

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

## Il rischio di controparte, con una applicazione ai mercati energetici

*Laureando:*  
Mauro Timini  
mat. 1014214

*Relatore:*  
Ch.mo Prof. Tiziano Vargiolu

Anno Accademico 2014/2015  
Padova, 24 aprile 2015



# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di teoria</b>	<b>3</b>
1.1	I processi stocastici . . . . .	3
1.2	Il moto browniano . . . . .	4
1.3	L'integrale stocastico . . . . .	5
1.4	La formula di Itô . . . . .	6
1.5	Equazioni differenziali stocastiche . . . . .	7
1.6	La misura martingàla . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Esposizione al rischio di controparte</b>	<b>11</b>
2.1	Mark-To-Market . . . . .	12
2.2	Expected MtM . . . . .	12
2.3	Credit Exposure . . . . .	12
2.4	Expected Exposure . . . . .	13
2.5	Potential Future Exposure . . . . .	14
2.6	Expected Positive Exposure . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Riduzione dell'esposizione al rischio di controparte</b>	<b>17</b>
3.1	Strategie di netting . . . . .	17
3.2	Strategie di netting: un esempio di stima della riduzione del rischio di controparte . . . . .	20
3.3	Marginal Exposure . . . . .	22
3.4	Utilizzo di collaterale . . . . .	26
3.5	Parametri legati al collaterale . . . . .	26
3.6	Totale collateralizzazione . . . . .	28
3.7	Parziale collateralizzazione . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Stima dell'esposizione al rischio di controparte</b>	<b>33</b>
4.1	Stima attraverso un parametro . . . . .	34
4.2	Metodi semianalitici . . . . .	34
4.3	Metodo Monte Carlo . . . . .	36
4.3.1	Scelta dei fattori di rischio e del modello . . . . .	36
4.3.2	Generazione degli scenari . . . . .	37
4.3.3	Valutazione della posizione al variare degli scenari . . . . .	39

4.3.4	Netting ed Exposure . . . . .	39
4.3.5	Influenza di fattori esterni . . . . .	39
4.3.6	Descrizione della Exposure . . . . .	40
4.4	Esempi . . . . .	40
4.4.1	Azioni . . . . .	41
4.4.2	Commodities . . . . .	41
4.4.3	Tassi di cambio valuta . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Il rischio di credito</b>	<b>47</b>
5.1	Probabilità di insolvenza . . . . .	47
5.2	I modelli strutturali per la stima della probabilità di insolvenza . . . . .	48
5.3	Insolvenza e Credit Default Swaps . . . . .	49
5.4	Il Credit Value Adjustment . . . . .	55
5.5	Espressione del CVA in funzione della Exposure . . . . .	57
5.6	Espressione del CVA in forma di versamenti periodici . . . . .	58
5.7	CVA del prezzo di una posizione lunga su un'opzione . . . . .	61
5.8	CVA e riduzione dell'esposizione . . . . .	62
5.9	Bilateral CVA . . . . .	63
5.10	Bilateral CVA in funzione della Exposure . . . . .	66
5.11	Bilateral CVA in presenza di walkaway clause . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Stima empirica del rischio di insolvenza</b>	<b>71</b>
6.1	Definizione del modello . . . . .	71
6.2	L'istante di insolvenza . . . . .	71
6.3	Calibrazione della probabilità di sopravvivenza . . . . .	73
6.4	Il processo dei prezzi . . . . .	74
6.5	Forward sul petrolio . . . . .	76
6.6	Swap sul petrolio . . . . .	81
6.7	Ipotesi generali sulle simulazioni svolte . . . . .	82
6.8	Simulazione di un Payer Commodity Swap . . . . .	83
6.9	Simulazione di un Receiver Commodity Swap . . . . .	85
<b>A</b>	<b>Codice sorgente</b>	<b>89</b>

# Introduzione

Il rischio di controparte in finanza consiste in una forma specifica di rischio di credito che caratterizza le transazioni in strumenti derivati, in particolare gli strumenti derivati non scambiati su mercati organizzati (over-the-counter). Più precisamente, dato un contratto od un insieme di contratti, la valutazione di tale rischio riguarda da un lato la stima delle potenziali perdite derivanti da un evento di insolvenza associato ad una o più delle controparti in questione e, dall'altro, la stima delle probabilità che suddetti eventi possano verificarsi. La necessità di quantificare il rischio di controparte si sta rivelando sempre più attuale, sia perchè si ha assistito, negli ultimi anni, ad una crescita esponenziale della dimensione dei mercati over-the-counter, sia perchè si è ormai concordi nell'affermare che la mancanza di rigore in tale valutazione è stata una delle cause che, insieme ad altri fattori, ha contribuito all'avvento della crisi finanziaria mondiale iniziata nel 2008.

Il lavoro svolto in questa tesi consiste in due componenti principali: dapprima vengono sviluppati, ispirandosi ad [8], alcuni modelli matematici finalizzati alla stima dell'esposizione al rischio di controparte e della probabilità associata ad un dato evento di insolvenza e, quindi, basandosi su quanto svolto in [5] e sulla teoria sviluppata nella prima parte, viene presentato un caso concreto di stima del rischio di controparte di alcuni derivati relativi al prezzo del petrolio.

Nel primo capitolo, di tipo introduttivo, vengono riportati alcuni concetti matematici di base relativi al calcolo delle probabilità, all'analisi stocastica ed ai metodi stocastici per la finanza e che verranno utilizzati frequentemente all'interno della tesi.

Nel secondo capitolo, dopo aver fornito una breve descrizione del rischio di controparte in finanza, vengono definiti da un punto di vista matematico alcuni strumenti finalizzati alla stima dell'esposizione a tale rischio. Più precisamente, vengono introdotti i concetti di Mark-to-Market, Credit Exposure, Expected Exposure, Potential Future Exposure ed Expected Positive Exposure.

Nel terzo capitolo vengono presentate alcune tecniche utilizzate in ambito finanziario al fine di ridurre l'esposizione al rischio di controparte ed, in particolare, si forniscono alcuni modelli matematici che descrivono l'impatto di suddette strategie sui valori assunti dalle metriche introdotte nel capitolo precedente.

Nel quarto capitolo vengono presentati alcuni modelli finalizzati alla stima empirica di alcune delle quantità descritte nel secondo capitolo, supponendo di impiegare le strategie di riduzione appena introdotte, e particolare enfasi viene data alle tecniche che si basano sulla simulazione di un numero arbitrario di scenari attraverso il metodo Monte Carlo.

Nel quinto capitolo viene introdotto il concetto matematico di probabilità di insolvenza e vengono presentati alcuni modelli che forniscono una formula chiusa relativamente a tale quantità. Viene definito, quindi, il Credit Value Adjustment (CVA), che consiste in una stima del rischio di insolvenza di una o più controparti e dipende sia dall'esposizione a tale rischio che dalle relative probabilità di insolvenza.

Nell'ultimo capitolo, che si basa su quanto svolto in [5], innanzitutto viene presentato il modello di Cox-Ingersoll-Ross, che si suppone descrivere l'evoluzione dell'intensità della probabilità di insolvenza, ed in seguito viene fornito un ulteriore modello per l'andamento del prezzo del petrolio. Dopo aver posto le basi teoriche, tali processi vengono approssimati, tramite lo schema di Eulero, con opportuni processi a tempo discreto ed infine, dopo aver svolto, utilizzando `Matlab`, le simulazioni di un determinato numero di scenari, viene calcolata l'approssimazione del CVA.

All'interno dell'appendice, inoltre, viene riportato il codice implementato al fine di eseguire le suddette simulazioni e le conseguenti stime.

# Capitolo 1

## Richiami di teoria

In questo capitolo preliminare richiamiamo alcuni concetti e risultati di analisi stocastica che utilizzeremo frequentemente all'interno della tesi. Più precisamente, dapprima introduciamo tutti gli strumenti necessari per definire il concetto di moto browniano e di equazione differenziale stocastica e di dinamica di un processo stocastico, i quali saranno utilizzati frequentemente all'interno della tesi, ed, in seguito, definiremo in maniera rigorosa una modellizzazione matematica del concetto finanziario di assenza di opportunità di arbitraggio, poichè su tale ipotesi sarà fondata, dal punto di vista matematico, tutta la trattazione presente all'interno del lavoro. Consideriamo, all'interno di tutta la sezione, uno spazio di probabilità filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , che supponiamo essere fissato, mentre con  $(E, \mathcal{E})$  designamo un opportuno spazio misurabile.

### 1.1 I processi stocastici

**Definizione 1** (Processi stocastici). Un *processo stocastico*  $X$  definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  ed a valori in  $(E, \mathcal{E})$  è una famiglia di variabili aleatorie  $X := \{X_t\}_{t \in I}$  (ove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è detto *insieme dei tempi*) tale che  $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P) \rightarrow (E, \mathcal{E}), \forall t \in I$ .

Da qui in avanti, supponiamo che la  $\sigma$ -algebra associata all'insieme  $E$  sia la  $\sigma$ -algebra dei boreliani ed indichiamola con  $\mathcal{B}(E)$ . Un processo stocastico  $X$ , definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , si dice *continuo* (rispettivamente: *quasi certamente continuo*) se per ogni  $\omega \in \Omega$  (rispettivamente: per quasi ogni  $\omega \in \Omega$ ) l'applicazione  $t \mapsto X_t(\omega)$ , definita su  $I$  ed a valori in  $(E, \mathcal{E})$ , è continua. Inoltre,  $X$  si dice *misurabile* se l'applicazione  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  è un'applicazione misurabile definita su  $(I \times \Omega, \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F})$  ed a valori in  $(E, \mathcal{B}(E))$ . Si dice, quindi, *progressivamente misurabile* se per ogni  $u \in I$  l'applicazione  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  è un'applicazione misurabile definita su  $([0, u] \times \Omega, \mathcal{B}([0, u]) \otimes \mathcal{F}_u)$  ed a valori in  $(E, \mathcal{B}(E))$ . Definiamo, ora, i seguenti spazi di processi stocastici, il cui utilizzo sarà necessario in seguito. Per ogni coppia di valori  $a, b \in I$  tali che  $0 \leq a < b$ , dunque, definiamo:

- lo spazio vettoriale  $M_{\text{loc}}^2[a, b]$  dei processi stocastici  $X := \{X_t\}_{t \in I}$  progressivamente misurabili e tali che  $P\left(\int_a^b X_t^2 dt < +\infty\right) = 1$  e, più in generale, lo spazio  $\mathcal{M}_{\text{loc}}^2$  dei processi  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  tali che  $\{X_t\}_{t \in [0, T]} \in M_{\text{loc}}^2[0, T]$ , per ogni  $T > 0$ ;
- lo spazio vettoriale  $M^2[a, b]$  dei processi stocastici  $X := \{X_t\}_{t \in I}$  progressivamente misurabili e tali che  $E\left(\int_a^b X_t^2 dt\right) < +\infty$ ;
- lo spazio vettoriale  $\mathcal{S}(a, b)$  dei processi stocastici (detti *semplici*) tali che per ogni processo  $X := \{X_t\}_{t \in I} \in \mathcal{S}(a, b)$  esistono  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  e delle variabili aleatorie  $C_j : (\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $C_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P)$ , per  $j = 1, \dots, k$ , tali che per ogni  $\omega \in \Omega$  si abbia

$$X_s(\omega) = \sum_{j=0}^{k-1} C_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(s), \quad \forall s \in [a, b];$$

- lo spazio vettoriale  $M_{\text{loc}}^1[a, b]$  dei processi stocastici  $X := \{X_t\}_{t \in I}$  progressivamente misurabili e tali che  $P\left(\int_a^b |X_t| dt < +\infty\right) = 1$  e, più in generale, lo spazio  $\mathcal{M}_{\text{loc}}^1$  dei processi  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  tali che  $\{X_t\}_{t \in [0, T]} \in M_{\text{loc}}^1[0, T]$ , per ogni  $T > 0$ .

Si dice, infine, che  $X$  è un processo *adattato alla filtrazione*  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  se per ogni  $t \in I$  la variabile  $X_t$  è misurabile come applicazione definita su  $(\Omega, \mathcal{F}_t)$  ed a valori in  $(E, \mathcal{B}(E))$ . Proviamo ora un fatto che ci tornerà utile in seguito: ovvero che  $\mathcal{S}[a, b] \subseteq M^2[a, b]$ . Supponendo che  $X \in \mathcal{S}[a, b]$  e riprendendo la notazione utilizzata nella definizione, osserviamo che per ogni  $s \in [a, b]$  fissato, se  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  è tale che  $s \in [t_j, t_{j+1})$ , allora  $X_s = X_{t_j}$  e, per ipotesi, è  $\mathcal{F}_{t_j}$ -misurabile, dunque è  $\mathcal{F}_s$ -misurabile e, in conclusione,  $X$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  ed, essendo continuo a destra, è possibile dimostrare (attraverso un lemma tecnico: a tal proposito, se lo si desidera, si consulti [7, Lemma 3.11 a pag 54]) che allora  $X$  è progressivamente misurabile. Inoltre osserviamo che, poichè  $X_s^2 = \sum_{j=0}^{k-1} C_j^2 \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(s)$ , allora  $E\left(\int_a^b X_s^2 ds\right) = \sum_{j=0}^{k-1} E(C_j^2) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(s)$  e poichè, per ipotesi,  $C_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P)$ , per  $j = 1, \dots, k$ , si conclude.

D'ora in avanti, restringiamo la trattazione supponendo  $(E, \mathcal{B}(E)) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Al fine di concludere la trattazione relativa ai processi stocastici definiamo, innanzitutto, *vettore aleatorio normale (o gaussiano)* una  $n$ -upla di variabili casuali  $(X_1, \dots, X_N)$ , ove  $N \in \mathbb{N}$ , tali che, per ogni  $u \in \mathbb{R}^N$ , la combinazione lineare  $\sum_{j=1}^N u_j X_j$  è una variabile aleatoria normale. Questo concetto ci consente di presentare la seguente definizione:

**Definizione 2** (Processo Gaussiano). Un processo stocastico reale  $X := \{X_t\}_{t \in I}$ , definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , si dice *gaussiano* se, per ogni scelta di  $t_1, \dots, t_N \in I$ , il vettore aleatorio  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})$  è normale.

## 1.2 Il moto browniano

Ora, dopo avere richiamato il concetto di processo stocastico, vogliamo definirne una tipologia particolare, il moto browniano, in quanto sarà fondamentale nella trattazione

dei modelli che presenteremo nel corso della tesi. Procediamo, innanzitutto, con due definizioni.

**Definizione 3** (Moto browniano). Si dice *moto browniano* un processo stocastico reale  $W := \{W_t\}_{t \geq 0}$ , definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , che soddisfa le seguenti proprietà:

- 1)  $W_0 = 0$  quasi ovunque su  $\Omega$ ;
- 2) Per ogni  $k \geq 2$  e per ogni  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < +\infty$  le variabili aleatorie  $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  sono indipendenti;
- 3) Per ogni scelta di  $t > s \geq 0$  si ha che la variabile casuale  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .
- 4) Per quasi ogni  $\omega \in \Omega$ , la funzione  $t \mapsto W_t(\omega)$ , definita su  $[0, +\infty]$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ , è continua.

Forniamo, inoltre, una caratterizzazione più forte del moto browniano supponendo che questo sia adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

**Definizione 4** (Moto browniano rispetto ad una filtrazione). Un processo stocastico reale  $W := \{W_t\}_{t \geq 0}$ , definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , si dice *moto browniano rispetto alla filtrazione*  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  (od equivalentemente  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -moto browniano) se  $W$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  ed inoltre valgono le seguenti proprietà:

- 1)  $W_0 = 0$  quasi ovunque su  $\Omega$ ;
- 2) Per ogni  $0 \leq s < t$  la variabile casuale  $W_t - W_s$  è indipendente da  $\mathcal{F}_s$ ;
- 3) Per ogni scelta di  $t > s \geq 0$  si ha che la variabile casuale  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .
- 4) Per quasi ogni  $\omega \in \Omega$ , la funzione  $t \mapsto W_t(\omega)$ , definita su  $[0, +\infty]$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ , è continua.

### 1.3 L'integrale stocastico

Consideriamo, ora, un processo  $X \in \mathcal{S}[a, b]$ , ove  $0 \leq a < b \leq +\infty$ , ovvero tale che, ricordiamo, esistono  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  e delle variabili aleatorie  $C_j : (\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $C_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P)$ , per  $j = 1, \dots, k$ , tali che per ogni  $\omega \in \Omega$  si abbia

$$X_s(\omega) = \sum_{j=0}^{k-1} C_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(s), \quad \forall s \in [a, b]$$

e definiamo *integrale stocastico del processo semplice*  $X \in \mathcal{S}[a, b]$  rispetto al moto browniano  $\{W_j\}_{j \geq 0}$  la variabile casuale

$$J_{a,b}(X) := \int_a^b X_t dt := \sum_{j=0}^{k-1} C_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

definita su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ . È possibile dimostrare (la dimostrazione è complessa e laboriosa e, dunque, si rimanda a [7, Capitolo 5, paragrafi da 5.1 fino a 5.3 incluso]) che tale definizione può essere estesa in maniera univoca allo spazio  $M^2[a, b]$ , così da ottenere la seguente definizione:

**Definizione 5.** Si definisce *integrale stocastico* l'unico operatore definito su  $M^2[a, b]$  ed a valori in  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tale che se  $X \in \mathcal{S}[a, b]$  la variabile aleatoria ottenuta applicando tale operatore ad  $X$  coincide con l'integrale stocastico di  $X$ , secondo la definizione data per i processi semplici.

Ora, data questa definizione, se fissiamo  $0 < T < +\infty$  e consideriamo  $X \in M^2[0, T]$ , risulta essere ben definito il processo stocastico  $\{I_t\}_{t \in [0, T]}$  tale che per ogni  $t \in [0, T]$  si abbia  $I_t := J_{0,t}(X)$  e si può dimostrare (si veda [7, pag.89]) che tale processo è una martingàla di quadrato integrabile avente variazione quadratica  $\langle I \rangle_t = \int_0^t X_u^2 du$ . Possiamo, quindi, definire l'integrale stocastico anche nello spazio  $M_{\text{loc}}^2[0, T]$ , per ogni  $T > 0$ , riportando il seguente risultato (la cui dimostrazione è consultabile in [7, pag.94])

**Definizione 6.** Dato  $X \in M_{\text{loc}}^2[0, T]$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  la variabile casuale definita su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  da  $\tau_n := \inf \left\{ t \in [0, T] \mid \int_0^t X_u^2 du > n \right\}$  è un tempo di arresto ed il processo  $\{X_u^{(n)}\}_{u \in [0, T]}$  definito, per ogni  $u \in [0, T]$ , da  $X_u^{(n)} := X_u \mathbf{1}_{[0, \tau_n)}(u)$  appartiene ad  $M^2[0, T]$ . Si definisce *integrale stocastico* del processo  $X \in M_{\text{loc}}^2[0, T]$  rispetto al moto browniano  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  il processo  $\{I_t\}_{t \in [0, T]} =: \left\{ \int_0^t X_u dW_u \right\}_{t \in [0, T]}$  tale che, per ogni  $t \in [0, T]$ , si abbia

$$I_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_t^n(\omega), \forall \omega \in \Omega,$$

ove, per ogni  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $I_t^{(n)} := \int_0^t X_u^{(n)} dW_u$ .

## 1.4 La formula di Itô

In questa sezione definiamo la formula di Itô generale (per le dimostrazioni si veda [7, Capitolo 6]) avendo fissato un moto browniano  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ .

**Definizione 7** (Processo di Itô). Un processo stocastico reale e quasi certamente continuo  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  è detto *processo di Itô* se esistono due processi  $\phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2$  e  $\psi = \{\psi_t\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^1$  tali che quasi certamente si abbia

$$X_t - X_0 = \int_0^t \phi_s dW_s + \int_0^t \psi_s ds, \forall t \geq 0.$$

Nel seguito della trattazione spesso troveremo formule della stessa tipologia di quella appena scritta, ovvero che mettono in relazione gli incrementi di un processo stocastico (rappresentati nel membro sinistro) e la somma di integrali stocastici e/o di Lebesgue (rappresentati nel membro destro) e, pertanto, introduciamo la *notazione differenziale*

$$dX_t = \phi_t dW_t + \psi_t dt$$

la quale da intendersi come una scrittura che esprime la medesima relazione presente nella definizione sopra.

**Teorema 1** (Formula di Itô). *Sia  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un processo di Itô tale che  $dX_t = \phi_t dW_t + \psi_t dt$  e sia  $F = F(t, x) : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^{1,2}$ , allora, per ogni  $t \geq 0$ , si ha*

$$F(t, X_t) - F(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s,$$

ovvero, nella notazione differenziale, si ha

$$dF(t, X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t.$$

## 1.5 Equazioni differenziali stocastiche

All'interno di questa sezione, sia  $T \in \mathbb{R}$  fissato e siano  $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni.

**Definizione 8** (Equazioni differenziali stocastiche). Una soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t) dW_t + b(t, X_t) dt \\ X_0 = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

è il dato di:

- uno spazio filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ ;
- un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ -moto browniano  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ , definito su  $\Omega$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ ;
- un processo  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ , definito su  $\Omega$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ , quasi certamente continuo ed adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  tale che  $\{\sigma(s, X_s)\}_{s \in [0, T]} \in M_{\text{loc}}^2[0, T]$  e  $\{b(s, X_s)\}_{s \in [0, T]} \in M_{\text{loc}}^1[0, T]$  e

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t b(s, X_s) ds,$$

per ogni  $t \in [0, T]$ .

Si osservi che è possibile utilizzare la *notazione differenziale* introdotta precedentemente: più precisamente, diremo che un processo  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ , il quale risolve l'equazione differenziale stocastica presente nella definizione, ha condizioni iniziali  $X_0 = x \in \mathbb{R}$  ed ha dinamica  $dX_t = \sigma(t, X_t) dW_t + b(t, X_t) dt$ . Ora procediamo enunciando un teorema che permette di stabilire una condizione sufficiente perché una data equazione differenziale abbia soluzione.

**Teorema 2** (Esistenza ed unicità per traiettorie). *Se le funzioni  $b$  e  $\sigma$  sono tali da verificare i seguenti fatti:*

- *le funzioni  $b$  e  $\sigma$  sono lipschitziane, ovvero esiste  $M > 0$  tale che per ogni  $t \in [0, T]$  ed  $x, y \in \mathbb{R}$  si abbia  $|b(t, x) - b(t, y)| \leq M|x - y|$  e  $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|$ ;*
- *esiste  $M > 0$  tale che, per ogni  $t \in [0, T]$  ed  $x \in \mathbb{R}$ , si abbia rispettivamente  $|b(t, x)|^2 \leq M(1 + |x|^2)$  e  $|\sigma(t, x)|^2 \leq M(1 + |x|^2)$ .*

*Allora, per ogni spazio filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ , su cui è definito un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ -moto browniano  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$  esiste un processo  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]} \in M^2[0, T]$  che risolve l'equazione differenziale stocastica appena definita ed, inoltre, ogni altra soluzione  $X'$  appartiene ad  $M^2[0, T]$  ed è tale che  $P(X_t = X'_t, \forall t \in [0, T]) = 1$ .*

Ora riportiamo un esempio in cui è possibile, in virtù del teorema appena enunciato, stabilire l'esistenza e l'unicità per traiettorie di processi stocastici che risolvono una data equazione differenziale: supponiamo, a tal proposito, di aver fissato  $T \in \mathbb{R}$  tale che  $0 < T < +\infty$  uno spazio filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ .

**Esempio 1.** *Analizziamo, innanzitutto, il caso in cui  $b(t, x) \equiv b \in \mathbb{R}$  e  $\sigma(t, x) \equiv \sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ovvero quando le funzioni presenti all'interno dell'equazione sono costanti e, quindi, si tratta di risolvere*

$$\begin{cases} dX_t = \sigma dW_t + bdt \\ X_0 = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*ed in tal caso è banale osservare che le condizioni espresse dal teorema di esistenza ed unicità per traiettorie sono soddisfatte, dunque esistono un moto browniano  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$  ed almeno un processo  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]} \in M^2[0, T]$  che risolva l'equazione. In questo caso, è anche semplice trovare una soluzione esplicita, dato che i termini da integrare sono costanti, ovvero  $X_t := x + \sigma(W_t - W_0) + bt$  risolve l'equazione e tutte le altre soluzioni differiscono al più su un insieme di misura nulla.*

Nel corso della trattazione, inoltre, ci ritroveremo, in svariati contesti, a dover stabilire le condizioni sufficienti affinché sia garantita l'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali stocastiche, basandoci esclusivamente sul teorema qui enunciato, e rimandiamo alle opportune sezioni la discussione di tali casi specifici.

## 1.6 La misura martingàla

Consideriamo, come sempre, uno spazio di probabilità filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ , ove  $T \in \mathbb{R}$  e  $0 < T < +\infty$  e supponiamo, per semplicità, che nel mercato esista un unico titolo finanziario rischioso avente dinamica

$$dS_t = s_t[\mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t],$$

ove  $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$  è un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ -moto browniano ed esista un unico titolo privo di rischio  $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$  avente dinamica

$$dB_t = r_t B_t dt,$$

ove  $r_t : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione deterministica.

**Definizione 9.** Una *misura martingàla*  $Q$  è una misura di probabilità su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$  tale che

- i)  $Q$  è equivalente a  $P$ ;
- ii) Il processo  $\{\tilde{S}_t\}_{t \in [0, T]}$  definito, per ogni  $t \in [0, T]$ , da  $\tilde{S}_t := e^{-\int_0^t r_s ds} S_t$  è una martingàla rispetto alla misura  $Q$  ed, in particolare, vale la formula di valutazione neutrale al rischio:

$$S_t = E^Q \left[ e^{-\int_0^t r_s ds} S_T | \mathcal{F}_t \right].$$

Ora procediamo riportando alcune definizioni e teoremi che consentano di definire matematicamente il concetto di assenza di opportunità di arbitraggio e la relazione con la nozione di misura martingàla.

**Definizione 10** (Strategie autofinanzianti). Una *strategia* (o *portafoglio*) è un processo  $h = (\alpha, \beta)$  a valori in  $\mathbb{R}^2$  e tale che, rispettivamente,  $\alpha \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2$  e  $\beta \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2$ . Il *valore* di tale strategia è il processo reale  $\{V_t^h\}_{t \in [0, T]}$ , definito da

$$V_t^h := \alpha_t S_t + \beta_t B_t, \forall t \in [0, T].$$

Una strategia si dice *autofinanziante* se vale  $dV_t^h = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t$ .

**Definizione 11.** Si definisce *opportunità di arbitraggio* all'interno di un mercato finanziario una strategia autofinanziante  $\{V_t^h\}_{t \in [0, T]}$  tale che si abbia  $V_0^h = 0$ ,  $P(V_T^h \geq 0) = 1$  e  $P(V_T^h > 0) > 0$ .

Riportiamo, quindi, il seguente risultato:

**Teorema 3.** *Nel modello di mercato descritto, esiste una misura martingàla equivalente  $Q$  se e solo se non esistono opportunità di arbitraggio.*

Se si desidera approfondire i concetti ed i teoremi trattati in questa sezione, si vedano [3, pag. 92, pag. 144] e [11, paragrafi 10.3.1 e 10.3.3].



## Capitolo 2

# Esposizione al rischio di controparte

Si definisce *rischio di controparte* il rischio che, dopo aver stipulato un contratto di tipo finanziario con un determinato soggetto (la controparte), questo si trovi, in futuro, nella condizione di non riuscire o non volere adempire agli obblighi previsti dal contratto stesso. Tale rischio è tipicamente originato da due distinte classi di prodotti finanziari: i derivati Over The Counter (come, ad esempio, gli Swaps sui tassi di interesse, i contratti a termine Forwards, oppure i Credit Default Swaps) e gli SFTs (Securities Financing Transactions), che sono strumenti finanziari aventi come tratti distintivi il prestito e/o la vendita ed il riacquisto di titoli. I contratti conducibili a queste due categorie, infatti, generano una quantità, detta *esposizione al rischio di credito*, che corrisponde al credito, in termini monetari, detenuto nei confronti della controparte in base ai vincoli previsti dai contratti stipulati con essa e che dipende, in generale, da una o più attività finanziarie sottostanti presenti nel mercato. Il rischio di controparte consiste innanzitutto nel rischio di credito, ovvero nell'eventualità che la controparte, in generale, sia impossibilitata o reticente ad adempire, anche solo parzialmente, agli obblighi previsti e ad onorare eventuali debiti. Poichè, inoltre, il valore dell'esposizione al rischio di credito dipende dal valore delle attività sottostanti il contratto, il rischio di controparte deriva anche dal rischio di mercato, il quale riguarda, appunto, le variazioni dei prezzi delle varie attività finanziarie nel breve periodo. Caratterizzare l'esposizione al rischio di controparte consiste, in generale, nel quantificare la potenziale perdita che si verificherebbe qualora la controparte, a partire da un dato istante compreso tra l'istante attuale e la data di scadenza, non fosse in grado o fosse reticente ad onorare gli obblighi previsti dal contratto. Si tratta, quindi, di calcolare, in termini monetari, la quantità esposta al rischio di insolvenza della controparte ad un istante di tempo fissato, che supponiamo essere l'istante attuale, e di stimare il valore che potrebbe assumere negli istanti futuri, fino alla data di scadenza: a tal proposito introdurremo, nel corso del capitolo, i concetti di Mark-to-Market e di Credit Exposure. Per quanto riguarda, invece, la stima dell'esposizione al rischio di controparte in un istante futuro, quindi diverso da quello attuale, presenteremo i concetti di Potential Future Exposure ed Expected Future Exposure.

## 2.1 Mark-To-Market

Consideriamo un insieme di contratti, di tipo finanziario, che riguardano un dato soggetto ed una data controparte e sono tutti caratterizzati da una determinata scadenza. Definiamo, ad un dato istante precedente o coincidente con la data di scadenza, il *Mark-to-Market* (MtM) come la somma dei profitti derivanti da tutti i contratti stipulati con la controparte e supponiamo che tale quantità sia la realizzazione di una variabile aleatoria avente distribuzione fissata. Osserviamo che tale quantità può essere sia positiva (in tal caso la controparte è in debito per l'ammontare del MtM stesso) o negativa: in quest'ultima realizzazione, il MtM corrisponde ad un debito, descritto in termini monetari, nei confronti della controparte.

## 2.2 Expected MtM

Si definisce *Expected Mark-To-Market* il valore atteso, in un dato istante, della somma dei profitti relativi alle posizioni assunte rispetto ad una data controparte, ovvero il valore atteso delle potenziali perdite qualora la controparte si verificasse inadempiente ai vincoli contrattuali. Supponendo di modellare il Mark-to-Market utilizzando una variabile casuale avente distribuzione arbitraria, il valore dell'Expected Mark-to-Market è dato dal valore atteso del MtM secondo tale distribuzione.

## 2.3 Credit Exposure

Una caratteristica importante del rischio di controparte consiste nell'asimmetria: qualora la controparte si rivelasse essere inadempiente in relazione ai contratti stipulati (o anche solo parte di essi) ed il MtM fosse positivo, i vincoli di contratto non sarebbero rispettati, mentre qualora, nella medesima situazione, il MtM fosse negativo, la controparte vanterebbe comunque un credito corrispondente al valore del MtM, in osservanza di quanto stabilito dal contratto, senza che vi sia, in generale, possibilità di recessione. In virtù dell'asimmetria del rischio di controparte, definiamo una quantità che descriva l'effettiva esposizione a tale rischio, ovvero che indichi quanto effettivamente si perderebbe qualora la controparte fosse inadempiente ai vincoli contrattuali. A tal proposito, è necessario escludere tutte le realizzazioni del MtM (che ricordiamo essere descritto da una variabile aleatoria avente distribuzione fissata) aventi valore negativo, poichè in tal caso non generano alcun credito nei confronti della controparte e, quindi, non costituiscono potenziali perdite. Definiamo, quindi, *Credit Exposure* (o, più semplicemente, *Exposure*) la quantità coincidente con il valore del MtM, se quest'ultimo è positivo, e nulla altrimenti. Il valore della Exposure (E), pertanto, è dato da:

$$E = \max(\text{MtM}, 0) = \text{MtM}^+$$

## 2.4 Expected Exposure

Si definisce *Expected exposure* (EE), per un dato istante fissato, il valore atteso della *Credit Exposure* in tale istante, ovvero:

$$EE = E(\text{MtM}^+).$$

Vogliamo fornire un esempio di calcolo pratico di tale quantità: supponiamo, quindi, che il valore del MtM sia descritto da una variabile aleatoria  $V$ , normale ed avente media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ . Si ha, dunque,  $V = \mu + \sigma Z$ , ove  $Z$  è una normale standard. Il valore della Exposure, in base alla definizione ed alla luce delle ipotesi fatte, è quindi dato da

$$E = \max(V, 0) = \max(\mu + \sigma Z, 0).$$

La *Expected Exposure* (EE), quindi, è data dal valore atteso di  $E$ , ovvero

$$\begin{aligned} EE &= \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} (\mu + \sigma x) \phi(x) dx = \\ &= \mu \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} \phi(x) dx + \sigma \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} x \phi(x) dx = \mu \Phi(\mu/\sigma) + \sigma \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \\ &= \mu \Phi(\mu/\sigma) + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\mu/\sigma}^{\infty} = \mu \Phi(\mu/\sigma) + \sigma \phi(\mu/\sigma) \end{aligned}$$

ove  $\phi$  e  $\Phi$  sono, rispettivamente, densità e funzione di ripartizione della normale standard. Si osservi che la EE dipende, coerentemente, dalla media e dalla deviazione standard del MtM.

Dimostriamo, in particolare, che il valore della EE aumenta all'aumentare della deviazione standard del MtM. Definiamo innanzitutto la funzione  $\psi(\sigma) := \sigma \phi(\mu/\sigma) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$  ed osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \psi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \left( -\frac{\mu^2}{2} \right) \left( -\frac{2}{\sigma^3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}.$$

Osserviamo, quindi, che

$$\begin{aligned} \frac{\partial EE}{\partial \sigma} &= \mu \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \Phi \left( \frac{\mu}{\sigma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \psi(\sigma) = \\ &= \mu \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} \right) \phi \left( \frac{\mu}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} = \\ &= -\frac{\mu^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} > 0, \forall \sigma \geq 0. \end{aligned}$$

La EE, quindi, è descritta da una funzione crescente in  $\sigma$ . In conclusione si ha, dunque, che il valore della EE aumenta all'aumentare del valore della deviazione standard del MtM. Questa proprietà è giustificata dal fatto che, in corrispondenza di una posizione maggiormente rischiosa, come compensazione del fatto di assumersi un rischio maggiore il valore atteso di eventuali realizzazioni con profitto positivo aumenta.

