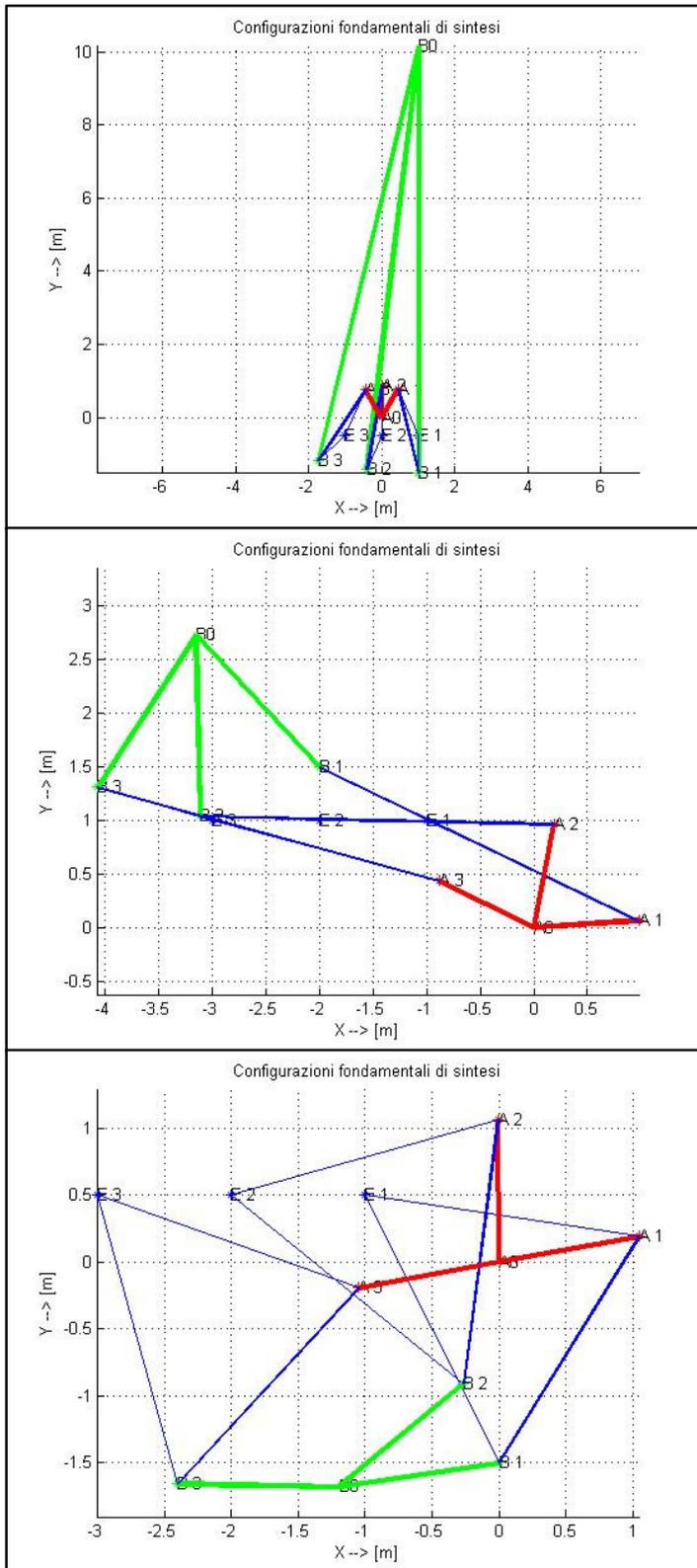


Figure 4.5, 4.6 e 4.7 (dall'alto): meccanismi risolvanti, ottenuti con la sintesi per generazione grafica di traiettorie a coppia rotoidale cedente-biella nota, nelle configurazioni corrispondenti ai tre punti di precisione. Sono presentate, nell'ordine, le prove 1, 2 e 3. In rosso è evidenziato il movente, in verde il cedente, in blu il triangolo significativo del corpo biella (le bielle secondarie con spessore minore).

4.6. Metodo della generazione grafica di moto piano

Il metodo di sintesi qui presentato viene adottato quando si vuole portare un corpo rigido in tre posizioni prefissate. Tale corpo è la biella di un quadrilatero articolato, e di essa i punti fondamentali che ci interessano sono tre:

- la coppia rotoidale biella-movente A;
- la coppia rotoidale biella-cedente B;
- il punto di biella E.

Questi tre punti sono i vertici di un triangolo interessato da moto di rototraslazione: per definirlo sono sufficienti due lati e un angolo tra loro compreso (le due bielle secondarie e l'angolo al punto di biella), costanti nel tempo.

L'applicazione al caso del D-Drive richiede l'allineamento delle posizioni successive del punto di biella, mentre quelle delle due coppie rotoidali sono scelte ad arbitrio. Queste ultime sono prevedibilmente appartenenti due archi di cerchio, in modo da avere un controllo, almeno parziale, sia sulle dimensioni del movente e del cedente che sulle proprietà del telaio.

4.6.1. Dati di input:

- posizioni successive del punto di biella;
- lunghezze delle bielle secondarie al movente e al cedente;
- posizioni angolari successive della biella secondaria al movente;
- angolo al vertice del punto di biella.

| Dati di input | Prova 1 | | | Prova 2 | | | Prova 3 | | |
|-------------------------------------|---------|----|----|---------|----|----|---------|-----|----|
| Punto E_0 [m] | 0 | 2 | | 0 | 2 | | 0 | 2 | |
| Biella secondaria EA [m] | 2 | | | 2.5 | | | 3 | | |
| Biella secondaria EB [m] | 2.8 | | | 3 | | | 2.5 | | |
| Differenza angolare β_E [°] | 15 | | | 10 | | | 5 | | |
| Spostamenti ds_j [m] | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| Direzione γ_d [°] | 0 | | | 0 | | | 0 | | |
| Fasi biella EA φ_{EA_j} [°] | 10 | 35 | 65 | 5 | 30 | 65 | -5 | -10 | -5 |

Tabella 4.5: dati di input delle prove di sintesi a generazione grafica di moto piano. Ogni riga vede indicata la propria unità di misura.

4.6.2. Dati di output:

- lunghezze dei membri fondamentali del quadrilatero movente, cedente, telaio;
- Posizioni coppie rotoidali a telaio.

4.6.3. Inserimento dei dati

- Punto di biella E: rimane invariato quanto detto nel paragrafo 4.4.3.

- Coppia rotoidale movente-biella A: noti il modulo e le posizioni angolari successive φ_{EA_j} della biella secondaria al movente si traccia, per $j = 1, 2, 3$, il segmento partente da E_j e con termine in A_j .
- Coppia rotoidale cedente-biella B: noto il modulo della biella secondaria al cedente, si aggiunge l'angolo β_E si aggiunge l'angolo β_E alle precedenti fasi φ_{EA_j} e si ripete quanto fatto al punto precedente.

4.6.4.Svolgimento

Per una corretta valutazione si osservi che il lato A_jB_j , ovvero la biella, abbia lunghezza costante per ogni valore di j .

A questo punto è semplice determinare le posizioni delle coppie rotoidali a telaio: i punti A_j descrivono un arco di cerchio il cui centro è la coppia A_0 del movente. Lo stesso discorso vale per determinare B_0 del cedente dati i punti B_j . Inutile ora sottolineare che sono facilmente ricavabili le lunghezze del telaio A_0B_0 , del movente A_0A e cedente B_0B . Il centro di una circonferenza noti tre punti si determina facilmente con la seguente formula (sostituendo C prima con A e poi con B):

$$\begin{Bmatrix} x_{C0} \\ y_{C0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_{C1} - x_{C2}) & 2(y_{C1} - y_{C2}) \\ 2(x_{C1} - x_{C3}) & 2(y_{C1} - y_{C3}) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} x_{C1}^2 - x_{C2}^2 + y_{C1}^2 - y_{C2}^2 \\ x_{C1}^2 - x_{C3}^2 + y_{C1}^2 - y_{C3}^2 \end{Bmatrix}$$

4.6.5.Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi

| Membro | Prova 1 | Prova 2 | Prova 3 |
|----------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|
| Movente A_0A | 2.22 | 1.68 | 2.05 |
| Biella AB | 1.01 | 0.69 | 0.55 |
| Cedente B_0B | 1.17 | 1.44 | 2.4 |
| Telaio A_0B_0 | 1.02 | 0.39 | 0.81 |
| Biella secondaria AE | 2 | 2.5 | 3 |
| Biella secondaria EB | 2.8 | 3 | 2.5 |
| Sistema di Grashof | Doppio bilanciare | Indifferenza cinematica | Doppio bilanciare |

Tabella 4.6: valori di output delle rispettive prove. Tutte le lunghezze sono riportate in metri e arrotondate alla seconda cifra decimale. L'ultima riga specifica invece la presenza di un'eventuale manovella.

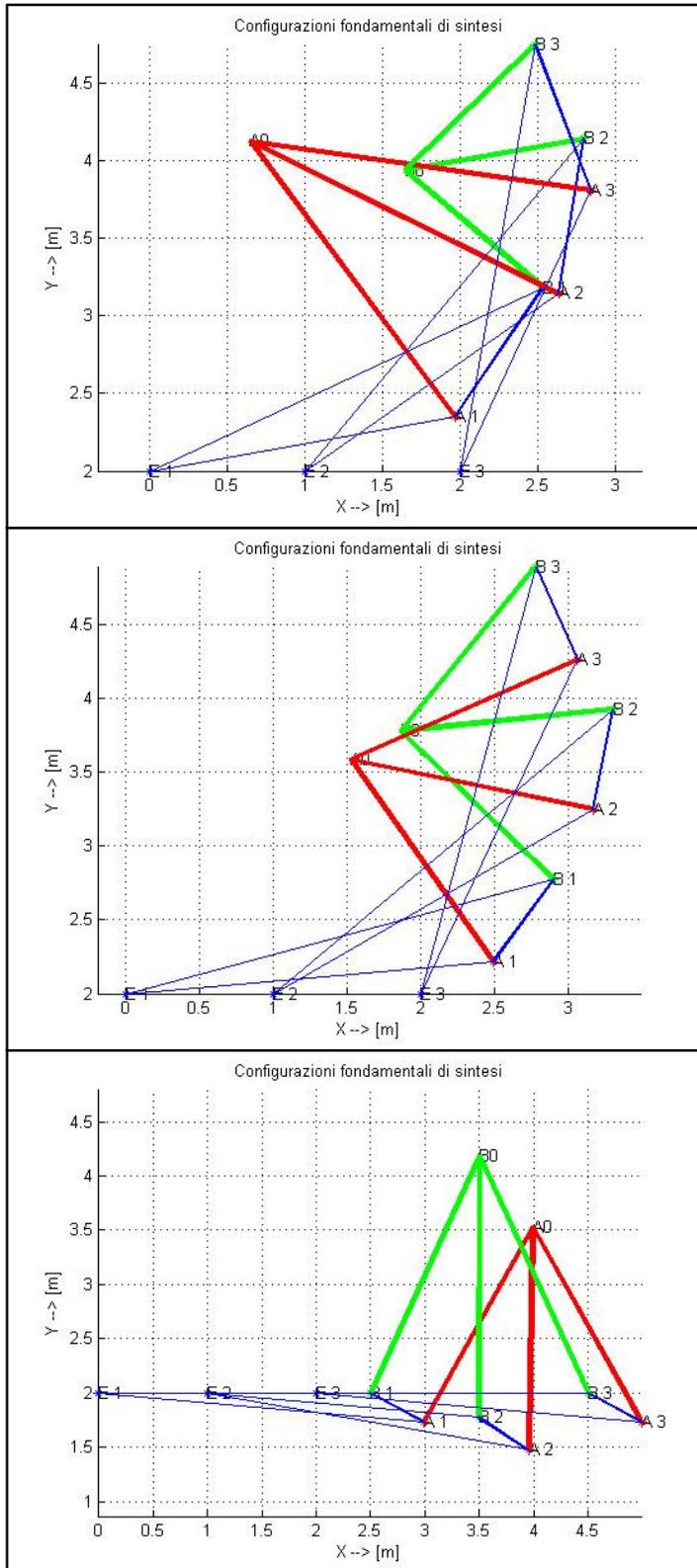


Figure 4.8, 4.9 e 4.10: meccanismi risolvanti, ottenuti con la sintesi per generazione grafica di moto piano, nelle configurazioni corrispondenti ai tre punti di precisione. Sono presentate, nell'ordine, le prove 1, 2 e 3. In rosso è evidenziato il movente, in verde il cedente, in blu il triangolo significativo del corpo biella (le bielle secondarie con spessore minore).

4.7. Metodo della generazione analitica di traiettorie

Questo metodo è indicato quando non si pongono vincoli né sulle posizioni delle coppie rotoidali a telaio né sulla quota della traiettoria rettilinea da ottenere. I membri sono schematizzati sotto forma di numeri complessi: per un quadrilatero articolato le loro forme esponenziali vedono variare nel tempo solo la fase, non il modulo. Perché la traiettoria richiesta sia rettilinea, e quindi le posizioni successive del punto di biella allineate, occorre che i tre spostamenti abbiano la stessa fase.

Si fissano le rotazioni α_j del movente e γ_j del cedente. Lasciando incognite le rotazioni β_j della biella si ottiene la duplice infinità di meccanismi risolvanti. Per sintetizzare analiticamente si ricorre alle equazioni di congruenza degli spostamenti, ricavate detraendo i termini relativi alla posizione iniziale a quelli relativi alla posizione j -esima. In questo modo spariscono i membri fissi e si lavora solo con quelli mobili. Suddividiamo perciò il metodo in due stadi, di seguito presentati.

4.7.1. Dati di input:

- rotazioni del movente;
- rotazioni della biella;
- rotazioni del cedente;
- spostamenti del punto di biella.

| Dati di input | Prova 1 | | | Prova 2 | | | Prova 3 | | |
|--------------------------|---------|-----|-----|---------|-----|-----|---------|-----|-----|
| Rotazioni α_j [°] | 0 | 30 | 60 | 0 | 75 | 150 | 0 | 80 | 180 |
| Rotazioni β_j [°] | 0 | -26 | -48 | 0 | -15 | -20 | 0 | -15 | -35 |
| Rotazioni γ_j [°] | 0 | 35 | 65 | 0 | 20 | 50 | 0 | 40 | 70 |
| Spostamenti d_{sj} [m] | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |

Tabella 4.7: dati di input per le prove di generazione analitica di traiettorie. Gli spostamenti sono indicati in forma complessa, con parte immaginaria nulla in quanto orizzontali nel piano.

4.7.2. Dati di output:

- lunghezze dei membri fondamentali;
- lunghezze delle bielle secondarie.

4.7.3. Primo stadio

Il meccanismo da sintetizzare è sul modello manovella-biella, i cui membri, denominati rispettivamente w_1 e w_2 , rispecchiano ora il movente di sintesi e la biella secondaria ad esso adiacente. L'equazione di congruenza qui impone che la differenza tra la somma fasoriale a una posizione j -esima e quella alla posizione iniziale equivalga allo spostamento corrispondente alla rotazione α_j del movente più quella β_j della biella. La forma in cui si presenta è la seguente:

$$w_1(e^{i\alpha_j} - 1) + w_2(e^{i\beta_j} - 1) = ds_j$$

Le incognite di questa equazione sono i numeri complessi w_1 e w_2 , il che rende lineare il problema. La sintesi a tre punti di precisione prevede un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} w_1(e^{i\alpha_1} - 1) + w_2(e^{i\beta_1} - 1) = ds_1 \\ w_1(e^{i\alpha_2} - 1) + w_2(e^{i\beta_2} - 1) = ds_2 \\ w_1(e^{i\alpha_3} - 1) + w_2(e^{i\beta_3} - 1) = ds_3 \end{cases}$$

La teoria dei sistemi lineari preclude l'esistenza di soluzioni quando il numero delle equazioni supera quello delle incognite. Ricordiamo però che per $j = 1$ le rotazioni α e β e lo spostamento ds sono nulli: la prima equazione risulta ridondante per scostamento tra due punti di precisione coincidenti, e il sistema può essere immediatamente risolto. Il procedimento si ripete per il cedente e la biella secondaria ad esso relativa, sostituendo perciò rispettivamente w_1 e w_2 con w_3 e w_4 . Si sostituiscano anche le rotazioni α_j del movete con quelle γ_j del cedente, per poi giungere a un altro sistema identico al precedente:

$$\begin{cases} w_3(e^{i\gamma_1} - 1) + w_4(e^{i\beta_1} - 1) = ds_1 \\ w_3(e^{i\gamma_2} - 1) + w_4(e^{i\beta_2} - 1) = ds_2 \\ w_3(e^{i\gamma_3} - 1) + w_4(e^{i\beta_3} - 1) = ds_3 \end{cases}$$

4.7.4. Secondo stadio

Per differenza fasoriale si calcolano la biella w_5 e il telaio w_6 , trascurati prima dalle equazioni di congruenza. Il meccanismo risolvente è ottenuto nella sua posizione iniziale: le fasi delle soluzioni rappresentano quindi le posizioni angolari iniziali di tutti i membri, i loro moduli le rispettive lunghezze:

$$w_5 = w_2 - w_4, \quad w_6 = w_1 + w_5 - w_3$$

Le soluzioni indicano solamente posizioni relative tra coppie rotoidali. Possiamo fissare ad esempio quella a telaio A_0 e determinare di conseguenza la coppia B_0 e la posizione iniziale del triangolo di biella ABE; con le suddette rotazioni si ricava il D-Drive risolvente nei restanti punti di precisione.

Nell'introduzione si era accennato al metodo della generazione analitica anche del moto piano. La differenza, solo concettuale, risiede nel fatto che sono note a priori le rotazioni β_j al posto delle α_j e delle γ_j , coerentemente con l'intenzione di spostare il corpo rigido di biella. I sistemi lineari risolventi sono formalmente identici, per questo è presentata un'unica serie di prove.

4.7.5. Risultati e rappresentazioni grafiche delle prove di sintesi

| Membro | Prova 1 | Prova 2 | Prova 3 |
|----------------------|-------------------|------------------|------------------|
| Movente A_0A | 0.94 | 0.54 | 0.18 |
| Biella AB | 0.19 | 2.33 | 0.84 |
| Cedente B_0B | 0.85 | 1.57 | 0.67 |
| Telaio A_0B_0 | 0.33 | 3.32 | 1.32 |
| Biella secondaria AE | 1.35 | 4.54 | 2.93 |
| Biella secondaria EB | 1.48 | 2.24 | 2.09 |
| Sistema di Grashof | Doppio bilanciere | Manovella A_0A | Manovella A_0A |

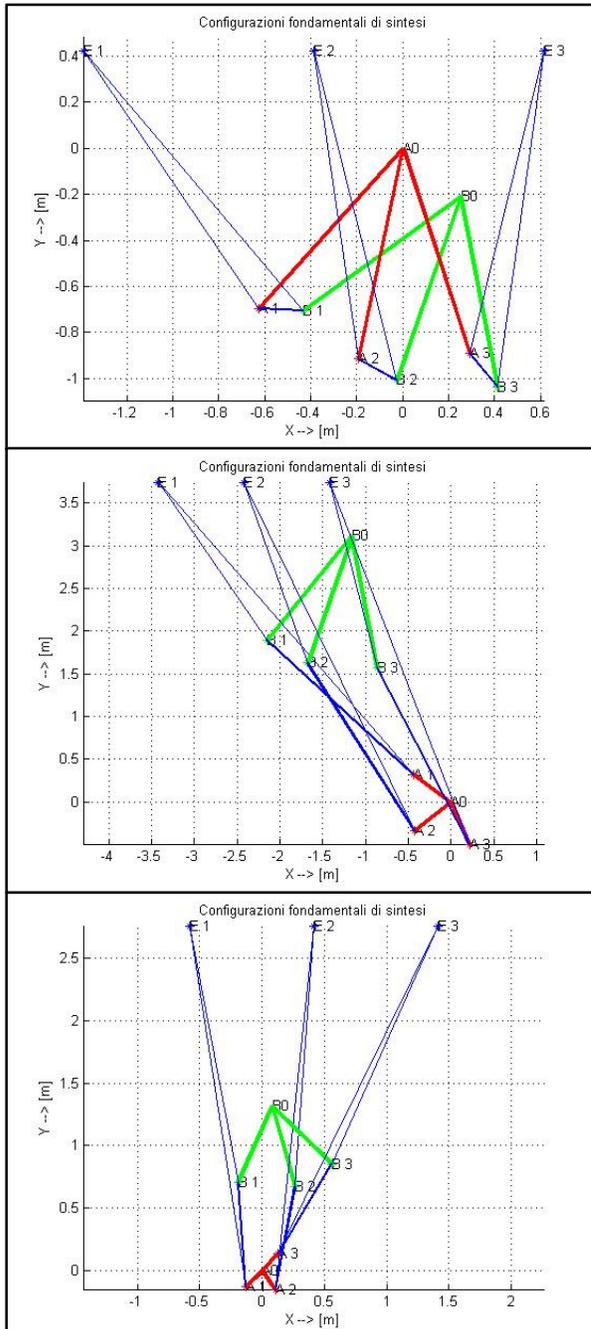


Tabella 4.8 (sopra): valori di output delle rispettive prove. Tutte le lunghezze sono riportate in metri e arrotondate alla seconda cifra decimale. L'ultima riga specifica invece la presenza di un'eventuale manovella.

Figura 4.11, 4.12 e 4.13 (a lato): configurazioni corrispondenti ai punti di precisione richiesti per la sintesi. Sono rappresentate rispettivamente le prove 1, 2 e 3 della sintesi per generazione analitica di traiettorie.

CAPITOLO 5

Analisi cinematica dei meccanismi D-Drive

In questo capitolo effettueremo l'analisi cinematica del meccanismo D-Drive ottenuto con la sintesi, ai fini di verificarne le prestazioni.

Nei precedenti capitoli abbiamo parlato di movente e cedente di sintesi, mentre ora parliamo di movente e un cedente di analisi: il motivo di questa specificazione risiede nel fatto che, dopo aver analizzato la mobilità del meccanismo, il progettista può decidere se invertire o meno i ruoli di movente e cedente dalla sintesi all'analisi. Tale inversione, in questa sede, non sarà effettuata per nessuna delle prove presentate. Le denominazioni degli accoppiamenti e delle lunghezze significative varieranno secondo quanto illustrato nella figura 5.1.

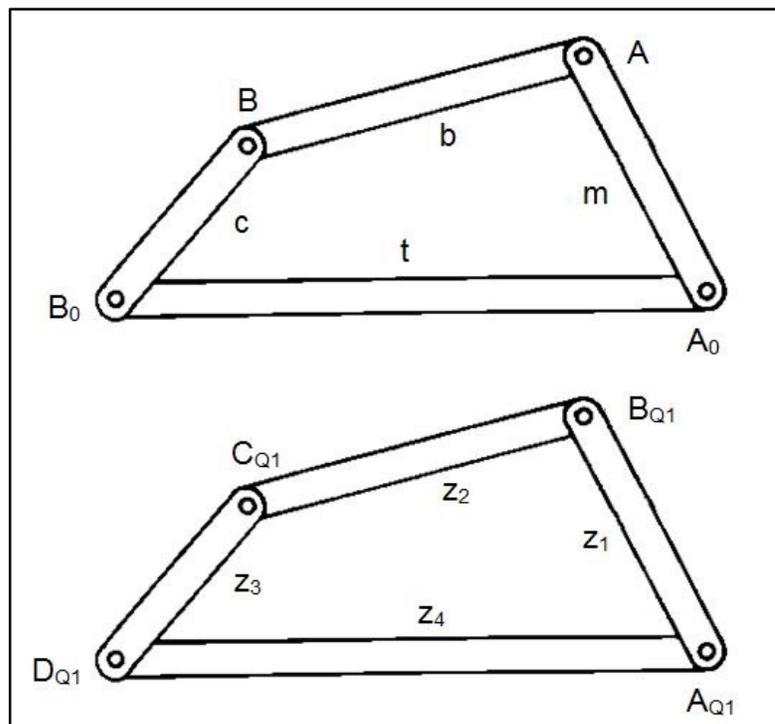
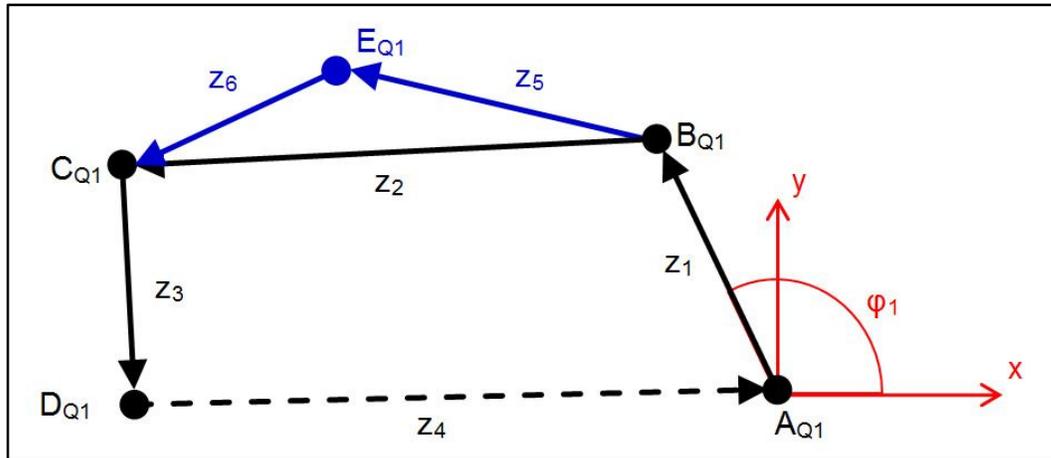


Figura 5.1: passaggio dalle denominazioni di sintesi a quelle di analisi in un quadrilatero generico

5.1. Analisi cinematica di posizione

Nel capitolo 1 erano stati introdotti i concetti di schema cinematico e poligono di chiusura. Giovagnoni e Rossi (2002, p. 29) affermano che lo schema cinematico contiene solamente le informazioni indispensabili per l'analisi cinematica. Nel caso del D-Drive tali dimensioni sono illustrate nella figura 5.2, mentre la tabella sottostante ne discute la variabilità nel tempo.



| Membro di analisi | Modulo | Fase | $z_i(t)$ | $\varphi_i(t)$ |
|------------------------------|--------|-------------|----------|------------------------|
| Movente | z_1 | φ_1 | costante | variabile |
| Biella | z_2 | φ_2 | costante | variabile |
| Cedente | z_3 | φ_3 | costante | variabile |
| Telaio | z_4 | φ_4 | costante | costante |
| Biella secondaria al movente | z_5 | φ_5 | costante | solidale a φ_2 |
| Biella secondaria al cedente | z_6 | φ_6 | costante | solidale a φ_2 |

Figura 5.2: poligoni di chiusura del D-Drive da analizzare. In rosso è ripresa la convenzione di misura delle fasi, rappresentata sul vettore che fungerà da coordinata libera.

Tabella 5.1: comportamento delle dimensioni significative dei membri rispetto al tempo.

In generale tutte quelle proprietà del poligono di chiusura che, dopo un'attenta osservazione del meccanismo, sappiamo a priori essere costanti nel tempo sono note o ricavabili dalle informazioni disponibili, come ad esempio le posizioni degli accoppiamenti cinematici A_{Q1} e D_{Q1}.

Questi dati però non sono sufficienti a definire la posizione del meccanismo: la presenza di un grado di libertà rende necessaria la scelta di una coordinata libera. In tutte le prove qui presentate chiameremo φ₁ la coordinata libera di posizione.

Osserviamo l'equazione di chiusura del quadrilatero articolato vista nel primo capitolo:

$$f = z_1 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{Bmatrix} + z_2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{Bmatrix} + z_3 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 \end{Bmatrix} + z_4 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_4 \\ \sin \varphi_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Si tratta formalmente di un sistema di due equazioni, proiettate sugli assi cartesiani, nelle due incognite φ₂ e φ₃, a loro volta argomenti di funzioni trigonometriche. La conseguente perdita di linearità del problema contribuirà a dare soluzioni inesistenti, uniche o molteplici.

Esistono perciò due tipi di modalità per svolgere l'analisi di posizione:

- Numeriche: richiedono l'inserimento di valori di primo tentativo per poi giungere a delle soluzioni sensate dopo alcune iterazioni. Dato il loro rischio di convergenza verso valori indesiderati, o peggio divergenza, non si andrà oltre alla citazione di quella più comunemente utilizzata, ovvero quella di Newton-Raphson;
- Geometriche: suddividono il poligono di in più diadi o triadi risolvibili tramite le regole della trigonometria.

Il procedimento qui adottato sarà di tipo geometrico, opportunamente rivisto con qualche accorgimento che lo rende applicabile univocamente a infiniti casi.

La soluzione della diade A_{Q1} - B_{Q1} - D_{Q1} è immediata una volta note le posizioni di questi tre punti:

$$\begin{cases} x_{A_{Q1}} - x_{D_{Q1}} \\ y_{A_{Q1}} - y_{D_{Q1}} \end{cases} = z_4 \begin{cases} \cos \varphi_4 \\ \sin \varphi_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{B_{Q1}} - x_{A_{Q1}} \\ y_{B_{Q1}} - y_{A_{Q1}} \end{cases} = z_1 \begin{cases} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{cases}$$

Identifichiamo perciò il primo poligono di chiusura con i vettori z_1 , z_4 e z_{BD} . Quest'ultimo vettore ha modulo e fase di immediata determinazione:

$$z_{BD} = \sqrt{(y_{D_{Q1}} - y_{B_{Q1}})^2 + (x_{D_{Q1}} - x_{B_{Q1}})^2},$$

$$\varphi_{BD} = \text{atan2}(y_{D_{Q1}} - y_{B_{Q1}}, x_{D_{Q1}} - x_{B_{Q1}})$$

Passiamo ora al poligono di chiusura formato da z_2 , z_3 e z_{BD} . Dalla figura 5.2 è immediatamente ricavabile la sua equazione di chiusura in forma complessa:

$$z_2 e^{i\varphi_2} + z_3 e^{i\varphi_3} = z_{BD} e^{i\varphi_{BD}}$$

In questo step bisogna osservare la posizione dell'accoppiamento C_{Q1} rispetto alla retta a cui appartiene il vettore z_{BD} . Possiamo avere alternativamente due casi:

- se si trova su tale retta si incorre in singolarità cinematica;
- l'accoppiamento in questione resterà sempre su uno dei due semipiani da essa individuati, formando di conseguenza un gomito destro o sinistro.