## 2.5 Potential Future Exposure

Al fine di descrivere in maniera più precisa l'esposizione al rischio di controparte, è necessario disporre di uno strumento che ci consenta, sotto opportune ipotesi e per un livello di affidabilità che riteniamo sufficiente, di definire quali valori potrebbe assumere il MtM ad una data futura, in generale lontana dall'istante attuale. A tale scopo introduciamo il concetto di Potential Future Exposure. Supponiamo che, per un dato istante futuro, il MtM abbia una distribuzione fissata: si definisce *Potential Future Exposure in corrispondenza di un dato livello di confidenza  $\alpha$*  ( $\text{PFE}_\alpha$ ) la quantità corrispondente alla soglia massima che, con probabilità  $\alpha$ , non verrà ecceduta dal valore del MtM in tale data. Si tratta, quindi, del quantile di ordine  $\alpha$  relativo alla distribuzione scelta per il MtM e descrive la massima esposizione al rischio sotto tale probabilità.

A titolo di esempio, supponiamo che il profitto derivante da una serie di contratti stipulati con una data controparte sia descritto da una variabile aleatoria, sia  $V$ , normale ed avente media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ . Si ha, quindi,  $V = \mu + \sigma Z$ , ove  $Z$  è una normale standard. In base alla definizione di Potential Future Exposure e sotto le ipotesi appena fatte, si ha che

$$\begin{aligned}\alpha &= P(V \leq \text{PFE}_\alpha) = \\ &= P(\mu + \sigma Z \leq \text{PFE}_\alpha) = P\left(Z \leq \frac{\text{PFE}_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\text{PFE}_\alpha - \mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

ove  $\Phi$  è la funzione di ripartizione della normale standard. Dunque

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\text{PFE}_\alpha - \mu}{\sigma}$$

da cui si ottiene, infine, il valore della *Potential Future Exposure* in corrispondenza di un livello di confidenza  $\alpha$

$$\text{PFE}_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha).$$

## 2.6 Expected Positive Exposure

Le misure relative introdotte precedentemente riguardano sempre una data fissata, ma non caratterizzano l'esposizione globale al rischio di controparte lungo un generico intervallo di tempo: siamo interessati, pertanto, ad uno strumento che ci permetta di ricavare informazioni in tal senso. Più precisamente, vogliamo sapere il valore medio assunto dalla Exposure lungo un generico intervallo temporale. Definiamo, quindi, la *Expected Positive*

*Exposure* (EPE) come la media integrale, lungo un dato intervallo fissato, sia  $[0, T]$ , del valore della Expected Exposure.

Supponiamo, a titolo di esempio, che il profitto derivante da un insieme di contratti stipulati con una data controparte evolva nel tempo assumendo, ad ogni istante  $t$ , il valore

$$V(t) = \mu + \sigma\sqrt{t}Z,$$

ove  $Z$  è una normale standard. Osserviamo che stiamo ipotizzando che la deviazione standard aumenti all'aumentare del tempo, ovvero che il profitto sia sempre più incerto all'allontanarsi dall'istante attuale. Assumendo che la media sia nulla, si verifica facilmente che per ogni istante  $t \in [0, T]$  si ha  $EE(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t}$ , quindi si ottiene

$$\text{EPE} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t}dt = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}}\sigma T^{1/2}.$$



## Capitolo 3

# Riduzione dell'esposizione al rischio di controparte

In questo capitolo presenteremo alcune strategie tipicamente utilizzate al fine di ridurre l'impatto derivante dal rischio di controparte. Queste tecniche, più precisamente, non hanno in generale come obiettivo la riduzione della probabilità connessa a tale rischio, ma si concentrano sulla riduzione della Exposure qualora tale evento dovesse verificarsi. In questo capitolo descriviamo le due strategie principali che vengono impiegate al fine di coprirsi maggiormente dalle perdite derivanti da un'eventuale insolvenza delle controparti: le strategie di netting e l'utilizzo di collaterale.

### 3.1 Strategie di netting

Una delle tecniche utilizzate è data dalla cosiddetta strategia di *Closeout netting*. Supponendo di aver stipulato, con una data controparte, un insieme di contratti (definito *insieme di netting*), si decide, tramite un accordo formale, che se, in qualsiasi data futura precedente o coincidente con la data di scadenza, una delle due parti dovesse rivelarsi insolvente (ovvero impossibilitata o reticente ad onorare, a partire da quell'istante, i vincoli imposti dal contratto), tutte le posizioni possono essere chiuse immediatamente, dopo aver effettuato un'unica transazione corrispondente al valore del MtM (ovvero alla *somma* del valore di tutti i contratti appartenenti al *netting set*) in quel dato istante: se tale valore descrive un debito nei confronti della controparte insolvente, tale debito viene saldato subito, viceversa si matura un credito nei confronti della stessa, quindi si procede, in entrambi i casi, alla chiusura di tutti i contratti. Tale strategia è utilizzata principalmente all'interno del mercato dei derivati: se, ad esempio, al fine di garantire la copertura di una determinata posizione, viene stipulato un contratto ad hoc con una controparte che si rivela insolvente, è necessario, al fine di mantenere tale copertura, chiudere anticipatamente il contratto con essa, saldando eventuali debiti o congelando eventuali crediti nei suoi confronti, così da poterlo riaprire con una nuova controparte non insolvente. Se, invece, l'insieme di netting consiste in un insieme di contratti che prevedono, ad una data scadenza, determinate transazioni di denaro tra le due parti e

non è contemplata, in generale, la possibilità di chiudere anticipatamente le rispettive posizioni, ma è comunque prevista, alla scadenza, un'unica transazione corrispondente al valore corrente del MtM (che corrisponde alla somma del valore di tutte le posizioni alla scadenza), si parla di *Payment netting*. In generale, entrambe le strategie hanno il merito di ridurre l'esposizione al rischio di controparte: in assenza di un accordo di netting (di entrambe le tipologie) ed in virtù dell'asimmetria, ad un dato istante, si matura, nei confronti della controparte insolvente, un debito pari alla somma del valore dei contratti rispetto ai quali quest'ultima risulta essere in credito, mentre, in generale, quest'ultima non effettuerà alcun versamento a nostro vantaggio. In presenza di un accordo di netting, invece, se il debito nei confronti della controparte supera il credito che essa vanta nei nostri confronti, siamo tenuti a versare solo la differenza di tali quantità (ovvero il MtM) e, viceversa, qualora l'ammontare del debito della controparte fosse maggiore del credito nei suoi confronti, la perdita dovuta alla sua insolvenza coinciderebbe con la sola differenza tra le due quantità. In entrambe le realizzazioni, la quantità esposta risulta essere, in generale, minore.

Consideriamo, più precisamente, un insieme di  $n$  contratti (con  $n > 1$ : non siamo interessati ad accordi che riguardino una sola posizione) i cui valori, in un dato istante, siano descritti da un corrispondente insieme di variabili casuali, in generale non indipendenti,  $V_1, V_2, \dots, V_n$ : supponiamo che eventuali realizzazioni positive, alla data di scadenza, di una variabile corrispondano ad un credito nei confronti della controparte. Viceversa, se una variabile assume segno negativo, supponiamo di essere in debito con la controparte, relativamente alla posizione che corrisponde alla variabile stessa. In caso non sia presente un accordo di netting, innanzitutto, in base all'asimmetria del rischio di controparte si ha che, se quest'ultima dovesse rivelarsi insolvente, l'ammontare delle perdite attese coinciderebbe con la somma dei valori attesi dei contratti aventi, in base alle ipotesi fatte, MtM positivo. La EE complessiva (sia, in questo caso,  $EE_{NN}$ ), quindi, si ottiene sommando i valori delle EE dei singoli contratti:

$$EE_{NN} = \sum_{k=1}^n E(V_k^+) = E\left(\sum_{k=1}^n V_k^+\right).$$

Viceversa, supponendo che il suddetto insieme sia un insieme di netting, la EE (sia, in questo caso,  $EE_{NS}$ ) viene calcolata a partire dall'unica transazione effettuata, il cui valore è pari alla somma dei valori delle singole posizioni. L'esposizione attesa, più precisamente, coincide con il valore atteso di tutte le realizzazioni positive di tale quantità, ovvero:

$$EE_{NS} = E\left(\left(\sum_{k=1}^n V_k\right)^+\right).$$

Dimostriamo che, in base a queste ipotesi, si ha che  $EE_{NS} \leq EE_{NN}$ . Vogliamo provare che

$$E\left(\sum_{k=1}^n V_k^+\right) \geq E\left(\left(\sum_{k=1}^n V_k\right)^+\right).$$

Osserviamo innanzitutto che se proviamo che  $\sum_{k=1}^n V_k^+ \geq (\sum_{k=1}^n V_k)^+$  otteniamo, passando al valor medio, la conclusione. Quest'ultimo fatto si prova per induzione su  $n$ : innanzitutto si verifica che vale per  $n = 2$ , quindi si dimostra il passo induttivo. Proviamo, innanzitutto, che vale la disuguaglianza  $V_1^+ + V_2^+ \geq (V_1 + V_2)^+$ . A tal proposito, è opportuno distinguere i diversi casi possibili relativamente al segno assunto delle variabili  $V_1$  e  $V_2$ :

- se  $V_1 > 0$  e  $V_2 > 0$ , allora  $V_1^+ = \max(V_1, 0) = V_1$  e  $V_2^+ = \max(V_2, 0) = V_2$ , inoltre, poichè  $V_1 + V_2 > 0$ , si ha che  $(V_1 + V_2)^+ = \max(V_1 + V_2, 0) = V_1 + V_2$ , quindi  $V_1^+ + V_2^+ = V_1 + V_2 = (V_1 + V_2)^+$  e la disuguaglianza è, in questo caso, verificata;
- se  $V_1 > 0$  e  $V_2 \leq 0$ , allora  $V_1^+ = \max(V_1, 0) = V_1$  e  $V_2^+ = \max(V_2, 0) = 0$ , quindi  $V_1^+ + V_2^+ = V_1$ , inoltre osserviamo che, poichè  $V_1 > 0$  per ipotesi e poichè, essendo  $V_2 \leq 0$ , si ha  $V_1 + V_2 \leq V_1$ , allora  $V_1 \geq \max(V_1 + V_2, 0) = (V_1 + V_2)^+$ , dunque

$$V_1^+ + V_2^+ = V_1 \geq \max(V_1 + V_2, 0) = (V_1 + V_2)^+$$

e la disuguaglianza è verificata;

- se  $V_1 \leq 0$  e  $V_2 > 0$ , si procede in maniera esattamente analoga al caso precedente e si prova il valore della disuguaglianza;
- se  $V_1 \leq 0$  e  $V_2 \leq 0$ , allora osserviamo che  $V_1^+ = \max(V_1, 0) = 0$  e  $V_2^+ = \max(V_2, 0) = 0$ , dunque  $V_1^+ + V_2^+ = 0$  e, poichè  $V_1 + V_2 \leq 0$ , allora  $(V_1 + V_2)^+ = 0$  e la disuguaglianza è banalmente verificata.

Passiamo ora al passo induttivo, ovvero supponiamo che la disuguaglianza sia vera per  $n$  variabili casuali ed aggiungiamo la variabile  $V_{n+1}$ . Osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} V_k^+ = V_{n+1}^+ + \sum_{k=1}^n V_k^+ \geq V_{n+1}^+ + \left( \sum_{k=1}^n V_k \right)^+ \geq \left( \sum_{k=1}^{n+1} V_k \right)^+$$

(la prima disuguaglianza vale in base all'ipotesi induttiva e la seconda corrisponde al caso  $n = 2$ , appena dimostrato). Abbiamo provato, quindi, che  $\sum_{k=1}^n V_k^+ \geq (\sum_{k=1}^n V_k)^+$ : essendo il termine destro della disuguaglianza non negativo, è possibile passare ai valori medi preservando, in virtù della monotonia dell'integrale, la disuguaglianza appena trovata, ottenendo  $E(\sum_{k=1}^n V_k^+) \geq E((\sum_{k=1}^n V_k)^+)$ , ovvero abbiamo infine dimostrato che  $EE_{NS} \leq EE_{NN}$ . Definiamo *fattore di netting* la quantità, compresa tra 0 ed 1, corrispondente ad  $EE_{NS}/EE_{NN}$ : se tale valore risulta essere prossimo ad 1, i benefici ottenibili applicando una strategia di netting ad un dato insieme di contratti sono mediamente pressoché trascurabili mentre, viceversa, se risulta essere prossimo allo zero, significa che, applicando tale strategia, la EE risulta notevolmente ridotta rispetto al valore che avrebbe avuto considerando ciascuna posizione singolarmente.

Definiamo, ora, la correlazione media tra le variabili casuali  $V_1, V_2, \dots, V_n$  ed osserviamo come tale valore, che andiamo a specificare più rigorosamente, influisca sull'efficacia

o meno di una eventuale strategia di netting relativamente all'insieme in questione. Ricordiamo, innanzitutto, che l'indice di correlazione tra due variabili casuali distinte  $V_i$  e  $V_j$ , appartenenti a tale insieme, sia  $\rho_{i,j}$ , è dato da:

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov(V_i, V_j)}{\sqrt{Var(V_i)}\sqrt{Var(V_j)}}.$$

Definiamo, quindi, la *correlazione media*, sia  $\bar{\rho}$ , come la media aritmetica degli indici di correlazione tra variabili distinte all'interno dell'insieme  $V_1, V_2, \dots, V_n$  (le quali, ricordiamo, descrivono il valore di un insieme di titoli ad una data fissata). In formule, ricordando che  $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$  e che il numero di indici di correlazione tra variabili distinte è dato da  $n^2 - n = n(n - 1)$ , si può scrivere:

$$\bar{\rho} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \rho_{i,j}.$$

Tale valore corrisponde alla media aritmetica tra gli  $n^2 - n$  indici di correlazione tra le variabili distinte  $V_1, V_2, \dots, V_n$  ed è compreso tra -1 ed 1. Intuitivamente, una correlazione media prossima ad 1 indica che con buona probabilità i valori dei titoli tenderanno ad avere tutti lo stesso segno, quindi il beneficio derivante da una strategia di netting (la quale, ricordiamo, al fine di effettuare le transazioni previste dal contratto tra la due parti considera la somma del valore delle posizioni, piuttosto che ciascuna posizione singolarmente) sarà estremamente ridotto, in quanto il valore della EE non diminuirà di molto. Viceversa, se  $\bar{\rho}$  assume un valore negativo, tanto più questo valore è grande in modulo, quanto più probabile sarà che, alla data fissata, i valori delle singole posizioni risultino avere tendenzialmente segni opposti l'uno dall'altro, così da rendere vantaggiosa una strategia di netting.

### 3.2 Strategie di netting: un esempio di stima della riduzione del rischio di controparte

Forniamo, sotto determinate ipotesi, un esempio pratico che possa chiarire l'impatto della correlazione media sulle strategie di netting. Supponiamo, innanzitutto, che il vettore aleatorio  $(V_1, \dots, V_n)$  sia congiuntamente normale (ovvero che ciascuna combinazione lineare delle variabili casuali  $V_1, \dots, V_n$  sia una variabile casuale normale) e, inoltre, che, per ciascun  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la singola variabile normale  $V_i$  abbia media  $\mu_i$  e deviazione standard  $\sigma_i$ . Sappiamo che, sotto tali ipotesi, la EE di ciascuna variabile è data da

$$EE_i = \mu_i \Phi(\mu_i/\sigma_i) + \sigma_i \phi(\mu_i/\sigma_i),$$

(ove  $\Phi$  e  $\phi$  sono, rispettivamente, funzione di ripartizione e funzione di distribuzione di una variabile aleatoria normale standard). In assenza di strategie di netting, il valore della EE, sia  $EE_{NN}$ , è dato da

$$EE_{NN} = \sum_{i=1}^n EE_i = \sum_{i=1}^n (\mu_i \Phi(\mu_i/\sigma_i) + \sigma_i \phi(\mu_i/\sigma_i)).$$

Al fine di calcolare la EE derivante dall'applicazione della strategia di netting all'insieme considerato, è necessario prima calcolate media e varianza della variabile casuale, sia  $V_{NS}$ , ottenuta come somma delle variabili aleatorie  $V_1, \dots, V_n$ . Il valor medio, innanzitutto, è dato da:

$$\mu_{NS} := E(V_{NS}) = E\left(\sum_{i=1}^n V_i\right) = \sum_{i=1}^n E(V_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

La varianza, quindi, è data da:

$$\begin{aligned} \sigma_{NS}^2 &:= E((V_{NS} - \mu_{NS})(V_{NS} - \mu_{NS})) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n (V_i - \mu_i)\right)\left(\sum_{j=1}^n (V_j - \mu_j)\right)\right) = \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n (V_i - \mu_i)^2 + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} (V_i - \mu_i)(V_j - \mu_j)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n E((V_i - \mu_i)^2) + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} E((V_i - \mu_i)(V_j - \mu_j)) = \\ &= \sum_{i=1}^n Var(V_i) + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} Cov(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}. \end{aligned}$$

In entrambi i casi abbiamo sfruttato la proprietà di linearità del valor medio e, inoltre, nel secondo abbiamo espresso la varianza in funzione degli indici di correlazione delle variabili considerate. Supponiamo, ora, che le variabili casuali abbiano tutte media nulla e la medesima deviazione standard, che indichiamo con  $\bar{\sigma}$ . In base a quest'ultima ipotesi sappiamo che la EE di un singolo titolo, descritto dalla generica variabile casuale  $V_i$  per  $i \in \{1, \dots, n\}$ , risulta pari ad  $EE_i = \bar{\sigma}/\sqrt{2\pi}$  ed, in assenza di una strategia di netting, l'esposizione totale al rischio di controparte è ottenuta dalla somma del valore delle singole posizioni, ovvero:

$$EE_{NN} = \sum_{i=1}^n EE_i = \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}/\sqrt{2\pi} = n\bar{\sigma}/\sqrt{2\pi}.$$

Per quanto riguarda la variabile casuale  $V_{NS}$ , il valor medio è dato da  $\mu_{NS} = \sum_{i=1}^n \mu_i = 0$  e la varianza è pari a

$$\begin{aligned} \sigma_{NS}^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} = \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}^2 + 2\bar{\sigma}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \rho_{i,j} = \bar{\sigma}^2 n + \bar{\sigma}^2 n(n-1)\bar{\rho} = \\ &= \bar{\sigma}^2(n + n(n-1)\bar{\rho}). \end{aligned}$$

Poichè  $V_{NS}$  è somma di variabili casuali congiuntamente normali e, quindi, è anch'essa una variabile aleatoria normale, sappiamo che la relativa EE, che descrive l'esposizione al

rischio se si adotta una strategia di netting, è data, in base ad i valori di media e varianza appena calcolati, da

$$EE_{NS} = \sigma_{NS}/\sqrt{2\pi} = \bar{\sigma}\sqrt{n + n(n-1)\bar{\rho}}/\sqrt{2\pi}.$$

Il *fattore di netting*, in questo caso particolare, risulta quindi essere pari a

$$\frac{EE_{NS}}{EE_{NN}} = \frac{\bar{\sigma}\sqrt{n + n(n-1)\bar{\rho}}}{n\bar{\sigma}} = \frac{\sqrt{n + n(n-1)\bar{\rho}}}{n}.$$

Osserviamo, innanzitutto, che eventuali benefici derivanti dall'applicazione di una strategia di netting dipendono esclusivamente dalla correlazione tra le singole variabili e non sono influenzati dalle singole deviazioni standard, ovvero dal rischio associato a ciascuna singola posizione: quest'ultimo fatto discende dall'aver supposto che tale rischio sia il medesimo per ciascun contratto. Ricordiamo che  $\bar{\rho}$ , ovvero la media aritmetica degli indici di correlazione tra variabili distinte in  $\{V_1, \dots, V_n\}$ , ha un valore compreso tra -1 ed 1. Se  $\bar{\rho} = 1$ , allora, poichè  $\rho_{i,j} \leq 1, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ , segue necessariamente che  $\rho_{i,j} = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , ovvero, in tale caso limite, si ha perfetta correlazione positiva tra le variabili casuali che descrivono i valori assunti dai singoli contratti alla data fissata (dunque questi avranno verosimilmente tutti lo stesso segno e lo stesso valore in modulo) e il fattore di netting risulta essere pari ad 1, ovvero  $EE_{NS} = EE_{NN}$ : l'impiego di una strategia di netting non comporta alcuna riduzione della EE. Osserviamo che, siccome risulta  $\sigma_{NS} = \bar{\sigma}\sqrt{n + n(n-1)\bar{\rho}}$  e poichè, quindi, deve aversi  $n + n(n-1)\bar{\rho} \geq 0$ , la correlazione media  $\bar{\rho}$  risulta essere inferiormente limitata da  $-1/(n-1)$ . Notiamo che, se  $\bar{\rho}$  assume un valore negativo e prossimo al limite inferiore, la quantità  $EE_{NS}/EE_{NN} = \sqrt{n + n(n-1)\bar{\rho}}/n$  risulta essere prossima a 0, ovvero, qualora la correlazione media tra le variabili sia negativa ed abbia modulo sufficientemente grande, la EE che si ottiene applicando una strategia di netting risulta essere una piccola percentuale rispetto alla EE che si otterrebbe originariamente, considerando le singole posizioni, senza utilizzare suddetta strategia.

### 3.3 Marginal Exposure

Finora abbiamo visto, dunque, che se un certo numero di contratti stipulati con una data controparte è raggruppato in un insieme di netting la EE dell'insieme viene stimata a partire dalla somma dei valori di ciascuna posizione e, quindi, non corrisponde alla somma delle EE dei singoli contratti. Spesso, tuttavia, risulta necessario, una volta ottenuta la EE complessiva di un insieme di netting, stimare quale sia il contributo di ciascuna singola posizione nella determinazione di tale valore. Più precisamente, dato un insieme di netting composto da  $n \in \mathbb{N}$  posizioni distinte, indicando la EE complessiva con  $EE_{NS}$  definiamo, in corrispondenza di ciascuna di esse, l'insieme di valori  $EE_1^*, \dots, EE_n^* \in \mathbb{R}$ , detti *Expected Exposures marginali*, tali che ciascuno di essi, singolarmente, descriva il contributo, in termini monetari, del valore della EE di una singola attività appartenente

all'insieme al valore della EE complessiva, ovvero si abbia

$$EE_{NS} = \sum_{i=1}^n EE_i^*.$$

Al fine di calcolare il valore della marginal EE di una singola attività sottostante ad un contratto appartenente ad un insieme di netting, sono necessarie ipotesi più generali. Più precisamente, consideriamo un portafoglio costituito da un insieme finito di posizioni e tale che ciascuna singola posizione sia, in generale, presente in quantità maggiori di od uguali a 1 (ad esempio, 20 azioni identiche). Definiamo, quindi, il vettore  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ , ove ciascuna singola entrata indica il numero di contratti di un certo tipo all'interno del portafoglio. Supponiamo che il MtM delle posizioni appartenenti all'insieme di netting sia descritto dalle variabili casuali  $V_1, \dots, V_N$ , definite in uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ed a valori reali e tali che, per ogni  $j$  appartenente ad  $\{1, \dots, n\}$ ,  $V_j$  sia assolutamente continua e  $V_j \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sotto queste ipotesi, dunque, il valore del portafoglio è dato da  $\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i$ . Osserviamo, inoltre, che nelle assunzioni appena fatte la EE complessiva corrisponde ad

$$EE_{NS} = E \left( \max \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i, 0 \right) \right)$$

ed, in base alla definizione di EE marginali data, inoltre, ricordiamo che

$$EE_{NS} = \sum_{i=1}^n EE_i^* \alpha_i.$$

Osserviamo che la quantità appena descritta può variare al variare del vettore  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , quindi definiamo la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(\bar{\alpha}) = E \left( \max \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i, 0 \right) \right).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= E \left( \max \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i, 0 \right) \right) = \\ &= E \left( \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i > 0\}} \right) = \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) > 0\}} dP(\omega). \end{aligned}$$

Definiamo, sullo spazio prodotto  $\mathbb{R}^n \times \Omega$ , la funzione

$$\phi(\alpha, \omega) := \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) > 0\}}.$$

In base alla definizione appena data, possiamo scrivere

$$f(\bar{\alpha}) = \int_{\Omega} \phi(\alpha, \omega) dP(\omega).$$

Dimostriamo, innanzitutto, che  $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}^n$ . A tal proposito, osserviamo che, fissati  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$  ed  $\omega \in \Omega$ ,

$$|\phi(\bar{\alpha}, \omega)| = \left| \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) > 0\}} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |V_i(\omega)|.$$

Poiché, per ipotesi, per ogni  $j \in \{1, \dots, n\}$  si ha che  $V_j \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , la variabile casuale  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| |V_i|$ , definita su  $\Omega$ , è una combinazione lineare di variabili aleatorie appartenenti ad  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , dunque anch'essa appartiene ad  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Osserviamo ora che, per  $\omega \in \Omega$  fissato, la funzione, definita su  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\bar{\alpha} \mapsto \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) > 0\}}$$

è continua su  $\mathbb{R}^n$ : infatti, essa è nulla al di fuori del sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  definito da  $\{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) > 0\}$ , all'interno del quale assume valori definiti dalla funzione  $\bar{\alpha} \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i$ , la quale è continua e si annulla sull'iperpiano definito da  $\{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) = 0\}$ . In base a questi fatti, quindi, possiamo affermare che, in virtù della continuità sotto il segno di integrale,  $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $c > 0$ , inoltre, si ha, in virtù della linearità del valor medio e del fatto che  $\max(cx, 0) = c \max(x, 0)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , che

$$\begin{aligned} f(c\bar{\alpha}) &= E \left( \max \left( \sum_{i=1}^n c\alpha_i V_i, 0 \right) \right) = E \left( \max \left( c \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i, 0 \right) \right) = \\ &= E \left( c \max \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i, 0 \right) \right) = cE \left( \max \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i, 0 \right) \right) = cf(\bar{\alpha}), \end{aligned}$$

dunque  $f$  è positivamente omogenea di grado 1. In base a queste due ultime osservazioni, quindi, se proviamo che esistono, in ogni punto di  $\mathbb{R}^n$ , tutte le derivate parziali di  $f$ , allora è possibile sfruttare il Teorema di Eulero, che ci consente di scrivere, per ogni  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(\bar{\alpha}) = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\bar{\alpha})$$

cosicché

$$E E_j^* = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\bar{\alpha}), \forall \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

Procediamo, quindi, dimostrando che la funzione ammette ovunque derivate parziali. Osserviamo, innanzitutto, che per ogni  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$  ed  $\omega \in \Omega$  fissati esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j}(\alpha, \omega) = V_j(\omega) \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) > 0\}}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

ed, inoltre, possiamo maggiorare il modulo di tale derivata, ottenendo

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j}(\alpha, \omega) \right| = \left| V_j(\omega) \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(\omega) > 0\}} \right| \leq |V_j(\omega)|$$

ed osserviamo che, per ipotesi,  $V_j \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . In base al teorema di differenziazione sotto il segno di integrale, dunque, possiamo affermare che esiste

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\bar{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_{\Omega} \phi(\bar{\alpha}, \omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_j}(\bar{\alpha}, \omega) dP(\omega),$$

per ogni  $j \in \{1, \dots, n\}$ , per ogni  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\omega \in \Omega$ . In virtù di quest'ultimo risultato, quindi, possiamo applicare il Teorema di Eulero, ottenendo:

$$f(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(\bar{\alpha}) \alpha_i, \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

Si ottiene, pertanto, che

$$EE_{NS}(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial EE_{NS}}{\partial \alpha_i}(\bar{\alpha}) \alpha_i, \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n,$$

dove abbiamo esplicitato, nella notazione, la dipendenza del valore complessivo della EE dal vettore  $\alpha$  descrivente le quantità presenti all'interno del portafoglio di ciascuna delle  $n \in \mathbb{N}$  posizioni distinte. Osserviamo che, riconducendoci alla situazione standard in cui supponiamo di possedere  $n$  contratti distinti, il cui MtM sia descritto dalle variabili casuali  $V_1, \dots, V_n$ , ovvero ponendo  $\alpha_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , otteniamo

$$EE_i^* = \frac{\partial EE_{NS}}{\partial \alpha_i}(\bar{\alpha})|_{\bar{\alpha}=(1, \dots, 1)}.$$

Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned} \frac{\partial EE_{NS}}{\partial \alpha_i}(\bar{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} E \left[ \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j V_j \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^n \alpha_j V_j > 0\}} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j V_j(\omega) \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^n \alpha_j V_j(\omega) > 0\}} dP(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j V_j(\omega) \right) \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^n \alpha_j V_j(\omega) > 0\}} \right) dP(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} V_i(\omega) \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^n \alpha_j V_j(\omega) > 0\}} dP(\omega) = E \left( V_i \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^n \alpha_j V_j > 0\}} \right) \end{aligned}$$

dunque, riassumendo, per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  si ha

$$EE_i^* = \frac{\partial EE_{NS}}{\partial \alpha_i}(\bar{\alpha})|_{\bar{\alpha}=(1, \dots, 1)} = E \left( V_i \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^n V_j > 0\}} \right).$$

### 3.4 Utilizzo di collaterale

Un'altra tecnica utilizzata al fine di ridurre il valore della Exposure nel tempo consiste nella stipula, tra due soggetti finanziari, di un contratto che preveda la consegna temporanea di una quantità, detta *collaterale*, a titolo di garanzia. Più precisamente, tale strategia prevede che qualora, in un dato istante, il valore della Exposure stimato superi una determinata soglia (definita dal contratto), il soggetto finanziario in questione possa, a titolo di tutela, chiedere la consegna temporanea di uno o più asset (il *collaterale*, la cui natura è stabilita dal contratto), il cui valore globale sia, con buona approssimazione, il più vicino possibile alla differenza tra il valore stimato per la Exposure e la soglia prestabilita: tale procedura prende il nome di *margin call*. Qualora la controparte dovesse rivelarsi insolvente, dunque, l'insieme degli asset costituenti il collaterale diverrebbe di proprietà del soggetto che possiede il credito, così da ottenere un rimborso parziale del valore della Exposure. L'utilizzo di un collaterale, quindi, garantisce una copertura in caso di insolvenza della controparte e ne limita le perdite. Per quanto riguarda la tipologia degli asset che possono costituire il collaterale, tipicamente essi consistono in denaro liquido e, più raramente, in titoli finanziari (quali azioni, obbligazioni, ecc..) ed in quest'ultimo caso, pertanto, sono caratterizzati da una determinata volatilità.

### 3.5 Parametri legati al collaterale

Al fine di rendere più efficienti le operazioni di copertura ed, allo stesso tempo, di tutelarsi in maniera adeguata dal rischio di insolvenza della controparte, i contratti in cui è previsto l'utilizzo di collaterale specificano alcuni vincoli da rispettare. Innanzitutto, al fine di porre un limite al numero di operazioni effettuabili in un dato intervallo di tempo, si prevede che eventuali richieste e consegne di un collaterale possano essere effettuate solamente in corrispondenza di determinati istanti temporali e siano, quindi, periodiche e caratterizzate da una particolare frequenza (detta *margin frequency*) all'interno della durata di vita del contratto. Equivalentemente, la *margin frequency* consiste nell'intervallo temporale compreso tra due date consecutive nelle quali è possibile effettuare richieste o restituzioni di collaterale, nell'ipotesi che suddette scadenze siano uniformemente distribuite lungo l'intervallo di vita del contratto. Tipicamente i contratti in questione prevedono che tale frequenza sia giornaliera. Come già accennato, inoltre, il contratto prevede che la richiesta di un collaterale sia subordinata al superamento, da parte del valore della Exposure, di una quantità prefissata (la *soglia di margin call*), la quale è definita in maniera esplicita dal contratto. Tale soglia indica l'ammontare del valore della Exposure che non viene tutelato dalla strategia utilizzata ed, in generale, viene pattuita con la controparte, spesso valutando la qualità del credito di quest'ultima. In aggiunta alla richiesta di un collaterale, il cui valore approssimi adeguatamente la differenza tra il valore attuale stimato della Exposure ed il valore della soglia, talvolta è possibile domandare, al superamento di suddetta soglia, un collaterale ulteriore (una *somma aggiuntiva indipendente*), la cui richiesta e la cui entità non dipendono dal valore assunto dalla Exposure. Tale approccio può essere utilizzato qualora la qualità del credi-

to differisca in maniera considerevole tra i due soggetti finanziari in questione, cosicché quello maggiormente esposto al rischio di un'eventuale insolvenza della controparte possa ottenere una tutela aggiuntiva, in virtù di tale disparità. In corrispondenza delle richieste di un collaterale (derivante dal superamento della soglia di margin call) il valore di quest'ultimo deve essere non inferiore ad una quantità predefinita (l'*ammontare minimo*). Tale clausola deriva dalla necessità di individuare un compromesso tra la riduzione del numero di operazioni da effettuare (evitando di consentire richieste di collaterale avente valore trascurabile) e la riduzione dell'esposizione al rischio di controparte, in quanto eventuali eccedenze del valore della Exposure, rispetto alla soglia di margin call, inferiori all'ammontare minimo non sono tutelate dal contratto. Al fine di aumentare ulteriormente la consistenza di transazioni di collaterali aventi un valore trascurabile, talvolta il contratto prevede l'aggiunta di una quantità fissata, detta *di arrotondamento*. Nel caso in cui, infine, il collaterale non consista in denaro liquido, ma in un particolare asset finanziario avente una determinata volatilità, è possibile, al fine di tutelarsi da un'eventuale riduzione del valore del collaterale, assumere che il suo valore attuale effettivo sia il valore di mercato scontato di una certa percentuale (detta *haircut*). Il valore dell'asset che costituisce il collaterale, in pratica, viene parzialmente declassato e, quindi, a parità di richiesta di copertura la controparte deve consegnare un collaterale di consistenza maggiore. Consideriamo, ora, un contratto che prevede l'utilizzo di collaterali e che sia stipulato tra due soggetti finanziari. Supponiamo che, in un dato istante, la Exposure di una delle due parti ecceda il valore corrispondente alla soglia di margin call: in tal caso, l'intervallo di tempo compreso tra l'istante appena descritto e l'istante in cui il collaterale viene consegnato dalla controparte è detto *remargin period* ed, in generale, possiamo affermare che ha una durata maggiore rispetto alla margin frequency, in quanto si articola in diverse fasi distinte. Innanzitutto, infatti, è necessario quantificare il valore della Exposure ed, in caso di eccedenza rispetto alla soglia prestabilita, si valuta se sia possibile effettuare una formale richiesta di collaterale (in osservanza dei parametri derivanti dal contratto), quindi, in caso affermativo, si deve attendere a tal proposito la prima data utile ed, una volta effettuata la richiesta, bisogna attendere che questa venga recepita e, quindi, analizzata dalla controparte, la quale eventualmente procede alla consegna del collaterale, anch'essa attendendo la prima data utile. La ricezione del collaterale, inoltre, può richiedere un intervallo di tempo più o meno esteso (a seconda della natura dell'asset in questione: nel caso di denaro liquido, ad esempio, la consegna è pressoché immediata mentre il trasferimento di un'obbligazione aziendale potrebbe richiedere qualche giorno). Inoltre, qualora la controparte si rivelasse incapace o reticente a consegnare il collaterale, è previsto un periodo di attesa (detto *grace period*) all'interno del quale quest'ultima non incorre in alcuna penalità, dopo di che, se non adempie agli obblighi previsti, il contratto viene rescisso.