Nella seconda eventualità è sufficiente porre attenzione alla direzione dei vettori z_2 e z_3 : essi, rispetto alla fase del vettore z_{BD} , avranno differenze angolari calcolabili per mezzo del teorema di Carnot, dato che sono noti tutti e tre i moduli. Valgono le seguenti relazioni:

$$z_3^2 = z_2^2 + z_{BD}^2 - 2z_2 z_{BD} \cos \theta_B, \quad z_2^2 = z_3^2 + z_{BD}^2 - 2z_3 z_{BD} \cos \theta_D$$

Prima si era parlato di una molteplice soluzione. Questa circostanza può verificarsi in presenza di funzioni goniometriche inverse nel calcolo degli angoli: qui abbiamo la funzione:

$$y = \cos(x)$$

con dominio D reale e codominio C = [-1; 1]. Essa non è invertibile nell'insieme dei reali: se però consideriamo un intervallo $I_d = [0; \pi]$ possiamo notare graficamente che è monotona decrescente. Da qui possiamo ricavare la funzione inversa, con dominio C e codominio I_d :

$$y = \cos^{-1}(x)$$

Dato che il valore y calcolato dall'inversa cade automaticamente nell'intervallo I_d , il rischio di una duplice soluzione non sussiste: dalle equazioni di Carnot precedenti si ricavano tranquillamente gli angoli convessi della figura 5.3:

$$\theta_B = \cos^{-1}\left(\frac{z_2^2 + z_{BD}^2 - z_3^2}{2z_2 z_{BD}}\right), \theta_D = \cos^{-1}\left(\frac{z_3^2 + z_{BD}^2 - z_2^2}{2z_3 z_{BD}}\right)$$

Osserviamo anche che l'estremo superiore dell'intervallo I_d è la somma, in radianti, degli angoli interni di un triangolo: con tale ipotesi è lecito aspettarsi che il lato più lungo veda il vertice opposto più ampio.

Gli angoli qui ricavati acquisiscono un senso con l'introduzione di un parametro che chiameremo fattore direzionale:

$$K_{dir} = \pm 1$$

Il segno è a discrezione del progettista. Tale scelta è decisiva per la soluzione della configurazione richiesta, e con la convenzione illustrata in figura 5.2 osserviamo che:

- se $K_{dir} = 1$: la coppia rotoidale C_{Q1} è a sinistra del vettore z_{BD} ;
- se $K_{dir} = -1$: la coppia rotoidale C_{Q1} è a destra del vettore z_{BD} .

Il fattore direzionale è moltiplicativo degli angoli ricavati prima, e qui entra in gioco un'altra importante proprietà: due vettori addendi, rispetto al vettore somma da essi individuato, avranno rotazioni di verso opposto rispetto alla fase di quest'ultimo. I due angoli perciò dovranno avere segno opposto.

Nelle prove che seguiranno il segno del fattore direzionale sarà deciso con i dati, conservato per l'angolo θ_B e cambiato per l'angolo θ_D . Le soluzioni dell'analisi di posizione sono le fasi della biella e del cedente, immediatamente ricavabili da questo ragionamento (si veda la figura 5.3 per chiarezza):

$$\varphi_2 = \varphi_{BD} + K_{dir}\theta_B, \varphi_3 = \varphi_{BD} - K_{dir}\theta_D$$

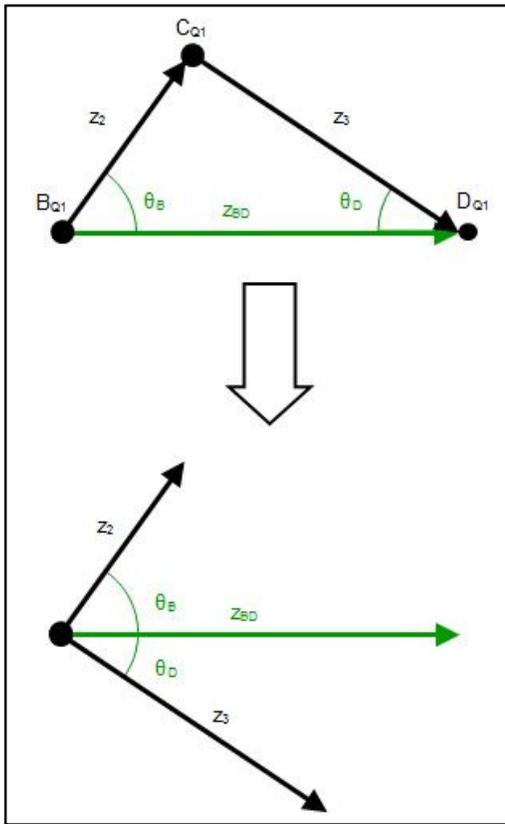


Figura 5.3: il primo disegno illustra il teorema del coseno evidenziando gli angoli che ci interessa calcolare. Il secondo mostra il vettore z_3 traslato al punto di partenza B_{Q1} e il senso geometrico del fattore direzionale: i vettori z_2 e z_3 hanno rotazioni di segno opposto. Il caso illustrato avrebbe $K_{dir} = +1$.

L'analisi cinematica di posizione deve considerare anche il corpo biella (figura 5.4), la cui equazione di chiusura di posizione è:

$$\vec{z}_2 - \vec{z}_5 - \vec{z}_6 = 0$$

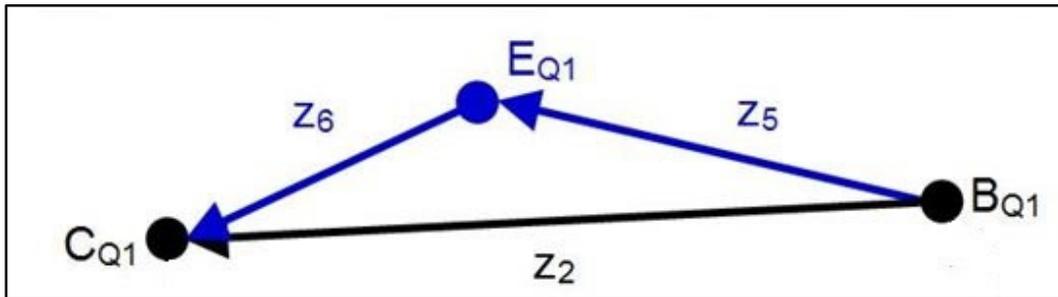


Figura 5.4: poligono di chiusura del corpo biella. Le fasi sono tutte solidali tra loro.

Come già affermato in precedenza le bielle secondarie si riferiscono a dimensioni significative e sono solidali alla biella. Dalla sintesi cinematica è possibile risalire a due angoli che chiameremo θ_{25} e θ_{56} : con la convenzione di figura 5.2 li posizioniamo a partire dalle posizioni angolari φ_2 e φ_5 . I risultati di posizione del poligono di chiusura della biella sono:

$$\varphi_5 = \varphi_2 + \theta_{25}, \varphi_6 = \varphi_5 + \theta_{56}$$

5.2. Analisi cinematica di velocità

Secondo Giovagnoni, Rossi, (p.57) il problema dell'analisi di velocità risulta ben posto solo se si specifica la configurazione nella quale viene effettuata l'analisi. Devono perciò essere note tutte le posizioni dei membri. Sarà sufficiente derivare rispetto al tempo le equazioni di chiusura di posizione, vettore per vettore.

Prima di scrivere le proiezioni sul piano si considerino due effetti della velocità:

- l'effetto della velocità di allungamento, riguarda il modulo;
- l'effetto del cambiamento di orientazione, riguarda la fase.

Il generico vettore di posizione (capitolo 1) era stato scritto nella forma:

$$\vec{z}_i = z_i \begin{Bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{Bmatrix}$$

e la sua derivata rispetto al tempo si scrive di conseguenza:

$$\frac{\partial \vec{z}_i}{\partial t} = \dot{z}_i \begin{Bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{Bmatrix} + z_i \dot{\varphi}_i \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \end{Bmatrix}$$

Ciascun addendo qui descrive il proprio contributo alla velocità proiettato sugli assi x e y del sistema di riferimento solidale al telaio. Sono indicati rispettivamente la velocità relativa e la velocità tangenziale.

Nella tabella di variabilità nel tempo sono riportate le indicazioni sull'immutabilità o meno delle proprietà geometriche di ciascun membro rispetto al tempo. Data la presenza di sole coppie rotoidali, è facile constatare che saranno costanti nel tempo tutte le lunghezze significative, oltre ovviamente alla posizione angolare del telaio: tali grandezze vedranno quindi derivate prime nulle.

Le espressioni della velocità saranno scritte ora nel seguente modo per $i \neq 4$:

$$\frac{\partial \vec{z}_i}{\partial t} = z_i \dot{\varphi}_i \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \end{Bmatrix}$$

Per $i = 4$ invece l'espressione sarebbe nulla in quanto tale pedice identifica il telaio. Anche qui ciascuna maglia deve rispettare la condizione di chiusura:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{z}_i}{\partial t} = 0$$

Scriviamo l'equazione di chiusura di maglia prima del quadrilatero principale e poi del corpo di biella:

$$z_1 \dot{\varphi}_1 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \end{Bmatrix} + z_2 \dot{\varphi}_2 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{Bmatrix} + z_3 \dot{\varphi}_3 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$z_5 \dot{\varphi}_5 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_5 \\ \cos \varphi_5 \end{Bmatrix} - z_2 \dot{\varphi}_2 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{Bmatrix} + z_6 \dot{\varphi}_6 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_6 \\ \cos \varphi_6 \end{Bmatrix} = 0$$

Analogamente all'analisi di posizione, il meccanismo richiede una coordinata libera di velocità, che per tutte le prove sarà $\dot{\varphi}_1 = 1 \text{ rad s}^{-1}$ (rotazioni in senso antiorario). Il sistema così ottenuto sarà lineare nelle incognite $\dot{\varphi}_2$ e $\dot{\varphi}_3$ e potrà essere usata una forma matriciale del tipo:

$$J \cdot \dot{x} + A \cdot \dot{q} = 0$$

Il significato di questa simbologia è qui spiegato e applicato alla prima maglia del caso in esame:

- Matrice Jacobiana: è ottenuta derivando le equazioni di chiusura di posizione rispetto alle incognite di posizione:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{Bmatrix} & z_3 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_3 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

- Vettore delle incognite: corrisponde alle velocità angolari della biella e del cedente (pedici dei vettori 2 e 3):

$$\dot{x} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix}$$

- Vettore delle derivate delle equazioni rispetto alla coordinata libera di posizione: per 1 grado di libertà e la coordinata libera qui posta si ha:

$$A = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = z_1 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

- Vettore della coordinata libera di velocità, che in questo caso è uno scalare:

$$\dot{q} = \dot{\varphi}_1$$

La soluzione del sistema è quindi immediata per inversione della matrice Jacobiana:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = - \left[z_2 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{Bmatrix} z_3 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_3 \end{Bmatrix} \right]^{-1} \cdot z_1 \dot{\varphi}_1 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

Il secondo sistema si può risolvere alla stessa maniera. La tabella di variabilità nel tempo in realtà suggerisce di adottare il valore ricavato per $\dot{\varphi}_2$ anche per le velocità angolari $\dot{\varphi}_5$ e $\dot{\varphi}_6$.

5.3. Analisi cinematica di accelerazione

L'analisi di accelerazione consiste nella determinazione delle accelerazioni lineari e angolari di tutti i membri che compongono un meccanismo (Giovagnoni, Rossi, 2002, p.87): è possibile eseguirla una volta effettuata completamente l'analisi cinematica di posizione e di velocità.

Una funzione accelerazione è la derivata prima, rispetto al tempo, di una funzione velocità. Anche qui deve valere la condizione di chiusura della maglia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \vec{z}_i}{\partial t^2} = 0$$

mentre il generico vettore di accelerazione si presenta nella forma:

$$\frac{\partial^2 \vec{z}_i}{\partial t^2} = \ddot{z}_i \begin{Bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{Bmatrix} + 2\dot{z}_i \dot{\varphi}_i \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \end{Bmatrix} + z_i \ddot{\varphi}_i \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \end{Bmatrix} - z_i \dot{\varphi}_i^2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{Bmatrix}$$

Gli addendi di questa derivata rappresentano, nell'ordine, le accelerazioni relativa, di Coriolis, tangenziale e centripeta. In base alla tabella di variabilità nel tempo alcuni di essi si annulleranno. I vincoli posti per le lunghezze significative annulleranno tutti gli addendi per $i = 4$ (essendo il telaio), mentre per tutti gli altri vettori si ha:

$$\frac{\partial^2 \vec{z}_i}{\partial t^2} = z_i \ddot{\varphi}_i \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \end{Bmatrix} - z_i \dot{\varphi}_i^2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{Bmatrix}$$

Analogamente alle analisi precedenti, per $i = 1$ assumiamo come coordinata libera l'accelerazione angolare $\ddot{\varphi}_1 = 0$ se la velocità del movente è considerata costante nel range di mobilità sintetizzato. Ci aspettiamo di avere come incognite quelle per $i = 2, 3, 5, 6$. In comune con la velocità si avranno valori identici per le accelerazioni angolari per $i = 2, 5$ e 6 in modo da rispettare la rigidità del corpo biella. Ne consegue un altro problema algebrico lineare, di due equazioni e due incognite, la cui forma generale con la matrice Jacobiana deriva da quella di velocità:

$$j\dot{x} + J\ddot{x} + \dot{A}\dot{q} + A\ddot{q} = 0$$

Ora scriviamo le derivate prime delle funzioni di velocità nel caso in esame. Con opportuni passaggi si ricava:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 = -z_1 \dot{\varphi}_1 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

$$j = \frac{\partial J}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial J}{\partial \varphi_3} \dot{\varphi}_3 = - \left[z_2 \dot{\varphi}_2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad z_3 \dot{\varphi}_3 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 \end{Bmatrix} \right]$$

Introduciamo i vettori delle coordinate libere e delle incognite di accelerazione:

$$\ddot{q} = \ddot{\varphi}_1, \quad \ddot{x} = \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{Bmatrix}$$

Sistemando opportunamente i termini dell'equazione generale dell'accelerazione si ha:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = -J^{-1} \cdot \left(j \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} - z_1 \dot{\varphi}_1^2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{Bmatrix} + z_1 \ddot{\varphi}_1 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \end{Bmatrix} \right)$$

5.4. La singolarità cinematica

Esaminiamo ora la matrice Jacobiana utilizzata per l'analisi di velocità e di accelerazione, di cui calcoliamo subito il determinante:

$$J = \left[z_2 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad z_3 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_3 \end{Bmatrix} \right]$$

$$\det(J) = z_2 z_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)$$

In tutti i meccanismi è possibile imbattersi in una o più configurazioni di singolarità. Nel caso del quadrilatero articolato ciò si verifica nei sistemi a doppio bilanciato, agli estremi del campo di mobilità di quello considerato come cedente: la stessa configurazione del meccanismo, in senso assoluto, può non essere singolare a seconda della scelta della coordinata libera (Giovagnoni, Rossi, p 76-77). In tali posizioni, introducendo un valore k intero, i vettori z_2 e z_3 risulterebbero avere una differenza angolare $\varphi_2 - \varphi_3$ pari a $k\pi$: ciò annullerebbe il determinante della matrice Jacobiana rendendola singolare. Le conseguenze saranno l'impossibilità, con sole basi cinematiche, di determinare la velocità e l'accelerazione del meccanismo, e ovviamente la perdita di significato del fattore K_{dir} .

Un meccanismo D-Drive, come provato in precedenza, rispetta, dopo la sintesi, tutti i punti di precisione richiesti. In certi casi però la soddisfazione del movimento richiesto

rende necessario il passaggio per una configurazione di singolarità: questo è un limite all'idoneità del D-Drive, in quanto sarebbe necessario il distacco dei membri. Come molte altre problematiche la singolarità è comprensibile solo a valle dell'analisi cinematica. Per provarla si è scelto di partire dal primo punto di precisione e analizzare la posizione fino alla configurazione critica: in questo modo si perviene a una conclusione sui dati impartiti in sede di sintesi.

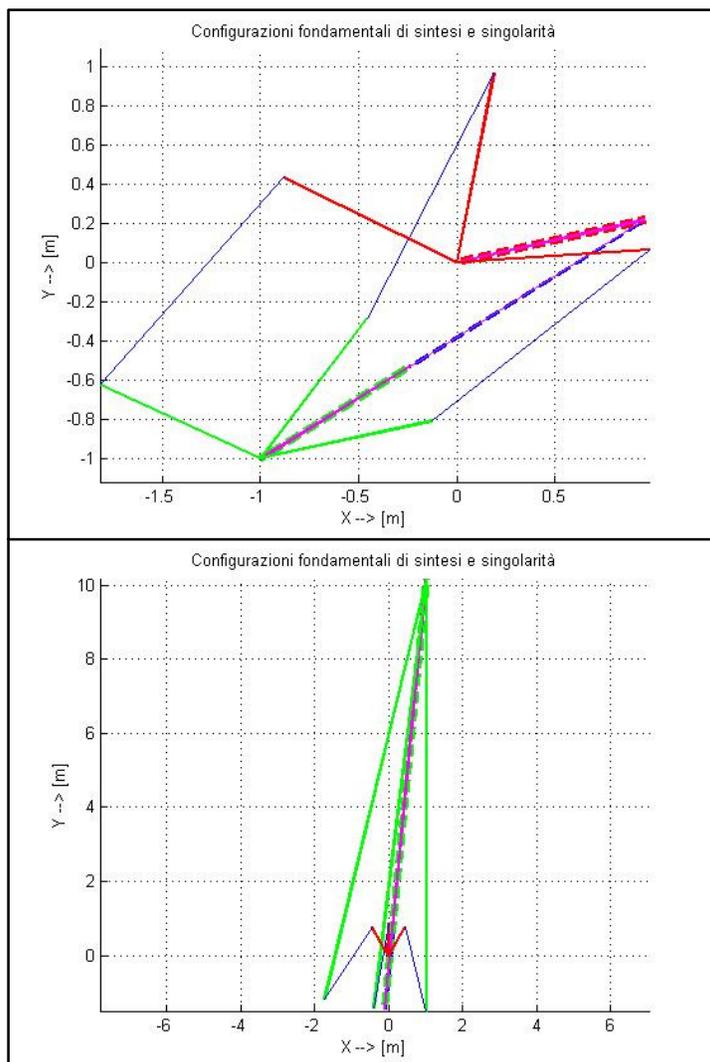


Figure 5.5 e 5.6 (dall'alto): esempi di configurazioni di singolarità (in magenta, tratteggiate) a confronto con i punti di precisione svolti con la sintesi. Il movente, in rosso, ruota in senso antiorario per evidenziare il limite del campo di mobilità. Per semplicità di lettura è riportato solamente il quadrilatero principale: si confrontino le figure 4.3 e 4.5 nel capitolo 4.

Dalle figure appena proposte si evince che due meccanismi non riescono a percorrere tutta la traiettoria prevista senza passare per singolarità. Si scartano quindi la prova 2 a coppia rotoidale cedente-telaio nota e la prova 1 a coppia rotoidale cedente-biella nota della sintesi per generazione di traiettorie, le quali rimangono non singolari fino al 5.9% e al 37.5% delle configurazioni analizzabili. Oltre questi limiti risulta impossibile svolgere l'analisi cinematica di velocità e accelerazione: non avranno perciò alcun senso le indagini di traiettoria proposte nel prossimo capitolo.

CAPITOLO 6

Analisi della traiettoria rettilinea

Questo capitolo sarà dedicato alla discussione dell'idoneità della traiettoria ottenuta dal meccanismo D-Drive.

Si è pensato di non introdurre a priori delle restrizioni numeriche, ma di valutare, prevalentemente da un punto di vista grafico, il comportamento cinematico del punto di biella. Come accennato prima la lettura dei grafici è semplificata dal fatto che la traiettoria prevista è orizzontale sul piano, e quindi l'ordinata si mantiene prevedibilmente costante. In questo modo si evidenziano molte importanti proprietà, come i vari scostamenti e le curvature descritte. I problemi qui trattati saranno posti sia a livello locale che a livello globale, poiché attraverso questo confronto si osserva anche l'attendibilità dei risultati ottenuti da ciascun metodo.

La distinzione tra posizioni dei punti di biella previste e osservate sta nel fatto che le prime sono tutte appartenenti alla retta da percorrere, mentre le seconde sono quelle individuate effettivamente dal D-Drive una volta effettuata l'opportuna analisi cinematica. Preso perciò il j -esimo valore della coordinata libera si può immediatamente risalire al j -esimo punto individuato dal movimento del punto di biella:

$$\begin{Bmatrix} x_E \\ y_E \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} + z_1 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{Bmatrix}_j + z_5 \begin{Bmatrix} \cos \varphi_5 \\ \sin \varphi_5 \end{Bmatrix}_j$$

Ricordando che z_1 , z_5 e il punto A sono rispettivamente il movente, la biella secondaria al movente e la corrispondente coppia rotoidale a telaio (denominazioni di analisi).

Nel precedente capitolo si era parlato del fattore direzionale K_{dir} . Va ribadito che questo mantiene il suo significato fuori dalle configurazioni singolari: il suo segno è deciso in base alla configurazione che si desidera risolvere, e tale deve mantenersi all'interno del campo di mobilità del quadrilatero.

6.1. Regressione lineare

Questo metodo è molto usato in statistica per stabilire l'esistenza di un legame tra due o più variabili. Essa è un caso particolare, ma molto importante nella pratica, dell'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati (Gambolati, 2003, pp. 262-267), la quale ha come ingresso i seguenti dati:

- x_0, x_1, \dots, x_n , $n + 1$ ascisse di valori assegnati;
- y_0, y_1, \dots, y_n , $n + 1$ osservazioni corrispondenti alle ascisse suddette e affette da errori casuali (non sistematici) di osservazione.

Cerchiamo un polinomio di grado $m < n$:

$$Y = A_0 + A_1 \cdot X + \dots + A_m \cdot X^m$$

che approssimi nel miglior modo possibile i dati rilevati. Un criterio ottimale per la determinazione dei coefficienti del polinomio è quello di sceglierli in modo che rendano minima la somma dei quadrati degli scarti tra i valori approssimati e i valori misurati.

In questa sede i valori approssimati saranno le ordinate previste Y_p , quelli misurati le ordinate osservate Y_o . Avendo a che fare con una retta il precedente polinomio si tronca al grado 1: ponendo così $A_0 = A$ e $A_1 = B$ si hanno rispettivamente la quota di intercetta e il coefficiente angolare della retta:

$$Y = A + B \cdot X$$

La minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti si scrive quindi

$$S = \min \sum_{i=1}^n (Y_{oi} - Y_{pi})^2 = \min \sum_{i=1}^n (Y_{oi} - (A + B \cdot X_i))^2$$

e ha come incognite i suddetti coefficienti. Rispetto a questi calcoliamo le derivate prime:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A} &= \sum_{i=1}^n Y_{oi} - A \cdot n - B \cdot \sum_{i=1}^n X_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial B} &= \sum_{i=1}^n (Y_{oi} \cdot X_i) - A \cdot \sum_{i=1}^n X_i - B \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0 \end{aligned}$$

che, come osservato, propongono due equazioni lineari rispetto alle incognite una volta annullate. Il problema può perciò essere posto nella forma matriciale seguente:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n Y_{oi} \\ \sum_{i=1}^n (Y_{oi} \cdot X_i) \end{Bmatrix}$$

Consideriamo prima la quota dell'intercetta. Questa è facilmente influenzabile da eventuali traslazioni rigide, sul sistema di riferimento assoluto, dell'insieme delle posizioni descritte dal punto di biella: se traslassimo l'intera nuvola di punti da interpolare traslerebbe anche la loro retta di regressione, modificando di conseguenza la quota di intercetta. Ciò che invece non dipende dalla traslazione pura è il coefficiente angolare della retta stessa: se in un certo intervallo di tempo questo vedesse uno

spostamento orizzontale ΔX la corrispondente variazione di quota di intercetta si calcolerebbe con la seguente uguaglianza:

$$\Delta A = B \cdot \Delta X$$

Considerando il caso del D-Drive la traiettoria rettilinea prevista avrebbe pendenza nulla in quanto posta orizzontale. Perché il D-Drive sia idoneo la pendenza B e la sua arcotangente devono essere molto piccole:

$$\Delta\varphi = \tan^{-1}(B) \cong B$$

o, secondo la formula stessa, confondibili tra loro. Occorre ricordare che l'orizzontalità della traiettoria prevista è solo una semplificazione grafica, ma a seconda dell'applicazione l'intero disegno può essere ruotato: in questo modo B assume il significato geometrico di differenza di pendenza.

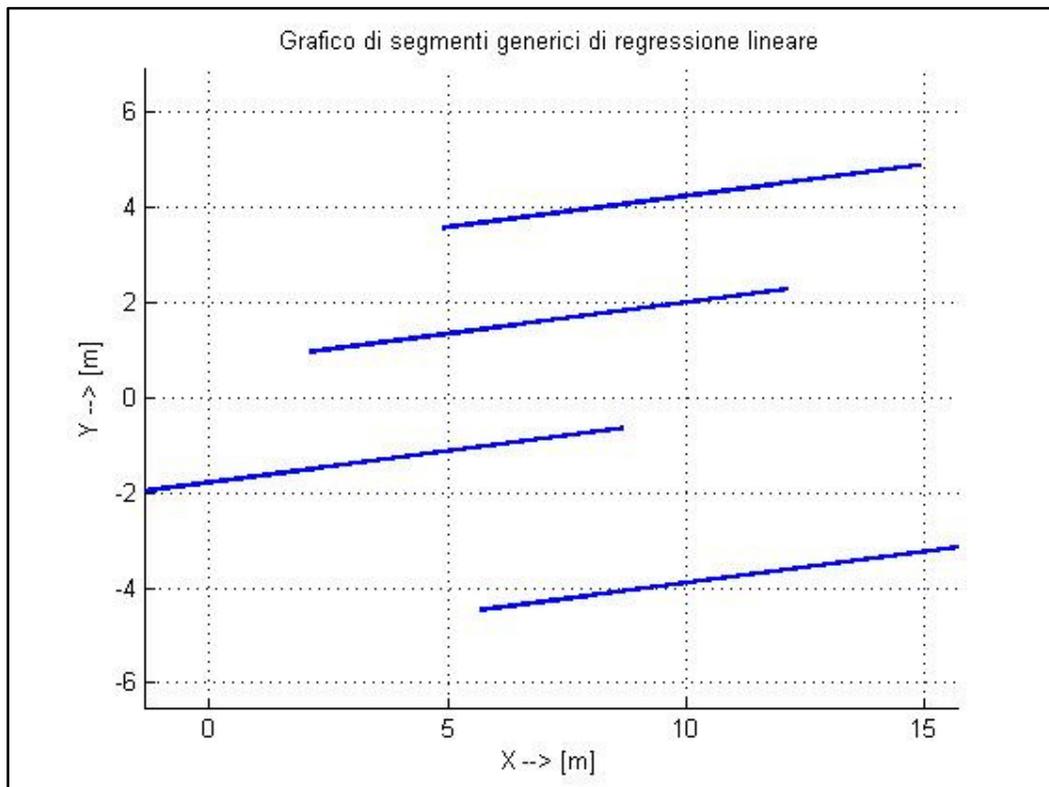


Figura 6.1: traslazioni pure di generici segmenti di rette di regressione. Si nota come tali rette vedano variare solamente la quota di intercetta, non la loro pendenza. Infatti la prima ha senso solo se in relazione alla seconda.

Una traiettoria orizzontale soddisfacente le tre posizioni assegnate dovrebbe presentare un coefficiente angolare nullo e una quota di intercetta pari all'ordinata prevista. Una violazione di queste ipotesi si registra con delle traiettorie casuali,

difficilmente intuibili con la sintesi ma riscontrabili solamente dopo l'analisi cinematica. Infatti il meccanismo risolvente è raffigurato, dopo la sintesi, in tutti e tre i punti di precisione richiesti, ma alcune di queste configurazioni principali vedono variare il segno del fattore direzionale. Ciò significa che di tutte le posizioni del punto di biella assegnate, alcune sono effettivamente soddisfatte da un'analisi cinematica con $K_{dir} = 1$, altre con $K_{dir} = -1$. Un D-Drive idoneo secondo regressione lineare deve quindi presentare:

- un valore dell'intercetta A abbastanza vicino alla quota desiderata;
- un valore di pendenza B abbastanza vicino allo zero;
- il passaggio del punto di biella, per tutte e tre le posizioni assegnate, senza modifiche al segno del fattore direzionale.

6.2. Media prevista, media osservata, range di biella e scostamenti

Con queste variabili si controlla che la traiettoria descritta non si allontani eccessivamente da quella prevista.

La media prevista è l'ordinata del punto di partenza scelto, e deve rimanere tale all'interno del movimento del D-Drive che ci interessa ottenere. Data la scarsità di punti di precisione è possibile che questo vincolo non sia perfettamente rispettato: a questo proposito si calcola un range, detto range di biella, definibile come la differenza tra la quota massima e la quota minima descritte dal punto di biella. Sono ovviamente calcolabili anche gli estremi della traiettoria reale.

La media osservata dipende dalle posizioni del punto di biella calcolate per analisi cinematica, e va confrontata con quella prevista per avere una prima idea dell'errore cinematico. Uno dei due estremi precedentemente calcolati, a confronto con la media prevista, dovrebbe rappresentare graficamente la massima distanza ortogonale tra le due traiettorie.

L'idoneità perfetta del D-Drive si materializza quando sono nulli il range e il massimo scostamento tra la media prevista e uno dei due estremi reali. In certi casi non è sufficiente che le due medie coincidano, poiché questo non vincola il range di biella a essere nullo. Di norma sono accettati per quest'ultimo valori prossimi allo zero, e comunque sono posti in relazione alla lunghezza del tratto previsto.

6.3. La disuguaglianza di Schwarz. Il prodotto scalare

A livello globale è opportuno anche valutare il parallelismo tra le traiettorie prevista e osservata. Introduciamo qui una serie di definizioni e proposizioni, di cui però omettiamo le relative dimostrazioni, concentrandoci sulle proprietà che interessano per lo studio del D-Drive (Moresco, 1996, pp.216-220):

- Definizione. Sia V uno spazio vettoriale. Si chiama prodotto scalare una funzione che ad ogni coppia di vettori (u,v) associa un numero reale, che indichiamo con $u \cdot v$ e che verifica le seguenti proprietà:

- $v \cdot v > 0$ per ogni vettore non nullo v ;
- $u \cdot v = v \cdot u$.

In \mathbb{R}^n , n numero naturale qualsiasi, vale una funzione prodotto scalare così definita:

$$(u_1 \dots u_n) \cdot (v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

E in questo caso il prodotto è detto scalare canonico in \mathbb{R}^n .

- Proposizione. (Disuguaglianza di Schwarz). Siano V spazio vettoriale dotato di prodotto scalare, u e v vettori di V . Allora vale:

$$|u \cdot v| \leq \sqrt{u \cdot u} \cdot \sqrt{v \cdot v}$$

- Definizione. In uno spazio dotato di prodotto scalare si chiama norma di un vettore v , indotta dal prodotto scalare, il numero reale non negativo che indichiamo come segue:

$$\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i v_i}$$

Presi ancora due vettori u e v non nulli, e ancora la disuguaglianza di Schwarz, abbiamo che il numero ottenuto rapportando il prodotto scalare al prodotto delle rispettive norme appartiene all'intervallo $[-1,1]$. Per definizione, copiando quello che accade negli spazi di vettori geometrici, tale numero è chiamato coseno dell'angolo dei vettori u e v , indicato come:

$$\cos uv = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Quest'ultima formula si applica sostituendo, in due fasi diverse:

- il vettore u prima con l'ascissa X_O e poi con l'ordinata Y_O osservate;
- il vettore v prima con l'ascissa X_P e poi con l'ordinata Y_P previste.

Le regole dell'algebra lineare prevedono che due vettori di n elementi, in uno spazio vettoriale n -dimensionale, siano paralleli tra loro quando il coseno dell'angolo tra loro compreso è unitario. Perché ciò accada deve essere unitario il prodotto scalare: il significato geometrico di tale risultato è quello della coincidenza perfetta (o del parallelismo perfetto) tra le traiettorie previste e osservata.