### 3.6 Stima della Exposure sotto ipotesi di totale collateralizzazione

Analizziamo, innanzitutto, un caso ideale in cui non siano presenti delle soglie specifiche che devono essere soddisfatte dal valore della Exposure affinché, all'interno di un contratto, sia possibile avanzare formale richiesta di collaterale. Tale caratteristica ha una conseguenza fondamentale: il rischio legato ad un'eventuale insolvenza della controparte, infatti, risulta in questo modo essere ben coperto lungo tutto l'intervallo di vita del contratto, in quanto si dispone di collaterale non appena la Exposure sia diversa da zero, mentre permane nei singoli intervalli, aventi come lunghezza la remargin frequency, compresi tra due date utili consecutive nelle quali è possibile avanzare richiesta di collaterale. In tali lassi di tempo, infatti, eventuali aumenti del valore della Exposure risultano non essere coperti da collaterale. Supponiamo innanzitutto che il collaterale sia, in base a quanto previsto da contratto, corrispondente a denaro liquido: in tal caso la esposizione al rischio di controparte in uno dei suddetti intervalli, che supponiamo avere lunghezza fissata  $T_M \in \mathbb{R}_{>0}$ , è descritta dalla variazione dei valori della Exposure in assenza di collaterale. Consideriamo, quindi, un generico intervallo di tempo compreso tra due date consecutive in corrispondenza delle quali è possibile eseguire richiesta di collaterale ed indichiamolo con  $[0, T_M]$ . Supponiamo, quindi, che il valore della Exposure in assenza di collaterale sia descritto da un moto browniano  $\{E_t\}_{t \in [0, T_M]}$ , con coefficiente di diffusione pari a  $\sigma_E \in \mathbb{R}$ : sotto tali ipotesi, dunque, l'incremento del valore della Exposure in assenza di collaterale lungo l'intervallo è descritto da  $E_{T_M} - E_0$ , che è una variabile casuale avente media nulla e deviazione standard pari a  $\sigma_E \sqrt{T_M}$  ed, in base a quanto visto, descrive il valore della Exposure in assenza di collaterale e, pertanto, si possono ottenere i corrispondenti valori di EE e di PFE

$$EE = \sigma_E \sqrt{T_M} \phi(0),$$

$$PFE_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \sigma_E \sqrt{T_M},$$

ove, rispettivamente,  $\Phi$  e  $\phi$  sono funzione di ripartizione e densità di una variabile aleatoria normale standard. Supponendo, invece, che il collaterale non sia denaro liquido ma un particolare titolo finanziario, allora, al fine di quantificare la Exposure nell'intervallo  $[0, T_M]$ , all'incremento del valore della Exposure in assenza di collaterale va sottratto l'incremento del valore del collaterale: se, infatti, tale incremento è positivo, significa che il valore del collaterale è superiore al valore della Exposure all'istante iniziale (che coincide con il valore del collaterale in tale istante) e dunque tale differenza costituisce una riduzione del valore della Exposure, mentre se tale incremento è negativo significa che una parte della Exposure risulta non essere più coperta dal valore del collaterale e, pertanto, si ha un'incremento del valore complessivo di quest'ultima. Ipotizziamo, quindi, che gli incrementi del valore della Exposure in assenza di collaterale e gli incrementi del valore del collaterale siano descritti, rispettivamente, dalle variabili casuali  $E$  e  $C$ , definite su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , congiuntamente normali ed aventi, per ipotesi, media nulla e deviazione standard rispettivamente pari a  $\sigma_E \sqrt{T_M}$  e  $\sigma_C \sqrt{T_M}$ . In virtù delle

considerazioni fatte prima, quindi, in presenza di collaterale l'incremento dell'esposizione al rischio di controparte nell'intervallo  $[0, T_M]$ , corrispondente al remargin period, viene descritto dalla variabile casuale  $E - C$ , la quale ha media nulla ed è una variabile aleatoria normale e, per quando riguarda la varianza, supponendo sia  $\sigma_{EC}$ , osserviamo che

$$\begin{aligned}\sigma_{E,C}^2 &= E[(E - C - E(E - C))] = E\left[\left(E - E(E) - (C - E(C))\right)^2\right] \\ &= E\left[(E - E(E))^2 + (C - E(C))^2 - 2(E - E(E))(C - E(C))\right] \\ &= \sigma_E^2 + \sigma_C^2 - 2\text{Cov}(E, C) = \sigma_E^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{E,C}\sigma_E\sigma_C\end{aligned}$$

ove  $\rho_{E,C}$  è l'indice di correlazione tra gli incrementi della Exposure in assenza di collaterale e gli incrementi del valore del collaterale. In base a questi risultati, dunque, è possibile calcolare, in presenza di collaterale, i valori di EE e PFE, ottenendo:

$$\begin{aligned}\text{EE} &= \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_C^2 - 2\sigma_E\sigma_C}\sqrt{T_M}\phi(0), \\ \text{PFE}_\alpha &= \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_C^2 - 2\sigma_E\sigma_C}\sqrt{T_M},\end{aligned}$$

ove, rispettivamente,  $\Phi$  e  $\phi$  sono funzione di ripartizione e densità di una variabile aleatoria normale standard.

### 3.7 Stima della Exposure in presenza di parziale collateralizzazione

Cosideriamo un contratto stipulato tra due soggetti finanziari e che preveda l'utilizzo di collaterale. Supponiamo che il collaterale venga, eventualmente, consegnato in base alla remargin frequency definita dai termini del contratto e che ciascuna delle parti all'interno del contratto possa avanzare richiesta di collaterale soltanto qualora il valore della Exposure superi un a determinata soglia: in questo caso, quindi, l'esposizione al rischio di controparte risulta essere presente durante tutto l'arco di vita del contratto medesimo, il quale ipotizziamo essere descritto da un intervallo identificato con  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ . Supponiamo, inoltre, che tutte le attività sottostanti appartengano ad un unico insieme di netting e che il relativo MtM sia descritto da un processo stocastico  $\{V(t)\}_{t \in [0, T]}$ , definito su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e tale che

$$V(t) := \sigma W(t),$$

ove  $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$  è un moto browniano definito su  $[0, T]$ . Gli incrementi del processo considerato sono, quindi, gaussiani ed indipendenti: più precisamente, per ogni  $t \in [0, T]$  e per ogni  $h \in \mathbb{R}$  tale che  $t + h \in [0, T]$ , la variabile casuale  $V(t + h) - V(t)$  è una variabile aleatoria normale di media nulla ed avente deviazione standard  $\sqrt{h}\sigma$ , ove  $\sigma \in \mathbb{R}$  è un valore fissato. Supponiamo che il valore della soglia oltre il quale sia possibile effettuare una margin call corrisponda ad una quantità fissata  $D \in \mathbb{R}$  e supponiamo che il

remargin period abbia lunghezza pari a  $\Delta$ . In base a tale ipotesi, innanzitutto calcoliamo il valore, ad un dato istante  $t \in [0, T]$ , dell'eventuale collaterale trattenuto da una delle due parti, ipotizzando che quest'ultimo venga richiesto e restituito, qualora la controparte non si rivelasse insolvente, con una frequenza pari alla lunghezza del remargin period: in pratica supponiamo, allo scopo di semplificare la situazione, che la margin frequency coincida con il remargin period. Il valore del collaterale posseduto all'istante  $t \in [0, T]$ , pertanto, è presente solo se, in corrispondenza dell'ultima data utile in cui poterne fare richiesta, che è pari a  $s = \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor \Delta$ , la soglia di margin call è stata ecceduta, ed in tal caso corrisponde alla differenza tra il MtM del netting set all'istante appena definito e il valore della soglia di margin call, ovvero, in globale, il valore del collaterale è definito dal processo stocastico  $\{C(t)\}_{t \in [0, T]}$ , tale che

$$C(t) := \max(0, V(s) - D), \forall t \in [0, T], \text{ ove } s = \left\lfloor \frac{t}{\Delta} \right\rfloor \Delta.$$

Il valore della Exposure, quindi, corrisponde al valore atteso delle realizzazioni positive del MtM, al quale, tuttavia, deve essere sottratto il valore del collaterale momentaneamente trattenuto: il valore della Exposure, in pratica, è ottenuto a partire dalla componente del MtM che risulta non essere coperta dal valore del collaterale e corrisponde a

$$E(t) = \max(0, V(t) - C(t)) = \max(0, V(t) - \max(0, V(s) - D)),$$

$$\forall t \in [0, T], \text{ ove } s = \left\lfloor \frac{t}{\Delta} \right\rfloor \Delta,$$

ovvero, più chiaramente

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } V(s) < D \text{ e } V(t) < 0 \\ V(t) & \text{se } V(s) < D \text{ e } V(t) > 0 \\ 0 & \text{se } V(s) > D \text{ e } V(t) < V(s) - D \\ V(t) - V(s) + D & \text{se } V(s) > D \text{ e } V(t) > V(s) - D \end{cases}$$

Supponiamo, innanzitutto, che  $V_0 = v \in \mathbb{R}$ . In virtù delle ipotesi fatte relativamente al processo stocastico  $V$ , quindi, possiamo osservare che

- $V(s) - V(0) = \sigma\sqrt{s}Z_1$ , ove  $Z_1$  è una normale standard, dunque  $V(s) = v + \sigma\sqrt{s}Z_1$ ;
- $V(t) - v = V(t) - V(s) + V(s) - v + \sigma\sqrt{t-s}Z_2 + \sigma\sqrt{s}Z_1$ , ove  $Z_2$  è una normale standard indipendente da  $Z_1$ , dunque  $V(t) = v + \sigma\sqrt{t-s}Z_2 + \sigma\sqrt{s}Z_1$ .

Il valore della Exposure, pertanto, può essere riscritto in questo modo:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } v + \sigma\sqrt{s}Z_1 < D \text{ e } v + \sigma\sqrt{t-s}Z_2 + \sigma\sqrt{s}Z_1 < 0 \\ v + \sigma\sqrt{t-s}Z_2 + \sigma\sqrt{s}Z_1 & \text{se } v + \sigma\sqrt{s}Z_1 < D \text{ e } v + \sigma\sqrt{t-s}Z_2 + \sigma\sqrt{s}Z_1 > 0 \\ 0 & \text{se } v + \sigma\sqrt{s}Z_1 > D \text{ e } \sigma\sqrt{t-s}Z_2 < -D \\ \sigma\sqrt{t-s}Z_2 + D & \text{se } v + \sigma\sqrt{s}Z_1 > D \text{ e } \sigma\sqrt{t-s}Z_2 > -D \end{cases}$$

Possiamo affermare che, quindi,  $E(t) = h(Z_1, Z_2)$ , ove  $h$  è una funzione definita su  $\mathbb{R}^2$  e tale che

$$h(x, y) = \max(0, v + \sigma\sqrt{t-s}y + \sigma\sqrt{s}x - \max(0, v + \sigma\sqrt{s}x - D))$$

per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ : si osservi che tale funzione è continua, essendo composizione di funzioni continue.

Supponiamo che  $f_{Z_1, Z_2}$  sia la densità congiunta delle variabili aleatorie normali standard  $Z_1$  e  $Z_2$ : essendo, per ipotesi, le due variabili indipendenti, allora la densità congiunta corrisponde al prodotto delle densità delle singole variabili. Indicando, quindi, con  $f$  la distribuzione di una normale standard, possiamo affermare che

$$\begin{aligned} EE(t) &= \int_{\Omega} E(t)(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} h(Z_1(\omega), Z_2(\omega)) dP(\omega) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(z_1, z_2) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

ove l'ultimo integrale è da intendersi rispetto alla  $\sigma$ -algebra dei boreliani di  $\mathbb{R}^2$ . Definiamo, ora, i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} A &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } v + \sigma\sqrt{s}z_1 < D \text{ e } v + \sigma\sqrt{t-s}z_2 + \sigma\sqrt{s}z_1 > 0\} \\ B &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } v + \sigma\sqrt{s}z_1 > D \text{ e } \sigma\sqrt{t-s}z_2 > -D\}. \end{aligned}$$

In base alla notazione appena introdotta, quindi, possiamo riscrivere la EE come

$$\begin{aligned} EE(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(z_1, z_2) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) = \\ &= \int_A h(z_1, z_2) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) + \int_B h(z_1, z_2) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) = \\ &= \int_A (v + \sigma\sqrt{t-s}z_2 + \sigma\sqrt{s}z_1) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) + \\ &\quad + \int_B (\sigma\sqrt{t-s}z_2 + D) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Osserviamo che la funzioni presenti all'interno degli ultimi due integrali sono misurabili e, in corrispondenza dei relativi domini di integrazione, non negative, dunque è possibile applicare il teorema di Fubini, ottenendo

$$\begin{aligned} EE(t) &= \int_A (v + \sigma\sqrt{t-s}z_2 + \sigma\sqrt{s}z_1) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) + \\ &\quad + \int_B (\sigma\sqrt{t-s}z_2 + D) f(z_1) f(z_2) d(z_1, z_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}} \left( \int_{\frac{-v-\sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}}}^{+\infty} (v + \sigma\sqrt{t-s}z_2 + \sigma\sqrt{s}z_1) f(z_2) dz_2 \right) f(z_1) dz_1 + \\ &\quad + \int_{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}}^{+\infty} \left( \int_{-\frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}}}^{+\infty} (\sigma\sqrt{t-s}z_2 + D) f(z_2) dz_2 \right) f(z_1) dz_1. \end{aligned}$$

Osserviamo che, per quanto riguarda il primo membro

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}} \left( \int_{\frac{-v-\sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}}}^{+\infty} (v + \sigma\sqrt{t-s}z_2 + \sigma\sqrt{s}z_1) f(z_2) dz_2 \right) f(z_1) dz_1 = \\
& = \int_{-\infty}^{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}} \left( (v + \sigma\sqrt{s}z_1) \Phi \left( \frac{v + \sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \sigma\sqrt{t-s} \int_{\frac{-v-\sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}}}^{+\infty} z_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{z_2^2}{2} \right) dz_2 \right) f(z_1) dz_1 = \\
& = \int_{-\infty}^{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}} \left( (v + \sigma\sqrt{s}z_1) \Phi \left( \frac{v + \sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \frac{\sigma\sqrt{t-s}}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\exp \left( -\frac{z_2^2}{2} \right) \right]_{\frac{-v-\sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}}}^{+\infty} \right) f(z_1) dz_1 = \\
& = \int_{-\infty}^{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}} \left( (v + \sigma\sqrt{s}z_1) \Phi \left( \frac{v + \sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \frac{\sigma\sqrt{t-s}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{v + \sigma\sqrt{s}z_1}{\sigma\sqrt{t-s}} \right)^2 \right] \right) f(z_1) dz_1
\end{aligned}$$

e, per quanto riguarda il secondo, otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}}^{+\infty} \left( \int_{-\frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}}}^{+\infty} (\sigma\sqrt{t-s}z_2 + D) f(z_2) dz_2 \right) f(z_1) dz_1 = \\
& = \int_{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}}^{+\infty} \left( D \Phi \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \int_{-\frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}}}^{+\infty} \sigma\sqrt{t-s}z_2 f(z_2) dz_2 \right) f(z_1) dz_1 = \\
& = \int_{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}}^{+\infty} \left( D \Phi \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \frac{\sigma\sqrt{t-s}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}} \right)^2 \right] \right) f(z_1) dz_1 = \\
& = \left( D \Phi \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \frac{\sigma\sqrt{t-s}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}} \right)^2 \right] \right) \int_{\frac{D-v}{\sigma\sqrt{s}}}^{+\infty} f(z_1) dz_1 = \\
& = \left( D \Phi \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \frac{\sigma\sqrt{t-s}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{t-s}} \right)^2 \right] \right) \Phi \left( \frac{v-D}{\sigma\sqrt{s}} \right).
\end{aligned}$$

Abbiamo, quindi, ottenuto una formula chiusa che quantifica il valore della Exposure al tempo  $t$  in presenza di collaterale.

## Capitolo 4

# Stima dell'esposizione al rischio di controparte

Una questione fondamentale, all'interno dello studio del rischio di controparte, consiste nella ricerca di modelli matematici che, dato un insieme di contratti stipulati tra due soggetti finanziari, possano fornire una stima delle quantità, precedentemente definite, che descrivono l'esposizione al rischio di controparte (*Exposure*, *Expected Exposure*, *Potential Future Exposure*..). Esistono, come vedremo, diversi approcci in tal senso: alcuni sono meno accurati ma più rapidi, altri sono più dettagliati ma più complessi, sia concettualmente che da un punto di vista computazionale, e la scelta degli uni o degli altri dipende sostanzialmente dall'operazione che si intende svolgere con l'ausilio di suddette stime. La ricerca di tali modelli, appunto, si rivela necessaria per diverse ragioni. Innanzitutto, la stima della PFE permette ad un soggetto finanziario di selezionare, relativamente ad una data controparte, alcuni contratti rispetto ad altri, escludendo i rimanenti, al fine di ridurre il rischio di insolvenza associato singolarmente ad ognuna delle controparti con le quali intende confrontarsi. Più precisamente, dato un contratto relativo ad una data controparte ed avente una relativa scadenza, viene associato, ad un insieme di istanti fissati, in generale, arbitrariamente all'interno dell'intervallo di vita dello stesso, un insieme, anch'esso in generale arbitrario, di valori: tale insieme prende il nome di *Credit line* e se il valore della PFE associato al contratto non eccede, ad ogni istante considerato, il relativo valore della *Credit line*, il contratto viene stipulato, diversamente viene rigettato. Stimare l'esposizione al rischio di controparte, inoltre, risulta essere utile anche al fine di determinare opportune strategie di copertura al fine di tutelarsi, appunto, dall'eventuale insolvenza della controparte, disponendo di una stima delle potenziali perdite qualora tale esito dovesse verificarsi. Tutti i modelli in questione hanno una caratteristica comune, ovvero, al fine di descrivere l'andamento della *Exposure*, ipotizzano che si verifichino entrambi i seguenti fatti:

- innanzitutto si suppone che la volatilità relativa alle attività sottostanti un contratto aumenti allontanandosi dall'istante attuale e, dunque, questo fatto aumenta il valore della *Exposure* all'avvicinarsi alla scadenza;

- per quanto riguarda, tuttavia, i contratti che prevedano diversi versamenti distribuiti, uniformemente o non uniformemente, all'interno dell'intervallo compreso tra la data attuale e la data di scadenza, il valore della Exposure tende a ridursi man mano che tali versamenti vengono effettuati.

Ogni approccio che abbia come fine la modellizzazione della esposizione al rischio di controparte, dunque, si basa sulla coesistenza tra i due aspetti appena descritti e stabilisce un equilibrio fra di essi.

## 4.1 Stima attraverso un parametro

Supponiamo di volere stimare il valore atteso della Exposure di un dato contratto ad un istante futuro fissato, compreso tra l'istante attuale e la data di scadenza del contratto stesso. L'approccio più semplice in tal senso consiste nel sommare al valore attuale della Exposure una quantità costante, sia  $\xi$ , che descrive la variazione attesa del valore della Exposure entro tale data, ottenendo

$$E[\max(\text{MtM}, 0)] + \xi$$

ove MtM è il valore attuale del Mark-To-Market, inteso come la somma del valore attuale di tutte le posizioni relative al contratto in questione. Al fine di determinare il valore di  $\xi$  si considerano, solitamente, l'orizzonte temporale in questione (in generale, quanto più ci allontaniamo dalla data attuale, tanto maggiore è il valore di  $\xi$ ), la tipologia delle asset class di cui fanno parte le attività sottostanti (in presenza di asset class i cui elementi siano, mediamente, caratterizzati da volatilità consistenti, il valore di  $\xi$  aumenta in maniera significativa), la tipologia dei flussi di cassa previsti dal contratto e la presenza o meno di specifici accordi (ad esempio, una strategia di netting) volti a ridurre i valori futuri della Exposure. La stima della Exposure secondo tale approccio risulta essere molto semplificata ed approssimativa, tuttavia quest'ultimo fatto può risultare utile qualora si desiderasse ottenere, in tempi rapidi, una stima preliminare della Exposure relativamente ad un particolare investimento.

## 4.2 Metodi semianalitici

Dato un contratto da stipularsi con una determinata controparte ed avente una scadenza definita, un metodo utilizzato al fine di quantificare il valore della Exposure è costituito dal ricavare, previa determinate ipotesi, espressioni analitiche che approssimino alcune delle quantità, come ad esempio la EE o la PFE, che descrivono l'andamento della Exposure nel futuro. Più precisamente, dapprima si definisce quali siano i fattori di rischio che determinano il valore della Exposure: solitamente si prendono in considerazione i valori assunti, nell'arco di tempo considerato, dalle attività sottostanti il contratto. In base a tali assunzioni, quindi, il valore delle attività sottostanti viene descritto attraverso variabili casuali, a ciascuna delle quali è assegnata un'opportuna distribuzione. A partire da tali ipotesi, dunque, è possibile derivare le espressioni analitiche che descrivono

l'andamento della Exposure. Si osservi che, poichè, avendo descritto le attività sottostanti con delle variabili casuali, questo fatto corrisponde ad approssimare, pur in maniera rigorosa, il valore del MtM all'interno della durata del contratto, dunque le espressioni analitiche derivate costituiscono una descrizione approssimativa, più o meno accurata, dell'andamento della Exposure.

A titolo di esempio, consideriamo una posizione corta all'interno di un contratto Forward: in questo caso un soggetto finanziario è vincolato, alla scadenza, ad acquistare dalla controparte una determinata attività sottostante ad un prezzo di esercizio pattuito, entrambi indicati esplicitamente dal contratto in questione. Osserviamo che in un dato istante il MtM coincide con il valore dell'attività sottostante, la quale, infatti, non verrebbe consegnata alla data di scadenza qualora, nell'istante considerato, la controparte dovesse dichiararsi impossibilitata o reticente ad onorare gli obblighi previsti dal contratto e, quindi, descrive il valore della perdita subita nel caso si verifichi tale scenario in suddetto istante. Ora vogliamo descrivere la variazione del valore dell'attività sottostante nel tempo. Supponiamo, innanzitutto, ai fini del modello, che l'unico fattore di rischio sia dato dal valore dell'attività sottostante il contratto. Supponiamo che la durata del contratto sia descritta dall'intervallo  $[0, T]$ , ove  $t = 0$  rappresenta l'istante in cui viene stipulato il contratto, mentre  $t = T$  rappresenta la relativa data di scadenza. Sia ora  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità fissato: supponiamo che il valore del MtM relativamente alla posizione corta all'interno del contratto sia descritto dal processo stocastico  $\{V_t\}_{t \in [0, T]}$ , definito su tale spazio e tale che, per ogni  $t \in [0, T]$ , si abbia

$$V_t = \mu t + \sigma W_t,$$

ove  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  è un moto browniano. Osserviamo, dunque, che il valore dell'attività sottostante è, in base alle ipotesi fatte, costituito dalla somma di:

- una componente deterministica, lineare rispetto al tempo ed avente come coefficiente il valore  $\mu$  (detto *deriva*), che descrive una tendenza, non aleatoria, del MtM a discostarsi dal valore iniziale (il quale è stato supposto nullo per semplificare i conti successivi);
- una componente aleatoria, descritta dalla variabile casuale  $W_t$ , normale avente media nulla e deviazione standard  $\sqrt{t}$ , ed il cui valore è amplificato dal valore del coefficiente  $\sigma$ , detto *diffusione*.

Considerando un istante  $t \in [0, T]$  fissato, sappiamo che la variabile casuale  $V_t = \mu t + \sigma(W_t - W_0)$ , essendo una trasformazione affine della variabile casuale normale (in base alle proprietà del moto browniano)  $W_t - W_0$ , è anch'essa una variabile casuale gaussiana. In virtù delle proprietà del moto browniano e della linearità del valor medio osserviamo che, per  $t \in [0, T]$  fissato, essendo  $\mu t$  una quantità costante, si ha

$$E(V_t) = E(\mu t + \sigma(W_t - W_0)) = \mu t + \sigma E(W_t - W_0) = \mu t$$

e, per quanto riguarda la varianza, otteniamo

$$\begin{aligned} Var(V_t) &= E((V_t - E(V_t))^2) = E((\sigma(W_t - W_0))^2) = \\ &= \sigma^2 E((W_t - W_0)^2) = \sigma^2 Var(W_t - W_0) = \sigma^2 t. \end{aligned}$$

In generale, quindi, possiamo affermare che, per ogni  $t \in [0, T]$  la variabile casuale  $V_t$  (che descrive il MtM all'istante  $t \in [0, T]$ ) è una normale avente media  $\mu t$  e deviazione standard  $\sigma\sqrt{t}$ . In base a tale risultato, quindi, è possibile applicare quanto visto in precedenza e calcolare il valore di EE e PFE. Più precisamente, siano  $\Phi$  e  $\phi$ , rispettivamente, la funzione di ripartizione e la densità di una normale standard, allora la PFE, relativa ad un livello di confidenza  $\alpha$ , è data da

$$PFE_\alpha = \mu t + \sigma\sqrt{t}\Phi^{-1}(\alpha)$$

e la EE corrisponde ad

$$EE = \mu t \Phi\left(\frac{\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \mu t \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{t}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{t}\right).$$

### 4.3 Metodo Monte Carlo

Un approccio ampiamente utilizzato, al fine di descrivere la Exposure relativamente ad un insieme di contratti, in generale stipulati con una o più controparti, è dato dal metodo Monte Carlo. In base a suddetto approccio, vengono simulate un numero finito di traiettorie che descrivono una particolare realizzazione, in corrispondenza di un insieme fissato di istanti temporali, del valore della Exposure di ciascun contratto. Dopo aver effettuato tali stime, questo metodo si preoccupa di definire, per ciascuno scenario, la Exposure effettiva di ciascun insieme di netting e, quindi, si riserva di modificare tale valore qualora siano presenti eventuali strategie volte a ridurlo ulteriormente. Una volta stimati i possibili valori della Exposure relativamente a ciascun insieme di netting ed a ciascuna controparte, quindi, è possibile estrarre empiricamente i valori che stimano le metriche che descrivono la Exposure nei confronti di ogni singola controparte. Tale metodo, pertanto, pur essendo concettualmente più complesso e computazionalmente più oneroso rispetto ad i metodi precedenti, garantisce tuttavia una descrizione molto più accurata del valore della Exposure e, soprattutto, riesce ad includere, al fine di ottenere tale stima, in maniera completa l'apporto fornito dalle strategie finalizzate a ridurre la Exposure (strategie di netting, istituzione di un collaterale, ecc.). Forniamo una descrizione dettagliata dell'utilizzo del metodo Monte Carlo nella valutazione della Exposure.

#### 4.3.1 Scelta dei fattori di rischio e del modello

Il primo passo consiste nell'individuare l'insieme di tutti i fattori di rischio, all'interno del mercato, che si ritiene influenzino il valore della Exposure dei singoli contratti appartenenti all'insieme che stiamo considerando. Tipicamente, si ritiene che la Exposure di ciascun contratto sia influenzata da un unico fattore di rischio, ovvero il valore assunto, nel tempo, dalle attività sottostanti il contratto stesso: in base a tale ipotesi, dunque, si

costruisce un modello che descrive l'evoluzione nel tempo del valore assunto da ciascuna di esse. Data, quindi, una generica attività sottostante ad un dato contratto stipulato con una determinata controparte, si suppone che l'andamento, lungo tutto l'intervallo temporale di vita del contratto, del valore di suddetta attività sia descritto, in base alle caratteristiche specifiche di quest'ultima, da un opportuno processo stocastico. Più precisamente, si considera uno spazio di probabilità filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ , ove  $[0, T]$  corrisponde all'intervallo temporale di durata del contratto in questione. Si suppone, quindi, che il valore della posizione considerata sia descritto da un processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  a valori reali, quasi certamente continuo (secondo la probabilità  $P$ ), adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  e tale da risolvere un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad \forall t \in [0, T] \\ X_0 = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ove  $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$  è un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ -moto browniano, definito su  $\Omega$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  rappresenta il valore dell'attività sottostante alla data di stipula del contratto (al tempo  $t = 0$ ) e le due funzioni  $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono misurabili e tali che i processi stocastici  $\{\sigma(t, X_t)\}_{t \in [0, T]}$  e  $\{b(t, X_t)\}_{t \in [0, T]}$  siano progressivamente misurabili e, rispettivamente, si abbia  $P(\int_0^T |b(t, X_t)| dt < \infty) = 1$  e  $P(\int_0^T (\sigma(t, X_t))^2 dt < \infty) = 1$ . Al fine di semplificare il linguaggio, diciamo che un processo  $X$  che risolve l'equazione differenziale stocastica descritta sopra è tale che  $X_0 = x \in \mathbb{R}$  ed ha dinamica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

ove quest'ultima formula consiste in una rappresentazione abbreviata dell'equazione scritta sopra e le applicazioni  $b$  e  $\sigma$  ed il moto browniano  $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$  sono quelli precedentemente definiti.

### 4.3.2 Generazione degli scenari

Dopo aver definito i fattori di rischio ed i modelli che li descrivono, ovvero dopo aver opportunamente descritto l'evoluzione del valore delle attività sottostanti, il metodo Monte Carlo simula, a partire da suddetti modelli, un numero finito di scenari, ciascuno dei quali consiste in un insieme di valori che l'attività sottostante potrebbe assumere, con buona approssimazione, in corrispondenza di un insieme di date scelte arbitrariamente all'interno dell'intervallo di vita del relativo contratto. Più precisamente, supponiamo che il valore di una data attività sottostante sia descritto da un processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  tale da soddisfare tutte le ipotesi introdotte al punto precedente. Al fine di generare i diversi scenari, occorre definire un processo stocastico, a tempo discreto, avente una particolare dinamica, la quale approssimi adeguatamente l'evoluzione del processo a tempo continuo  $X$ . A titolo di esempio, spesso viene utilizzato, a tal proposito, lo schema di Eulero. Ricordiamo, innanzitutto, che  $X_0 = x \in \mathbb{R}$  è un valore fissato ed  $X$  ha dinamica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Si introduce, quindi, una successione di catene di Markov  $\{Y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , ove  $Y^{(n)} = \{Y_k^{(n)}\}_{k=1}^n$  è, al variare di  $n \in \mathbb{N}$ , un processo a tempo discreto definito dalla dinamica

$$Y_{k+1}^n = Y_k^n + \frac{1}{n}b(Y_k^n) + \sigma(Y_k^n)w_{k+1},$$

ove  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di variabili casuali normali aventi media nulla e deviazione standard  $1/n$ . Sotto opportune condizioni, quindi, la successione  $\{X^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  di processi stocastici a tempo continuo, definita, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , da  $X_t^{(n)} := Y_{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor}^{(n)}$  (ovvero un processo stocastico a tempo continuo costituito da  $n$  salti della stessa lunghezza lungo l'intervallo  $[0, T]$ ), per  $n$  che tende ad infinito, converge in legge ad  $X$ . Dopo aver trovato una sequenza appropriata catene di Markov, dunque,  $X$  viene approssimato dal processo stocastico a tempo discreto  $Y^{(n)}$ , per un dato  $n \in \mathbb{N}$  fissato e sufficientemente grande. Più precisamente, dopo aver posto il valore iniziale  $Y_0 = X_0 = x \in \mathbb{R}$ , si esegue un numero finito di simulazioni della traiettoria descritta dalla dinamica di  $Y^{(n)}$ . Analogamente, nel caso generale, una volta trovata una sequenza a tempo discreto che si suppone, con buona probabilità, approssimare la dinamica di  $X$  in corrispondenza di un numero definito di istanti temporali, siano  $t_1, \dots, t_n$ , appartenenti all'intervallo di vita del contratto e scelti in maniera arbitraria, si procede simulando un numero definito di traiettorie di tale sequenza (la cui dinamica, ricordiamo, è nota). Per quanto riguarda la scelta del numero di istanti temporali da prendere in considerazione è necessario trovare un compromesso: tale valore deve essere sufficientemente alto da poter descrivere in maniera dettagliata, come vedremo in seguito, l'evoluzione del valore della Exposure e delle metriche ad essa associate ed, allo stesso tempo, non deve essere eccessivamente grande al punto di rendere computazionalmente impossibile l'implementazione del modello appena descritto. Per quanto riguarda la distribuzione di tali istanti all'interno dell'intervallo di vita del contratto, inoltre, in generale essa rispecchia le caratteristiche del contratto stesso: una distribuzione uniforme di  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , infatti, si basa sull'assunzione che, una volta che si è stimato il valore della Exposure in corrispondenza di tali scadenze, sia possibile interpolare quanto calcolato per ottenere una stima, lungo tutto l'intervallo, di tale valore, per il quale non sono previste, in generale, variazioni in breve tempo e di entità considerevole. Tale approccio, tuttavia, può risultare controproducente qualora siano presenti degli intervalli, anche piccoli, di tempo in cui, in relazione a particolari contingenze (scadenza di uno o più contratti di una delle due posizioni, una data in cui si dà o si riceve un pagamento intermedio, un evento improvviso che modifica radicalmente il valore dell'attività sottostante, ecc..) il valore della Exposure possa, nella realtà, variare di molto e nessun istante considerato appartenga a tali intervalli: in tal caso una distribuzione uniforme degli istanti  $t_0, t_1, \dots, t_n$  comporterebbe una descrizione fittizia del valore della Exposure ed il rischio di commettere tale errore prende il nome di rischio di *roll-off*. Al fine di tutelarsi da tale eventualità, quindi, di solito si parte da una distribuzione uniforme degli istanti temporali e, quindi, si procede aggiungendo ulteriori date, concentrandone ovunque si supponga, in base alle caratteristiche specifiche del contratto, che la Exposure possa variare in maniera critica. In conclusione, la determinazione degli istanti discreti in corrispondenza dei quali stimare la Exposure viene effettuata tenendo conto delle caratteristiche specifiche del contratto in questione.

### 4.3.3 Valutazione della posizione al variare degli scenari

Una volta ottenuto un numero prestabilito di scenari relativamente al valore assunto, all'interno di un numero finito  $t_0, t_1, \dots, t_n$  di istanti temporali, dall'attività sottostante il contratto, per ogni scenario viene calcolato il valore del MtM del contratto in corrispondenza degli istanti di tempo considerati. Il valore del MtM viene calcolato in maniera differente al variare delle caratteristiche proprie di ciascun contratto: ad esempio, il valore di un'opzione europea può essere calcolato, negli istanti precedenti alla data di scadenza, a partire dal valore del payoff finale, utilizzando un'opportuno modello di prezzaggio (ad esempio utilizzando il modello di Black e Scholes).

### 4.3.4 Netting ed Exposure

Dopo aver calcolato, in corrispondenza di ogni scenario, il valore del MtM di un contratto negli istanti di tempo considerati, al fine di calcolare la Exposure bisogna considerare preventivamente l'impiego di eventuali strategie di netting nei confronti di ciascuna singola controparte. Supponiamo di aver stimato il MtM di un insieme di contratti relativamente ad una data controparte, attraverso la simulazione di  $s$  scenari distinti ed in corrispondenza degli  $n$  istanti temporali  $t_0, t_1, \dots, t_n$  appartenenti all'intervallo di vita del contratto. Se, dunque, all'interno di suddetto insieme è presente un insieme di netting costituito da  $m \in \mathbb{N}$  elementi, il relativo valore, stimato al generico istante  $t_j \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  ed in corrispondenza dello scenario  $k \in \{1, \dots, s\}$ , della Exposure complessiva è dato da

$$E_{j,k} = \max \left( \sum_{i=1}^m V_{i,j,k}, 0 \right),$$

dove  $V_{i,j,k}$  rappresenta il valore stimato del MtM dell'attività, presente all'interno dell'insieme di netting, descritta nel modello teorico dalla variabile casuale  $V_i$ , all'istante discreto  $t_j \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  ed in corrispondenza dello scenario  $k \in \{1, \dots, s\}$ . A ciascun insieme di netting relativo ad una data controparte, in conclusione, viene associata la matrice  $E = (E_{j,k})$ , ove  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $k \in \{1, \dots, s\}$  ed  $E_{j,k}$  rappresenta il valore della Exposure di tale insieme, simulato all'istante  $t_j$  ed in corrispondenza dello scenario  $k \in \{1, \dots, s\}$ .

### 4.3.5 Influenza di fattori esterni

Dopo aver calcolato, per ciascuna controparte, il valore della Exposure di ciascun insieme di netting, per un numero predefinito di scenari ed in corrispondenza di un dato insieme di istanti temporali, bisogna, se necessario, modificare tali valori per tutti i contratti che prevedano ulteriori strategie finalizzate a ridurre il valore della Exposure e tali che, per ipotesi, l'ammontare di suddetta ulteriore riduzione non dipende dall'evoluzione delle attività sottostanti. Le tecniche di riduzione in merito sono varie e dipendono dalla tipologia di strategia utilizzata. A titolo di esempio, un approccio diffuso consiste nell'inclusione, all'interno dei singoli contratti, di una clausola che prevede la consegna di un collaterale qualora, in corrispondenza di determinati istanti prestabiliti, una delle due parti sia

caratterizzata da un Exposure positiva: è necessario, quindi, stimare, in corrispondenza di un particolare scenario, la quantità, in termini percentuali, del valore della Exposure che viene ridotta impiegando questa tecnica. Ricordiamo che i benefici derivanti da tale strategia non dipendono dalle attività sottostanti i singoli contratti. Consideriamo, nei punti successivi, il valore della Exposure di un insieme di netting, stimato in corrispondenza di un dato scenario e ad un dato istante, come il valore stimato della Exposure già comprensivo di tutte le riduzioni dovute all'impiego di strategie volte alla riduzione del rischio.

### 4.3.6 Descrizione della Exposure

Dopo avere ottenuto, in corrispondenza di ciascuna controparte ed in corrispondenza di ciascun insieme di netting, un numero fissato di scenari, ciascuno dei quali descrive una realizzazione congiunta dei corrispettivi valori della Exposure alle date fissate, è possibile procedere calcolando alcune delle metriche che definiscono la Exposure. Per quanto riguarda la EE in un dato istante fissato, diciamo  $EE_{t_j}$ , ove  $t_j \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  è l'istante di tempo considerato, supponendo che siano stati simulati  $s \in \mathbb{N}$  scenari distinti, essa viene stimata attraverso la media campionaria del valore ottenuto per la EE in corrispondenza di ciascun singolo scenario, più precisamente:

$$EE_{t_j} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s E_{j,k}$$

ove, riprendendo la notazione precedente,  $E_{j,k}$  descrive il valore della Exposure simulato all'istante  $t_j \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  ed in corrispondenza dello scenario  $k \in \{1, \dots, s\}$ . La PFE in corrispondenza di un livello di confidenza  $\alpha \in (0, 1)$ , invece, viene stimata empiricamente come il minimo valore della Exposure simulato tale per cui la probabilità di ottenere, tramite la simulazione descritta ed in corrispondenza di ciascun scenario, valori della Exposure inferiori od uguali a suddetta quantità non ecceda  $1 - \alpha$ . A questo punto, il calcolo della EPE si ottiene approssimando opportunamente la media integrale del valore della EE lungo l'intervallo  $[0, T]$ , utilizzando il valore stimato di quest'ultima in corrispondenza degli istanti di tempo considerati, ottenendo

$$EPE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EE_{t_j}$$

che approssima il valore teorico della EPE attraverso una media campionaria.

## 4.4 Esempi

In questa sezione, riportiamo alcuni esempi in cui viene caratterizzata da un punto di vista probabilistico l'evoluzione, nel tempo, del valore di alcune tipologie comuni di derivati ed indichiamo la relativa approssimazione tramite lo schema di Eulero.

### 4.4.1 Azioni

Supponiamo di voler considerare l'evoluzione del valore di mercato di un titolo azionario relativo ad un intervallo temporale che indichiamo con  $[0, T]$ , ove  $T > 0$  rappresenta la data di scadenza del contratto. Al fine di modellare l'evoluzione del MtM del contratto, quindi, consideriamo uno spazio di probabilità filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$  e supponiamo che il valore della posizione in questione sia descritto da un processo stocastico  $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$  tale che  $S(0) = s \in \mathbb{R}$  ed  $s > 0$  ed avente dinamica

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma_E(t)dW_t)$$

ove  $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$  è un moto browniano e supponiamo che  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sigma_E : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  siano due funzioni deterministiche continue e limitate. Si può dimostrare che tale equazione differenziale stocastica è risolta, univocamente poichè le funzioni  $\mu$  e  $\sigma_E$  sono supposte essere continue e limitate, dal moto browniano geometrico definito da

$$S(t) = s \exp \left[ \int_0^t \left( \mu(s) - \frac{\sigma_E(s)^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_E(s) dW_s \right].$$

Osserviamo, innanzitutto, che il processo stocastico definito assume sempre valori strettamente positivi, analogamente a quanto accade, nella realtà, all'evoluzione del prezzo di un'azione nel tempo. L'evoluzione specifica di un singolo titolo azionario è definita dalla funzione  $\mu$ , detta *rendimento*, e dalla funzione  $\sigma_E$ , detta *volatilità*. Più precisamente, dall'equazione differenziale stocastica appena definita si osserva che l'evoluzione del valore del titolo di un'azione è la somma di una componente deterministica, descritta dai valori assunti nel tempo da  $\mu$ , ed una componente aleatoria, definita a partire da un moto browniano ed avente incrementi medi nulli e volatilità descritta dai valori assunti, nel tempo, da  $\sigma$ . In conclusione, la scelta del modello appena presentato risulta essere una buona descrizione dell'evoluzione del valore un generico titolo azionario, poichè garantisce la positività del valore del MtM e scompone la sua evoluzione nel tempo in due parti, una deterministica ed una aleatoria, i cui rispettivi andamenti vengono impostati conformemente alle aspettative ed alle informazioni possedute da chi vuole stimare l'andamento futuro del titolo in questione. L'andamento del processo stocastico appena descritto, pertanto, può essere simulato, per  $n$  istanti temporali distribuiti in  $[0, T]$ , attraverso la catena di Markov a tempo discreto  $\{Y_k^{(n)}\}_{k=0}^n$  ponendo  $Y_0^{(n)} = s$  e, quindi, generando un numero impostato di scenari attraverso la dinamica

$$Y_{k+1}^{(n)} = Y_k^{(n)} + \frac{1}{n} Y_k^{(n)} \mu \left( \frac{kT}{n} \right) + Y_k^{(n)} \sigma_E \left( \frac{kT}{n} \right) w_{k+1},$$

ove  $\{w_k\}_{k=1}^n$  è una successione di variabili aleatorie normali indipendenti.

### 4.4.2 Commodities

Le commodities (talvolta definite, in italiano, *beni indifferenziati*) sono tutti quei beni che presentano le medesime caratteristiche a prescindere da chi li produce ed, in virtù di

questo fatto, risulta possibile valutarne l'evoluzione del prezzo nel tempo ed utilizzarli come attività sottostanti di contratti standardizzati (come, ad esempio, i futures). Tipicamente, le commodities consistono in prodotti agricoli (ad esempio il grano), in prodotti di base non lavorati (come lo zucchero, l'acqua, il caffè) oppure prodotti energetici (come il petrolio o la corrente elettrica). L'evoluzione, nel tempo, del valore di questa tipologia di assets è sovente influenzata da fenomeni esterni che possono verificarsi ciclicamente (come, ad esempio, un periodo di scarsa piovosità che influenza negativamente la produzione di grano) oppure da fenomeni che non sono prevedibili (ad esempio, una guerra improvvisa che compromette gli accordi con un dato paese circa i contratti futures sul petrolio). Al fine di modellare l'andamento del MtM di questo tipo di contratti, quindi, si suppone che esso sia influenzato da una componente deterministica (anche in questo caso si ammette la presenza di un trend definito arbitrariamente in base alle caratteristiche del contratto), una componente aleatoria e da un'eventuale componente stagionale.

Un modello spesso utilizzato consiste nell'identificare l'evoluzione del valore di una commodity, durante un intervallo temporale  $[0, T]$ , ove  $T > 0$ , attraverso il processo stocastico  $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$  definito, su un generico spazio di probabilità filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ , da

$$\ln S(t) = f(t) + Z(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

ove  $f$  è una funzione deterministica, dipendente dal tempo, che generalmente esprime un trend oppure, talvolta, consiste in una funzione trigonometrica (al fine di introdurre elementi di periodicità nel modello qualora si supponesse la presenza di fenomeni stagionali nell'evoluzione dei prezzi) e  $Z(t)_{t \in [0, T]}$  è un processo stocastico la cui dinamica è definita dall'equazione differenziale stocastica

$$dZ(t) = (\alpha - \beta Z(t))dt + \sigma_C(t)dW_t, \quad \forall t \in [0, T].$$

Il valore di una determinata commodity, pertanto, viene modellato come l'esponenziale (così da garantirne la positività nel tempo poichè, banalmente, un prezzo non può essere negativo) di un processo che è la somma di una componente deterministica e di un processo aleatorio. Per quanto riguarda l'evoluzione del processo  $Z(t)_{t \in [0, T]}$ , inoltre, osserviamo che la deriva, in questo caso, è una funzione lineare del processo stesso, in base ad opportuni parametri  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , non nulli: si dice, in questo caso, che il processo è caratterizzato da *mean reversion*, ovvero è tale che, qualora venisse superata una determinata soglia, per un dato  $t \in [0, T]$ , la quantità  $\alpha - \beta Z(t)$ , ovvero la deriva dell'equazione, che rappresenta il trend del processo considerato, assume segno opposto rispetto a quello assunto fino a tale istante, così da evitare che il processo assuma valori che si allontanino eccessivamente da un valore preimpostato, evitando così di ottenere scenari che si considerano irrealistici. Supponiamo, inoltre, che la diffusione  $\sigma$  del processo considerato (la quale, ricordiamo, definisce quanto la componente aleatoria, descritta da un moto browniano standard, influenzi l'evoluzione del valore del processo nel tempo) sia una funzione continua (e quindi lipschitziana), limitata ed a valori in  $\mathbb{R}$ . In base a

quest'ultima ipotesi ed osservando che la funzione  $x \mapsto \alpha - \beta x$  è continua su  $\mathbb{R}$  e che

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta x|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta x \\ &\leq \alpha^2 + \beta^2 x^2 + \alpha^2 \beta^2 + x^2 \leq \alpha^2(\beta^2 + 1) + (\beta^2 + 1)x^2, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ovvero, ponendo  $c = \alpha^2(\beta^2 + 1)$ ,

$$|\alpha - \beta x|^2 \leq c(1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}$$

possiamo affermare che l'equazione stocastica definita possiede effettivamente una soluzione ed, inoltre, si osserva unicità per traiettorie. Dopo aver definito la dinamica del processo, quindi, è possibile simulare, in  $n \in \mathbb{N}$  istanti equispaziati all'interno di  $[0, T]$  i diversi scenari del processo discreto

$$S_k^{(n)} = \exp \left[ f \left( \frac{kT}{n} \right) + Y_k^{(n)} \left( \frac{kT}{n} \right) \right]$$

ove  $\{Y_k^{(n)}\}_{k=1}^n$  è la catena di Markov approssimante il processo  $\{Z(t)\}_{t \in [0, T]}$  ed è descritta dalla seguente dinamica (avente valore noto in  $k = 0$ ):

$$Y_{k+1}^{(n)} = Y_k^{(n)} + (\alpha - \beta Y_k^{(n)}) \frac{1}{n} + \sigma_C \left( \frac{kT}{n} \right) w_{k+1}$$

ove  $\{w_k\}_{k=1}^n$  è una successione di variabili aleatorie normali indipendenti.

#### 4.4.3 Tassi di cambio valuta

Al fine di modellizzare l'evoluzione, attraverso il tempo, di un dato tasso di cambio valuta, consideriamo uno spazio di probabilità filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ , ove  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  è un opportuno intervallo temporale, tale che  $t = 0$  coincida con la data attuale e  $t = T$  corrisponda ad una data futura fissata. Supponiamo, dunque, che il processo stocastico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , definito lungo l'intervallo di tempo considerato e descrivente l'evoluzione del valore del tasso di cambio, abbia dinamica

$$dX_t = X(t)[k(\theta - \log X_t)dt + \sigma_{FX}(t)dW_t]$$

ove  $k \in \mathbb{R}$  e  $k > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_{FX} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione deterministica e continua e  $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$  è un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ -moto browniano definito su  $\Omega$ . Inoltre, supponiamo che  $X(0) = x \in \mathbb{R}$ , ove  $x > 0$  ed  $x$  rappresenta il valore del tasso di cambio alla data attuale. Più rigorosamente, abbiamo affermato che il processo stocastico appena introdotto è soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t X_s [k - \log X_s] ds + \int_0^t \sigma_{FX}(s) X_s dW_s, \forall t \in [0, T] \\ X_0 = x \in \mathbb{R}, x > 0. \end{cases}$$

Prima di procedere con la descrizione e l'implementazione del metodo Monte Carlo, è opportuno verificare, innanzitutto, che l'equazione differenziale stocastica appena definita

ammetta una (ed unica) soluzione e che tale soluzione, in virtù della natura dei tassi di cambio, assuma valori strettamente positivi. Innanzitutto, osserviamo che un processo  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ , a valori strettamente positivi, risolve l'equazione sopra se e soltanto se il processo  $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ , definito da  $Y_t(\omega) := \log X_t(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ , in virtù della formula di Itô (poiché  $x \mapsto \log x$  è una funzione continua e derivabile due volte su  $]0, +\infty[$ ) è tale che

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t + \left( -\frac{1}{2X_t^2} \right) d\langle X_t \rangle = \\ &= k(\theta - \log X_t)dt + \sigma_{FX}(t)dW_t - \frac{1}{2X_t^2} \sigma_{FX}(t)^2 X_t^2 dt = \\ &= \left[ \left( k\theta - \frac{\sigma_{FX}(t)^2}{2} \right) - kY_t \right] dt + \sigma_{FX}(t)dW_t \end{aligned}$$

ed, inoltre, osserviamo che  $Y_0 = \log x \in \mathbb{R}$ . Definiamo, al fine di alleggerire la notazione, la funzione  $\alpha(t) := k\theta - \frac{\sigma_{FX}(t)^2}{2}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , osservando che, essendo una funzione continua, è anche lipschitziana ed, essendo definita sull'intervallo compatto  $[0, T]$ , è ivi limitata. Riscrivendo l'ultima equazione, dunque, si ha che il processo  $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ , definito da  $Y_t := \log X_t$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , è tale che

$$\begin{cases} dY_t = [\alpha(t) - kY_t]dt + \sigma_{FX}(t)dW_t, \forall t \in [0, T] \\ Y_0 = y. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione  $t \mapsto \sigma_{FX}(t)$ , definita sull'intervallo compatto  $[0, T]$ , è ivi continua e quindi limitata ed, inoltre, che

$$|\alpha(t) - kx|^2 \leq 2(\alpha(t)^2 + k^2x^2), \forall t \in [0, T], \forall x \in ]0, +\infty[$$

dunque, poichè sappiamo che  $t \mapsto \alpha(t)$  è limitata su  $[0, T]$ , ponendo

$$c := 2 \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \alpha(t)^2, k^2 \right\}$$

possiamo affermare che  $|\alpha(t) - kx|^2 \leq c(1 + x^2)$ , dunque l'equazione appena trovata ammette un'unica soluzione  $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$  con dato iniziale  $Y_0 = y = \log x$ , dunque, definendo il processo  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  tale che  $X_t := \exp[Y(t)]$ , avente dato iniziale  $X_0 = \exp[\log x] = x > 0$  (per ipotesi), quest'ultimo processo è strettamente positivo e, pertanto, rappresenta l'unica soluzione all'equazione differenziale stocastica di partenza. Sia, dunque,  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  il processo, a valori strettamente positivi, descrivente l'evoluzione del tasso di cambio, tale che  $X_0 = x > 0$  ed avente dinamica

$$dX_t = X_t[k(\theta - \log X_t)dt + \sigma_{FX}(t)dW_t].$$

Osserviamo che l'evoluzione del tasso di cambio consiste nella somma di due componenti: una componente deterministica ed una componente aleatoria, la quale è descritta dagli incrementi di un moto browniano, amplificati dalla funzione deterministica  $t \mapsto \sigma_{FX}(t)$ ,

definita su  $[0, T]$  e detta *volatilità*. La componente deterministica, inoltre, è caratterizzata da mean reversion, al fine di evitare che, nel lungo periodo, il valore assoluto del tasso di cambio assuma valori eccessivi, allontanandosi da un valore di riferimento, identificato dal parametro  $\theta$  il quale, appunto, può essere ricavato da dati storici relativi alla media dei valori assunti in passato dal tasso di cambio od, in alternativa, dalle previsioni relativamente ai tassi forward oppure, più in generale, può corrispondere alle aspettative o alle attitudini di chi ha interesse nel quantificare la Exposure (ad esempio, si potrebbe ipotizzare un modello che implica valori mediamente elevati della Exposure se si agisce adottando una prospettiva avversa al rischio di controparte). Avendo a disposizione la dinamica del processo, quindi, è possibile procedere con la simulazione di un numero fissato di scenari relativi al valore assunto dal MtM in corrispondenza di  $n \in \mathbb{N}$  istanti temporali distribuiti all'interno dell'intervallo  $[0, T]$ , approssimando  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  con la catena di Markov a tempo discreto  $\{Y_j^{(n)}\}_{j=0}^n$  tale che  $Y_0^{(n)} = x$  ed avente dinamica discreta

$$Y_{j+1}^{(n)} = Y_j^{(n)} + \frac{1}{n} Y_j^{(n)} [k - \theta \log Y_j^{(n)}] + Y_j^{(n)} \sigma_{FX} \left( \frac{jT}{n} \right) w_{j+1},$$

ove  $\{w_j\}_{j=1}^n$  è una successione di variabili aleatorie normali standard ed indipendenti.



## Capitolo 5

# Il rischio di credito

Fino ad ora ci siamo limitati a considerare ed abbiamo tentato di esprimere in termini quantitativi le potenziali perdite che deriverebbero dall'insolvenza di una o più controparti nei nostri confronti senza, tuttavia, prendere in considerazione né porci il problema di quale sia la probabilità che tale evento possa verificarsi. In questa sezione, pertanto, dapprima ci preoccupiamo di definire in maniera rigorosa i concetti di *probabilità di insolvenza* e *probabilità di sopravvivenza* e, di conseguenza, una quantità, detta *Credit Value Adjustment*, la quale descrive, in termini monetari, l'impatto del rischio di controparte relativamente ad un insieme di contratti e dipende sia dall'esposizione al rischio di insolvenza, sia dalla probabilità che si verifichi l'insolvenza stessa.

### 5.1 Stima della probabilità di insolvenza: definizioni preliminari

In tutto questo capitolo, consideriamo uno spazio filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , supponiamo che esista una misura  $Q$  neutrale al rischio (avendo supposto, idealmente, che nel mercato siano completamente assenti opportunità di arbitraggio) e che l'istante in cui una generica controparte si rivela insolvente sia descritto dalla variabile casuale

$$\tau : (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, Q) \rightarrow [0, +\infty]$$

che è, per ipotesi, un tempo d'arresto. In base a tale assunzione, dunque, definiamo per ogni  $t \in [0, T]$  *probabilità di insolvenza prima dell'istante  $t$*  la quantità pari a  $Q(\tau \leq t)$  e, rispettivamente, definiamo *probabilità di sopravvivenza* la funzione  $S : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$S(t) := Q(\tau < t), \forall t \in [0, +\infty]$$

e tale, quindi, da associare ad ogni istante  $t \in [0, +\infty]$  la probabilità che in tale data non si sia ancora verificata l'insolvenza della controparte. La determinazione del valore della probabilità di insolvenza varia, ovviamente, a seconda della situazione che si intende analizzare, ovvero degli strumenti finanziari in questione e delle relative parti coinvolte, e più precisamente dalla determinazione del tempo di arresto  $\tau$  che descrive

l'occorrenza dell'evento di insolvenza. In questa trattazione analizzeremo due approcci distinti: il primo consiste nell'applicazione dei cosiddetti *modelli strutturali* e riguarda in maniera specifica il rischio di insolvenza di un'azienda, il quale viene valutato basandosi sui dati relativi alla situazione economica e finanziaria della medesima (ipotizzando che tutte le informazioni siano pubbliche), il secondo, più generico, si basa, come vedremo, sull'estrazione dei valori delle probabilità di insolvenza a partire da una tipologia specifica di contratti finanziari, ovvero i *Credit Default Swaps*.

## 5.2 I modelli strutturali per la stima della probabilità di insolvenza

A titolo di esempio, si riporta una situazione semplificata nella quale un'azienda, al fine di autofinanziarsi, emette ad un dato istante un'obbligazione a cedola nulla ed avente una scadenza fissata. Più precisamente, consideriamo un intervallo temporale descritto da  $[0, \bar{T}]$ , ove  $\bar{T} \in \mathbb{R}$  e  $\bar{T} > 0$ , e supponiamo che suddetta obbligazione venga emessa al tempo  $t = 0$  ed abbia scadenza all'istante  $t = T \in [0, \bar{T}]$ . Siccome il nostro scopo consiste nello stimare, attraverso un opportuno modello, l'evoluzione del valore del titolo in questione nel corso del tempo e, soprattutto, la probabilità che, in base alle informazioni in nostro possesso, l'azienda possa rivelarsi insolvente, consideriamo uno spazio di probabilità filtrato standard  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \bar{T}]}, P)$  e supponiamo che la filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \bar{T}]}$  rappresenti l'insieme delle informazioni a nostra disposizione, a ciascun istante, relativamente allo stato di salute dell'azienda e che tali informazioni siano pubbliche ed accessibili a tutti. Supponiamo, dunque, che l'impresa emetta un dato numero di obbligazioni a cedola nulla e che l'evoluzione del net asset value di ciascuna di esse sia descritto da un processo stocastico  $\{A_t\}_{t \in [0, \bar{T}]}$ , il quale risolve un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \in (0, +\infty) \\ dA_t = A_t(\alpha(t, A_t)dt + \sigma(t, A_t)dW_t^P \end{cases}$$

ove  $\alpha : [0, T] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sigma : [0, T] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni continue e limitate e sono tali che  $\{\alpha(t, A_t)A_t\}_{t \in [0, T]}$  e  $\{\sigma(t, A_t)A_t\}_{t \in [0, T]}$  siano due processi stocastici progressivamente misurabili e tali che, rispettivamente,  $P\left(\int_0^T |A_s \alpha(s, A_s)| ds < +\infty\right) = 1$  e  $P\left(\int_0^T |A_s \sigma(s, A_s)|^2 ds < +\infty\right) = 1$  e  $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$  è un moto browniano secondo la misura di probabilità  $P$ . Essendo per ipotesi  $Q$  misura martingala equivalente, esiste un moto browniano, che indichiamo con  $\{W_t^Q\}_{t \in [0, T]}$ , definito da tale misura e tale che la dinamica del net asset value divenga

$$dA_t = A_t(r_t dt + \sigma(t, A_t)dW_t^Q).$$

Inoltre supponiamo che, per ciascun istante  $t \in [0, T]$ , l'azienda venga dichiarata insolvente qualora il net asset value dell'obbligazione, che si suppone essere un indicatore della qualità del credito della stessa, risulti essere inferiore ad una soglia che, in tale istante,

risulta essere la realizzazione di un dato processo stocastico  $\{L_t\}_{t \in [0, T]}$  adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ . Definiamo, quindi, la filtrazione  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in [0, T]}$  tale che, per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{G}_t = \sigma(\{A_s, L_s, \forall s \leq t\})$ , ovvero tale filtrazione contiene tutte le informazioni relative all'evoluzione del valore del titolo e del valore minimo che, ad ogni istante, può essere assunto da quest'ultimo ed, avendo ipotizzato di essere costantemente a conoscenza di tali aspetti, possiamo affermare che, per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ . Introduciamo, ora, la variabile casuale  $\tau : (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \bar{T}]}, P) \rightarrow [0, \bar{T}]$ , la quale descrive l'istante in cui l'azienda diviene insolvente, ovvero è tale che  $\tau(\omega) = \inf\{t \in [0, \bar{T}] : A_t(\omega) \leq L_t(\omega)\}, \forall \omega \in \Omega$ . La probabilità che l'azienda si riveli insolvente precedentemente od in corrispondenza alla scadenza del contratto, pertanto, è data da  $Q(\tau \leq T)$  ed, al fine di trovare un'espressione esplicita per ottenere tale quantità, semplifichiamo la trattazione ponendo  $\sigma(t, A_t) = \sigma \in (0, +\infty), \forall t \in [0, T]$ ,  $r_t = r \in (0, +\infty), \forall t \in [0, T]$  ed  $L_t = L \in (0, +\infty), \forall t \in [0, T]$ : sotto tali ipotesi, quindi, l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione dell'asset value ammette l'unica soluzione

$$A_t = a_0 \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma(W_t - W_0) \right] > 0, \forall t \in [0, T]$$

od, equivalentemente, definendo  $Y_t := \log(A_t)$  ed  $y_0 := \log(a_0) \in \mathbb{R}$

$$Y_t = y_0 + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma(W_t - W_0), \forall t \in [0, T].$$

In base a quest'ultima espressione, è possibile dimostrare (attraverso una dimostrazione e diversi risultati tecnici complessi, osservabili in [2, pag.67] ed in [9, B.3, pag.468]) che la probabilità di insolvenza è data da

$$Q(\tau < T) = \Phi(h_1(T)) + a_0^{1-2\frac{r}{\sigma^2}} \Phi(h_2(T)),$$

ove  $\Phi$  è la funzione di ripartizione di una variabile casuale normale standard e

$$h_1(T) = \frac{-\log a_0 - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{ed} \quad h_2(T) = \frac{-\log a_0 + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

### 5.3 Stima della probabilità di insolvenza a partire dai Credit Default Swaps

Un Credit Default Swap (CDS) è un contratto che viene stipulato quando un soggetto finanziario (l'acquirente) vuole tutelarsi da un'eventuale stato di insolvenza della controparte. A tal proposito, viene definito un ulteriore contratto con un soggetto terzo (il venditore), al quale vengono versate somme periodiche e definite nei termini del contratto: il venditore si impegna, qualora dovesse verificarsi insolvenza della controparte all'interno del primo contratto, a versare all'acquirente l'eventuale differenza tra la quantità di denaro dovutagli dalla controparte insolvente e l'ammontare pari al recovery value.

Naturalmente, le somme periodiche versate dipendono dal rischio di insolvenza associato alla controparte da cui ci si vuole tutelare e, pertanto, è ragionevole ipotizzare di poter ottenere, a partire da tali valori, le probabilità di insolvenza associate alla controparte in questione: dopo aver, quindi, descritto in maniera dettagliata i Credit Default Swaps, presenteremo un modello che consenta di estrarre tali quantità.

Al fine di definire una formula che descriva il valore di un CDS, dal punto di vista del venditore, alla stipula del contratto, consideriamo lo spazio di probabilità filtrato standard definito all'inizio del capitolo e supponiamo che la data di scadenza del contratto sia identificata con  $T \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ . In virtù di quanto previsto dal contratto, supponiamo che le date in cui vengono effettuati tali versamenti corrispondano a  $t_1, \dots, t_n$ , ove  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $t_j \in [0, T]$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$  e  $t_n = T$ , e che debba essere versata, a ciascun istante  $t_j$ , con  $j \in \{1, \dots, n\}$  la quantità  $X_{CDS}\Delta_j$ , ove  $X_{CDS} \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\Delta_j := (t_j - t_{j-1})$  e  $t_0 := 0$ . Sia, inoltre, per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $B(t, T) := \exp\left[-\int_0^t r(u)du\right]$  il fattore di sconto relativo al tempo  $t$  ed indichiamo con  $F$  la distribuzione della variabile  $\tau$ , cosicchè per ogni  $t \in ]0, +\infty]$  la *probabilità di sopravvivenza* è data da  $S(t) = 1 - F(t)$ . Procediamo ora con il calcolo del valore all'istante  $t = 0$  del CDS, dal punto di vista del venditore. Tale quantità consiste nel valore attuale del flusso di cassa atteso costituito dai versamenti che, nel corso del tempo e con cadenza periodica, vengono effettuati dall'acquirente al venditore (finchè non si verifica l'insolvenza della controparte relativa all'altro contratto), a cui deve essere sottratto il valore atteso della quantità di denaro esposta al rischio di insolvenza. Supponiamo, inoltre, che la controparte che si rivela insolvente garantisca comunque, in tale data, un recovery value pari a  $\delta$ , ove  $0 < \delta < 1$ , essendo 1 la somma che, da contratto, dovrebbe garantire alla scadenza. Innanzitutto, il valore attuale atteso derivante dai versamenti effettuati dall'acquirente consiste nel valore atteso della somma del valore attualizzato di ciascun versamento, in corrispondenza di tutte le date stabilite dal contratto e precedenti alla data in cui si verifica l'insolvenza della controparte, ovvero

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n E^Q \left[ B(0, t_j) X_{CDS} \Delta_j \mathbf{1}_{\{\tau > t_j\}} \right] &= \sum_{j=1}^n B(0, t_j) X_{CDS} \Delta_j Q(\tau > t_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n B(0, t_j) X_{CDS} \Delta_j S(t_j) \end{aligned}$$

ed osserviamo, inoltre, che, in caso di insolvenza, l'acquirente deve effettuare un ultimo versamento proporzionale all'intervallo di tempo compreso tra la data dell'ultimo versamento periodico effettuato, che indichiamo con  $t_{\gamma(\tau)}$ , ove  $\gamma : ]0, +\infty] \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$  è una funzione tale che  $\gamma(t) = \sup \{j \in \{0, \dots, n\} | t_j \leq t\}$ , per ogni  $t > 0$ , e la data in cui si verifica l'insolvenza. Se, quindi, definiamo, per ogni  $t > 0$ , la funzione

$$\Delta(t) := \begin{cases} t - t_{\gamma(t)} & \text{se } t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che il valore attuale del versamento relativo all'intervallo appena descritto è pari a

$$E^Q \left[ B(0, \tau) X_{CDS} \Delta(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right]$$

dunque, in definitiva, il valore attuale dei flussi di cassa versati dall'acquirente, sia  $V_1$ , è pari a

$$V_1 = \sum_{j=1}^n B(0, t_j) X_{CDS} \Delta_j S(t_j) + E^Q [B(0, \tau) X_{CDS} \Delta(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}]$$

e tale quantità è detta *premium leg*. Indicando, ora, con  $V_2$  il valore attuale atteso del versamento che il venditore dovrà effettuare, qualora si verifichi l'evento di insolvenza prima della scadenza, alla relativa data, si ha che

$$V_2 = E^Q [(1 - \delta) B(0, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}] = (1 - \delta) E^Q [B(0, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}]$$

e tale valore è detto *default leg*. Osserviamo che le funzioni che ad ogni valore  $t \in [0, +\infty]$  associano, rispettivamente, le quantità  $B(0, t) \mathbf{1}_{\{t < T\}}$  e  $B(0, t) \mathbf{1}_{\{t < T\}} \Delta(t)$  appartengono entrambe ad  $L^1([0, +\infty])$  poichè, in base alle ipotesi fatte sul tasso risk-free, si ha che

$$|B(0, t) \mathbf{1}_{\{t < T\}}| \leq |B(0, t)| = \exp \left[ \int_0^t r(u) du \right]$$

e l'ultima quantità è strettamente positiva e limitata per  $t \in [0, T]$ , dunque è integrabile, e, poichè  $\Delta(t) \leq T, \forall t > 0$ , anche le funzioni composte  $B(0, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$  e  $B(0, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \Delta(\tau)$  risultano essere integrabili su  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  e vale

$$\begin{aligned} E^Q [B(0, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} X_{CDS} \Delta(\tau)] &= \\ &= \int_0^{+\infty} B(0, u) \mathbf{1}_{\{u < T\}} X_{CDS} \Delta(u) dF(u) = \int_0^T B(0, u) X_{CDS} \Delta(u) dF(u) \end{aligned}$$

e, per quanto riguarda la default leg, si ha

$$E^Q [B(0, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}] = \int_0^{+\infty} B(0, u) \mathbf{1}_{\{u < T\}} dF(u) = \int_0^T B(0, u) dF(u).$$

Dunque, dal punto di vista del venditore del contratto, si ha che, supponendo che il valore del recovery rate sia costante e noto, il valore attuale (al tempo 0) del CDS è pari a

$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= \sum_{j=1}^n B(0, t_j) X_{CDS} \Delta_j S(t_j) + E^Q [B(0, \tau) X_{CDS} \Delta(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}] - \\ &\quad + (1 - \delta) E^Q [B(0, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}] \end{aligned}$$

Dopo aver definito in maniera teorica il valore attuale di un CDS è opportuno individuare alcune relazioni tra le componenti specifiche, in un contesto di assenza di opportunità di arbitraggio, di ciascun contratto sottostante ad un CDS, ovvero la probabilità di insolvenza, il recovery value e l'ammontare dei versamenti periodici. Si definisce, innanzitutto, *hazard rate* una funzione  $h : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$h(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Q(t \leq \tau < t + \epsilon | \tau \geq t)}{\epsilon}, \forall t \in \mathbb{R}_{>0}$$

e può, intuitivamente, essere pensata come la probabilità che, dato un istante  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  fissato, l'insolvenza della controparte si verifichi in un intervallo di tempo infinitesimale successivo a tale istante, a condizione di non essersi realizzata prima di esso. Osserviamo quindi che è possibile stabilire una relazione tra l'hazard rate e la probabilità di sopravvivenza, infatti, fissato  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ , osserviamo che

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Q(t < \tau \leq t + \epsilon | \tau > t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{Q(\tau \leq t + \epsilon) - Q(\tau \leq t)}{Q(\tau > t)} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-S(t + \epsilon) + S(t)}{\epsilon} \frac{1}{S(t)} = -\frac{1}{S(t)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S(t + \epsilon) - S(t)}{\epsilon} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial t}(t)}{S(t)} \end{aligned}$$

ovvero si ha l'equazione differenziale  $\frac{\partial S}{\partial t}(t) = -h(t)S(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}_{>0}$ , la quale, supponendo che  $P(\tau > 0) = 1$  (ci si attende banalmente che la controparte non sia insolvente alla stipula del contratto), esplicita la relazione ottenuta sopra, avendo come soluzione  $S(t) = -\exp\left(\int_0^t h(u)du\right)$ . Osserviamo, inoltre, che, in base a quanto appena visto,  $\frac{\partial Q(\tau \leq t)}{\partial t} = \frac{\partial(1-S(t))}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial t}(t) = h(t)S(t)$ , dunque la funzione di ripartizione di  $\tau$  è data, integrando secondo la misura di Lebesgue, da  $F(t) = P(\tau \leq t) = \int_0^t h(u)S(u)du$  e, pertanto,  $\int_0^T B(0, u)dF(u) = \int_0^T B(0, u)h(u)S(u)du$  e possiamo quindi affermare che il valore attuale atteso del versamento che il venditore del CDS dovrà effettuare, in caso di insolvenza, può essere riscritto come

$$V_2 = (1 - \delta) \int_0^T B(0, u)h(u)S(u)du$$

ed, analogamente,

$$V_1 = \sum_{j=1}^n B(0, t_j)X_{CDS}\Delta_j S(t_j) + \int_0^T B(0, u)X_{CDS}\Delta(u)h(u)S(u)du$$

Supponiamo, ora, di approssimare l'espressione che descrive  $V_1$ , supponendo che i versamenti siano effettuati continuamente lungo tutto l'intervallo di vita del contratto, ovvero approssimando la sommatoria con un integrale secondo la misura di Lebesgue, cosicché

$$V_1 \approx \int_0^T B(0, u)X_{CDS}S(u)du + \int_0^T B(0, u)X_{CDS}\Delta(u)h(u)S(u)du.$$

Consideriamo, tuttavia, il caso semplificato in cui l'acquirente non deve effettuare, in caso di insolvenza, alcun versamento relativamente all'intervallo compreso tra la data dell'ultimo versamento effettuato e la data in cui si verifica l'insolvenza, cosicché il valore atteso complessivo del CDS, dal punto di vista del venditore, è approssimato nella maniera seguente:

$$V_1 - V_2 \approx \int_0^T B(0, u)[X_{CDS} - (1 - \delta)h(u)]S(u)du.$$

Osserviamo che, in virtù dell' ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, la quantità  $V_1 - V_2$ , che rappresenta il valore atteso del contratto dal punto di vista del venditore, deve essere pari a 0, ovvero deve aversi

$$0 = V_1 - V_2 \approx \int_0^T B(0, u)[X_{CDS} - (1 - \delta)h(u)]S(u)du$$

ed osserviamo che, se supponiamo che l'hazard rate assuma, nell'intervallo  $[0, T]$ , valore costante, ovvero  $h(u) \equiv h \in \mathbb{R}_{>0}$ , allora, poichè  $B(0, u) > 0$  ed  $S(u) = \exp(-\int_0^u h(s)ds) > 0$ ,  $\forall u \in [0, T]$ , allora l'integrale sopra è nullo se e solo se  $X_{CDS} - (1 - \delta)h = 0$ , ovvero si ha che

$$h = \frac{X_{CDS}}{1 - \delta}$$

ed osserviamo che è anche possibile ottenere una stima della probabilità di insolvenza poichè, per  $t \in [0, T]$  fissato, si ha che

$$Q(\tau < t) = 1 - S(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right) = 1 - \exp\left(-\frac{X_{CDS}}{1 - \delta}t\right)$$

ed, essendo il valore dell'hazard rate sufficientemente vicino a 0, possiamo approssimare asintoticamente l'espressione appena ricavata per  $t \simeq 0$ , cosicchè

$$Q(\tau < t) \approx \frac{X_{CDS}}{1 - \delta}t.$$

In generale, la formula appena ottenuta permette di stimare, una volta noti il recovery rate ed il valore di  $X_{CDS}$  (il quale dipende dal mercato) e sotto ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio (ovvero esistenza di una misura martingala equivalente) la probabilità che, entro una determinata scadenza, possa verificarsi l'insolvenza della controparte. Tale risultato, quindi, è importante poichè inserisce nel modello dati ottenuti empiricamente dai prezzi di mercato e, quindi, le relative stime della probabilità di sopravvivenza e dell'hazard rate sono maggiormente attendibili.