Nel problema di analisi del D-Drive può capitare un valore del coseno soddisfacente una sola delle coordinate cartesiane: questo può accadere in presenza di traiettorie che soddisfano il passaggio solo per alcune posizioni assegnate del punto di biella o presentano eccessivi sviluppi anche in direzione ortogonale alla traiettoria impartita.

Talvolta il prodotto scalare differisce dall'unità solamente per qualche millesimo, anche se l'insieme dei punti coperti dal D-Drive presenta delle sovrapposizioni in ordinata: si rendono necessarie quindi delle verifiche a livello locale.

6.4. Raggi di curvatura

Quest'ultimo metodo si concentra a livello locale, e serve a stabilire se la traiettoria presenta delle curvature critiche. A volte non sono sufficienti un range di biella ristretto o una retta di regressione orizzontale: infatti i risultati di questi metodi tralasciano informazioni, talvolta importanti, sulla presenza di eccessive sinuosità. A onore del vero un range di biella sufficientemente largo e due medie quasi coincidenti lasciano presagire delle problematiche sull'effettiva rettilineità della traiettoria ottenuta.

Nel primo capitolo si era parlato di archi di cerchio e segmenti per descrivere la parentela tra quadrilatero articolato e biella manovella. Ora integriamo questi concetti con il fatto che una traiettoria è individuata da una serie di punti: essi talvolta sono infinitamente vicini tra loro, perciò da un punto all'altro si può tracciare un segmento di lunghezza infinitesima.

Dato che una circonferenza è determinata dati tre punti, un enorme numero di punti campionati sul piano impone una quantità spropositata di terne da analizzare, motivo per cui viene proposta una strategia per ridurla. Un algoritmo risolutivo adeguato consiste in due cicli iterativi annidati, da impostare allo scopo di non selezionare:

- punti eccessivamente vicini per sgravare l'impiego della memoria del calcolatore;
- punti eccessivamente lontani per non perdere informazioni importanti.

L'iterazione consiste nel catturare una terna di punti, uno diverso dall'altro, e nel determinare poi una circonferenza passante per essi. D'ora in poi ometteremo il pedice E, ritenendo scontato che si parli di ascissa e ordinata del punto di biella in un certo istante. Le regole della geometria analitica impongono di sostituire le coordinate della terna in esame nell'equazione implicita della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Ad ogni iterazione si suggerisce di prendere prima una coppia di punti consecutivi, chiamati E_j ed E_{j+1} , poi un terzo punto E_k in modo da avere $j + 1 < k \leq n$. Con la sostituzione introdotta prima si ottiene un sistema lineare nelle incognite a, b, c scrivibile quindi nella forma seguente:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = -[P_{x,y}]^{-1} \cdot \{P_{sq}\} = - \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_{j+1} & y_{j+1} & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} x_j^2 + y_j^2 \\ x_{j+1}^2 + y_{j+1}^2 \\ x_k^2 + y_k^2 \end{Bmatrix}$$

Il raggio della circonferenza passante per questi punti è immediatamente ricavabile con la seguente formula:

$$R_c = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

Il determinante della matrice $P_{x,y}$ può anche essere nullo: il significato geometrico di questa eventualità è l'allineamento dei punti. Nel caso in esame si accettano valori molto vicini allo zero, con conseguente ottenimento di circonferenze con raggi molto lunghi. Il meccanismo D-Drive può ottenere l'idoneità applicativa quando il raggio minimo tra quelli calcolati si mantiene su valori sufficientemente alti: in caso contrario si avrebbero curvature troppo accentuate e, a determinate condizioni lavorative, fenomeni vibratori critici per i componenti del D-Drive.

6.5. Risultati e rappresentazione delle indagini di traiettoria

Di seguito sono riportati i risultati numerici e grafici dei metodi di indagine precedentemente descritti. Il D-Drive è un meccanismo che eventualmente può essere "riciclato" per scopi diversi da quello prefissato.

Si pone particolare attenzione a quei meccanismi che presentano evidenti anomalie e divergenze tra traiettorie prevista e osservata.

La prima anomalia proposta riguarda la terza prova della sintesi grafica per generazione di traiettorie a coppia rotoidale cedente-telaio nota (figura 6.2). Il meccanismo qui ottenuto non risponde adeguatamente sui determinanti di cerchio, attraverso i quali è possibile risalire a un raggio di curvatura troppo corto rispetto alla lunghezza della traiettoria. L'eccessiva sinuosità del tratto descritto fa sì che il D-Drive in questione non sia idoneo ad alcun tipo di applicazione, pur avendo un range e una media osservata abbastanza ragionevoli.

| Risultato [u. m.] | valore |
|--|----------------|
| Quota intercetta regressione [m] | 0.4515 |
| Pendenza retta regressione [adim] | 0.0056 |
| Media Y osservata [m] | 0.4340 |
| Media Y prevista [m] | 0.5 |
| Scostamento medie ΔY [m] | 0.0660 |
| Massimo scostamento dalla Y prevista [m] | 0.1372 (6.86%) |
| Range di biella [m] | 0.1453 |
| Raggio minimo ai determinanti [m] | 0.0134 |

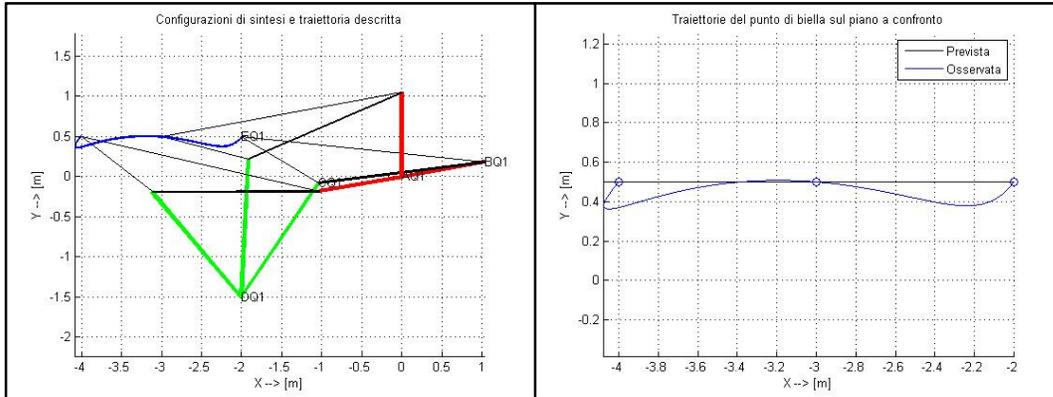


Tabella 6.1 (pagina precedente): risultati numerici significativi delle prove di indagine della traiettoria. Il valore barrato indica il parametro non rispettato per l'idoneità.

Figure 6.2a e 6.2b: D-Drive nelle tre configurazioni di sintesi (a sinistra) e il confronto grafico tra le due traiettorie descritte (a destra).

Un'altra tipologia di problematiche che si può riscontrare è il mancato passaggio del punto di biella nelle posizioni desiderate, accennata in precedenza.

Se il meccanismo risolvete esiste viene visualizzato graficamente in tutte e tre le posizioni corrispondenti ai punti di precisione richiesti. Ora rientra in gioco il fattore direzionale K_{dir} introdotto nel capitolo 5: la condizione per l'analisi cinematica di posizione, va ricordato, è che questo fattore mantenga lo stesso segno all'interno di tutto il campo previsto per il suo funzionamento. Talvolta è intuibile a priori un eventuale cambio di segno osservando le configurazioni fornite come risultato di sintesi. Si giunge a una conferma a posteriori solamente attraverso l'analisi cinematica. Il fattore K_{dir} è calcolato rispetto al primo punto di precisione, cioè osservando il meccanismo risolvete nella posizione iniziale (figura 6.3).

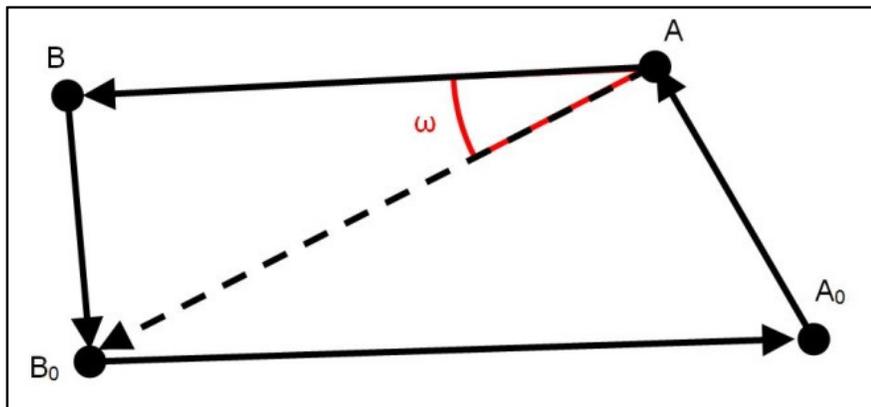


Figura 6.3: ipotetico quadrilatero risolvete, ricavato dopo la sintesi, nella sua posizione iniziale. In rosso è evidenziato l'angolo ω di cui interessa il segno del seno.

La maggiore importanza data al segno di K_{dir} consiglia l'utilizzo di una semplice ma importante funzione:

$$y = \text{sgn}(f(\omega)) = \begin{cases} -1 & \text{se } f(\omega) > 0 \\ 0 & \text{se } f(\omega) = 0 \\ 1 & \text{se } f(\omega) < 0 \end{cases}$$

E, dato che vogliamo capire se il punto B in figura si trova a sinistra o a destra del vettore AB_0 utilizziamo:

$$f(\omega) = \sin \omega$$

Dove ω vale:

$$\omega = \text{atan2}(y_B - y_A, x_B - x_A) - \text{atan2}(y_{B0} - y_A, x_{B0} - x_A)$$

e quindi per il fattore direzionale si ha:

$$K_{dir} = \text{sgn}(\sin(\omega))$$

Mantenendo il segno ivi ricavato per tutte le configurazioni da analizzare si può pervenire al mancato passaggio del punto di biella per alcune delle posizioni assegnate, mentre sarebbero soddisfatte interamente solo con un cambio di gomito. Questa eventualità non è accettabile durante il funzionamento del D-Drive data la conseguente necessità di distaccare la biella e il cedente.

I D-Drive da scartare in tal senso sono quelli ottenuti nella prova 3 per generazione analitica di traiettorie e nella prova 3 per generazione grafica di traiettorie a coppia rotoidale cedente-biella nota (figure 6.4).

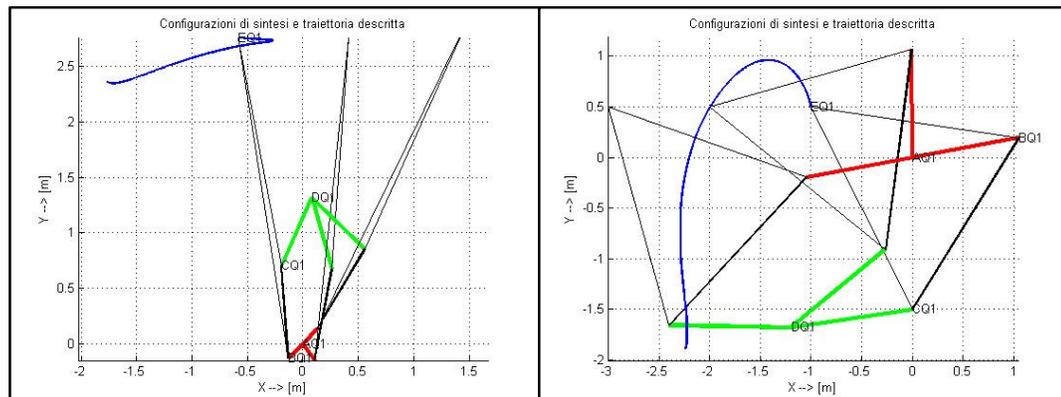


Figure 6.4a e 6.4b: meccanismi con segno di K_{dir} calcolato rispetto alla posizione iniziale (in entrambi positivo). Sono le prove 3 di generazione di traiettorie, rispettivamente analitica e grafica a coppia rotoidale cedente-telaio nota.

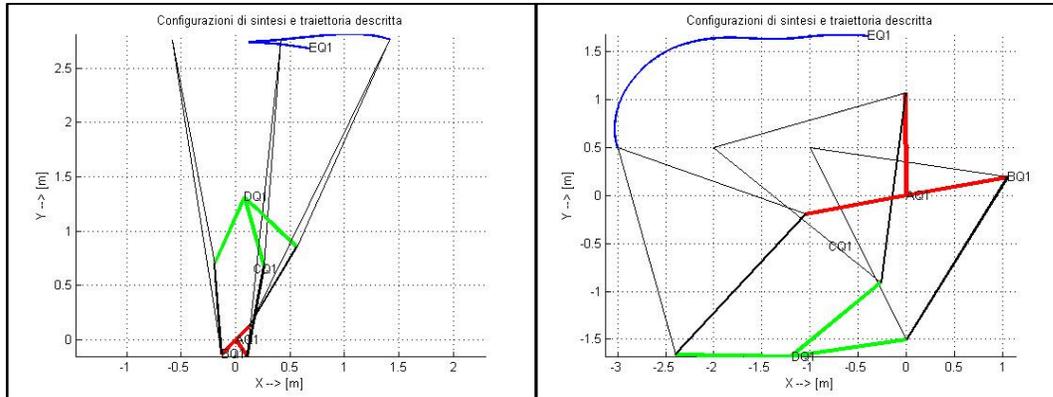


Figure 6.4c, e 6.4d (dall'alto a sinistra): le prove riproposte con segno di K_{dir} opposto rispetto alle precedenti.

| Risultato [u. m.] | ANTR | ANTR | GRTRB1 | GRTRB1 |
|-----------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| Segno K_{dir} | positivo | negativo | positivo | negativo |
| Quota intercetta regressione [m] | 2.8489 | 2.7287 | 2.8806 | 2.0698 |
| Pendenza retta regressione [adim] | 0.2882 | 0.0592 | 1.5714 | 0.3305 |
| Media Y osservata [m] | 2.5718 | 2.7675 | -0.0624 | 1.3949 |
| Media Y prevista [m] | 2.7610 | 2.7610 | 0.5 | 0.5 |
| Scostamento medie ΔY [m] | 0.1892 | 0.0065 | 0.5624 | 0.8949 |
| Max scostamento da Y prevista [m] | 0.4097 | 0.0774 | 2.3853 | 1.1820 |
| Range di biella [m] | 0.4097 | 0.1296 | 2.8522 | 1.1820 |
| Prodotto scalare X | -0.8846 | 0.8666 | 0.9937 | 0.9924 |
| Prodotto scalare Y | 0.9982 | 0.9999 | -0.0659 | 0.9694 |

Tabella 6.2: risultati numerici significativamente inadeguati delle prove 3 sopra raffigurate. Secondo alcuni parametri il D-Drive può essere accettato (prodotti scalari), secondo altri invece si dovrebbe scartare. A questo proposito è ritenuto superfluo l'esame ai determinanti di cerchio.

Di seguito sono raffigurati i grafici delle prove che rispettano ragionevolmente tutte le precedenti restrizioni.

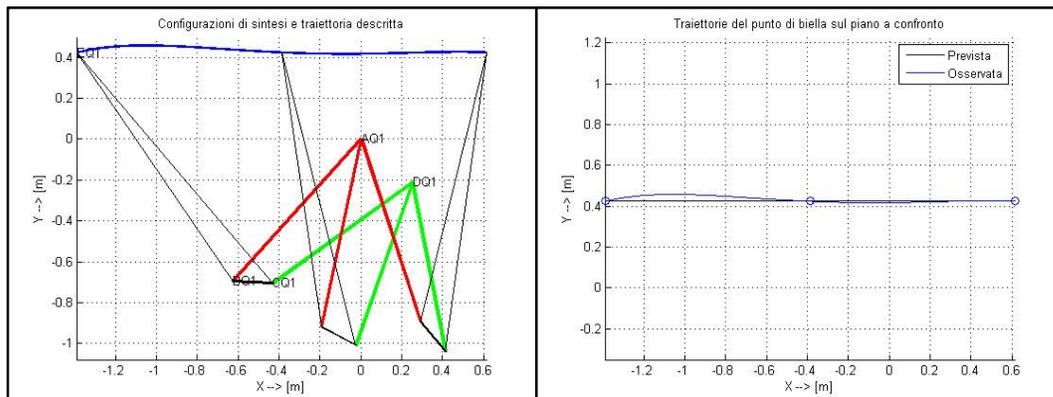


Figure 6.5a, 6.5b: configurazioni di sintesi e traiettoria disegnata in prova 1 con generazione analitica di traiettorie.

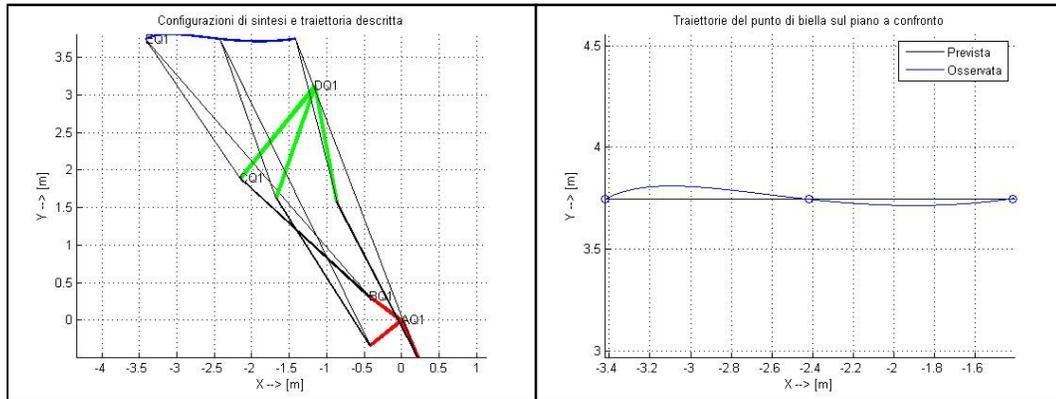


Figure 6.6a, 6.6b: configurazioni di sintesi e traiettoria disegnata in prova 2 con generazione analitica di traiettorie.

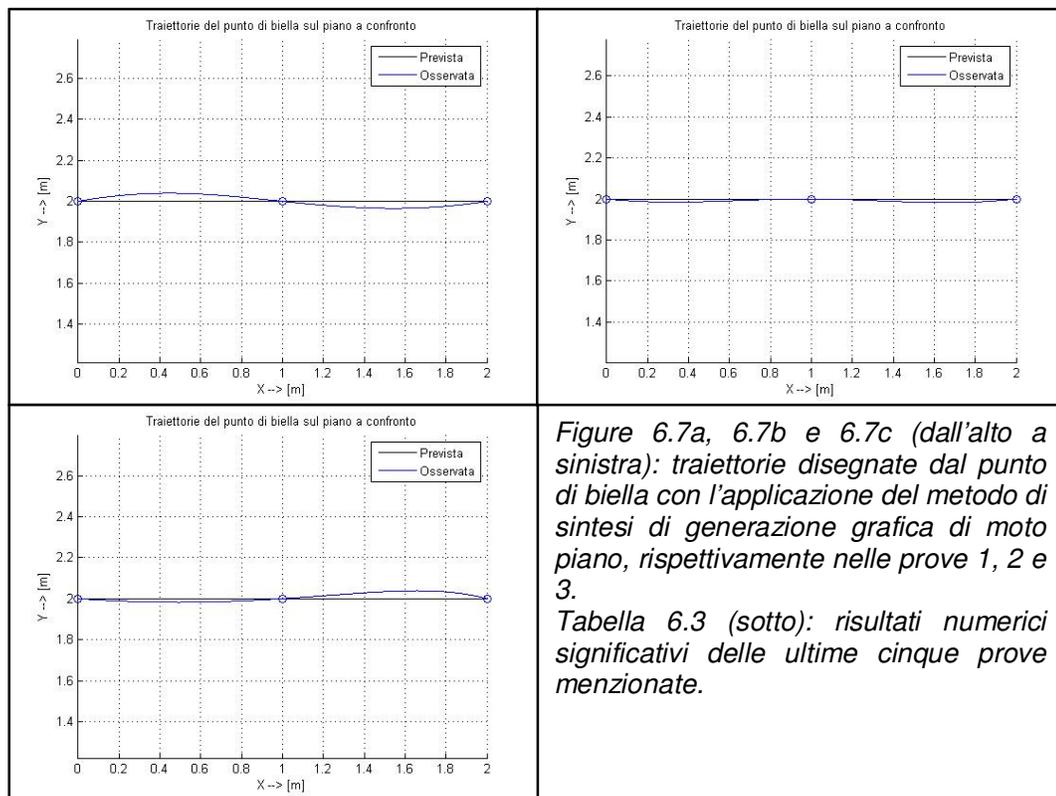


Figure 6.7a, 6.7b e 6.7c (dall'alto a sinistra): traiettorie disegnate dal punto di biella con l'applicazione del metodo di sintesi di generazione grafica di moto piano, rispettivamente nelle prove 1, 2 e 3.
Tabella 6.3 (sotto): risultati numerici significativi delle ultime cinque prove menzionate.

| Proprietà | ANTR 1 | ANTR 2 | GRMP 1 | GRMP 2 | GRMP 3 |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|--------|
| Intercetta [m] | 0.4251 | 3.6667 | 2.0396 | 1.992 | 1.9782 |
| Pendenza [adim] | -0.0199 | -0.0386 | -0.0377 | -0.0009 | 0.0281 |
| Prod scalare X [adim] | 0.9995 | 0.9992 | 0.9972 | 0.9996 | 0.9999 |
| Prod scalare Y [adim] | 0.9995 | 1 | 0.9999 | 1 | 1 |
| Range biella [m] | 0.0411 | 0.0958 | 0.0742 | 0.0178 | 0.0554 |
| Y media osservata [m] | 0.4328 | 3.759 | 2.0067 | 1.9912 | 2.0069 |
| Y media prevista [m] | 0.424 | 3.7461 | 2 | 2 | 2 |
| Scostamento medie [m] | 0.0088 | 0.0129 | 0.0067 | 0.0088 | 0.0069 |
| Scostamento massimo [m] | 0.034 | 0.0652 | 0.0398 | 0.0178 | 0.0382 |

Per quanto riguarda le prove del moto piano le configurazioni non sono state riportate in quanto verranno riprese nel prossimo capitolo.

Restano ora da osservare i risultati delle ultime due prove mancanti, entrambe con generazione grafica di traiettorie: la prova 1 a coppia rotoidale cedente-telaio nota e la prova 2 a coppia rotoidale cedente-biella nota.

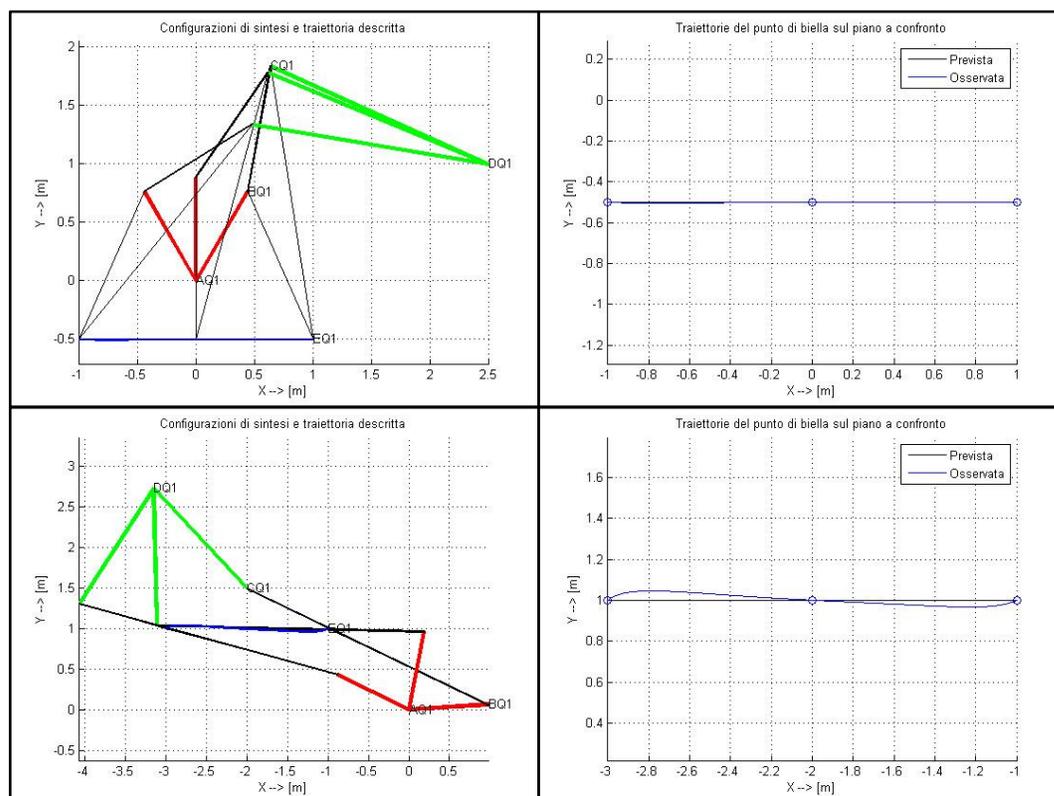


Figure 6.8a, 6.8b (in alto): configurazioni di sintesi e traiettorie disegnate dopo generazione grafica di traiettorie, prova 1 con coppia rotoidale cedente-telaio nota. Figure 6.9a e 6.9b (in basso) configurazioni di sintesi e traiettorie disegnate dopo generazione grafica di traiettorie, prova 2 con coppia rotoidale cedente-biella nota.

| Proprietà | GRTR-B0 1 | GRTR-B1 2 |
|-------------------------|-----------|-----------|
| Intercetta [m] | -0.5016 | 0.9248 |
| Pendenza [adim] | 0.0012 | -0.0389 |
| Prod scalare X [adim] | 1 | 0.9995 |
| Prod scalare Y [adim] | 1 | 0.9996 |
| Range biella [m] | 0.0043 | 0.0784 |
| Y media osservata [m] | -0.5016 | 1.0033 |
| Y media prevista [m] | -0.5 | 1 |
| Scostamento medie [m] | 0.0016 | 0.0033 |
| Scostamento massimo [m] | 0.0043 | 0.0456 |

Tabella 6.4: risultati numerici significativi delle ultime due prove illustrate.

CAPITOLO 7

Analisi dinamica dei meccanismi D-Drive

L'analisi dinamica di un meccanismo D-Drive si svolge sulla falsa linea di quella che si svolgerebbe su un quadrilatero articolato. Il metodo qui utilizzato è quello Newtoniano, in quanto non ci interessa solo una sollecitazione particolare (ad esempio la coppia da erogare al motore), ma tutte le reazioni scambiate nelle coppie rotoidali.

Il metodo si basa sull'equilibrio dei corpi rigidi: ne è richiesta quindi la scrittura di tutte le equazioni nel piano, due sulle traslazioni orizzontale e verticale, una sulla rotazione attorno all'asse z . Proprio l'orientazione di quest'ultimo funge da discriminante nella decisione di includere gli effetti gravitazionali all'asse y : se esso è orizzontale vanno inclusi, poiché il D-Drive sta lavorando sul piano verticale. L'unico asse del piano del meccanismo che non modifica mai la sua orientazione è l'asse x , sempre orizzontale al suolo.

Nei paragrafi che seguono si studierà la dinamica attraverso l'equilibrio dei corpi tenendo conto della non trascurabilità delle loro masse: si dovranno considerare non solo le sollecitazioni agli accoppiamenti cinematici ma anche gli effetti inerziali.

Lo scopo dell'analisi dinamica è quello di confrontare due meccanismi molto simili da un punto di vista cinematico: si vuole scoprire, almeno qualitativamente, la natura dei rispettivi profili dinamici per capire le differenze di contesto applicativo.

7.1. Polo di equilibrio alle sollecitazioni

Di seguito sono presentate tre modalità di scrittura delle equazioni di equilibrio di un corpo rigido. Il loro criterio di distinzione è la scelta arbitraria del polo rispetto a cui si stabilisce l'equilibrio dei momenti. A seconda del tipo di moto a cui ciascun membro è sottoposto si sceglie il polo di più semplice trattazione.

7.1.1. Polo fisso

Si può parlare di polo fisso quando un corpo rigido è interessato da un moto esclusivamente rotatorio: tutti gli infiniti punti ad esso appartenenti ruotano alla stessa velocità angolare istante per istante. Ogni punto ha perciò la propria velocità tangenziale direttamente proporzionale alla distanza dal polo considerato, il quale può essere sia interno che esterno al corpo stesso.

Un'impostazione di questo tipo, in meccanica, è comunemente applicata quando il polo corrisponde a una coppia rotoidale a telaio.

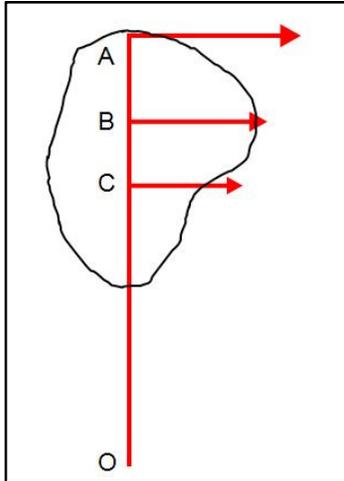


Figura 7.1: corpo rigido vincolato a un moto esclusivamente rotatorio. Si nota come i moduli delle velocità tangenziali siano direttamente proporzionali alla distanza di ciascuno di essi dal polo O.

7.1.2. Centro di istantanea rotazione

Si tratta di un'estensione del concetto precedente ai casi che, oltre alla rotazione, sono interessati anche alla traslazione. Per determinare il CIR occorre conoscere le traiettorie descritte da due punti P_1 e P_2 del corpo rigido. Le rette r_1 e r_2 da tracciare sono passanti per tali punti e ortogonali alle rispettive traiettorie. Il punto di incontro di queste due rette è il centro di istantanea rotazione: è lecito aspettarsi quindi che la sua posizione sul piano sia variabile nel tempo, funzione anche della coordinata libera.

La criticità nella determinazione del CIR si manifesta quando il corpo rigido compie un moto esclusivamente traslatorio. Nel quadrilatero articolato, specialmente se è presente una sola manovella, il membro passibile di mancanza di questo centro è la biella. In alcune configurazioni i vettori della velocità possono essere paralleli tra loro, così come le rette r_1 e r_2 ad essi ortogonali: il conseguente risultato è un CIR a distanza infinita dalla biella. Con un braccio infinito diventa difficile scrivere le equazioni di equilibrio dei momenti.

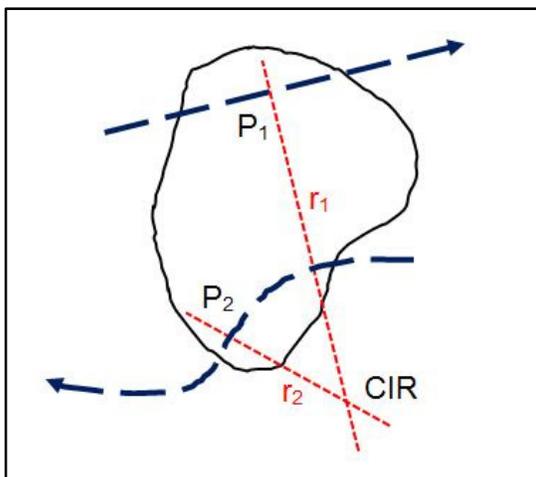


Figura 7.2: esempio ipotetico di individuazione del centro di istantanea rotazione. I punti P_1 e P_2 rappresentano degli accoppiamenti cinematici, di cui ora non importa la distinzione tra coppia rotoidale o coppia prismatica. In blu sono evidenziate le traiettorie dei punti, in rosso le rette grazie alle quali determinare il CIR.