Un approccio molto più elaborato consiste, invece, nel supporre che l'hazard rate non sia, in generale, costante lungo la durata di vita di un contratto di tipo Credit Default Swap. Ricordiamo che, nelle assunzioni e nelle notazioni introdotte all'inizio, il valore di un Credit Default Swap all'istante iniziale è descritto dalla quantità

$$CDS(0) = \sum_{j=1}^n B(0, t_j)X_{CDS}\Delta_j S(t_j) + E^Q [B(0, \tau)X_{CDS}\Delta(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau < T\}}] - \\ + (1 - \delta)E^Q [B(0, \tau)\mathbf{1}_{\{\tau < T\}}],$$

Ricordiamo che, se  $S$  descrive la probabilità di sopravvivenza, tale quantità può essere riscritta come

$$CDS(0) = \sum_{j=1}^n B(0, t_j)X_{CDS}\Delta_j S(t_j) - \int_0^T B(0, u)X_{CDS}\Delta(u)dS(u) + \\ + (1 - \delta) \int_0^T B(0, u)dS(u).$$

L'approccio seguito, dunque, è quello suggerito sommariamente in [6, p.731] e si basa sul metodo bootstrap, ovvero si considera un insieme di CDS presenti nel mercato ed aventi, rispettivamente, scadenze in  $t_1, \dots, t_n$  (in corrispondenza di tali date, inoltre, l'acquirente del CDS effettua i pagamenti previsti dal contratto) e relativi spreads  $X_{CDS}^1, \dots, X_{CDS}^n$  (osservabili nel mercato stesso), dai quali si ottiene il valore della probabilità di sopravvivenza, che viene approssimata come una quantità costante all'interno di ciascun intervallo  $[t_{j-1}, t_j]$ , ovvero si suppone che, per ogni  $j \in \{1, \dots, n\}$ , valga  $Q(\tau > t) = Q(\tau > t_{j-1})$ ,  $\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$ . Innanzitutto, gli integrali presenti all'interno della formula che descrive il valore attuale di un CDS vengono approssimati numericamente come somme di Riemann-Stieltjes, aventi come partizione  $0 < t_1 < \dots < t_k$  (ove  $t_k \in \{t_1, \dots, t_n\}$  è la data di scadenza del CDS che stiamo considerando) ed il cui valore, quindi, risulta essere stimato, per ogni  $k = 1, \dots, n$ , dalla quantità

$$\begin{aligned} CDS_k(0) &= X_{CDS}^k \left( \sum_{j=1}^k B(0, t_j) \Delta_j S(t_j) - \sum_{j=1}^k B(0, t_j) \Delta_j [S(t_j) - S(t_{j-1})] \right) + \\ &\quad + (1 - \delta) \sum_{j=1}^k B(0, t_j) [S(t_j) - S(t_{j-1})] = \\ &= X_{CDS}^k \sum_{j=1}^k B(0, t_j) \Delta_j S(t_{j-1}) + (1 - \delta) \sum_{j=1}^k B(0, t_j) [S(t_j) - S(t_{j-1})]. \end{aligned}$$

Definiamo, per alleggerire la notazione,

$$PR_{0,t_k}(X_{CDS}^k) = X_{CDS}^k \sum_{j=1}^k B(0, t_j) \Delta_j S(t_{j-1})$$

la funzione che esprime il valore della premium leg in funzione dello spread  $X_{CDS}^k$  di un CDS avente scadenza in  $t_k$  e

$$DEF_{0,t_k}(\delta) = (1 - \delta) \sum_{j=1}^k B(0, t_j) [S(t_j) - S(t_{j-1})]$$

il valore della default leg relativo al medesimo contratto. In virtù dell'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, per ogni  $k \in \{1, \dots, n\}$  dev'essere soddisfatta la relazione

$$PR_{0,t_k}(X_{CDS}^k) + DEF_{0,t_k}(\delta) = 0.$$

Innanzitutto, quindi, è possibile stimare  $S(t_1) = Q(\tau > t_1)$  osservando che  $Q(\tau > 0) = 1$  e risolvendo l'equazione per  $k = 1$ , ovvero

$$X_{CDS}^1 B(0, t_1) t_1 Q(\tau > t_1) + (1 - \delta) B(0, t_1) [Q(\tau > t_1) - 1] = 0,$$

dunque, indicando con  $\bar{Q}(\tau > t_1)$  il valore ottenuto che stima la probabilità di insolvenza all'interno dell'intervallo  $[0, t_1]$ , tale valore viene inserito nella successiva relazione

$$PR_{0,t_2}(X_{CDS}^2) = DEF_{0,t_2}(\delta)$$

la quale, conseguentemente, diviene un'equazione avente come incognita  $Q(\tau > t_2)$ , cioè, una volta risolta, si ottiene la stima del valore della probabilità che si verifichi insolvenza dopo l'istante  $t_2$  e, quindi, si procede analogamente per i valori successivi di  $k$ , fino ad ottenere l'insieme di valori  $\bar{Q}(\tau > t_1), \dots, \bar{Q}(\tau > t_n)$ .

## 5.4 Il Credit Value Adjustment

Il nostro obiettivo è, ora, quantificare, dato un insieme generico di contratti raggruppati in un insieme di netting, il rischio di controparte relativo a tale insieme. Definiamo, innanzitutto, uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  e supponiamo che, dato  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ , i contratti relativi all'insieme di netting che stiamo considerando siano stipulati in  $t = 0$  ed abbiano tutti scadenza in  $t = T$ . Dopo aver fissato, quindi, un determinato istante  $t \in [0, T]$ , supponiamo che il MtM dell'insieme di netting sia descritto dal processo stocastico a tempo continuo  $\{V(s, T)\}_{s \in [t, T]}$  tale che:

- per ogni  $s \in [t, T]$ ,  $V(s, T) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  rappresenta, al tempo  $s$ , il valore attuale, ottenuto attraverso un'opportuna formula di prezzaggio, della somma di tutti i flussi di cassa futuri relativi ai contratti in questione ed a partire dall'istante considerato;
- $V(t, T) = v_0 \in \mathbb{R}$  è un valore noto e descrive il MtM attuale dell'insieme di netting.

Dopo aver modellato opportunamente l'evoluzione del valore del MtM, quindi, supponiamo che l'istante in cui si verifica l'insolvenza sia descritto dal tempo di arresto

$$\tau : (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P) \rightarrow ]t, +\infty].$$

Supponiamo, inoltre, che la variabile casuale  $\tau$  ed il processo stocastico appena definito non siano correlati, ovvero che l'evoluzione del valore dell'insieme di netting non influenzi la probabilità che possa avvenire l'insolvenza della controparte (ipotesi di no wrong-way risk). Supponiamo, altresì, che nel mercato in questione non esistano opportunità di arbitraggio e che, quindi, esista una misura martingala equivalente  $Q$  e che il titolo privo di rischio  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  abbia dinamica  $dB_t = r_t B_t dt$ , ove  $t \mapsto r_t$  è una funzione deterministica definita su  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ed a valori in  $\mathbb{R}$  e definiamo, per ogni  $t, s \in \mathbb{R}_{>0}$ , tali che  $t \leq s$ , il fattore di sconto  $B(t, s) := \exp(-\int_t^s r_u du)$ . Osserviamo, innanzitutto, che qualora non si verifichi l'insolvenza il valore, al tempo  $t$ , del contratto è banalmente dato dal MtM di quest'ultimo, ovvero  $V(t, T)$ . Consideriamo, quindi, il caso più complesso in cui l'insolvenza avviene precedentemente od in concomitanza della data di scadenza. Se si verifica tale evento, il valore al tempo  $t$  dell'insieme di netting sottostante ai contratti è ottenibile attraverso la somma di due componenti: l'apporto derivante dal periodo precedente alla data di insolvenza ed il valore, attualizzato al tempo  $t$ , in corrispondenza dell'istante descritto da  $\tau$  della somma di tutti i flussi di cassa relativi ad i contratti considerati e successivi od in concomitanza di suddetto istante. Procediamo, quindi, a definire le variabili casuali necessarie a descrivere tali quantità. Innanzitutto, osserviamo che, per ogni  $s \in ]t, T]$ , è possibile ottenere il valore, al tempo  $t$ , del MtM dell'insieme di netting supponendo che  $s$  sia la data di scadenza del contratto ed indichiamo tale valore con

$V(t, s)$ . Ponendo, inoltre, convenzionalmente  $V(t, s) = V(t, T)$ , per ogni  $s \geq T$ , risulta essere ben definita la funzione continua che ad ogni  $s \in ]t, +\infty]$  associa  $V(t, s)$ . Definiamo, quindi, la funzione  $\phi : ]t, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\phi(s) := V(t, s)\mathbf{1}_{\{s \leq T\}}$  ed osserviamo che, essendo prodotto di funzioni misurabili definite su  $(]t, +\infty], \mathcal{B}(]t, +\infty])$  (ove  $\mathcal{B}(]t, +\infty])$  è la  $\sigma$ -algebra boreliana su  $]t, +\infty]$ ), è anch'essa misurabile e definita su tale spazio. Osserviamo, quindi, che è possibile definire la variabile casuale  $\phi(\tau) = V(t, \tau)\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$ , la quale descrive il valore, all'istante  $t$ , dell'insieme di netting supponendo che la data di scadenza del relativo insieme di contratti coincida con la data in cui si verifica l'insolvenza. Supponiamo, ora, di estendere il processo che descrive il MtM dell'insieme di netting agli istanti successivi a  $T$ , ponendo convenzionalmente  $V(s, T) = V(T, T)$ , per ogni  $s > T$ . Ha senso, quindi, definire la variabile casuale  $V(\tau, T)$ , la quale descrive il MtM dell'insieme di netting all'istante di insolvenza. Se  $V(\tau, T) > 0$ , pertanto, la controparte risulta essere in debito e supponiamo che rimborsi una percentuale fissa  $\delta \in [0, 1[$  del valore del MtM, mentre, se  $V(\tau, T) \leq 0$ , la controparte vanta un credito nei nostri confronti ed, in base al contratto, siamo tenuti a rispettare gli impegni presi. Il valore, attualizzato al tempo  $t$ , del contratto alla data di chiusura è quindi rappresentabile dalla variabile casuale, definita su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \left[ V(t, \tau) + B(t, \tau) (\delta V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}) \right] = \\ & = \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \left[ V(t, \tau) + B(t, \tau) (V(\tau, T) + (\delta - 1)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}) \right]. \end{aligned}$$

Osservando che, per ogni  $s \in ]t, T]$ , deve aversi  $V(t, T) = V(t, s) + B(t, s)V(s, T)$  (infatti il membro destro corrisponde al valore attuale in  $t$  della somma dei flussi di cassa relativamente agli intervalli  $[t, s[$  ed  $[s, T]$  e, dunque, coincide con il membro sinistro), possiamo scrivere la variabile casuale definita sopra come

$$\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \left[ V(t, T) + B(t, \tau)(\delta - 1)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} \right].$$

In generale, quindi, il valore, al tempo  $t$ , dell'insieme di netting in presenza di rischio di insolvenza è descritto dalla variabile casuale, definita su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  ed a valori in  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Pi(t) & := V(t, T)\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \left[ V(t, T) + B(t, \tau)(\delta - 1)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} \right] = \\ & = V(t, T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau) ((\delta - 1)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}) \end{aligned}$$

dunque il valore, al tempo  $t$ , dell'insieme di netting si ottiene applicando a tale variabile il valore atteso secondo la misura martingala  $Q$ , ottenendo

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, T) & := E^Q[\Pi(t)] = \\ & = E^Q \left[ V(t, T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau)(\delta - 1)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} \right] = \\ & = V(t, T) - (1 - \delta)E^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} \right]. \end{aligned}$$

Definiamo, quindi, dato un insieme di netting i cui contratti hanno tutti la medesima scadenza al tempo  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ , il *Credit Value Adjustment* (CVA) in un istante fissato  $t \in [0, T]$  come la differenza tra il valore, in tale istante, dell'insieme di netting nell'ipotesi in cui non vi sia, idealmente, rischio di insolvenza della controparte ed il valore del medesimo qualora, invece, tale rischio esista (e sia descritto da un'opportuna variabile casuale), ovvero

$$\text{CVA}(t) := V(t, T) - \tilde{V}(t, T) = (1 - \delta)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}].$$

## 5.5 Espressione del CVA in funzione della Exposure

Sappiamo che il valore del CVA di un insieme di netting è esprimibile attraverso la formula

$$\text{CVA}(t) = (1 - \delta)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}].$$

Il nostro obiettivo è, ora, mostrare che è possibile esprimere il valore del CVA in termini della EE dell'insieme di netting considerato, nell'ipotesi fondamentale di assenza di wrong-way risk. Osserviamo, innanzitutto, che, in virtù dell'ipotesi appena formulata, il valore attuale del MtM dell'insieme di netting all'istante di insolvenza è determinato separatamente da due fonti di aleatorietà distinte ed indipendenti tra loro: l'istante in cui si verifica l'insolvenza ed il valore assunto dall'insieme di netting in tale istante. Osserviamo che, in base alla definizione di valor medio condizionato, se indichiamo con  $\sigma(\tau) \subset \mathcal{F}$  la  $\sigma$ -algebra generata dalla variabile casuale  $\tau$ , poichè la funzione  $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}$  è integrabile su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , la quantità sopra può essere riscritta come

$$\text{CVA}(t) = (1 - \delta)E^Q [E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} | \sigma(\tau)]]$$

e, ricordando che  $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$  è  $\sigma(\tau)$ -misurabile e definendo  $F$  la legge di  $\tau$  su  $]t, +\infty]$ , in base alle proprietà del valor medio condizionato otteniamo

$$\begin{aligned} \text{CVA}(t) &= (1 - \delta)E^Q [E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} | \sigma(\tau)]] = \\ &= (1 - \delta)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} E^Q [B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} | \sigma(\tau)]] = \\ &= (1 - \delta)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} E^Q [B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}]] = \\ &= (1 - \delta) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{u \leq T\}} E^Q [B(t, u) V(u, T) \mathbf{1}_{\{V(u, T) > 0\}}] dF(u) = \\ &= (1 - \delta) \int_0^T B(t, u) E^Q [V(u, T) \mathbf{1}_{\{V(u, T) > 0\}}] dF(u) = \\ &= (1 - \delta) \int_0^T B(t, u) \text{EE}(u, T) dF(u) \end{aligned}$$

ove  $\text{EE}(u, T)$ , indica, per ogni  $u \in ]t, T]$ , la EE all'istante  $u$  dell'insieme di netting considerato. Ai fini pratici, tale forma può essere approssimata attraverso discretizzazione, ovvero

selezionando un numero finito e sufficientemente grande, pari ad  $m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}_{>0}$ , di istanti  $t_0 = t, \dots, t_m \in ]t, T]$  e ponendo

$$\text{CVA}(t) \approx (1 - \delta) \sum_{j=1}^m B(t, t_j) \text{EE}(t_j, T) P(\tau \in (t_{j-1}, t_j]).$$

Possiamo affermare, dunque, che ipotizzando l'assenza di wrong-way risk, il valore del CVA può essere stimato a partire dal valore del recovery rate, dalla dinamica del titolo privo di rischio, dalla stima della EE in un insieme finito di istanti e dalla probabilità di insolvenza.

## 5.6 Espressione del CVA in forma di versamenti periodici

Dato un derivato soggetto al rischio di insolvenza, il CVA rappresenta il prezzo necessario per coprirsi da tale rischio (ad esempio attraverso un'opportuna strategia). Spesso, tuttavia, può essere utile esprimere tale costo aggiuntivo non in termini di un versamento iniziale da effettuare quando viene acquistato il derivato, ma in termini di versamenti periodici di una quantità fissata da effettuarsi, in corrispondenza di opportune scadenze arbitrarie, durante il periodo di vita del contratto: tale quantità è detta *running CVA*. La conversione del valore del CVA in termini di running CVA è concettualmente non triviale e computazionalmente onerosa, quindi quest'ultimo valore viene determinato, con buona accuratezza, mediante un'approssimazione analitica. Consideriamo, a titolo di esempio, il caso di un Interest Rate Swap: supponiamo che non vi sia wrong-way risk e che i versamenti periodici relativi al running CVA avvengano alle medesime date in cui vengono scambiati tasso fisso e tasso variabile, ovvero, se consideriamo un Receiver Forward Swap, il running CVA consiste in una quantità di denaro da aggiungere, a titolo di compenso dal rischio di insolvenza, al valore del tasso fisso, a ciascuna scadenza considerata. Definiamo, innanzitutto, uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  e supponiamo l'esistenza di una misura martingala equivalente  $Q$ . Siano, quindi,  $t, T \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $t > T$  e consideriamo un Receiver Forward Swap relativo all'intervallo  $[t, T]$ , così strutturato:

- siano  $T_0 = t < T_1 < \dots < T_N = T \in [0, T]$  e supponiamo che i versamenti relativi allo Swap avvengano agli istanti  $T_1, \dots, T_N$  e definiamo, per ogni  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\alpha_j := T_j - T_{j-1}$ ;
- supponiamo che, per ogni  $j \in \{1, \dots, N\}$ , il tasso variabile relativo all'intervallo  $[T_{j-1}, T_j]$  sia descritto dalla variabile casuale  $L_j : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ed il tasso fisso corrisponda a  $K \in \mathbb{R}$ .

In base alla definizioni appena date, sia  $V(t, T)$  il valore, al tempo  $t$ , del contratto nell'ipotesi di assenza di rischio di insolvenza, ovvero sappiamo che

$$V(t, T) = \sum_{j=1}^N E^Q [B(t, T_j) \alpha_j (K - L_j) | \mathcal{F}_t],$$

e sia quindi  $\tilde{V}(t, T)$  il valore del medesimo contratto nell'ipotesi che sia presente il rischio di insolvenza. Dato  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , quindi, definendo  $V(t, T; \epsilon)$  e  $\tilde{V}(t, T; \epsilon)$  il valore, al tempo  $t$ , del Receiver Forward Swap tale che, nella notazione appena introdotta, il tasso fisso sia pari a  $K + \epsilon$ , per ogni  $j \in \{1, \dots, N\}$ , e sia  $\text{CVA}(t; \epsilon)$  il valore del CVA di tale contratto. Osserviamo che  $\epsilon$  corrisponde, nelle ipotesi fatte, al valore del running CVA. Vogliamo, innanzitutto, che  $\epsilon$  risolva l'equazione  $\tilde{V}(t, T; \epsilon) = V(t, T)$ . Osserviamo, innanzitutto, che una tale soluzione  $\epsilon$  deve soddisfare la relazione

$$\begin{aligned} \text{CVA}(t; \epsilon) &= V(t, T; \epsilon) - \tilde{V}(t, T; \epsilon) = V(t, T; \epsilon) - V(t, T) = \\ &= \sum_{j=1}^N E^Q [B(t, T_j) \alpha_j (K + \epsilon - L_j) | \mathcal{F}_t] - \sum_{j=1}^N E^Q [B(t, T_j) \alpha_j (K - L_j) | \mathcal{F}_t] = \\ &= \epsilon \sum_{j=1}^N B(t, T_j) \alpha_j =: \epsilon \text{DV01}, \end{aligned}$$

ove  $\text{DV01} := \sum_{j=1}^N B(t, T_j) \alpha_j$ . Osserviamo ora che, per  $\epsilon > 0$  fissato, poichè, per ogni  $j \in \{1, \dots, N\}$  e per ogni realizzazione della variabile  $L_j$  si ha che  $K + \epsilon - L_j \geq K - L_j$  ed, in base alla formula che descrive il valore di un Receiver Forward Swap ed alla monotonia del valore atteso, si ha che  $V(t, T) \leq V(t, T; \epsilon)$ . Definendo, quindi,  $\delta \in [0, 1)$  il recovery rate e  $\tau : (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P) \rightarrow ([t, +\infty], \mathcal{B}([t, +\infty]))$  il tempo di arresto che descrive l'istante di insolvenza, si ha

$$\begin{aligned} \text{CVA}(t) &= (1 - \delta) E^Q [B(t, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}] \leq \\ &\leq (1 - \delta) E^Q [B(t, \tau) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} V(\tau, T; \epsilon) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T; \epsilon) > 0\}}] = \text{CVA}(t; \epsilon). \end{aligned}$$

Osserviamo, ora, che il contratto di tipo Receiver Forward Swap al quale viene aggiunta al tasso fisso la quantità  $\epsilon$  può essere visto come un netting set formato da due derivati distinti:

- il primo è un Receiver Forward Swap avente tasso fisso  $K$ ;
- il secondo è una sequenza di versamenti che vengono ricevuti agli istanti  $T_1, \dots, T_N$  e sono rispettivamente pari ad  $\epsilon \alpha_1, \dots, \epsilon \alpha_N$ .

Sappiamo, quindi, che, indicando con  $\text{EE}(u, T; \epsilon)$  la EE dell'insieme di netting appena definito e con  $\text{EE}(u, T)$  ed  $\text{EE}_\epsilon(u, T)$  la EE dei rispettivi contratti sopra elencati, per ogni  $u \in [t, T]$  si ha  $\text{EE}(u, T; \epsilon) \leq \text{EE}(u, T) + \text{EE}_\epsilon(u, T)$ , dunque osserviamo che

$$\begin{aligned} \text{CVA}(t; \epsilon) &= \int_t^T B(t, u) \text{EE}(u, T; \epsilon) dF(u) \leq \\ &\leq \int_t^T B(t, u) \text{EE}(u, T) dS(u) + \int_t^T B(t, u) \text{EE}_\epsilon(u, T) dF(u) = \\ &= \text{CVA}(t) + \text{CVA}_\epsilon(t), \end{aligned}$$

ove  $F : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow [0, 1]$  è la densità di  $\tau$  e  $\text{CVA}_\epsilon(t)$  rappresenta il CVA, al tempo  $t$ , della sequenza dei versamenti  $\epsilon\alpha_1, \dots, \epsilon\alpha_N$  ottenuti agli istanti  $T_1, \dots, T_N$ . Calcoliamo esplicitamente quest'ultima quantità, ovvero consideriamo il derivato che, agli istanti  $T_1, \dots, T_N$ , fornisce all'acquirente una somma rispettivamente pari ad  $\epsilon\alpha_1, \dots, \epsilon\alpha_N$ . Innanzitutto osserviamo che, per ogni  $j \in \{1, \dots, N\}$  fissato, la EE di tale derivato è pari a

$$\text{EE}_\epsilon(T_j, T) = E^Q \left[ \sum_{i=j}^N B(T_j, T_i) \alpha_i \epsilon \right] = \sum_{i=j}^N B(T_j, T_i) \alpha_i \epsilon,$$

dunque, utilizzando l'approssimazione della formula del CVA, possiamo approssimare

$$\begin{aligned} \text{CVA}_\epsilon(t) &\approx (1 - \delta) \sum_{j=1}^N B(t, T_j) \text{EE}_\epsilon(T_j, T) [Q(\tau > T_{j-1}) - Q(\tau > T_j)] = \\ &= (1 - \delta) \sum_{j=1}^N B(t, T_j) \sum_{i=j}^N B(T_j, T_i) \alpha_i \epsilon [Q(\tau > T_{j-1}) - Q(\tau > T_j)] = \\ &= (1 - \delta) \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N B(t, T_i) \alpha_i \epsilon [Q(\tau > T_{j-1}) - Q(\tau > T_j)] = \\ &= \epsilon(1 - \delta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i B(t, T_i) \alpha_i [Q(\tau > T_{j-1}) - Q(\tau > T_j)] = \\ &= \epsilon(1 - \delta) \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \alpha_i \sum_{j=1}^i [Q(\tau > T_{j-1}) - Q(\tau > T_j)] = \\ &= \epsilon(1 - \delta) \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \alpha_i [Q(\tau > t) - Q(\tau > T_i)] = \\ &= \epsilon(1 - \delta) \left[ \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \alpha_i - \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \alpha_i Q(\tau > T_i) \right] \end{aligned}$$

e, ricordando di aver definito  $\text{DV01} = \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \alpha_i$ , definiamo  $\text{D}\tilde{\text{V}}01 := \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \alpha_i Q(\tau > T_i)$  e  $\text{CVA01} := (1 - \delta)(\text{DV01} - \text{D}\tilde{\text{V}}01)$ , possiamo, quindi, concludere che

$$\text{CVA}(t) \leq \text{CVA}(t; \epsilon) \leq \text{CVA}(t) + \epsilon \text{CVA01}$$

dunque possiamo affermare che  $\text{CVA}(t; \epsilon) = \text{CVA}(t) + \alpha \epsilon \text{CVA01}$ , per un dato valore di  $\alpha \in [0, 1]$ , dunque, ricordando che  $\text{CVA}(t; \epsilon) = \epsilon \text{D}\tilde{\text{V}}01$ , si ottiene infine

$$\epsilon = \frac{\text{CVA}(t)}{\text{DV01} - \alpha \text{CVA01}}.$$

Al fine di ottenere un'approssimazione di  $\epsilon$ , si procede approssimando  $\alpha$  e, quindi ricavando  $\epsilon(\alpha) = \frac{\text{CVA}(t)}{\text{DV01} - \alpha \text{CVA01}}$ , che costituisce l'approssimazione al CVA in forma di versamenti

periodici. Non vi sono criteri particolari per stimare il valore di  $\alpha$ , ma si può osservare che stimando un valore di  $\alpha$  prossimo ad 1 si suppone che il CVA del Receiver Forward Swap avente il tasso fisso aumentato di  $\epsilon$  aumenti considerevolmente rispetto al valore originario e, viceversa, che tale incremento sia sempre minore per  $\alpha$  che si avvicina a 0. Il valore di  $\alpha$ , quindi, può essere inteso come una valutazione approssimativa della qualità del credito della controparte.

## 5.7 CVA del prezzo di una posizione lunga su un'opzione

Un'applicazione utile della formula del CVA consiste nella valutazione del prezzo di una posizione lunga su un'opzione che prevede un'unica transazione alla scadenza. Bisogna precisare che tale utilizzo non è, in generale, finalizzato ad effettuare simulazioni, poichè in tal caso si opera tipicamente su insiemi di netting, ma può essere uno strumento utile al fine di effettuare una stima preliminare del rischio associato ad un titolo. Consideriamo uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  e supponiamo che non vi siano opportunità di arbitraggio, ovvero esista una misura martingala equivalente  $Q$ . Supponiamo che, dati  $t, T \in \mathbb{R}$ , con  $t < T$ , il valore della posizione lunga relativa ad un'opzione sia dato dal processo stocastico  $\{V(s, T)\}_{s \in [t, T]}$  tale che  $V(s, T) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  per ogni  $s \in ]t, T]$  e  $V(t, T)$ , ovvero il valore della posizione all'istante  $t$  (che supponiamo essere l'istante attuale) sia noto. Definiamo, quindi, l'istante di insolvenza attraverso il tempo di arresto  $\tau : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (]t, +\infty])$ , supponendo che tale variabile casuale sia indipendente dal processo  $\{V(s, T)\}_{s \in [t, T]}$ . Ricordiamo che, se  $\delta \in [0, 1[$  è il recovery rate, in base a queste ipotesi

$$\text{CVA}(t) = (1 - \delta)E^Q [B(t, \tau)\mathbf{1}_{\tau \leq T}V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}].$$

Osserviamo, innanzitutto, che, siccome il valore di una posizione lunga relativa ad un'opzione è sempre nonnegativo, possiamo affermare che

$$V(u, T)\mathbf{1}_{\{V(u, T) > 0\}} = V(u, T), \forall u \in [t, T]$$

e dunque, in questo caso,

$$\text{CVA}(t) = (1 - \delta)E^Q [B(t, \tau)\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}V(\tau, T)].$$

Osserviamo che un'opzione prevede un unico (eventuale) flusso di cassa alla scadenza, quindi per ogni  $s \in ]t, T]$  possiamo affermare che  $B(t, s)V(s, T) = V(t, T)$ , ovvero

$$E^Q [B(t, \tau)\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}V(\tau, T)] = E^Q [V(t, T)\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}] = V(t, T)Q(\tau \leq T)$$

dunque, in conclusione,

$$\text{CVA}(t) = (1 - \delta)V(t, T)Q(\tau \leq T).$$

In presenza di rischio di insolvenza, quindi, il valore, all'istante attuale  $t$ , della posizione lunga relativamente ad un'opzione, sia  $\tilde{V}(t, T)$  è dato, in base alla definizione di CVA, da

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, T) &= V(t, T) - \text{CVA}(t) = V(t, T) - (1 - \delta)V(t, T)Q(\tau \leq T) = \\ &= Q(\tau > T)V(t, T) + \delta V(t, T)Q(\tau \leq T) = V(t, T)[Q(\tau > T) + \delta Q(\tau \leq T)]. \end{aligned}$$

## 5.8 CVA e riduzione dell'esposizione al rischio di controparte

In questa sezione, studiamo quali sono le conseguenze, in termini del valore del CVA relativo ad un dato insieme di contratti stipulati nei confronti di una data controparte, qualora vengano impiegate le tecniche di riduzione viste precedentemente. Innanzitutto, qualora un contratto preveda, al fine di tutelarsi dal rischio di insolvenza, l'istituzione di un collaterale, per stimare il CVA di un insieme di netting è sufficiente calcolare la EE dell'insieme in questa nuova situazione utilizzando le relative tecniche e, quindi, si procede in maniera analoga al caso tradizionale. Supponiamo, quindi, che l'insieme di contratti sia un insieme di netting e supponiamo che, per ipotesi, non vi sia wrong-way risk. Valutiamo quali condizioni debba soddisfare un titolo rischioso e non appartenente a tale insieme affinché, in presenza di rischio di insolvenza, questo possa essere aggiunto al portafoglio in questione. A tal proposito, consideriamo uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , supponendo che esista una misura martingala equivalente  $Q$ , e consideriamo l'evoluzione del valore dell'insieme di netting e del titolo da aggiungere relativamente all'intervallo  $]t, T]$ , ove  $t$  (l'istante attuale) e  $T$  (la data di scadenza di tutti i derivati appartenenti all'insieme) appartengono ad  $\mathbb{R}_{>0}$  e sono tali che  $t < T$ . Supponiamo che il valore, al tempo  $t$ , del titolo che vorremmo aggiungere all'insieme di netting sia noto ed indichiamolo con  $V_i(t, T)$  ed indichiamo con  $\{V_{NS}(s, T)\}_{s \in ]t, T]}$  e  $\{V_{NS,i}(s, T)\}_{s \in ]t, T]}$  i processi che descrivono l'evoluzione, rispettivamente, del valore dell'insieme di netting senza il contratto aggiuntivo ed in presenza di tale contratto, nell'ipotesi di assenza di rischio di insolvenza, e con  $\{\tilde{V}_{NS}(s, T)\}_{s \in ]t, T]}$  e  $\{\tilde{V}_{NS,i}(s, T)\}_{s \in ]t, T]}$  i processi che descrivono l'evoluzione dei medesimi valori, ipotizzando invece la presenza di tale rischio. Supponiamo, inoltre, che  $V_{NS}(t, T)$  sia noto (e dunque è noto anche  $V_{NS,i}(t, T) = V_{NS}(t, T) + V_i(t, T)$ , in virtù della linearità del MtM) e ricordiamo che è possibile calcolare i valori di  $\tilde{V}_{NS}(t, T)$  e  $\tilde{V}_{NS,i}(t, T)$  attraverso i rispettivi valori del CVA, che indichiamo con  $CVA_{NS}(t)$  e  $CVA_{NS,i}(t)$ . In presenza di rischio di insolvenza, quindi, vogliamo verificare che l'incremento, in tale istante, del MtM dell'insieme di netting in seguito all'aggiunta del titolo rappresentato da  $V_i$  sia maggiore od al più uguale al valore attuale dell'insieme di netting non caratterizzato da quest'ultima aggiunta, ovvero vogliamo verificare che valga la relazione  $\tilde{V}_{NS,i}(t, T) \geq \tilde{V}_{NS}(t, T)$ . Esplicitando tale diseuguaglianza in termini del CVA, si ottiene

$$V_{NS,i}(t, T) - CVA_{NS,i}(t) \geq V_{NS}(t, T) - CVA_{NS}(t)$$

ovvero

$$V_{NS}(t, T) + V_i(t, T) - CVA_{NS,i}(t) \geq V_{NS}(t, T) - CVA_{NS}(t)$$

da cui si ottiene che il vincolo che il titolo esterno al portafoglio dovrebbe soddisfare, al fine di essere aggiunto all'insieme di netting, la seguente relazione:

$$V_i(t, T) \geq CVA_{NS,i}(t, T) - CVA_{NS}(t, T).$$

Dato, quindi, un insieme di netting avente, al tempo  $t$ , CVA pari a  $CVA(t)$  e tale che ad esso venga aggiunto un titolo esterno cosicché il CVA del nuovo portafoglio sia, all'istante considerato, indicato con  $CVA_{NS,i}(t, T)$ , definiamo *Incremental CVA* al tempo  $t$

la quantità

$$\Delta\text{CVA}(t) := \text{CVA}_{NS,i}(t) - \text{CVA}_{NS}(t).$$

La condizione affinché l'inserimento di un nuovo titolo all'interno di un insieme di netting sia vantaggioso, quindi, coincide con il fatto che il valore di quest'ultimo sia maggiore od al più uguale, in modulo, al valore dell'Incremental CVA. Se quest'ultimo valore è positivo, la condizione appena trovata dice che se aggiungiamo un titolo all'insieme di netting vogliamo che il profitto derivante da tale aggiunta sia maggiore del costo di un'eventuale strategia di copertura finalizzata a tutelarsi dal rischio di insolvenza relativo a tale componente aggiuntiva. Ricordando che quando abbiamo definito il CVA abbiamo stimato, nell'ipotesi di assenza di wrong-way risk, tale valore attraverso la formula  $(1 - \delta) \sum_{j=1}^m B(t, t_j) \text{EE}(t, t_j) P(\tau \in (t_{j-1}, t_j])$ , possiamo ora stimare, sotto la medesima ipotesi, l'Incremental CVA dovuto all'aggiunta di un titolo al portafoglio come

$$\begin{aligned} \text{CVA}_{NS,i}(t) - \text{CVA}_{NS}(t) &\approx \\ &\approx (1 - \delta) \sum_{j=1}^m B(t, t_j) (\text{EE}_{NS,i} - \text{EE}_{NS}(t, t_j)) P(\tau \in (t_{j-1}, t_j]). \end{aligned}$$

Al fine di stimare tale incremento, si ricorre ad una simulazione di Monte Carlo per ottenere i valori della EE e quindi si utilizza la formula appena trovata.

## 5.9 Bilateral CVA

Supponiamo, nell'ipotesi di assenza di wrong-way risk, di voler modellizzare una caratteristica aggiuntiva: l'insolvenza può verificarsi relativamente ad entrambe le parti del contratto. A tal proposito, consideriamo lo spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  e supponiamo che valga l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, ovvero che esista una misura martingala equivalente  $Q$ . Definendo, quindi,  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  come l'istante attuale, consideriamo un insieme di netting avente scadenza alla data descritta da  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $t < T$ , e tale che l'evoluzione del suo prezzo nell'intervallo  $[t, T]$  sia descritta dal processo stocastico a tempo continuo  $\{V(s, T)\}_{s \in [t, T]}$ , tale che per ogni  $s \in [t, T]$   $V(s, T)$  rappresenta il valore atteso, attualizzato al tempo  $s$ , dei flussi di cassa relativi all'intervallo residuo  $[s, T]$  e tale che  $V(t, T)$  sia noto. Introduciamo, quindi, il rischio di credito delle due parti in questione descrivendo, attraverso i due tempi di arresto  $\tau_A : (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P) \rightarrow ]t, +\infty]$  e  $\tau_B : (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P) \rightarrow ]t, +\infty]$ , tali che  $\tau_A$  e  $\tau_B$  siano indipendenti e che  $P(\tau_A = \tau_B) = 0$ , gli istanti in cui si verifica, rispettivamente, l'insolvenza di una delle due parti, che nominiamo parte A, e dell'altra, che chiamiamo parte B. Supponiamo, inoltre, che la parte A sia debitrice qualora il processo sopra definito assuma valori positivi e sia creditrice altrimenti. Viceversa, quindi, la parte B è creditrice in presenza di MtM positivo e debitrice in presenza di MtM negativo. Sia, inoltre,  $\tau : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow ]t, +\infty]$  tale che  $\tau(\omega) := \min\{\tau_A(\omega), \tau_B(\omega)\}$ , per ogni  $\omega \in \Omega$ . Supponiamo, inoltre, che in caso di insolvenza ciascuna delle due parti garantisca, rispettivamente, un recovery rate pari a  $\delta_A$  e  $\delta_B$ , ove  $\delta_A, \delta_B \in [0, 1)$  sono costanti. Considerando, infine, lo spazio  $]t, +\infty]$  definiamo,

al fine di alleggerire la notazione,  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -algebra dei boreliani su tale spazio e  $F_A$  ed  $F_B$ , rispettivamente, le leggi delle variabili casuali  $\tau_A$  e  $\tau_B$ . Possiamo, ora, definire  $\tilde{V}(t, T)$  come il valore, nell'istante attuale  $t$ , dell'insieme di netting ipotizzando la presenza di rischio di insolvenza da entrambe le parti. Tale valore, in altri termini, consiste nel valore attualizzato al tempo  $t$  della variabile casuale descrivente i flussi di cassa futuri (nell'intervallo  $[t, T]$ ) relativi ai contratti in questione, ipotizzando che ad un certo istante possa esservi insolvenza di almeno uno dei due soggetti. Il procedimento finalizzato ad ottenere, nelle ipotesi appena fatte e nelle notazioni introdotte, una formula esplicita per quest'ultima variabile casuale consiste nelle seguenti fasi: dapprima si calcola la formula che descrive il payoff del contratto, sotto ipotesi di rischio di insolvenza, separatamente in corrispondenza di ciascun evento possibile (assenza di insolvenza ed insolvenza, ripetivamente, di una delle due parti prima dell'altra), quindi si ottiene il valore complessivo del contratto, il quale corrisponde alla somma di ciascun payoff calcolato precedentemente e moltiplicato per il valore della funzione indicatrice relativa all'evento associato. Analizziamo, pertanto, ciascun singolo evento che può verificarsi relativamente al rischio di insolvenza di una od entrambe le parti.

**Assenza di insolvenza** Questo evento è descritto, nelle ipotesi formulate e nelle notazioni introdotte, da  $\{\tau > T\} \subset \Omega$ . In questo caso, il valore attuale del contratto coincide con il valore attuale dei flussi di cassa del medesimo ipotizzando che non vi sia rischio di insolvenza, ovvero è pari a  $V(t, T)$ .

**Insolvenza della parte A** Questo evento corrisponde all'insolvenza della parte A, che si suppone avvenire prima dell'eventuale insolvenza della parte B, ed è descritto, secondo le ipotesi fatte e le notazioni stabilite, da  $\{\tau = \tau_A\} = \{\tau_A \leq \tau_B\} \subset \Omega$ . Osserviamo, innanzitutto, che il valore in  $t$  dell'insieme di netting si ottiene sommando il valore in  $t$  dei flussi di cassa fino all'istante (aleatorio) di insolvenza ed il valore, attualizzato a  $t$ , dei versamenti compresi tra tale istante e la scadenza. Per quanto riguarda il calcolo della prima quantità, è opportuno definire la funzione  $\phi : [t, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\phi(s) = V(t, s)$  per  $s \leq T$  (il valore attualizzato all'istante  $t$  dei flussi di cassa appartenenti a  $[t, s]$ ) e, convenzionalmente, porre  $\phi(s) = V(t, T)$  per  $s \geq T$ . La funzione appena definita è misurabile e dunque si può definire la variabile casuale  $V(t, \tau_A) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ , la quale descrive, in corrispondenza di questo evento, il valore attuale dei flussi di cassa fino all'istante di insolvenza. Al fine di modellizzare il valore dei flussi di cassa compresi tra l'istante in cui si verifica l'insolvenza e la data di scadenza, invece, è necessario definire il processo  $\{\psi(s)\}_{s \in [t, +\infty]}$  a valori in  $\mathbb{R}$  tale che  $\psi(s) = V(s, T)$ , per  $s \leq T$ , e  $\psi(s) = V(T, T)$ , per  $s \geq T$ : anche in questo caso, osserviamo che, poichè la funzione  $s \mapsto B(t, s)$ , ove  $s \in [t, +\infty]$ , è continua, sono ben definite su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  le variabili casuali  $V(\tau_A, T)$  e  $B(t, \tau_A)V(\tau_A, T)$  ed osserviamo che quest'ultima descrive il valore attualizzato al tempo  $t$  dei flussi di cassa compresi tra l'istante di insolvenza e la data di scadenza. Osserviamo che, in base alle assunzioni fatte circa il segno del MtM, se il valore di  $V(\tau_A, T)$  è positivo la parte A è in debito e, quindi, versa  $\delta_A V(\tau_A, T)$ , altrimenti ottiene  $V(\tau_A, T)$ , poichè in tal caso la parte B è in debito e deve mantenere gli impegni previsti dal

contratto, a prescindere dall'insolvenza di A. In conclusione, al verificarsi di quest'ultimo evento, il valore attualizzato del contratto all'istante di insolvenza  $\tau_A$  è dato da

$$B(t, \tau_A) \left( \delta_A V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}} + V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) \leq 0\}} \right).$$

**Insolvenza della parte B** L'evento in cui si verifica l'insolvenza della parte B, precedentemente ad un'eventuale insolvenza della parte A, è descritto da  $\{\tau_B \leq \tau_A\} = \{\tau = \tau_B\} \subset \Omega$ . Analogamente al caso precedente, anche in corrispondenza di questo evento il valore attuale del contratto è dato dalla somma del valore dei flussi di cassa compresi tra  $t$  e l'istante aleatorio di insolvenza di B ed il valore, attualizzato in  $t$ , dei flussi di cassa compresi tra  $\tau_B$  e  $T$ . Per quanto riguarda la prima quantità, essa corrisponde alla realizzazione della variabile casuale  $V(t, \tau_B) = \phi(\tau_B)$ , ove  $\phi$  è la funzione misurabile definita precedentemente. Per quanto riguarda la seconda quantità, invece, in base alle convenzioni fissate la parte B è in debito se  $V(\tau_B, T) < 0$  ed in tal caso versa  $\delta_B V(\tau_B, T)$ , altrimenti riceve  $V(\tau_B, T)$ , qualora quest'ultimo valore sia positivo, cosicché il valore attualizzato al tempo  $t$  del contratto è, in questo caso, descritto dalla variabile casuale

$$B(t, \tau_B) \left( V(\tau_B, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_B, T) > 0\}} + \delta_B V(\tau_B, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_B, T) \leq 0\}} \right).$$

In conclusione, quindi, la variabile casuale che descrive il valore, al tempo  $t$ , dei flussi di cassa futuri in presenza di rischio di insolvenza da entrambe le parti è data da

$$\begin{aligned} \Pi(t) := & \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} V(t, T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} V(t, \tau) + \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} B(t, \tau) \left[ \delta_A V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}} \right] + \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} V(t, \tau) + \\ & + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} B(t, \tau) \left[ V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + \delta_B V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}} \right]. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, innanzitutto, per definizione della variabile  $\tau$ , si ha che

$$\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} V(t, \tau) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} V(t, \tau) = \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} V(t, \tau)$$

ed, inoltre, dalla relazione  $\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}$  riscriviamo, rispettivamente, i termini presenti nella formula sopra come segue:

$$\delta_A V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}} = (\delta_A - 1) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + V(t, \tau)$$

e

$$V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + \delta_B V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}} = V(\tau, T) + (\delta_B - 1) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}$$

quindi possiamo riscrivere la variabile casuale definita prima come

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &:= \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} V(t, T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} V(t, \tau) + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} B(t, \tau) [(\delta_A - 1)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + V(\tau, T)] + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} B(t, \tau) [V(\tau, T) + (\delta_B - 1)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}] = \\
&\quad = \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} V(t, T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} [V(t, \tau) + B(t, \tau)V(\tau, T)] + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} B(t, \tau)(\delta_A - 1)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} B(t, \tau)(\delta_B - 1)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}.
\end{aligned}$$

Osserviamo, ora, che la quantità  $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} [V(t, \tau) + B(t, \tau)V(\tau, T)]$  esprime il valore, attualizzato al tempo  $t$ , dei flussi di cassa compresi tra gli istanti  $t$  e  $T$  ed è quindi pari a  $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} V(t, T)$ , quindi, in conclusione, otteniamo

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &= V(t, T) + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} (\delta_A - 1)B(t, \tau)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} (\delta_B - 1)B(t, \tau)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}
\end{aligned}$$

ed, al fine di ottenere il valore, che inichiamo con  $\tilde{V}(t, T)$ , del contratto, in presenza di rischio di insolvenza da ambo le parti, al tempo  $t$ , è sufficiente calcolare il valore atteso, secondo la misura neutrale al rischio  $Q$  della variabile casuale appena definita, ottenendo

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(t, T) &= E^Q [\Pi(t)] = V(t, T) + \\
&\quad + E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} (\delta_A - 1)B(t, \tau)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} (\delta_B - 1)B(t, \tau)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}].
\end{aligned}$$

Definiamo, quindi, nelle notazioni introdotte e nelle ipotesi fatte, *Bilateral CVA* al tempo  $t$ , sia  $BCVA(t)$ , la differenza tra il valore, in tale istante, di un insieme di netting ipotizzando che non vi sia rischio di insolvenza ed il valore dello stesso qualora, invece, entrambe le parti possano rivelarsi insolventi, ovvero

$$BCVA(t) := V(t, T) - \tilde{V}(t, T).$$

In base all'espressione trovata per il valore dell'insieme di netting in questione, sotto ipotesi di rischio di insolvenza da ambo le parti, inoltre, possiamo affermare che

$$\begin{aligned}
BCVA(t) &= E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} (1 - \delta_A)B(t, \tau)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} (1 - \delta_B)B(t, \tau)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}].
\end{aligned}$$

## 5.10 Bilateral CVA in funzione della Exposure

In base alle ipotesi ed alle notazioni introdotte per definire il Bilateral CVA, vogliamo ottenere, nella medesima situazione, l'espressione di tale quantità in funzione della EE

di ciascuna parte, nell'ipotesi restrittiva di assenza di wrong-way risk. Osserviamo innanzitutto che, in un preciso istante  $u \in ]t, T]$ , la parte B è, per ipotesi, in credito se il MtM del contratto in questione ha valore negativo. Definiamo, pertanto, *Negative Expected Exposure* la quantità nonnegativa che descrive l'esposizione al rischio di controparte, nell'ipotesi che ad un valore negativo del MtM corrisponde un credito nei confronti di questa, ovvero

$$NEE = -E(\text{MtM}^-).$$

Procediamo, quindi, riprendendo la formula del bilateral CVA ed applicando la linearità del valor medio, ottenendo

$$\begin{aligned} \text{BCVA}(t) &= (1 - \delta_A)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_A\}} B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}] + \\ &\quad + (1 - \delta_B)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_B\}} B(t, \tau) V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) \leq 0\}}] = \\ &= (1 - \delta_A)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} B(t, \tau_A) V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}}] + \\ &\quad + (1 - \delta_B)E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_B \leq \tau_A\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} B(t, \tau_B) V(\tau_B, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_B, T) \leq 0\}}]. \end{aligned}$$

Procediamo, quindi, siluppando separatamente i due valori attesi della formula scritta sopra. Osserviamo, innanzitutto, che, in base alla definizione di valor medio condizionato, poichè  $\sigma(\tau_A, \tau_B) \subset \mathcal{F}$  si ottiene

$$\begin{aligned} E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} B(t, \tau_A) V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}}] &= \\ &= E^Q [E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} B(t, \tau_A) V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}} | \sigma(\tau_A, \tau_B)]] = \\ &= E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} E^Q [B(t, \tau_A) V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}} | \sigma(\tau_A, \tau_B)]] \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio si ottiene osservando che la funzione  $\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}}$  è  $\sigma(\tau_A, \tau_B)$ -misurabile, dunque

$$\begin{aligned} E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} E^Q [B(t, \tau_A) V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}} | \sigma(\tau_A, \tau_B)]] &= \\ &= E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} E^Q [B(t, \tau_A) V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}}]] \end{aligned}$$

ove l'ultimo passaggio deriva dalla definizione di valor medio condizionato, osservando che  $\{\tau_A \leq T\} \cap \{\tau_A \leq \tau_B\} \in \sigma(\tau_A, \tau_B)$ , quindi definendo  $F = F_A \times F_B$  la funzione di ripartizione congiunta di  $(\tau_A, \tau_B)$  possiamo affermare che

$$\begin{aligned} E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} B(t, \tau_A) E^Q [V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}}]] &= \\ &= \iint_{]t, +\infty[ \times ]t, +\infty[} \mathbf{1}_{\{a \leq b\}} \mathbf{1}_{\{a \leq T\}} E^Q [B(t, a) V(a, T) \mathbf{1}_{\{V(a, T) > 0\}}] dF(a, b) = \\ &= \int_t^{+\infty} \int_t^{+\infty} \mathbf{1}_{\{a \leq b\}} \mathbf{1}_{\{a \leq T\}} B(t, a) E^Q [V(a, T) \mathbf{1}_{\{V(a, T) > 0\}}] dF_B(b) dF_A(a) = \\ &= \int_t^T \int_a^{+\infty} B(t, a) E^Q [V(a, T) \mathbf{1}_{\{V(a, T) > 0\}}] dF_B(b) dF_A(a) = \\ &= \int_t^T B(t, a) E^Q [V(a, T) \mathbf{1}_{\{V(a, T) > 0\}}] Q(\tau_B > a) dF_A(a) \end{aligned}$$

e, ricordando che, qualora  $V(s, T) > 0$ , la parte B vanta un credito nei confronti di A, possiamo concludere che

$$\begin{aligned} E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq T\}} E^Q [B(t, \tau_A) V(\tau_A, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_A, T) > 0\}} | \sigma(\tau_A)]] &= \\ &= \int_t^T B(t, u) EE_B(u, T) Q(\tau_B > u) dF_A(u) \end{aligned}$$

ove  $EE_B$  corrisponde alla  $EE$  della parte B. Il secondo termine viene sviluppato utilizzando gli stessi argomenti, eccetto osservare che in questo caso  $\tau_A$  è indipendente da  $\tau_B$  e da  $\{V(s, T)\}_{s \in [t, T]}$ , cosicchè

$$\begin{aligned} E^Q [\mathbf{1}_{\{\tau_B \leq \tau_A\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} B(t, \tau_B) V(\tau_B, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau_B, T) \leq 0\}}] &= \\ &= \int_t^T B(t, u) E^Q [V(u, T) \mathbf{1}_{\{V(u, T) < 0\}}] Q(\tau_A > u) dF_B(u) = \\ &= \int_t^T B(t, u) NEE_A(u, T) Q(\tau_A > u) dF_B(u) \end{aligned}$$

ove  $NEE_A$  rappresenta la  $NEE$  della parte A relativamente alla controparte B. In conclusione, quindi

$$\begin{aligned} BCVA(t) &= (1 - \delta_A) \int_t^T B(t, u) EE_B(u, T) Q(\tau_B > u) dF_A(u) - \\ &+ (1 - \delta_B) \int_t^T B(t, u) NEE_A(u, T) Q(\tau_A > u) dF_B(u). \end{aligned}$$

La formula appena ottenuta, quindi, può essere approssimata tramite discretizzazione selezionando un insieme di istanti  $t_0 < \dots < t_N$  appartenenti a  $[t, T]$  e tali che  $t_0 = t$  e  $t_N = T$ , ove  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  e ponendo

$$\begin{aligned} BCVA(t) &\approx (1 - \delta_A) \sum_{j=1}^N B(t, t_j) EE_B(t_j, T) P(\tau_B > t_j) P(\tau_A \in (t_{j-1}, t_j]) - \\ &+ (1 - \delta_B) \sum_{j=1}^N B(t, t_j) NEE_A(t_j, T) P(\tau_A > t_j) P(\tau_B \in (t_{j-1}, t_j]). \end{aligned}$$

## 5.11 Bilateral CVA in presenza di walkaway clause

Riprendendo tutte le notazioni e definizioni introdotte nella definizione del BCVA, consideriamo il caso in cui, per ipotesi, qualora una delle due parti fallisca, l'altra venga, previo accordo formale, sollevata da qualsiasi obbligo contrattuale (*walkaway clause*). Anche in questo caso, vogliamo calcolare la formula che esprime il BCVA. Analizziamo, quindi, anche in questo caso ogni possibile realizzazione relativa all'eventualità che una delle due parti possa divenire insolvente. In corrispondenza dell'evento  $\{\tau > T\} \subset \Omega$ ,

nessuna delle due parti si rivela insolvente e, pertanto, il valore, al tempo  $t$ , del contratto è pari al valore del medesimo in assenza di rischio di insolvenza, ovvero corrisponde a  $V(t, T)$ . Supponendo, invece, che si verifichi l'insolvenza della parte A prima, in generale, di un'eventuale insolvenza della parte B, allora in corrispondenza di tale evento, descritto da  $\{\tau \leq T\} \cap \{\tau_A \leq \tau_B\}$ , il valore, al tempo  $t$ , del contratto è dato dalla somma del valore attuale, pari a  $V(t, \tau_A)$ , dei flussi di cassa compresi tra l'istante attuale e l'istante in cui si verifica l'insolvenza e del valore, attualizzato, del contratto all'istante di insolvenza: se  $V(\tau, T)$ , ovvero il valore in  $\tau$  dei flussi di cassa futuri, è positivo, allora la parte A versa il recovery rate, pari a  $\delta_A$ , mentre se è negativo la parte B è in debito ma, essendo sollevata dagli oneri previsti dal contratto, non effettua alcun versamento ad A, dunque il valore attualizzato del contratto in tale istante coincide con  $B(t, \tau)\delta_A V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}$ . Viceversa, in corrispondenza del verificarsi dell'insolvenza della parte B, precedentemente ad un'eventuale insolvenza di A, ovvero in corrispondenza dell'evento  $\{\tau \leq T\} \cap \{\tau_B \leq \tau_A\}$ , in tal caso il valore attuale del contratto al tempo  $t$  è dato dalla somma, corrispondente a  $V(t, \tau)$ , del valore attuale dei flussi di cassa compresi tra  $t$  e l'istante di insolvenza ed il valore attualizzato del contratto all'istante in cui si verifica l'insolvenza: in questo caso, la parte insolvente B versa una quantità pari al recovery rate se  $V(\tau, T) < 0$ , mentre, se la parte A si trova ad essere in debito, essa tuttavia non è vincolata ad adempiere gli obblighi contrattuali e quindi non versa nulla a B, cosicché il valore attualizzato del contratto è pari a  $B(t, \tau)\delta_B V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}}$ . In generale, quindi, il valore al tempo  $t$  del contratto in presenza di rischio di insolvenza è pari a

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &:= \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}V(t, T) + \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} [V(t, \tau) + B(t, \tau)\delta_A V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}] + \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_B \leq \tau_A\}} [V(t, \tau) + B(t, \tau)\delta_B V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}}] = \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}V(t, T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}V(t, \tau) + \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}}B(t, \tau)\delta_A V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_B \leq \tau_A\}}B(t, \tau)\delta_B V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}} = \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}V(t, T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} [V(t, \tau)B(t, \tau)V(\tau, T)] + \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}}B(t, \tau) [\delta_A V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} - V(\tau, T)] + \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_B \leq \tau_A\}}B(t, \tau) [\delta_B V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}} - V(\tau, T)].
\end{aligned}$$

Utilizzando, ora, l'uguaglianza  $V(\tau, T) = V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} + V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}}$  ed osservando che vale  $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} [V(t, \tau)B(t, \tau)V(\tau, T)] = \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}V(t, T)$ , possiamo riscrivere la variabile casuale nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &= \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}}B(t, \tau) [(\delta_A - 1)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} - V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}}] + \\
&+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_B \leq \tau_A\}}B(t, \tau) [(\delta_B - 1)V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}} - V(\tau, T)\mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}]
\end{aligned}$$

ed il valore del contratto al tempo  $t$  si ottiene calcolando il valore atteso, secondo  $Q$ , della variabile casuale appena considerata, ovvero

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t, T) &= E^Q[\Pi(t)] = \\ &= E^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau_A \leq \tau_B\}} B(t, \tau) [(\delta_A - 1)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}} - V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}}] + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau_B \leq \tau_A\}} B(t, \tau) [(\delta_B - 1)V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) < 0\}} - V(\tau, T) \mathbf{1}_{\{V(\tau, T) > 0\}}] \right].\end{aligned}$$

## Capitolo 6

# Stima empirica del rischio di insolvenza

In questo capitolo, che si ispira a quanto svolto in [5], sfruttando quanto visto in precedenza otteniamo una formula teorica del valore del CVA relativo a contratti di tipo Forward e Swap ed aventi come attività sottostante il prezzo del petrolio. Dopo aver ottenuto, quindi, una formula esplicita di tale quantità, esponiamo i risultati di alcune simulazioni che abbiamo effettuato relativamente alcuni contratti di tipo Swap.

### 6.1 Definizione del modello

In questa sezione, innanzitutto, definiamo il modello che utilizzeremo al fine di descrivere l'evoluzione del prezzo del petrolio e della probabilità di sopravvivenza all'interno dell'intervallo temporale relativo alla durata del contratto. Dapprima, quindi, è necessario caratterizzare il tempo d'arresto che descrive l'istante in cui avviene l'insolvenza e, quindi, definire un modello che permette, sotto tali ipotesi, di ricavare le probabilità di sopravvivenza relative alla controparte, estraendo, come visto precedentemente, tali valori da un insieme di contratti di tipo Credit Default Swap. Dopo aver determinato le probabilità di sopravvivenza, quindi, procediamo caratterizzando l'evoluzione dei prezzi con un opportuno processo stocastico.

### 6.2 L'istante di insolvenza

Nelle ipotesi precedenti, definiamo in maniera rigorosa la distribuzione del tempo di arresto  $\tau$ . Supponiamo che l'istante in cui si verifica l'insolvenza corrisponda alla realizzazione del primo evento associato ad un processo di Cox, che indichiamo con  $\{N_t\}_{t>0}$ , cosicché, per ogni  $t > 0$ , l'evento  $\{\tau > t\}$  è equivalente all'evento  $\{N_t = 0\}$ . Indicando, quindi, con  $\{\lambda(u)\}_{u>0}$  il processo stocastico descrivente l'intensità del processo di Cox appena definito, supponiamo che  $\lambda(0) =: \lambda_0 \in (0, +\infty)$  sia noto e che si abbia

$$\lambda(u) := y(u) + \psi(u; k, \mu, \nu, y_0), \forall t > 0$$

ove  $k, \mu, \nu, y_0 \in (0, +\infty)$  sono dei parametri costanti,  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  è una funzione deterministica dipendente da tali valori costanti ed  $\{y(u)\}_{u>0}$  è un processo stocastico. La funzione deterministica  $\psi$  generalmente esprime un trend oppure, talvolta, consiste in una funzione trigonometrica, al fine di introdurre elementi di periodicità nel modello qualora si supponesse la presenza di fenomeni stagionali nell'evoluzione dei prezzi. Osserviamo che, se definiamo  $y_0 := \lambda_0 - \psi(0; k, \mu, \nu, y_0)$ , tale valore è, per ipotesi, noto e supponiamo quindi che  $\{y(u)\}_{u>0}$  abbia dinamica

$$dy(u) = k(\mu - y(u))du + \nu\sqrt{y(u)}dZ^y(u),$$

ove  $\{Z^y(u)\}_{u>0}$  è un moto Browniano. Osserviamo che la deriva è una funzione lineare del processo stesso, in base ad i parametri  $k$  e  $\mu$ : si dice, in questo caso, che il processo è caratterizzato da *mean reversion*, ovvero è tale che quando, per un dato  $t \in [0, T]$ , il valore di  $y(t)$  raggiunge una determinata soglia, la quantità  $k(u - y(u))$ , ovvero la deriva dell'equazione, che rappresenta il trend del processo considerato, assume segno opposto rispetto a quello assunto fino a tale istante, così da evitare che il processo assuma valori che si allontanino eccessivamente da un valore preimpostato. È altresì possibile provare che, supponendo che i parametri soddisfino la relazione  $2k\mu > \nu^2$ , i valori assunti da  $\{y(u)\}_{u>0}$  siano, per ogni  $u > 0$ , strettamente positivi. Supponendo, da qui in avanti, che i parametri soddisfino la condizione appena esplicitata, possiamo quindi affermare che il processo  $\{\lambda(u)\}_{u>0}$  assume, in corrispondenza di ciascuna realizzazione possibile, valori strettamente positivi. Se, quindi, definiamo, su  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ , il processo  $\{\Lambda(t)\}_{t>0}$  tale che

$$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(u)du, \forall t > 0$$

allora, in corrispondenza di ciascuna realizzazione possibile, il processo  $t \mapsto \Lambda(t)$  è crescente su  $(0, +\infty)$ . Ora, in base alla definizione di processo di Cox ed avendo supposto che l'intensità sia una funzione che dipende dal processo stocastico  $\{y(s)\}_{s>0}$ , possiamo affermare che

$$E^Q(\mathbf{1}_{\{N_t=0\}}|\{y(s)\}_{0 \leq s \leq t}) = \exp(-\Lambda(t)), \forall t > 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} Q(\tau > t) &= Q(N_t = 0) = E^Q(\mathbf{1}_{\{N_t=0\}}) = \\ &= E^Q[E^Q(\mathbf{1}_{\{N_t=0\}}|\{y(s)\}_{0 \leq s \leq t})] = E^Q[\exp(-\Lambda(t))], \forall t > 0. \end{aligned}$$

Possiamo, ora, definire

$$\tau := \inf \{t > 0 | \Lambda(t) \geq E_1\}$$

ove  $E_1$  è una variabile casuale esponenziale di parametro 1, indipendente dal processo  $\{y(u)\}_{u>0}$ . Proviamo che tale definizione di  $\tau$  è coerente con la proprietà di essere un tempo di arresto che descrive, nelle ipotesi fatte, la possibilità che si verifichi insolvenza:

osserviamo che, per  $t > 0$  fissato, si ha

$$\begin{aligned} Q(\tau > t) &= Q(\Lambda(t) < E_1) = E^Q(\mathbf{1}_{\{\Lambda(t) < E_1\}}) = \\ &= E^Q[E^Q(\mathbf{1}_{\{\Lambda(t) < E_1\}}|\{y(u)\}_{\{0 \leq u \leq t\}})] = E^Q[E^Q(\mathbf{1}_{\{\Lambda(t) < E_1\}}|\Lambda(t))] = \\ &= E^Q[\Phi(\Lambda(t))] \end{aligned}$$

ove, se  $f_L$  ed  $f_{E_1}$  sono, rispettivamente, le densità di  $\Lambda(t)$  ed  $E_1$  ed osservando che, in virtù dell'indipendenza tra le due, la densità di  $E_1$  condizionata a  $\Lambda(t)$  è pari ad  $f_{E_1}$ , allora, per ogni  $y > 0$

$$\Phi(y) := \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y < x\}} f_{E_1}(x) dx = e^{-y},$$

dunque, in conclusione,

$$Q(\tau > t) = E^Q[\Phi(\Lambda(t))] = E^Q[\exp(-\Lambda(t))], \forall t > 0.$$

### 6.3 Calibrazione della probabilità di sopravvivenza

Al fine di calibrare ai dati di mercato, come accennato, l'intensità del processo che determina la probabilità di sopravvivenza, dapprima si estraggono, seguendo l'approccio indicato nel quinto capitolo (sotto ipotesi di hazard rate non costante), le probabilità di sopravvivenza  $\bar{Q}(\tau > t)$ , per ogni  $t \in [0, T]$ , e, quindi, si osserva che, affinché il modello introdotto sia calibrato ai dati di mercato, deve aversi

$$\bar{Q}(\tau > t) = E^Q[\exp(-\Lambda(t))] = E^Q[\exp(-\Psi(t; k, \mu, \nu, y_0) - Y(t))], \forall t > 0,$$

ovvero

$$\Psi(t; k, \mu, \nu, y_0) = \log \frac{E^Q[\exp(-Y(t))]}{\bar{Q}(\tau > t)}$$

ove  $\Psi(t; k, \mu, \nu, y_0) = \int_0^t \psi(u; k, \mu, \nu, y_0) du$  e  $Y(t) = \int_0^t y(u) du$ . È possibile, come si può osservare con maggiore dettaglio in [4, sezione 3.1], ottenere una formula esplicita per la quantità  $E^Q[\exp(-Y(t))]$ , più precisamente

$$E^Q[\exp(-Y(t))] = A(0, t; k, \mu, \nu, y_0) \exp(-C(0, t; k, \mu, \nu, y_0)),$$

ove

$$\begin{aligned} A(0, t; k, \mu, \nu, y_0) &= \frac{2h \exp\left(\frac{(k+h)t}{2}\right)}{2h + (k+h)(\exp(th) - 1)}, \\ C(0, t; k, \mu, \nu, y_0) &= \frac{2(\exp(th) - 1)}{2h + (k+h)(\exp(th) - 1)} \end{aligned}$$

ed  $h = \sqrt{k^2 + 2\nu^2}$ . È possibile, infine, ottenere  $\psi(t; k, \mu, \nu, y_0) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t; k, \mu, \nu, y_0)$ , per ogni  $t > 0$ , e, quindi, una descrizione, calibrata ai dati di mercato, del processo che rappresenta l'intensità del tempo di insolvenza.