7.1.3. Centro di massa

Si definisce come centro di massa, di un sistema di punti materiali, il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore (Mazzoldi et al, 2007):

$$r_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

Le componenti x e y sul piano si calcolano sostituendole, in successione, a r nella formula appena scritta.

Il CIR può complicare notevolmente la scrittura dell'equazione di equilibrio dei momenti quando il membro si trova con i versori delle traiettorie paralleli in alcuni istanti. Il centro di massa, per la definizione sovrastante, è solidale al corpo rigido e perciò facilmente individuabile. L'equazione di equilibrio dei momenti, in questo caso, trascurava gli eventuali effetti gravitazionali: questi sarebbero uniformemente distribuiti e perfettamente equilibrati rispetto al centro di massa. La conseguente coincidenza tra centro di massa e centro di gravità ci permette di parlare di baricentro del corpo rigido.

7.2. Scrittura delle equazioni di equilibrio del corpo rigido

I membri del D-Drive hanno una massa non trascurabile, ragione per cui è necessario equilibrare gli effetti inerziali. Questo passo ulteriore è facilitato dalla scelta di adottare il baricentro del membro come polo di equilibrio delle sollecitazioni.

Le masse di ciascun membro sono considerate unitarie e uniformemente distribuite all'interno delle dimensioni significative.

7.2.1. Asta movente e asta cedente

Come introdotto nel capitolo 1 le coppie rotoidali, presenti comunque alle estremità dei membri, generano delle reazioni vincolari che impediscono la traslazione. Per la precisione tratteremo tali reazioni con due componenti, F_x e F_y , parallele agli assi di riferimento del piano di moto.

Con riferimento alla geometria essenziale di figura 7.3 e alla distribuzione delle masse adottata il baricentro di un'asta si trova nella mezzera della medesima. Risulta quindi di notevole importanza la scrittura del momento d'inerzia d'asta rispetto a questo punto, indicato con I_G :

$$I_G = \frac{m_i \cdot z_i^2}{12}$$

Questa formula riguarda la scrittura della terza equazione di equilibrio, mentre le prime due si scrivono intuitivamente equilibrando le leggi di Newton in orizzontale e in verticale. Ogni membro del meccanismo, in generale, vede un equilibrio nella forma:

$$\begin{cases} F_{xP1} - F_{xP2} = m_i \ddot{x}_{Gi} \\ F_{yP1} - F_{yP2} = m_i (\ddot{y}_{Gi} + g) \\ (F_{xP1} + F_{xP2}) \cdot z_i \sin \varphi_i - (F_{yP1} + F_{yP2}) \cdot z_i \cos \varphi_i + M_{P1} = 2I_{Gi} \ddot{\varphi}_i \end{cases}$$

Il sistema appena scritto vede indicate, oltre alle componenti e al momento d'inerzia, i seguenti parametri:

- m : massa del membro in questione;
- g : accelerazione di gravità [$m \text{ s}^{-2}$];
- z_i, φ_i : modulo [m] e fase [rad] del vettore significativo;
- $\ddot{\varphi}_i$: accelerazione angolare del membro [rad s^{-2}];
- \ddot{x}_{Gi} e \ddot{y}_{Gi} : componenti dell'accelerazione del baricentro [$m \text{ s}^{-2}$].

Per applicare operativamente il sistema si seguano le indicazioni della tabella 7.1.

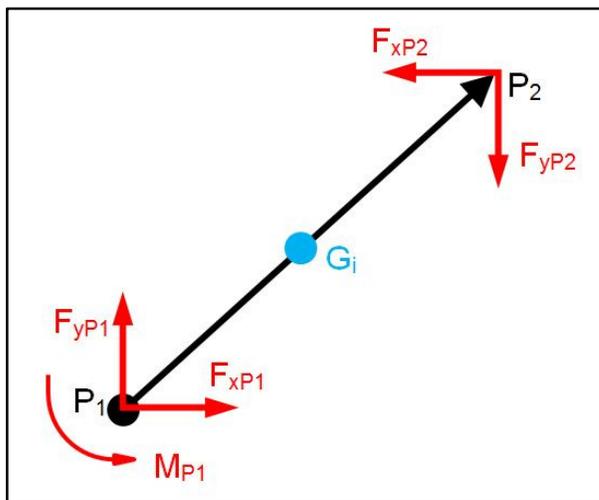


Figura 7.3: vettore significativo di asta movente o cedente. Sono evidenziate le componenti delle sollecitazioni più il momento motore al punto P_1 . I punti P_1 e P_2 rappresentano le coppie rotoidali agli estremi, mentre G_i rappresenta il baricentro.

| Nome in figura | Valore movente | Valore cedente |
|----------------|----------------|----------------|
| i | 1 | 3 |
| P_1 | A | C |
| P_2 | B | D |
| M_{P1} | M_A | 0 |
| F_{xP1} | F_{xA} | F_{xC} |
| F_{yP1} | F_{yA} | F_{yC} |
| F_{xP2} | F_{xB} | F_{xD} |
| F_{yP2} | F_{yB} | D_{yD} |

Tabella 7.1: sostituzioni da effettuare sui parametri della figura per applicare operativamente il sistema di equilibrio del corpo rigido.

Per la sostituzione delle sollecitazioni F_x e F_y non ci sono particolari difficoltà. Una considerazione a parte va fatta invece per la coppia M_{P_1} (figura 7.3): si tratta infatti di una sollecitazione esterna applicata e non di una reazione vincolare. Essendo il D-Drive una catena cinematica a un grado di libertà, e a coordinata libera angolare, è necessario un solo motore per generare il movimento richiesto. La coppia da questi generata, a questo punto chiamata M_A , è incognita assieme alle forze scambiate nelle cerniere del quadrilatero. Queste ultime, per semplicità di trattazione, sono ipotizzate ad attrito trascurabile; in caso contrario si genererebbero delle ulteriori coppie.

7.2.2. Corpo di biella

Nell'introduzione del paragrafo si era accennato a un riferimento alla geometria significativa dei membri. Consideriamo quindi il corpo biella corrispondente al triangolo con vertici BCE, ovvero con lati la biella principale e le bielle secondarie a movente e a cedente. Il baricentro del corpo biella sarà perciò il baricentro geometrico.

Volendo trattare in generale la problematica è necessario specificare un braccio, cioè la distanza tra il baricentro e la coppia rotoidale di applicazione della forza. Il baricentro del triangolo significativo, chiamato G_2 d'ora in poi, non è allineato alle coppie rotoidali B e C a meno che non lo sia anche il punto di biella E. Una volta terminata l'analisi cinematica di posizione, e note di conseguenza le coordinate dei punti significativi è facile risalire alla posizione del baricentro geometrico:

$$\begin{Bmatrix} x_{G_2} \\ y_{G_2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{Bmatrix} x_B + x_C + x_E \\ y_B + y_C + y_E \end{Bmatrix}$$

Questa formula, per la solidarietà del moto baricentro-triangolo, vale anche per il calcolo delle componenti di velocità e accelerazione, ovviamente dopo le opportune analisi.

I bracci che si otterranno saranno chiamati z_7 e z_8 , con la stessa logica che ha visto chiamare z_5 e z_6 le due bielle secondarie (figura 7.4).

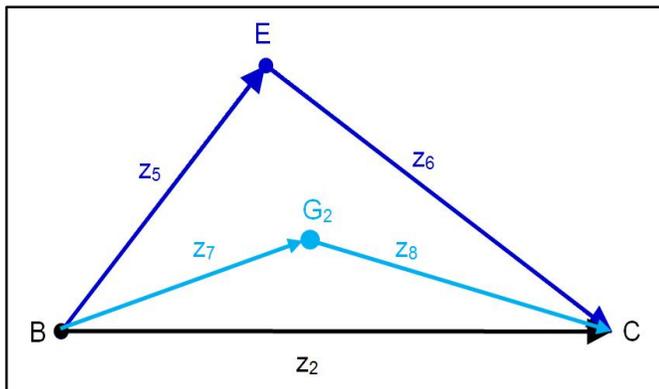


Figura 7.4: triangolo significativo di un generico corpo di biella. In blu sono riportate le bielle secondarie, in azzurro i vettori braccio tra baricentro e coppie rotoidali.

Si possono calcolare moduli e fasi dei vettori braccio senza ripetere quindi l'analisi cinematica:

$$z_7 = \sqrt{(y_{G2} - y_B)^2 + (x_{G2} - x_B)^2}, \quad \varphi_7 = \text{atan2}(y_{G2} - y_B, x_{G2} - x_B)$$

$$z_8 = \sqrt{(y_{G2} - y_C)^2 + (x_{G2} - x_C)^2}, \quad \varphi_8 = \text{atan2}(y_{G2} - y_C, x_{G2} - x_C) \pm \pi$$

Il sistema di equazioni di equilibrio del corpo di biella, osservando anche la figura 7.5, diventa:

$$\begin{cases} F_{xB} - F_{xC} = m_2 \ddot{x}_{G2} \\ F_{yB} - F_{yC} = m_2 (\ddot{y}_{G2} + g) \\ (F_{xB} \sin \varphi_7 - F_{yB} \cos \varphi_7) \cdot z_7 + (F_{xC} \sin \varphi_8 - F_{yC} \cos \varphi_8) \cdot z_8 = I_{G2} \ddot{\varphi}_2 \end{cases}$$

È da notare che la formula per il calcolo del momento d'inerzia, rispetto a un asse passante per il baricentro e ortogonale al piano del triangolo, applicata allo studio del D-Drive, è:

$$I_{G2} = \frac{m_2}{36} (z_2^2 + z_5^2 + z_6^2)$$

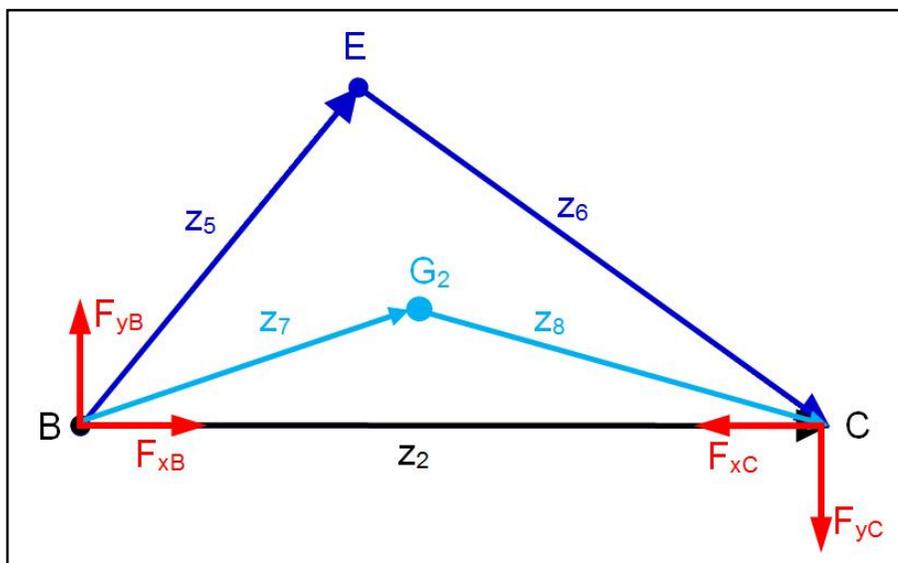


Figura 7.5: triangolo generico di biella con le componenti delle sollecitazioni applicate alle due coppie rotoidali. Si nota come il disallineamento del punto di biella rispetto alle coppie B e C faccia appartenere i vettori braccio a due rette diverse. Anch'essi quindi sono solidali alla biella.

7.3. Analisi dinamica e illustrazione risultati

Al termine del ragionamento del paragrafo precedente si ottiene un sistema lineare di nove equazioni e nove incognite, senza l'aggiunta di equazioni ausiliarie. I termini noti, come dicono le stesse equazioni, dipendono esclusivamente dalle masse dei membri, e quindi rappresentano tutti gli effetti inerziali (e gravitazionali) del D-Drive.

Per il confronto dinamico si sono scelti i meccanismi ottenuti nelle prime due prove a sintesi per generazione grafica di moto piano, data la loro grande similitudine costruttiva. Si ricorda che le masse sono unitarie e uniformemente distribuite all'interno delle dimensioni significative.

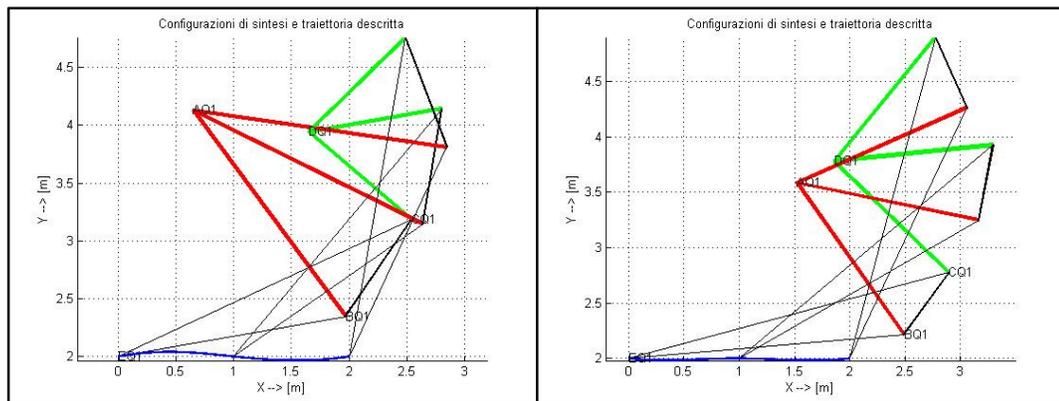


Figure 7.6a e 7.6b: rappresentazioni dei punti di precisione risolti con la sintesi per generazione grafica di moto piano (prove 1 e 2).

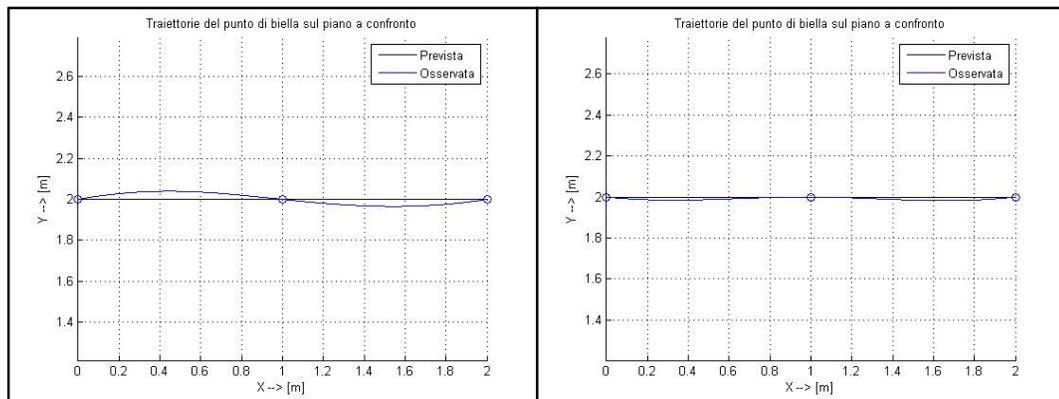


Figure 7.7a e 7.7b: rappresentazioni dei confronti delle traiettorie generate dai D-Drive in esame (prove 1 e 2). Si nota immediatamente che il secondo meccanismo presenta un range di biella più ristretto.

L'osservazione di queste figure ci porterebbe a scegliere il secondo meccanismo. È facile notare che il primo disegna un range di biella più esteso e per forza dovrà avere in certi punti una curvatura leggermente maggiore tra i primi due punti di precisione.