## 6.4 Il processo dei prezzi

La prima ipotesi fondamentale, al fine di creare un modello che possa descrivere l'evoluzione del valore del prezzo del petrolio, consiste nel supporre che, dato uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, Q)$ , tale quantità possa essere rappresentata da un processo stocastico a tempo continuo  $S := \{S_t\}_{t \geq 0}$ , tale che si abbia

$$\log S(t) = \phi(t) + x(t) + L(t), \quad \forall t \geq 0,$$

ove  $\phi : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione deterministica che serve a calibrare il modello ai dati di mercato ed  $\{x(t)\}_{t \geq 0}$  ed  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$  sono due processi stocastici definiti su  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, Q)$ . Il processo  $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ , innanzitutto, descrive le variazioni del prezzo del petrolio nel breve periodo, ovvero rappresenta le oscillazioni, rispetto al prezzo di equilibrio, che si suppone siano temporanee e dovute ad eventi del tutto contingenti e che, quindi, si ipotizza siano destinate ad estinguersi, più o meno rapidamente, in un certo lasso di tempo. Tale processo viene rappresentato mediante un processo di Ornstein-Uhlenbeck e la sua dinamica è descritta da

$$dx(t) = -k_x x(t)dt + \sigma_x dZ_t^x, \quad \forall t > 0$$

ove  $\{Z_t^x\}_{t \geq 0}$  è un moto browniano,  $\sigma_x \in \mathbb{R}$  e  $k_x \in \mathbb{R}_{>0}$  è il parametro di mean reversion che descrive quanto rapidamente le variazioni temporanee rispetto al prezzo di equilibrio tendano ad annullarsi. È possibile dimostrare (ed a tale proposito si veda [1, pag.161]) che, per ciascun istante  $s > 0$ , in cui supponiamo che il valore di  $x(s)$  sia noto e pari ad  $x_s \in \mathbb{R}$ , l'equazione differenziale stocastica definita dalla dinamica appena descritta ed avente come condizione iniziale  $x(s) = x_s$  ammette una ed una sola soluzione pari a

$$x(t) = x_s e^{-k_x(t-s)} + e^{-k_x(t-s)} \int_s^t e^{k_x(u-s)} \sigma_x dZ_u^x, \quad \forall t \geq s$$

e, quindi, in virtù della definizione di integrale stocastico ripetuto ad un moto browniano e delle proprietà del valor medio e della varianza, possiamo affermare che, per ogni  $t > s$  e nelle ipotesi che  $x_s \in \mathbb{R}$  sia noto, la variabile casuale  $x(t)$  ha distribuzione normale avente media pari ad  $x_s e^{-k_x(t-s)}$  e varianza pari ad  $e^{-2k_x(t-s)} \int_0^t e^{2k_x(u-s)} \sigma_x^2 ds = \frac{\sigma_x^2}{2k_x} (1 - e^{-2k_x(t-s)})$ . Il processo  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ , invece, rappresenta l'evoluzione del valore del prezzo del petrolio in corrispondenza dell'equilibrio tra domanda ed offerta, ed è descritto da un moto browniano con deriva, ovvero

$$dL(t) = \mu_L dt + \sigma_L dZ_t^L$$

ove  $\mu_L, \sigma_L \in \mathbb{R}$  e  $\{Z_t^L\}_{t \geq 0}$  è un moto browniano. Dati, quindi, due istanti  $s, t \in \mathbb{R}$ , tali che  $0 \leq s < t$ , se supponiamo che sia noto il valore al tempo  $s$  e sia pari ad  $L_s \in \mathbb{R}$ , sappiamo, dal capitolo introduttivo, che l'equazione differenziale sopra riportata, avente condizione iniziale  $L(s) = L_s$ , ammette una soluzione data da

$$L(t) = L_s + \mu_L(t-s) + \sigma_L(Z_t^L - Z_s^L).$$

ed ogni altra soluzione coincide quasi ovunque con essa, quindi la dinamica del processo  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$  è ben definita. La variabile appena esplicitata ha valore atteso pari ad  $L_s + \mu_L(t-s)$  e varianza pari a  $\sigma^2(s-t)$  ed, inoltre, è una variabile aleatoria normale, essendo trasformazione affine di una variabile aleatoria normale. Definiamo, inoltre, la filtrazione  $\{\mathcal{F}_s^{x,L}\}_{s \geq 0}$  tale che, per ogni  $s \geq 0$ , si abbia  $\mathcal{F}_s^{x,L} := \sigma(Z_s^x, Z_s^L)$ , ovvero la filtrazione generata dai due moti browniani che controllano il processo descrivente l'evoluzione del prezzo del petrolio. Al fine di semplificare la notazione, indicheremo, per ogni  $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tali che  $0 \leq s < t$ , il valore atteso del processo  $S$  al tempo  $t$ , nell'ipotesi che sia noto il valore assunto dal medesimo al tempo  $s$ , con il simbolo  $E_s^Q[S_t]$ . Supponiamo quindi che  $\rho_{x,L} := \frac{E^Q((Z_t^x - Z_s^x)(Z_t^L - Z_s^L))}{(t-s)}$ , ovvero che la covarianza degli incrementi dei due moti browniani relativamente all'intervallo  $[s, t]$ , per ogni  $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$  tali che  $0 \leq s < t$ , sia costante e non nulla e che gli incrementi relativi ad intervalli diversi siano invece indipendenti. Sotto queste ipotesi, calcoliamo la covarianza dei due processi appena introdotti, ottenendo, per ogni  $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$  tali che  $0 \leq s < t$ ,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x(t), L(t)) &= E_s^Q \left[ e^{-k_x(t-s)} \left( \int_s^t e^{k_x(u-s)} \sigma_x dX_u^x \right) \sigma_L (Z_t^L - Z_s^L) \right] = \\ &= e^{-k_x(t-s)} \sigma_x \sigma_L E_s^Q \left[ \left( \int_s^t e^{k_x(u-s)} dX_u^x \right) (Z_t^L - Z_s^L) \right] = \\ &= e^{-k_x(t-s)} \sigma_x \sigma_L \int_s^t e^{k_x(u-s)} \rho_{x,L} du = \\ &= \frac{\sigma_x \sigma_L}{k_x} \rho_{x,L} \left( 1 - e^{-k_x(t-s)} \right). \end{aligned}$$

È possibile dimostrare (si veda [12, paragrafo 2]) che il vettore aleatorio  $\begin{pmatrix} x(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$  è normale e, quindi,  $\log(S(t)) = \phi(t) + x(t) + L(t)$  è una variabile aleatoria normale avente media pari a

$$m(t, s) := E_s^Q[\log S(t)] = \phi(t) + x_s e^{-k_x(t-s)} + L_s + \mu_L(t-s)$$

e, per quanto riguarda la varianza, si ha che

$$\begin{aligned} V(t, s) &:= \text{Var}(\log S(t)) = \text{Var}(x(t)) + \text{Var}(L(t)) + 2\text{Cov}(x(t), L(t)) = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2k_x} \left( 1 - e^{-2k_x(t-s)} \right) + \sigma^2(s-t) + 2 \frac{\sigma_x \sigma_L}{k_x} \rho_{x,L} \left( 1 - e^{-k_x(t-s)} \right). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, se supponiamo che per ogni coppia di istanti  $s, t$ , tali che  $0 \leq s < t$ , assumano valori costanti, rispettivamente, la covarianza tra gli incrementi del processo  $x$  e del processo  $y$  e la covarianza tra gli incrementi del processo  $L$  e del processo  $y$  ed indichiamo tali quantità con  $\rho_{x,y}$  e  $\rho_{L,y}$ , allora è possibile ottenere, in maniera laboriosa, la covarianza tra gli incrementi del processo di intensità e del processo dei prezzi, ottenendo

$$\text{corr}(\lambda_t - \lambda_s, S_t - S_s) = \frac{\sigma_x \rho_{x,y} + \sigma_L \rho_{L,y}}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_L^2 + 2\rho_{x,L} \sigma_x \sigma_L}}$$

e tale quantità è costante al variare di  $s$  e di  $t$ . Supponiamo, da qui in avanti, che  $\rho_{x,y} = \rho_{L,y} =: \bar{\rho}$ : possiamo quindi affermare, in base alla relazione precedente, che tale valore è pari a

$$\bar{\rho} = \text{corr}(d\lambda_t, dS_t) \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_L^2 + 2\rho_{x,L}\sigma_x\sigma_L}}{\sigma_x + \sigma_L}.$$

Quest'ultima notazione (in cui  $d\lambda_t$  e  $dS_t$  sono due generici incrementi dei rispettivi processi) tornerà utile quando effettueremo le simulazioni, in quanto analizzeremo il CVA al variare della correlazione tra gli incrementi che descrivono l'evoluzione dell'intensità di insolvenza e gli incrementi del prezzo del petrolio: nel caso di correlazione positiva, infatti, ci troviamo in una situazione di wrong-way risk (poichè ad un aumento del prezzo del petrolio corrisponde un aumento della probabilità che la controparte di riveli insolvente) e, in caso sia negativa, di right-way risk. Si può, quindi, procedere osservando che  $S(t)$ , essendo una variabile aleatoria log-normale, ha valore atteso, secondo la misura martingala equivalente  $Q$ , pari ad

$$E_s^Q[S(t)] = \exp \left[ m(t, s) + \frac{1}{2}V(t, s) \right] = \exp \left[ \phi(t) + x_s e^{-k_x(t-s)} + \mu_L(t-s) + \frac{1}{2}V(t, s) \right],$$

per ogni  $t \geq s$ . Supponendo, quindi, che esista un unico tasso di interesse privo di rischio  $t \mapsto r_t$  e che non vi sia rischio di insolvenza, ricordiamo che il prezzo di esercizio di un contratto forward sul petrolio in  $s < t$ , sia  $F(s, t)$ , è dato da  $F(s, t) = E^Q[S_t | \mathcal{F}_s^{x,L}]$ . Essendo, per ipotesi, noto il valore al tempo  $s < t$ , del processo  $S$ , possiamo calcolare esplicitamente tale valore, il quale è pari al valore atteso, secondo la misura neutrale al rischio  $Q$ , del prezzo del petrolio al medesimo istante, ovvero si ha che  $F(s, t) = E_s^Q[S(t)]$ . A questo punto, è possibile definire la funzione deterministica  $\phi$  calibrando ai dati presenti nel mercato relativamente ai prezzi di esercizio dei Forward, al variare della data di scadenza. Supponiamo, nelle ipotesi fatte, che  $s = 0$  sia l'istante iniziale in cui viene stipulato un contratto Forward sul petrolio e che  $x(0)$  ed  $L(0)$  siano noti, allora, se  $F^M(0, T)$  è il prezzo strike del relativo contratto nel mercato, vogliamo che il modello teorico fornisca un valore analogo, ovvero  $\phi$  dev'essere tale da risolvere

$$F^M(0, T) = F(0, T) = \exp \left[ \phi(T) + x_0 e^{-k_x T} + \mu_L T + \frac{1}{2}V(T, 0) \right], \forall T > 0$$

da cui si ottiene

$$\phi(T) = \log[F^M(0, T)] - x_0 e^{-k_x T} - \mu_L T - \frac{1}{2}V(T, 0), \forall T > 0.$$

## 6.5 Contratto Forward avente come sottostante il prezzo del petrolio

Vogliamo ora ottenere una formula che ci permetta di simulare l'evoluzione del valore di un contratto Forward sul prezzo del petrolio, il quale è descritto dal processo appena introdotto, supponendo che la controparte sia soggetta a rischio di insolvenza. Innanzitutto

osserviamo che, nelle notazioni utilizzate, possiamo descrivere il valore al tempo  $s < T$  di un contratto Forward avente come sottostante il prezzo del petrolio, sia  $\text{Fwdp}(s, T; K)$ , utilizzando la misura neutrale al rischio, cosicché

$$\text{Fwdp}(s, T; K) = B(s, T)E^Q[S_T - K | \mathcal{F}_s^{x, L}] = B(s, T)(E^Q[S_T | \mathcal{F}_s^{x, L}] - K)$$

e, riprendendo la situazione descritta precedentemente, in cui si è supposto essere noto il valore assunto dal processo  $S$  al tempo  $s$ , possiamo scrivere la quantità appena ottenuta come

$$B(s, T)(F(s, T) - K) = B(s, T) \left( \exp \left[ m(T, s) - \frac{1}{2}V(T, s) \right] - K \right).$$

Abbiamo, quindi, a disposizione una formula chiusa per descrivere il valore attuale di un contratto Forward sul prezzo del petrolio, in assenza di rischio di insolvenza. Ora, ipotizzando che la controparte possa rivelarsi insolvente, vogliamo fornire una stima del relativo CVA. Supponendo, quindi, che  $\delta$  sia il recovery rate, tale valore corrisponde, in  $s < T$ , a

$$\text{CVA}(s) = (1 - \delta)E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(s, \tau) \text{Fwdp}(\tau, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(\tau, T; K) > 0\}} \right]$$

e, dunque, il valore al tempo  $t$  di un contratto Forward, in presenza di rischio di insolvenza e supponendo che il valore dell'attività sottostante sia noto in tale istante, è dato da

$$\widetilde{\text{Fwdp}}(s, T; K) := \text{Fwdp}(s, T; K) - (1 - \delta)E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B(s, \tau) \text{Fwdp}(\tau, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(\tau, T; K) > 0\}} \right].$$

Ora procediamo con la stima del valore del CVA. Tale stima, come ci apprestiamo a vedere, si basa su un'opportuna discretizzazione dell'integrale presente all'interno della formula. Innanzitutto osserviamo che quest'ultima può essere riscritta, supponendo che  $T_0, \dots, T_N \in [s, T]$  siano tali che  $s = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$ , come la sommatoria

$$(1 - \delta) \sum_{j=1}^N E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} B(s, \tau) \text{Fwdp}(\tau, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(\tau, T; K) > 0\}} \right]$$

e, quindi, adottiamo la seguente semplificazione: ricordando che il tempo di arresto  $\tau$  descrive l'istante in cui si verifica l'eventuale insolvenza della controparte nel generico intervallo  $]T_{j-1}, T_j]$ , approssimiamo il valore, in tale istante, del contratto Forward con il valore che quest'ultimo assume in  $T_j$ , cosicché

$$\text{CVA}(s) \approx (1 - \delta) \sum_{j=1}^N E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right].$$

Se dapprima ipotizziamo che la variabile  $\tau$  sia indipendente rispetto ad entrambi i moti browniani introdotti, ovvero supponiamo che non sia presente wrong-way risk, tale

quantità diviene

$$\begin{aligned}
& (1 - \delta) \sum_{j=1}^N E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} E^Q [B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}}] \right] = \\
& = (1 - \delta) \sum_{j=1}^N Q(\tau \in ]T_{j-1}, T_j]) E_s^Q \left[ B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right].
\end{aligned}$$

Abbiamo, quindi, approssimato il CVA mediante una somma pesata, rispetto alle probabilità di insolvenza (che possono essere calibrate ai prezzi dei CDS osservabili nel mercato), dei termini  $E_s^Q \left[ B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right]$ , al variare di  $j$  in  $1, \dots, N$ . Osserviamo che, per  $j \in \{1, \dots, N\}$ , si ha che

$$\begin{aligned}
& E_s^Q \left[ B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right] = \\
& = E_s^Q \left[ B(s, T_j) E_{T_j}^Q [B(T_j, T) (S_T - K)] \mathbf{1}_{\{E_{T_j}^Q [B(T_j, T) (S_T - K)] > 0\}} \right] = \\
& = B(s, T) E_s^Q \left[ E_{T_j}^Q [S_T - K] \mathbf{1}_{\{E_{T_j}^Q [S_T - K] > 0\}} \right] = \\
& = B(s, T) E_s^Q \left[ (F(T_j, T) - K) \mathbf{1}_{\{F(T_j, T) - K > 0\}} \right].
\end{aligned}$$

La quantità appena ottenuta descrive il valore, al tempo  $s$ , di un'opzione Call avente esercizio al tempo  $T_j$  ed avente come sottostante il prezzo di un contratto Forward avente scadenza in  $T > T_j$  e, quindi, applicando la formula di Black and Scholes e considerando la dinamica del processo  $S$ , è possibile ottenere (come descritto in [12, sezione 2.2]), una formula esplicita di tale quantità, corrispondente a

$$B(t, T) \exp \left[ M + \frac{\bar{V}}{2} \right] \Phi \left( \frac{M + \bar{V} - \log K}{\sqrt{\bar{V}}} \right) - B(t, T) K \Phi \left( \frac{M - \log K}{\sqrt{\bar{V}}} \right)$$

ove  $M$  e  $\bar{V}$  sono le quantità

$$M = M(s, T_j, T; x_s, L_s) = x_s \exp(-k_x(T - s)) + L_s + \phi(T) + \frac{V(T, T_j)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V} = \bar{V}(s, T_j, T) = & \exp(-2k_x(T - T_j)) \frac{\sigma_x^2}{2k_x} (1 - \exp(-2k_x(T_j - s))) + \\
& + \sigma_L^2(T_j - s) + \exp(-k_x(T - T_j)) 2\rho_{x,L} \frac{\sigma_x \sigma_L}{k_x} (1 - \exp(-k_x(T_j - s))).
\end{aligned}$$

Consideriamo, ora, il caso in cui vi sia presenza di wrong way risk, ovvero in cui il tempo di arresto che descrive l'istante in cui la controparte si riveli insolvente ed il processo

stocastico che descrive l'evoluzione del prezzo del petrolio non siano, in generale, indipendenti. Ripartiamo, innanzitutto, dall'approssimazione effettuata precedentemente, ovvero

$$\text{CVA}(s) \approx (1 - \delta) \sum_{j=1}^N E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right].$$

Definiamo, innanzitutto, per ogni  $s \geq 0$  la filtrazione  $\{\mathcal{F}_s^y\}_{y \geq 0}$  tale che  $\mathcal{F}_s^y := \sigma(\{y(u)\}_{0 \leq u \leq s})$  e la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_s^{x,L} \vee \mathcal{F}_s^y = \sigma(\mathcal{F}_s^{x,L} \cup \mathcal{F}_s^y)$ . Consideriamo, dunque, per ogni  $j \in \{1, \dots, N\}$  fissato, il singolo membro della sommatoria corrispondente a

$$E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right]$$

ed, applicando il valor medio condizionato, riscriviamo tale quantità ottenendo

$$\begin{aligned} E_s^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right] &= \\ &= E_s^Q \left[ E^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \middle| \mathcal{F}_{T_j}^{x,L} \vee \mathcal{F}_{T_j}^y \right] \right] = \\ &= E_s^Q \left[ E^Q \left[ \mathbf{1}_{\tau \in ]T_{j-1}, T_j]} \middle| \mathcal{F}_{T_j}^{x,L} \vee \mathcal{F}_{T_j}^y \right] B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right] = \\ &= E_s^Q \left[ \left[ e^{-\Lambda(T_j)} - e^{-\Lambda(T_{j-1})} \right] B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}} \right] \end{aligned}$$

ove il penultimo passaggio è giustificato dalle proprietà del valor medio e dal fatto che la quantità  $\text{Fwdp}(T_j, T; K)$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{F}_{T_j}^{x,L} \vee \mathcal{F}_{T_j}^y$  e l'ultimo passaggio segue dall'ipotesi di wrong-way risk e dalla definizione del tempo di arresto  $\tau$ . Relativamente a quest'ultimo caso, ci interessa stimare, attraverso un'opportuna simulazione ed utilizzando lo schema di Eulero, l'espressione appena ottenuta, la quale, ricordiamo, fornisce una stima del CVA del prezzo del petrolio. Utilizziamo, innanzitutto, gli istanti definiti precedentemente e pari a  $T_0, T_1, \dots, T_N$  al fine di simulare l'evoluzione del prezzo del petrolio in un numero  $M \in \mathbb{N}_{>0}$  di scenari, ciascuno dei quali corrisponde ad una realizzazione particolare della variabile casuale

$$\sum_{j=1}^N \left( e^{-\Lambda(T_{j-1})} - e^{-\Lambda(T_j)} \right) B(s, T_j) \text{Fwdp}(T_j, T; K) \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}(T_j, T; K) > 0\}},$$

quindi la stima del CVA viene ottenuta calcolando la media aritmetica di tali valori. Al fine di calcolare, nei diversi scenari, la quantità appena descritta, è necessario innanzitutto approssimare, rispettivamente, i processi che descrivono l'evoluzione dell'intensità della probabilità di insolvenza e l'evoluzione del prezzo del petrolio, utilizzando lo schema di Eulero, al fine di ottenere due processi stocastici a tempo discreto. Per quanto riguarda il processo che descrive l'intensità della probabilità di insolvenza, innanzitutto, dobbiamo approssimare il processo stocastico a tempo continuo  $\{y(t)\}_{t \in [s, T]}$  con il processo a tempo

discreto  $\{y_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ , per il quale supponiamo che  $y_0^{(N)} = y_s \in \mathbb{R}_{>0}$  e che si abbia

$$\begin{aligned} y_{j+1}^{(N)} &= \left| y_j^{(N)} + k(\mu - y_j^{(N)}) \frac{1}{N} + \nu \sqrt{y_j^{(N)}} w_{j+1}^y \right| = \\ &= \left| \left( 1 - \frac{k}{N} \right) y_j^{(N)} + \frac{k}{N} \mu + \nu \sqrt{y_j^{(N)}} w_{j+1}^y \right| \end{aligned}$$

ove  $\{w_j^y\}_{j=1}^N$  è una successione di variabile aleatorie indipendenti ad aventi distribuzione normale standard. Si osservi che, ad ogni iterazione  $k \in \{1, \dots, N\}$ , consideriamo il valore assoluto di  $y_k^{(N)}$ , cosicchè, a ciascuna iterazione, il valore sotto radice sia nonnegativo e la sequenza  $\{\Lambda_k^{(N)}\}_{k=0}^N$  assuma valori crescenti, così da ottenere valori della probabilità di sopravvivenza decrescenti nel tempo poichè, in generale, nelle simulazioni la condizione  $2k\mu > \nu^2$  non è garantita. Al fine di simulare l'evoluzione del prezzo del petrolio è necessario approssimare, rispettivamente, il processo  $\{x(t)\}_{t \in [s, T]}$  supponendo  $x(s) = x_s$  ed ottenendo il processo stocastico a tempo discreto  $\{x_j^{(N)}\}_{j=0}^N$  definito ricorsivamente da

$$x_{j+1}^{(N)} = x_j^{(N)} + (-k_x x_j^{(N)}) \frac{1}{N} + \sigma_x w_{j+1}^x, \text{ per } j = 1, \dots, N$$

ovvero

$$x_{j+1}^{(N)} = \left( 1 - \frac{k_x}{N} \right) x_j^{(N)} + \sigma_x w_{j+1}^x, \text{ per } j = 1, \dots, N$$

ed il processo  $\{L(t)\}_{t \in [s, T]}$  attraverso il processo a tempo discreto  $\{L_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ , per il quale supponiamo  $L_0^{(N)} = L_s$ , tale che si abbia

$$L_{j+1}^{(N)} = L_j^{(N)} + \mu_L \frac{1}{N} + \sigma_L w_{j+1}^L.$$

Una volta eseguite le simulazioni, in corrispondenza di ciascun scenario si ottengono, per i processi  $\lambda$  ed  $S$ , i rispettivi processi approssimanti ed a tempo discreto  $\{\lambda_j^{(N)}\}_{j=0}^N$  ed  $\{S_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ , tali che  $\lambda_j^{(N)} := y_j^{(N)} + \psi(T_j; k, \mu, \nu, y_0)$  ed  $S_j^{(N)} := \exp \left[ \phi(T_j) + x_j^{(N)} + L_j^{(N)} \right]$ , per ogni  $j \in 0, \dots, N$ . È possibile, quindi, approssimare, per ogni  $j \in \{0, \dots, N\}$ , la quantità  $\Lambda(T_j) = \int_0^{T_j} \lambda(u) du$  (ad esempio attraverso le somme di Riemann-Stieltjes o la regola del trapezio) ottenendo  $\Lambda_j^{(N)}$ . Ricordando, quindi, che

$$\text{Fwdp}(T_j, T; K) = B(T_j, T) E^Q \left[ (S_T - K) | \mathcal{F}_{T_j}^{x, L} \right] = B(T_j, T) \left( E^Q \left[ S_T | \mathcal{F}_{T_j}^{x, L} \right] - K \right)$$

e che, al passo  $j$ -simo, il valore di  $S_{T_j}$  è noto poichè viene approssimato dal valore  $S_j^{(N)}$ , possiamo stimare direttamente il valore in  $T_j$  di un contratto Forward con scadenza in  $T$  ed avente prezzo  $K$ , ottenendo

$$\begin{aligned} \text{Fwdp}(T_j, T; K) &= B(T_j, T) \left( E_{T_j}^Q [S_T] - K \right) = \\ &= S_{T_j} - B(T_j, T) K \approx S_j^{(K)} - B(T_j, T) K =: \text{Fwdp}_j^{(N)}. \end{aligned}$$

Supponendo, quindi, di aver calcolato, per ciascuno degli  $M$  scenari, la quantità

$$\begin{cases} J_m := \left( \sum_{j=1}^N \left( e^{-\Lambda_{j-1}^{(N)}} - e^{-\Lambda_j^{(N)}} \right) B(s, T_j) \text{Fwdp}_j^{(N)} \mathbf{1}_{\{\text{Fwdp}_j^{(N)} > 0\}} \right)_m \\ \text{Fwdp}_j^{(N)} = S_j^{(N)} - B(T_j, T)K \end{cases}$$

per ogni  $m \in 1, \dots, M$  (il suffisso  $m$  è una notazione che indica che si tratta dello scenario  $m$ -simo, a cui corrisponde una specifica realizzazione delle traiettorie dei processi  $\{w_j^y\}_{j=1}^N$ ,  $\{w_j^x\}_{j=1}^N$  e  $\{w_j^L\}_{j=1}^N$ ) si conclude approssimando il CVA ed ottenendo  $\text{CVA}(s) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M J_m$ .

## 6.6 Contratto Swap avente come sottostante il prezzo del petrolio

Consideriamo ora un contratto Swap avente come attività sottostante il prezzo del petrolio. Più precisamente, consideriamo le scadenze  $T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$  e definiamo *Payer Commodity Swap* avente prezzo di esercizio  $K$  un contratto in cui, in corrispondenza di ciascuna data di scadenza  $T_j$ , per  $j \in \{1, \dots, N\}$ , vengono acquistate  $\alpha_j \in \mathbb{N}_{>0}$  unità di una fissata quantità di petrolio ad un prezzo pattuito corrispondente ad  $\alpha_j K$ , mentre il prezzo effettivo di una singola unità del bene sottostante si suppone essere descritto dal processo  $S = \{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Tale contratto, in pratica, può essere definito come un Forward caratterizzato da diverse date di acquisto di una determinata quantità di un dato bene sottostante, ad un prezzo di esercizio stabilito alla data di stipula del contratto stesso. Osserviamo innanzitutto che, fissato un tempo  $s = T_j$  e per  $j \in \{0, \dots, N\}$ , il valore, che indichiamo con  $\text{PCS}(s; K)$ , del contratto in tale istante è pari alla somma del valore attuale di tutte le transazioni effettuate alle date  $T_{j+1}, \dots, T_N$ , ovvero

$$\text{PCS}(s; K) = \sum_{i=j+1}^N \alpha_i B(s, T_i) E^Q[S_{T_i} - K | \mathcal{F}_s^{x, L}] = \sum_{i=j+1}^N \alpha_i B(s, T_i) (E^Q[S_{T_i} | \mathcal{F}_s^{x, L}] - K)$$

e, supponendo che siano noti, al tempo  $s$ , i valori  $x(s) = x_s \in \mathbb{R}$  ed  $L(s) = L_s \in \mathbb{R}$ , possiamo ottenere una formula chiusa, ovvero

$$\text{PCS}(s; K) = \sum_{i=j+1}^N \alpha_i B(s, T_i) (E_s^Q[S_{T_i}] - K) = \sum_{i=j+1}^N \alpha_i B(s, T_i) (F(s, T_i) - K).$$

Anche in questo caso, siamo interessati alla stima del CVA, la quale viene ottenuta analogamente al caso precedente, limitandoci tuttavia a considerare il caso in presenza

di wrong-way risk, ovvero

$$\begin{aligned}
\text{CVA}(s) &= (1 - \delta) E^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \text{PCS}(\tau; K) \mathbf{1}_{\{\text{PCS}(\tau; K) > 0\}} \right] = \\
&= (1 - \delta) E^Q \left[ \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{\tau \in ]T_{j-1}, T_j\}} \text{PCS}(\tau; K) \mathbf{1}_{\{\text{PCS}(\tau; K) > 0\}} \right] = \\
&= (1 - \delta) \sum_{j=1}^N E^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau \in ]T_{j-1}, T_j\}} \text{PCS}(\tau; K) \mathbf{1}_{\{\text{PCS}(\tau; K) > 0\}} \right] \approx \\
&\approx (1 - \delta) \sum_{j=1}^N E^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau \in ]T_{j-1}, T_j\}} \text{PCS}(T_j; K) \mathbf{1}_{\{\text{PCS}(T_j; K) > 0\}} \right]
\end{aligned}$$

La simulazione della variabili casuali in questione è del tutto analoga al caso sviluppato precedentemente. Osserviamo inoltre che, al generico passo  $j$ -simo, avendo stimato con  $S_j^{(N)}$  il valore del prezzo del petrolio si ha, per ogni  $i > j$ , che

$$B(T_j, T_i)(E^Q[S_{T_i} | \mathcal{F}_{T_j}^{x,L}] - K) = S_j^{(K)} - B(T_j, T_i)K, \quad \forall j, i \in \{1, \dots, N\}$$

e quindi definiamo

$$\text{PCS}_j^{(N)} := \sum_{i=j+1}^N \alpha_i (S_j^{(K)} - B(T_j, T_i)K).$$

Dunque, in conclusione, se consideriamo  $M \in \mathbb{N}_{>0}$  simulazioni, per ciascuna di esse viene stimata la quantità

$$\begin{cases} J_m := \left( (1 - \delta) \sum_{j=1}^N \left( e^{-\Lambda_{j-1}^{(N)}} - e^{-\Lambda_j^{(N)}} \right) \text{PCS}_j^{(N)} \mathbf{1}_{\{\text{PCS}_j^{(N)} > 0\}} \right)_m \\ \text{PCS}_j^{(N)} = \sum_{i=j+1}^N \alpha_i (S_j^{(K)} - B(T_j, T_i)K) \end{cases}$$

per ogni  $m \in 1, \dots, M$  (il suffisso  $m$  è una notazione che indica che si tratta dello scenario  $m$ -simo, a cui corrisponde una specifica realizzazione delle traiettorie dei processi  $\{w_j^y\}_{j=1}^N$ ,  $\{w_j^x\}_{j=1}^N$  e  $\{w_j^L\}_{j=1}^N$ ) si conclude approssimando il CVA ed ottenendo  $\text{CVA}(s) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M J_m$ .

## 6.7 Ipotesi generali sulle simulazioni svolte

In questa sezione descriviamo i risultati che abbiamo ottenuto dopo aver simulato, attraverso lo schema di Eulero, l'evoluzione del prezzo del petrolio e del processo che descrive l'intensità della probabilità di insolvenza. Più precisamente, abbiamo effettuato 200000 simulazioni, generando 100000 fonti di aleatorietà ed aggiungendone altre 100000 costituite da valori del segno opposto, utilizzando il metodo delle variabili antitetiche ed osservando una notevole riduzione della varianza della stima. Dopo aver effettuato tali simulazioni abbiamo stimato, basandoci sui dati presenti in [5], il CVA un contratto di

tipo Swap sul prezzo del petrolio avente strike price  $K = 126$  (dollari), dapprima dal punto di vista dell'acquirente, che consiste in una compagnia aerea che vuole coprirsi, in futuro, da ipotetici aumenti del prezzo del petrolio oltre una soglia prestabilita, quindi dal punto di vista del venditore di suddetto contratto, ovvero una banca che si impegna, ogni tre mesi, a versare alla compagnia aerea una somma indicizzata al prezzo corrente del petrolio, ricevendo a sua volta un versamento, costante nel tempo, pari a  $K$ . Abbiamo fornito, quindi, per ciascuna delle due parti in questione, una stima, quantificabile attraverso il CVA, del rischio che l'altra possa rivelarsi insolvente. In entrambi i casi, il contratto ha durata cinque anni, a partire dal primo di luglio 2008 e fino al 31 luglio 2013, e prevede versamenti ogni quattro mesi ed i fattori di attualizzazione sono ottenuti a partire dai dati, che riporto nella seguente tabella, della struttura a termine dei tassi presente nell'articolo, ove gli istanti di tempo sono da considerarsi ponendo come istante iniziale il primo di luglio del 2008:

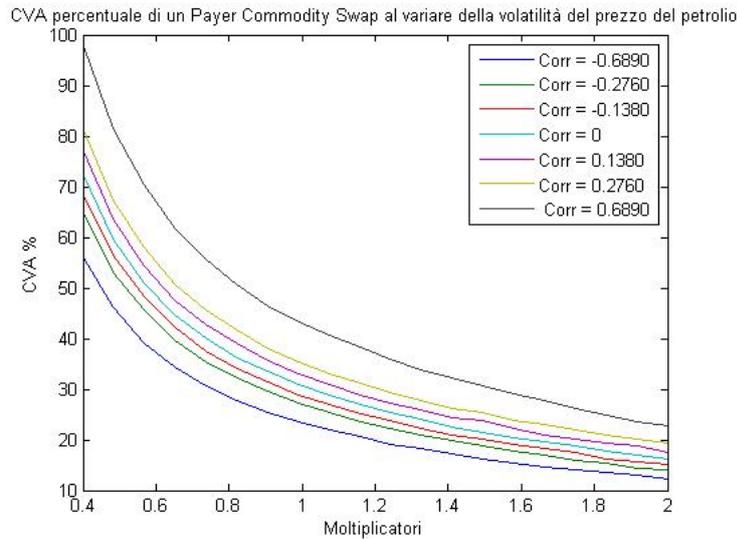
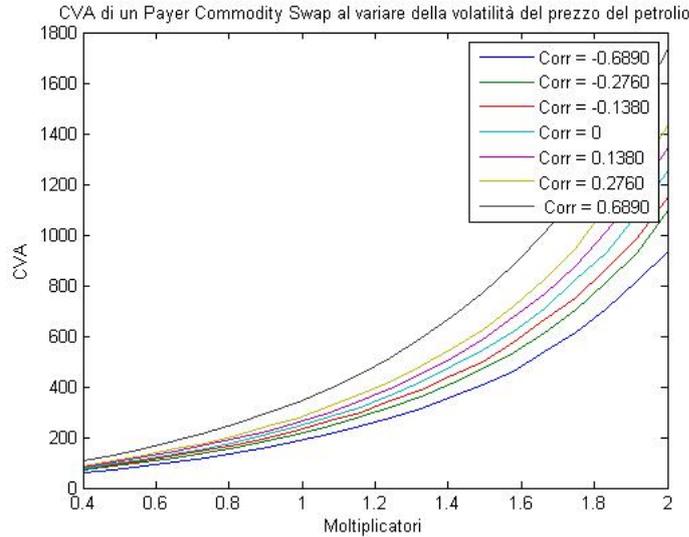
Scadenza (in anni)	3/12	6/12	2	5	10	30
Yield curve (in percentuale)	2.68	2.92	3.40	4.27	4.87	5.376

In seguito, quindi, abbiamo interpolato linearmente questi dati in corrispondenza delle scadenze in cui vengono effettuati i versamenti previsti dal contratto ed, utilizzando la regola del trapezio per la stima numerica degli integrali, abbiamo approssimato i fattori di attualizzazione. Per quanto riguarda il processo dei prezzi, abbiamo posto, analogamente a quanto svolto nell'articolo,  $k_x = 0.7170$ ,  $\sigma_x = 0.3522$ ,  $\sigma_L = 0.19$  e  $\rho_{x,L} = -0.0392$ . Per quanto riguarda i parametri reattivi al processo dell'intensità della probabilità di insolvenza, essi ovviamente variano nei due casi, a seconda del soggetto relativamente al quale si voglia stimare tale rischio. In entrambi i casi, dunque, abbiamo posto il valore del recovery rate pari a  $\delta = 0.5$  ed abbiamo calcolato il CVA dei rispettivi contratti al variare dapprima delle volatilità  $\sigma_x$  e  $\sigma_L$  associate al processo dei prezzi (moltiplicando contemporaneamente entrambi i valori iniziali per un insieme di fattori uniformemente distribuiti all'interno di un dato intervallo), tenendo fissi tutti gli altri parametri, quindi facendo variare, in maniera analoga, la volatilità del processo  $y$  ed, in entrambi i casi appena descritti, ho calcolato il CVA in corrispondenza di diversi valori arbitrari di  $d\lambda_t$  e  $dS_t$ , più precisamente corrispondenti a  $-0.6890$ ,  $-0.2760$ ,  $-0.1380$ ,  $0$ ,  $0.1380$ ,  $0.2760$ ,  $0.6890$ : si osserva che, in tutti i casi, la crescita di tale correlazione comporta un aumento del CVA. Ora procediamo a descrivere, separatamente, i risultati ottenuti nei due casi (il lettore può trovare in appendice il codice utilizzato in entrambe le simulazioni).