Finito questo breve excursus passiamo all'illustrazione dei profili dinamici. Per meglio mettere a fuoco la natura delle forze si è pensato di eliminare le componenti calcolate in precedenza sostituendole con i loro moduli: non si perde quindi la validità della terza legge di Newton su azione e reazione.

I fenomeni di vibrazione si possono verificare per repentine variazioni, sia in direzione che in modulo, delle forze scambiate negli accoppiamenti. In questa sede l'approccio allo studio delle vibrazioni è sui moduli delle forze:

$$\|F\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F(\varphi_1)$$

Nei grafici che seguono è importante fare attenzione alle scale degli assi cartesiani: mentre per le ordinate non dovrebbero esserci problemi, in ascissa è difficile stabilire a colpo d'occhio l'effettiva criticità di una variazione di forza. La soluzione più conveniente a questo scopo è la derivazione rispetto alla coordinata libera di posizione:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta x}$$

Definendo con F una sollecitazione generica e φ la variabile di derivazione:

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{F(\varphi_{k+1}) - F(\varphi_k)}{\Delta\varphi}$$

Le formule qui illustrate corrispondono a quelle della derivata di Eulero all'indietro, e si basano su differenze di valori di primitiva rapportate a variazioni di ascissa. Il metodo euleriano è uno dei più semplici e non richiede grandi impieghi di memoria, ma la vera motivazione a questa scelta è la definizione della primitiva attraverso dei punti notevoli. Come per la posizione, la velocità e l'accelerazione dei membri, anche le forze scambiate e il momento motore richiesto dipendono dalla configurazione del D-Drive.

La criticità di una variazione di forza è intuibile nei diagrammi della derivata prima e confermata da quelli della derivata seconda. Per semplicità di lettura si presentano queste operazioni punto per punto: va ricordato che delle variazioni molto accentuate di una funzione corrispondono a valori molto alti della derivata, e quindi delle variazioni a gradino in velocità portano ad accelerazioni infinite. Un meccanismo che presenta una legge temporale delle sollecitazioni eccessivamente gravosa ha valori di derivata seconda molto alti.

Nelle pagine che seguono si visualizzano i grafici delle prove suddette, a sinistra per la prova 1 e a destra per la prova 2.

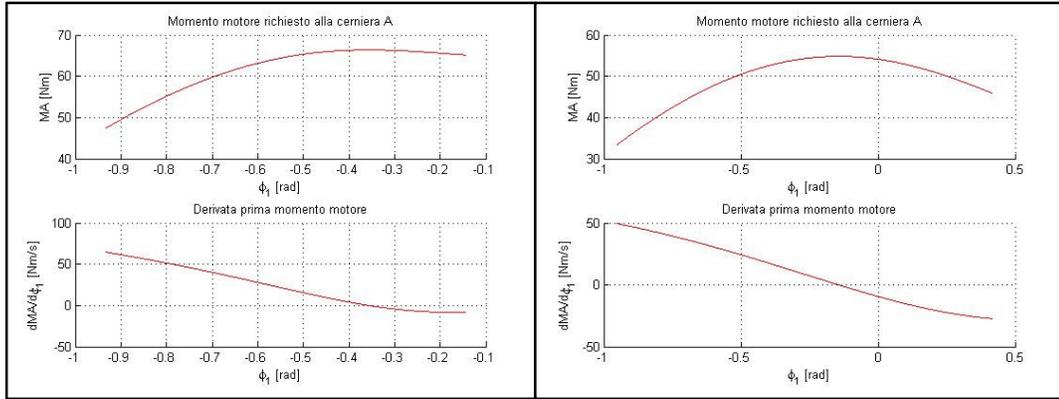


Figure 7.7a e 7.7b: grafici del momento motore richiesto nella coppia rotoidale a telaio. L'immediata osservazione delle scale delle due ordinate indurrebbe a preferire dinamicamente il meccanismo ottenuto nella prova 2.

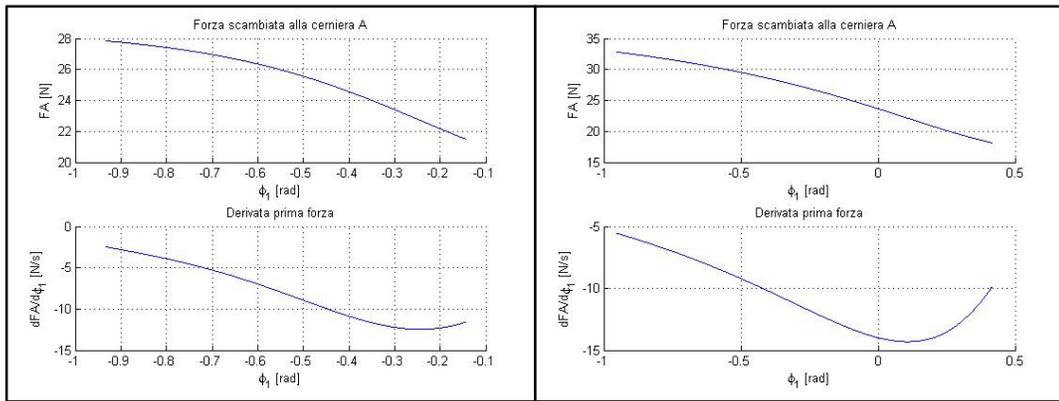


Figure 7.8a e 7.8b: grafici della forza scambiata nella coppia rotoidale A.

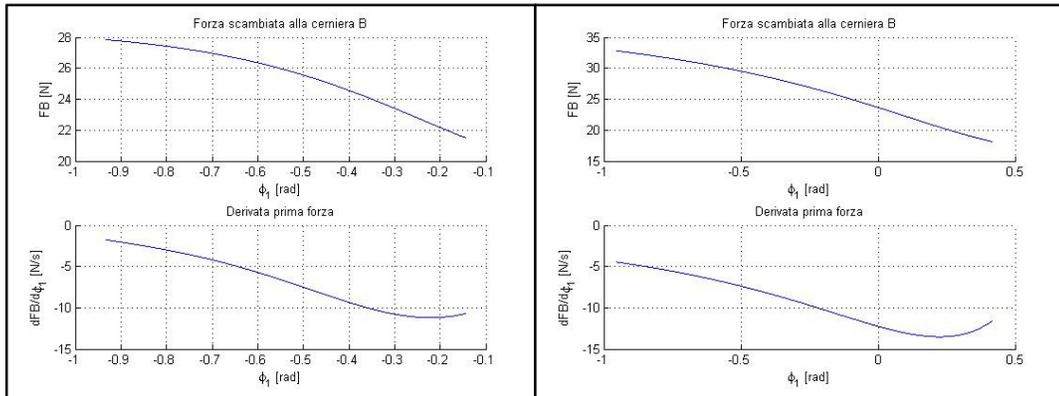


Figure 7.9a e 7.9b: grafici della forza scambiata nella coppia rotoidale B.

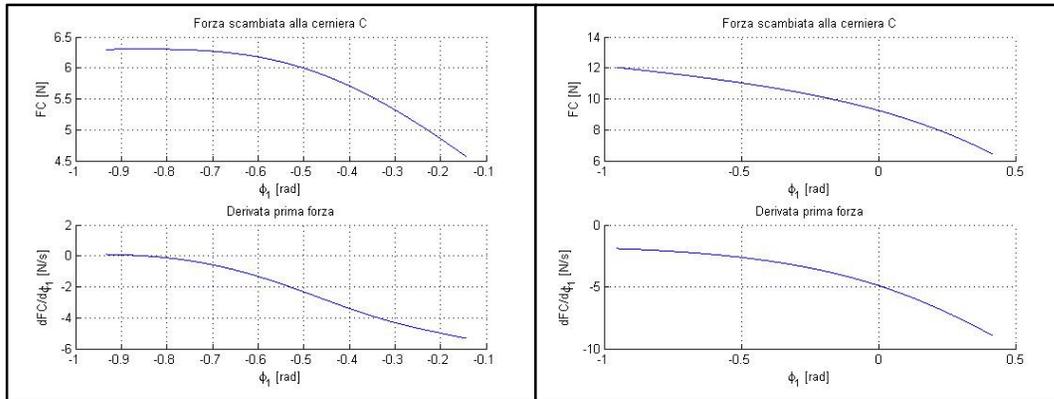


Figure 7.10a e 7.10b: grafici della forza scambiata nella coppia rotoidale C.

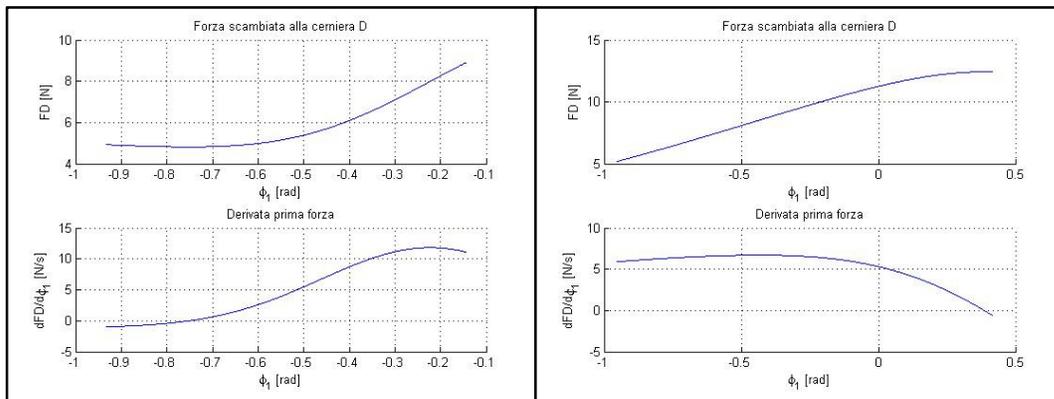


Figure 7.11a e 7.11b: grafici della forza scambiata nella coppia rotoidale D.

L'osservazione dei grafici appena proposti orienterebbe il progettista ad applicare il secondo meccanismo. Esso infatti possiede delle variazioni di forza sufficientemente regolari: questa proprietà è sostenuta dal fatto che il range angolare percorso dal movente è più ampio, con conseguenti cambiamenti di modulo delle sollecitazioni maggiormente distribuiti.

Conclusioni

Con questo elaborato si è proposta e studiata la problematica della sintesi dei meccanismi D-Drive. La sintesi a tre punti di precisione ha richiesto il tracciamento, grafico o analitico che sia, di curve semplici: si tratta perciò di una via poco costosa e poco gravosa da un punto di vista dei calcoli.

La scarsa quantità di punti di precisione però ha richiesto a posteriori un'attenta analisi della traiettoria ottenuta: nonostante le posizioni del punto di biella siano state allineate si evidenzia che talvolta, da una configurazione di precisione all'altra, possono presentarsi delle anomalie sia a livello locale che a livello globale.

In particolare il metodo dei determinanti di cerchio è stato proposto con un processo iterativo ritenuto sufficientemente preciso: il minor raggio di circonferenza è rilevato in dipendenza dai particolari punti selezionati. Infatti se intorno a una circonferenza abbiamo un'altra curva, tangente esternamente a due suoi punti, è facile intuire che all'interno di quell'intervallo quest'ultima dovrà presentare uno o più raggi di curvatura anche molto minori di quello rilevato. Anche in presenza di un range di biella molto ristretto, di uno scostamento tra le medie molto piccolo, di un prodotto scalare quasi unitario, il meccanismo può perdere la sua idoneità se la sua traiettoria non è quasi rettilinea.

I valori scelti per i dati dei problemi sono assolutamente arbitrari. Si faccia attenzione a quelli delle rotazioni del movente: impartendo una rotazione finale (e quindi un range angolare) di 180° si imponeva al membro A_0A di essere una manovella. Con sole quattro coppie rotoidali disponibili è molto difficile, poiché si corre il rischio di ricavare il D-Drive risolvibile in configurazioni che richiedono il cambio di gomito o il passaggio per singolarità cinematica.

Tra i metodi di sintesi affrontati in questo elaborato quello che ha visto maggiori difficoltà sul controllo delle dimensioni dei membri è l'analitico di generazione di traiettorie. Infatti osservando le figure nei capitoli 4 e 6 si nota che i D-Drive così ottenuti sviluppano delle dimensioni troppo grandi per gli spostamenti richiesti. Ciò può comportare, anche se non è stato studiato quantitativamente, degli effetti inerziali intollerabili.

Con i metodi grafici del moto piano si controllano invece le dimensioni del corpo biella, al posto però del comportamento del membro a telaio considerato movente. Si è rivelato molto difficile ottenere sistemi a manovella-bilanciere, ma i D-Drive ottenuti mostrano una compattezza dimensionale e una semplicità costruttiva soddisfacenti.

Sui metodi grafici delle traiettorie si può trarre una conclusione comune: è facile ottenere meccanismi passanti per singolarità cinematica o che realizzano traiettorie

indesiderate. Anche qui, pur imponendo due ipotetici punti morti al movente a 180° di distanza angolare, è difficile che questo sia una manovella, soprattutto se vede la sua coppia rotoidale troppo vicina alla traiettoria del punto i biella.

Per quanto riguarda il confronto dinamico sono stati analizzati solo due campioni tra quelli sintetizzati, con la restrizione di una ragionevole similitudine costruttiva. Si è visto che delle piccole variazioni in dimensione del corpo biella, in rotazioni tra punti di precisione e in posizione di coppie rotoidali impongono, in alcuni accoppiamenti, degli scambi di forze molto differenti.

Va ricordato anche che tutti i grafici delle configurazioni sono stati espressi in metri, pur essendo definibili a meno della scala e dell'orientazione del disegno: la scelta di una traiettoria prevista orizzontale è dettata da semplicità progettuale, sintetica e analitica oltre che da un'immediata comparabilità. A seconda dello specifico contesto applicativo i D-Drive possono essere scalati in dimensioni assolute, preservando il moto relativo.

Se questi meccanismi sono ben progettati possono sostituire egregiamente altre soluzioni che provocano attrito, oppure essere impiegati dove un comune biella-manovella non trova lo spazio per inserire una guida.

In questo elaborato si è appena accennato al metodo di generazione di funzioni. Essi non possono essere direttamente applicati per la sintesi pura dei D-Drive, non solo per l'ingovernabilità del punto di biella, ma anche per concentrarsi sulla pura conversione da un moto rotativo a un moto rettilineo. Con questo metodo può essere eventualmente sintetizzato un ulteriore quadrilatero, nei sistemi a due bilancieri, considerando uno dei due come il cedente di questi: in questo modo si stabilisce un rapporto temporale di manovella o una legge di moto desiderata per la particolare applicazione.

* * *

A conclusione di questo lavoro, che mi ha molto appassionato, il mio grazie al prof. Dario Richiedei che, ultimo ma non ultimo, ha fatto con me una parte di cammino, seguendomi con grande attenzione e pazienza.

Bibliografia

- [1]. Ghigliazza U., Galletti C, Meccanica applicata alle macchine, UTET, Torino, 1986
- [2]. Magnani P. L., Ruggieri G., Meccanismi per macchine automatiche, UTET, Torino, 1986
- [3]. Moresco R., Elementi di algebra e di geometria, Edizioni Libreria Progetto, Padova, 1996
- [4]. Gambolati G., Lezioni di metodi numerici, Libreria Internazionale Cortina, Padova, 2003
- [5]. Giovagnoni M., Rossi A., Una introduzione allo studio dei meccanismi, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 2002
- [6]. Mazzoldi P., Nigro M., Voci C., Elementi di Fisica. Meccanica e Termodinamica, Edises, Napoli, 2008

Sitografia

- [1]. http://www.df.unipi.it/~cella/ueg/es_sec:CM-I-triangolo.pdf
- [2]. http://diem1.ing.unibo.it/mechmach/rivola/forli/mam_II/01SistemiArticolati.pdf