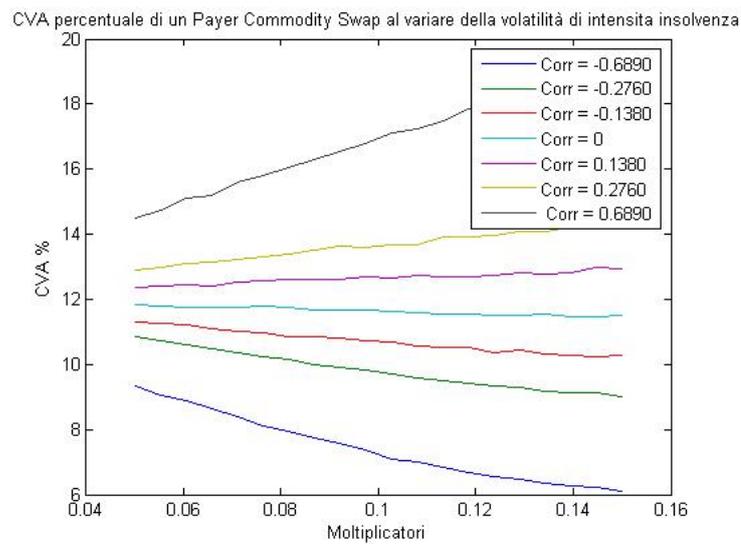
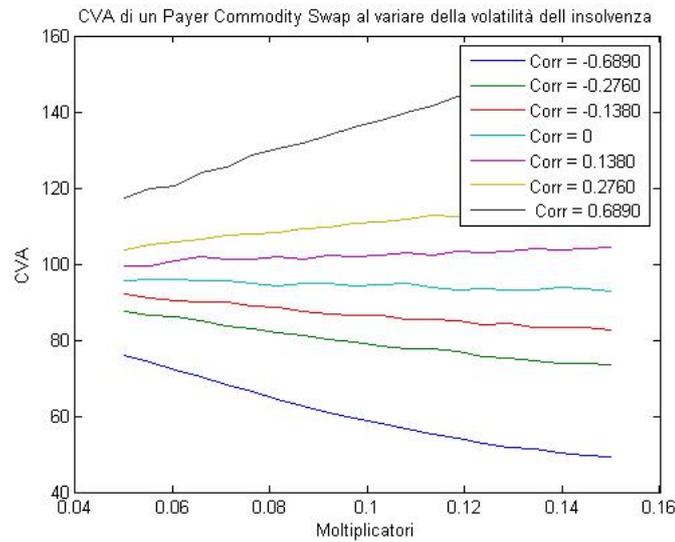
## 6.8 Simulazione di un Payer Commodity Swap

In questo caso, viene calcolato il CVA dal punto di vista della compagnia aerea ed i parametri relativi al processo che descrive l'intensità della probabilità di insolvenza sono dati da  $y_0 = 0.0560$ ,  $k = 0.6331$ ,  $\mu = 0.0293$ ,  $\nu = 0.5945$ . Abbiamo ottenuto le probabilità di insolvenza della banca a calibrando dai CDS spreads presenti in [5, pag.13]. Innanzitutto, abbiamo calcolato il CVA al variare delle volatilità  $\sigma_x$  e  $\sigma_L$ , moltiplicando questi valori, a partire dal valore iniziale fornito dall'articolo, per un numero di fattori uniformemente

distribuiti nell'intervallo compreso tra 0.4 e 2, osservando che, come descritto dalle figure, il CVA aumenta, in termini assoluti, all'aumentare della volatilità, mentre diminuisce in termini percentuali, rispetto al valore attuale del Payer Commodity Swap.

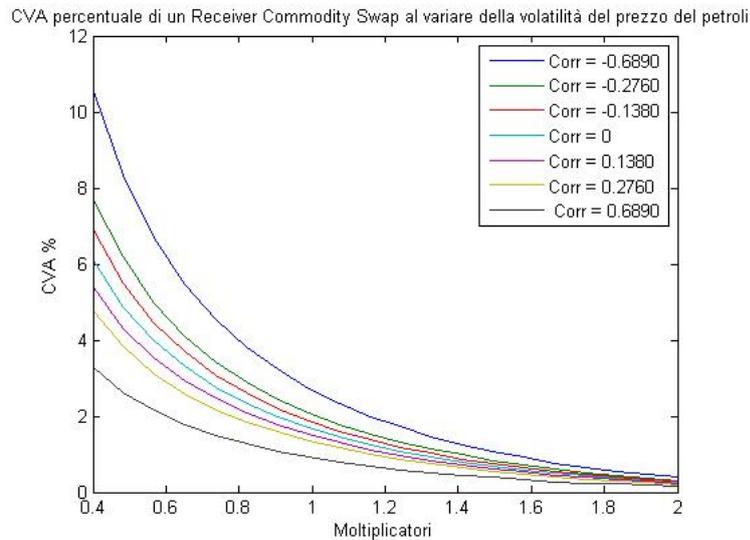
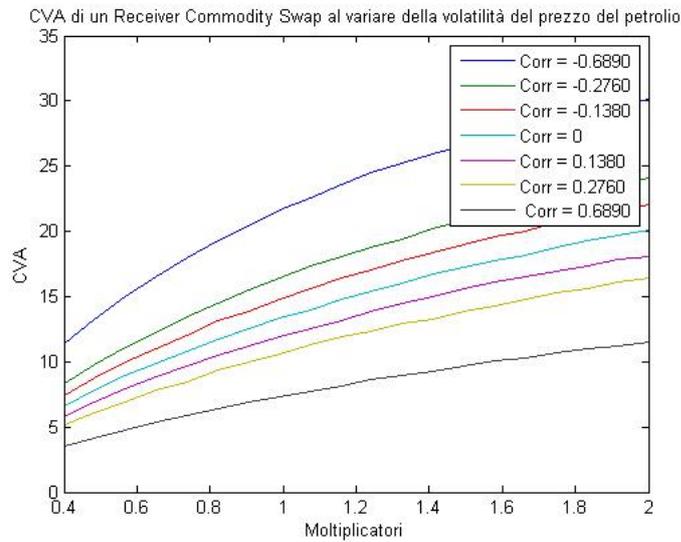


Al variare della volatilità (che abbiamo moltiplicato, come suggerito dall'articolo, per fattori minori di 1, ovvero uniformemente distribuiti tra 0.04 e 0.16) del processo che descrive l'intensità della probabilità di insolvenza, invece, osserviamo che in presenza di right-way risk (cioè per valori negativi di  $\text{corr}(d\lambda_t, dS_t)$ ) il CVA diminuisce all'aumentare di  $\nu$ , mentre aumenta in caso di wrong-way risk. Tuttavia sottolineiamo che, pur non avendo rappresentato graficamente la situazione, è possibile osservare che, quando il valore di  $\nu$  supera una data soglia, superiore a quelle considerate nell'articolo, anche il CVA in presenza di wrong way risk tende ad aumentare definitivamente.

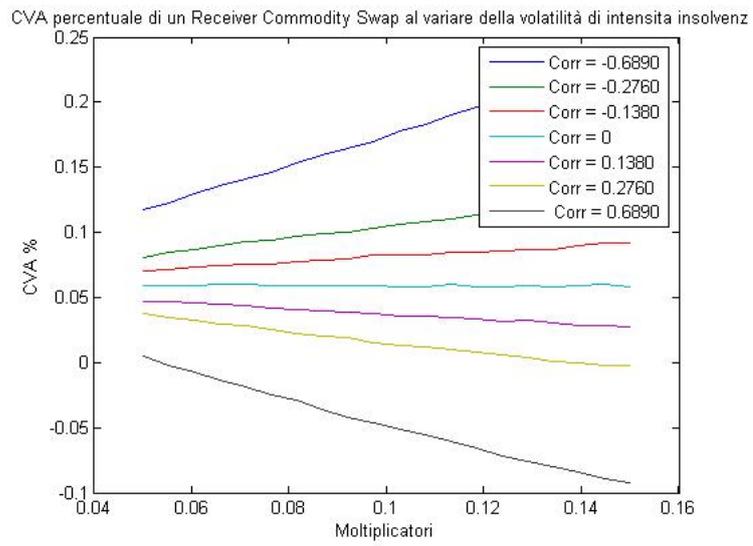
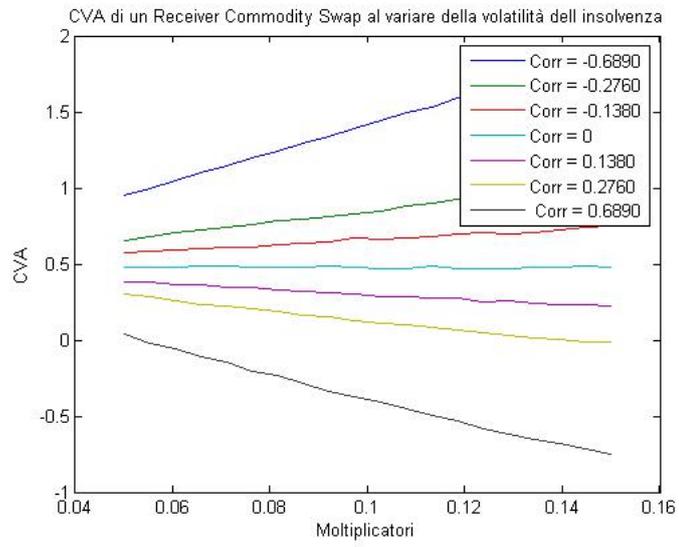


## 6.9 Simulazione di un Receiver Commodity Swap

In questo caso il processo che descrive l'intensità della probabilità di insolvenza della compagnia aerea è governato dai parametri  $y_0 = 0.0560$ ,  $k = 0.6331$ ,  $\mu = 0.0293$ ,  $\nu = 0.5945$  e lo studio del CVA procede imponendo, rispettivamente, le medesime variazioni dapprima a  $\sigma_x$  e  $\sigma_L$  e dunque a  $\nu$ , per valori di  $d(\lambda_t, dS_t)$  analoghi al caso precedente. In questo caso si osservano risultati simili, ovvero all'aumentare di  $\sigma_x$  e  $\sigma_L$  il CVA aumenta.



All'aumentare di  $\nu$ , invece, esso aumenta in caso di wrong way risk, mentre diminuisce in caso di right way risk (ed anche in questo caso, è possibile osservare che a partire da un dato valore di  $\nu$ , maggiore di quelli considerati nell'articolo, il CVA inizia ad aumentare anche in presenza di right-way risk).





## Appendice A

# Codice sorgente

In questa appendice presentiamo il codice sorgente, in linguaggio **Matlab**, creato per effettuare le simulazioni i cui risultati sono stati presentati alla fine del terzo capitolo: prima di riportare il codice vero e proprio, forniamo una breve descrizione di come esso è strutturato. Innanzitutto, l'esecuzione principale del programma viene svolta, rispettivamente, dal codice presente all'interno dei files `programma_PCS.m` (per quanto riguarda il Payer Commodity Swap) e `programma_RCS.m` (per quanto riguarda il Receiver Commodity Swap), mentre tutti gli altri files contengono funzioni che vengono chiamate durante l'esecuzione, ovvero:

- il file `bootstrapCDS.m` contiene una funzione calcola le probabilità di insolvenza a partire dai dati relativi ad un Credit Default Swap;
- i files `calcolo_CVA_PCS.m` e `calcolo_CVA_RCS.m` contengono ciascuno una funzione che calcola, rispettivamente, il CVA nel caso del Payer Commodity Swap e nel caso del Receiver Commodity Swap;
- i files `fattori_di_attualizzazione_zero.m` e `fattori_di_attualizzazione.m` calcolano i fattori di attualizzazione che sono richiesti all'interno della simulazione dei processi e del calcolo del CVA;
- i files `phi.m` e `psi1.m` servono a calibrare, rispettivamente, il processo dei prezzi ed il processo di intensità ai dati di mercato;
- il file `simulazione_processi_antitetiche.m` effettua la simulazione dell'approssimazione discreta dei due processi.

Ora procediamo con la trascrizione dei codici appena introdotti.

- File `programma_PCS.m`

```
M=100000; % NUMERO DI SCENARI CHE SIMULO
% PARTE 1:
% TENENDO FISSI I PARAMETRI, FACCIO VARIARE LA
```

```

% CORRELAZIONE TRA LA
% VARIAZIONE DEL PROCESSO DI INTENSITÀ E LA
% VARIAZIONE DEL PROCESSO DEI PREZZI

% Dati a disposizione (fonte: articolo)
t_s=[3/12 6/12 2 5 10 30];
% Scadenze a cui corrispondono i dati della struttura
% a termine, supponendo che l'istante t=0 corrisponda a % JUL/08 e che
l'unità corrisponda ad un anno
r_s=[2.68 2.92 3.40 4.27 4.87 5.376]/100;
% Valori della struttura a termine
% corrispondenti alle date contenute in t_s

delta=0.5; % Recovery value

% Interpolazione dei dati
t_i=1/3* linspace(1,5*3,5*3);
% t_i contiene gli istanti che utilizzo in seguito per
% simulare con il metodo Monte Carlo
% e per calcolare i fattori di
% attualizzazione con la regola del trapezio

% Ora stimo tramite interpolazione lineare i valori della
% struttura a termine in tali istanti
N=length(t_i);
r_i=interp1(t_s, r_s, t_i,'linear'); % Interpolazione lineare

% Innanzitutto, in virtù della formula che utilizzo per
% stimare il CVA, devo calcolare
%  $B(t_i(j), t_i(i))$ , per  $i=1, \dots, N-1$  e  $j>i$ 
% tali valori sono memorizzati in una matrice NxN
% triangolare superiore B
% tale che
%  $B(t_i(j), t_i(i))=1$ , per  $j=1:N$ 
%  $B(t_i(j), t_i(i))=0$  per  $i<j$ 
%  $B(t_i(j), t_i(i))=B(t_i(j), t_i(i))$  per  $i>j$ 
% Utilizzo una funzione che ho scritto e che usa la
% regola del trapezio:
B=fattori_di_attualizzazione(t_i,r_i);
% B è una matrice NxN, triangolare superiore, tale che
%  $B(i,j)=0$  se  $i<j$ , 1 se  $i=j$ , fattore di sconto da  $t_i(i)$  a
%  $t_i(j)$  altrimenti

```

```

% Calcolo B(0, t_i(1)), ... , B(0, t_i(N)), sempre con
% una funzione che utilizza la regola del trapezio
B_0= fattori_di_attualizzazione_zero(t_i,r_i);
% B_0 è una matrice 1xN che contiene il fattore di
% attualizzazione al tempo 0 per
% ciascun istante t_i(1), ..., t_i(N)

% Dati relativi ad i CDS
% serviranno per simulare la probabilità di insolvenza
% Dati forniti dall'articolo
t_cds=[0.5 1 2 3 4 5]; % Scadenze
X_CDS= [345 332 287 256 232 217]*0.01;
% Valori corrispondenti, espressi in valori percentuali
% dopo aver convertito da punti base (bps)
X_CDS= X_CDS / 100;
% (La quantità nominale è per ipotesi pari ad 1)
% Stimo i valori della struttura a termine nelle date dei
% versamenti dei CDS
r_cds=interp1(t_s,r_s, t_cds);

% PARAMETRI DEL MODELLO: caso di base (descritto a
% pagina 13 dell'articolo)
% Le volatilità del processo di intensità e del processo dei
% prezzi sono entrambe fissate ai valori ottenuti,
% rispettivamente, dalle tabelle 4 e 5 dell'articolo

% Parametri che definiscono il processo dei prezzi
k_x=0.7170;
sigma_x=0.3522;
sigma_L=0.19;
rho_xL=-0.0392;
mu_L=0;
x0=0;
L0=0;

% Parametri che definiscono l'intensità del processo di
% Cox
k=0.6331;
mu=0.0293;
nu=0.5945;
y0=0.056;
l0=0.0;

```

```

% STIMA DEI VALORI ASSUNTI DA PHI E PSI NEI PUNTI DI CAMPIONAMENTO
% Ottengo i valori delle funzioni phi (per modellare
% l'evoluzione dei prezzi) e di psi (per modellare
% l'evoluzione del processo che descrive
% l'intensità)

% 1) funzione PHI:

% prezzi dei Futures (fonte:articolo, ovvero dalla curva
% che rappresenta il prezzo dei WTI Futures, pag 12:
% ho'approssimato' i valori osservandoli sulla curva
% stessa)
% Prezzi dei futures sul petrolio:
% NOTA: c'è anche il valore in 0
% FM(0) ed è approssimato a 127,5
FM=[127.5 128.1 127.5 126.8 126.4 126 125.6 125.5 125.4 125.45 125.5 125.6
125.7 125.8 125.9 126];

phi_M=phi(x0,k_x,sigma_x,mu_L,sigma_L,rho_xL,t_i,FM);
% Contiene N+1 valori assunti da PHI in
% 0, t_i(1), ..., t_i(N)

% 2) funzione PSI: Ottengo i valori di psi calibrando ai dati di mercato
il valore del processo di intensità,
% ottenendo le probabilità di sopravvivenza in t_1, ...,
% t_N attraverso il metodo Bootstrap

psi1_M=psi1(t_cds, r_cds, X_CDS, delta, t_i, r_i, k,mu, nu, y0)';
% Contiene i valori di PSI in 0, t_i(1), ..., t_i(N)

% STIMA DEL CVA
% La stima del CVA consiste in due fasi: innanzitutto
% vengono stimati
% l'evoluzione del processo dei prezzi S e l'evoluzione
% del processo di intensità, agli istanti t_1, ... , t_N ed
% utilizzando lo schema di Eulero
% In base ai valori ottenuti, quindi, si calcola
% l'approssimazione del CVA, come visto

% Caso corr=-0.689:
% 1) Relazioni tra il processo dei prezzi e le intensità di
% insolvenza
% Vale l'ipotesi (si veda pag.10) che y sia correlata allo

```

```

% stesso modo ad x ed ad L, dunque il valore della
% correlazione è ottenibile a partire dal
% valore corr=correlazione(d_lambda, d_S) che esprime
% la correlazione degli
% incrementi del processo di intensità e del processo dei
% prezzi e si suppone sia un valore dato, per ora pari a
% -0.689
corr=-0.689;
% Calcolo rho(dy, dS):
corr_temp=sqrt(sigma_x^2+ sigma_L^2 + 2*rho_xL*sigma_x*sigma_L)/(sigma_x
+ sigma_L);
rho_yS= corr * corr_temp; % Relazione di pag.10
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
   rho_yx 1 rho_xL;
   rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
% 2) Simulazione dell'evoluzione dei prezzi e del
% processo di intensità
% Funzione che esegue la simulazione:
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, l o,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x, mu_L, sigma_L, A);
% Questa funzione restituisce:
% a) Una matrice LAMBDA di dimensione Mx(N+1) che
% rappresenta, ad ogni istante t_i(j) (colonna), l'integrale
% avente estremi 0 e t_i(j) del processo di intensità
% in ciascuno degli M scenari (riga)
% 2) una matrice S, anch'essa di dimensione Mx(N+1), la quale rappresenta,
per ogni istante t_i(1), .. , t_i(N)
% (colonna) e per ciascuno degli M scenari (riga),
% l'evoluzione del prezzo di una singola unità di una
% quantità fissata di petrolio
% 3) Stima del CVA
% Ora posso procedere con la stima del CVA
K=126; % Strike price sul petrolio nel contratto Swap
[CVA_1, PCS_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1]=calcolo_CVA_PCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
% Ottengo, attraverso questa funzione, 4 valori:
% il CVA, il valore al tempo 0 di un PCS con strike K e
% senza rischio di insolvenza,
% il valore del CVA espresso in termini percentuali

```

```

% relativamente al secondo
% e lo stimatore della varianza del CVA
% Stampo i risultati:
risultati='Per correlazione = %f, CVA= %f, CVA_perc= %f, varianza= %f\n';
fprintf(risultati, corr, CVA_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1);

% % Caso corr=-0.0:
corr=0.0;
rho_yS= corr * corr_temp; % Relazione di pag.10
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
   rho_yx 1 rho_xL;
   rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x, mu_L, sigma_L, A);
[CVA_2, PCS_2, CVA_P_2, VAR_CVA_2]=calcolo_CVA_PCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
risultati='Per correlazione = %f, CVA= %f, CVA_perc= %f, varianza= %f\n';
fprintf(risultati, corr, CVA_2, CVA_P_2, VAR_CVA_2);

% Caso corr=0.689
corr=0.689;
rho_yS= corr * corr_temp; % Relazione di pag.10
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
   rho_yx 1 rho_xL;
   rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x, mu_L, sigma_L, A);
[CVA_3, PCS_3, CVA_P_3, VAR_CVA_3]=calcolo_CVA_PCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
risultati='Per correlazione = %f, CVA= %f, CVA_perc= %f, varianza= %f\n';
fprintf(risultati, corr, CVA_3, CVA_P_3, VAR_CVA_3);

% PARTE 2:
% ORA FACCIAMO VARIARE LA VOLATILITÀ DEI PREZZI

```

```

% tramite FATTORI MOLTIPLICATIVI
% per ciascun valore della volatilità dei prezzi ottenuto
% calcolo il CVA in corrispondenza di valori della
% correlazione tra gli incrementi dell'intensità di
% insolvenza e gli incrementi dei prezzi
% pari a corr = -0.689, -0.276, -0.138, 0.0, 0.138,
% 0.276, 0.689
% faccio, quindi, il grafico
% (ascisse: fattori moltiplicativi, ordinate:CVA)
% ed esporto i dati in un file

% Definisco il vettore dei fattori moltiplicativi che utilizzo
% per far variare la volatilità di L e di x
fm=linspace(0.4,2,20);
n_molt=length(fm);
% Definisco il vettore delle correlazioni tra gli
% incrementi dei due processi
corr_m=[-0.689, -0.276, -0.138, 0.0, 0.138, 0.276, 0.689];
n_corr=length(corr_m);
% Definisco una matrice 7xs in cui ogni riga contiene i
% valori del CVA (al variare, nelle colonne, della volatilità
% dei prezzi su fm tramite i moltiplicatori definiti in fm)
% in corrispondenza di uno dei valori
% della correlazione elencati sopra
CVA_s=zeros(n_corr, n_molt);
CVA_s_P=zeros(n_corr, n_molt);
PCS_s=zeros(n_corr, n_molt);
% Apro un file in cui scriverò i risultati
fileID=fopen('output_PCS_s.txt','w');
fprintf(fileID, '\r\n\r\n%15s %15s %15s %12s %12s %12s %12s\r\n', 'sigmaX',
'sigmaL', 'corr', 'CVA', 'PCS', 'CVA_P', 'VAR');

% Faccio variare le volatilità del processo dei prezzi:
for h=1:n_molt
sigma_x_molt=sigma_x*fm(:,h);
sigma_L_molt=sigma_L*fm(:,h);
% Ricalcolo i valori di PHI:
phi_M=phi(x0,k_x,sigma_x_molt,mu_L,sigma_L_molt,rho_xL,t_i,FM);
% Fissata la volatilità, faccio variare la corelazione
% tra gli incrementi dei due processi:
for l=1:n_corr
corr_temp =sqrt(sigma_x_molt^2 + sigma_L_molt^2 + 2* rho_xL* sigma_x_molt*sigma_L
/ (sigma_x_molt + sigma_L_molt));

```

```

rho_yS= corr_m(:,1) * corr_temp; % Relazione di pag.10
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
    rho_yx 1 rho_xL;
    rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);

% Simulo i processi nei nuovi parametri:
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x_molt, mu_L, sigma_L_molt, A);
[CVA_1, PCS_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1]=calcolo_CVA_PCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
% Copio l'output nel file
risultati=[ sigma_x_molt; sigma_L_molt; corr_m(:,1); CVA_1; PCS_1; CVA_P_1;
VAR_CVA_1];
fprintf(fileID,'%15f %15f %15f %12f %12f %12f %12f\r\n', risultati);
CVA_s(1,h)=CVA_1;
CVA_s_P(1,h)=CVA_P_1;
PCS_s(1,h)=PCS_1;
end
end

% Faccio il grafico del CVA
plot(fm, CVA_s(1,:), fm, CVA_s(2,:), fm, CVA_s(3,:), fm, CVA_s(4,:), fm,
CVA_s(5,:), fm, CVA_s(6,:), fm, CVA_s(7,:))
title('CVA di un Payer Commodity Swap al variare della volatilità del prezzo
del petrolio');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380','Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');
figure
% Grafico del CVA INTESO COME % DEL PCS
plot(fm, CVA_s_P(1,:), fm, CVA_s_P(2,:), fm, CVA_s_P(3,:), fm, CVA_s_P(4,:),
fm, CVA_s_P(5,:), fm, CVA_s_P(6,:), fm, CVA_s_P(7,:))
title('CVA percentuale di un Payer Commodity Swap al variare della volatilità
del prezzo del petrolio');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA %');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380','Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');

```

```

fclose(fileID);

% PARTE 3:
% ORA FACCIIO VARIARE LA VOLATILITÀ DELL'INTENSITÀ DEL PROCESSO

% Utilizzo i seguenti moltiplicatori:
fm=linspace(0.05,0.15,20);
n_molt=length(fm);

CVA_n=zeros(n_corr, n_molt);
CVA_n_P=zeros(n_corr, n_molt);
PCS_n=zeros(n_corr, n_molt);
% Apro un file in cui memorizzerò l'output
fileID=fopen('output_PCS_y.txt','w');
fprintf(fileID, '\r\n\r\n%15s %15s %12s %12s %12s %12s\r\n', 'nu', 'corr',
'CVA', 'PCS', 'CVA_P', 'VAR');
% Ricalcolo i valori di PHI:
phi_M=phi(x0,k_x,sigma_x,mu_L,sigma_L,rho_xL,t_i,FM);
% Faccio variare la volatilità del processo di intensità
% utilizzando i moltiplicatori
for h=1:n_molt
nu_molt=nu*fm(:,h);
psi1_M=psi1(t_cds, r_cds, X_CDS, delta, t_i, r_i, k,mu, nu_molt, y0)';
% Faccio variare la correlazione tra gli incrementi dei
% due processi:
for l=1:n_corr
corr_temp=sqrt(sigma_x^2+ sigma_L^2 +
2*rho_xL*sigma_x*sigma_L)/(sigma_x + sigma_L);
rho_yS= corr_m(:,l) * corr_temp;
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
rho_yx 1 rho_xL;
rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i,M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x_molt, mu_L, sigma_L_molt, A);
[CVA_1, PCS_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1]=calcolo_CVA_PCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
% Copio l'output nel file:
risultati=[ nu_molt; corr_m(:,l); CVA_1; PCS_1; CVA_P_1; VAR_CVA_1];

```

```

fprintf(fileID,'%15f %15f %12f %12f %12f %12f\r\n', risultati);
CVA_n(1,h)=CVA_1;
CVA_n_P(1,h)=CVA_P_1;
PCS_n(1,h)=PCS_1;
end
end
fclose(fileID);

% Grafico del CVA
figure
plot(fm, CVA_n(1,:), fm, CVA_n(2,:), fm, CVA_n(3,:), fm, CVA_n(4,:), fm,
CVA_n(5,:), fm, CVA_n(6,:), fm, CVA_n(7,:))
title('CVA di un Payer Commodity Swap al variare della volatilità dell
insolvenza');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380','Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');

% Grafico del CVA inteso come % del PCS
figure
plot(fm, CVA_n_P(1,:), fm, CVA_n_P(2,:), fm, CVA_n_P(3,:), fm, CVA_n_P(4,:),
fm, CVA_n_P(5,:), fm, CVA_n_P(6,:), fm, CVA_n_P(7,:))
title('CVA percentuale di un Payer Commodity Swap al variare della volatilità
di intensità insolvenza');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA %');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380','Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');

```

- File programma\_RCS.m

```

M=100000; % NUMERO DI SCENARI CHE SIMULO
% PARTE 1:
% TENENDO FISSI I PARAMETRI, FACCIO VARIARE LA
% CORRELAZIONE TRA LA
% VARIAZIONE DEL PROCESSO DI INTENSITÀ E LA
% VARIAZIONE DEL PROCESSO DEI PREZZI

% Dati a disposizione (fonte: articolo)
t_s=[3/12 6/12 2 5 10 30];
% Scadenze a cui corrispondono i dati della struttura
% a termine, supponendo che l'istante t=0 corrisponda a % JUL/08 e che
l'unità corrisponda ad un anno

```

```

r_s=[2.68 2.92 3.40 4.27 4.87 5.376]/100;
% Valori della struttura a termine
% corrispondenti alle date contenute in t_s

delta=0.5; % Recovery value

% Interpolazione dei dati
t_i=1/3* linspace(1,5*3,5*3);
% t_i contiene gli istanti che utilizzo in seguito per
% simulare con il metodo Monte Carlo
% e per calcolare i fattori di
% attualizzazione con la regola del trapezio

% Ora stimo tramite interpolazione lineare i valori della
% struttura a termine in tali istanti
N=length(t_i);
r_i=interp1(t_s, r_s, t_i,'linear'); % Interpolazione lineare

% Innanzitutto, in virtù della formula che utilizzo per
% stimare il CVA, devo calcolare
%  $B(t_i(j), t_i(i))$ , per  $i=1, \dots, N-1$  e  $j>i$ 
% tali valori sono memorizzati in una matrice  $N \times N$ 
% triangolare superiore B
% tale che
%  $B(t_i(j), t_i(i))=1$ , per  $j=1:N$ 
%  $B(t_i(j), t_i(i))=0$  per  $i<j$ 
%  $B(t_i(j), t_i(i))=B(t_i(j), t_i(i))$  per  $i>j$ 
% Utilizzo una funzione che ho scritto e che usa la
% regola del trapezio:
B=fattori_di_attualizzazione(t_i,r_i);
% B è una matrice  $N \times N$ , triangolare superiore, tale che
%  $B(i,j)=0$  se  $i<j$ , 1 se  $i=j$ , fattore di sconto da  $t_i(i)$  a
%  $t_i(j)$  altrimenti

% Calcolo  $B(0, t_i(1)), \dots, B(0, t_i(N))$ , sempre con
% una funzione che utilizza la regola del trapezio
B_0= fattori_di_attualizzazione_zero(t_i,r_i);
% B_0 è una matrice  $1 \times N$  che contiene il fattore di
% attualizzazione al tempo 0 per
% ciascun istante  $t_i(1), \dots, t_i(N)$ 

% Dati relativi ad i CDS
% serviranno per simulare la probabilità di insolvenza

```

```

% Dati forniti dall'articolo
t_cds=[0.5 1 2 3 4 5]; % Scadenze
X_CDS= [76 82 104 122 139 154]*0.01;
% Valori corrispondenti, espressi in valori percentuali
% dopo aver convertito da punti base (bps)
X_CDS= X_CDS / 100;
% (La quantità nominale è per ipotesi pari ad 1)
% Stimo i valori della struttura a termine nelle date dei
% versamenti dei CDS
r_cds=interp1(t_s,r_s, t_cds);

% PARAMETRI DEL MODELLO: caso di base (descritto a
% pagina 13 dell'articolo)
% Le volatilità del processo di intensità e del processo dei
% prezzi sono entrambe fissate ai valori ottenuti,
% rispettivamente, dalle tabelle 4 e 5 dell'articolo

% Parametri che definiscono il processo dei prezzi
k_x=0.7170;
sigma_x=0.3522;
sigma_L=0.19;
rho_xL=-0.0392;
mu_L=0;
x0=0;
L0=0;

% Parametri che definiscono l'intensità del processo di
% Cox
k=0.5341;
mu=0.0328;
nu=0.2105;
y0=0.000;
lo=0.0;

% STIMA DEI VALORI ASSUNTI DA PHI E PSI NEI PUNTI DI CAMPIONAMENTO
% Ottengo i valori delle funzioni phi (per modellare
% l'evoluzione dei prezzi) e di psi (per modellare
% l'evoluzione del processo che descrive
% l'intensità)

% 1) funzione PHI:

% prezzi dei Futures (fonte:articolo, ovvero dalla curva

```

```

% che rappresenta il prezzo dei WTI Futures, pag 12:
% ho'approssimato' i valori osservandoli sulla curva
% stessa)
% Prezzi dei futures sul petrolio:
% NOTA: c'è anche il valore in 0
% FM(0) ed è approssimato a 127,5
FM=[127.5 128.1 127.5 126.8 126.4 126 125.6 125.5 125.4 125.45 125.5 125.6
125.7 125.8 125.9 126];

phi_M=phi(x0,k_x,sigma_x,mu_L,sigma_L,rho_xL,t_i,FM);
% Contiene N+1 valori assunti da PHI in
% 0, t_i(1), ..., t_i(N)

% 2) funzione PSI: Ottengo i valori di psi calibrando ai dati di mercato
il valore del processo di intensità,
% ottenendo le probabilità di sopravvivenza in t_1, ...,
% t_N attraverso il metodo Bootstrap

psi1_M=psi1(t_cds, r_cds, X_CDS, delta, t_i, r_i, k,mu, nu, y0)';
% Contiene i valori di PSI in 0, t_i(1), ..., t_i(N)

% STIMA DEL CVA
% La stima del CVA consiste in due fasi: innanzitutto
% vengono stimati
% l'evoluzione del processo dei prezzi S e l'evoluzione
% del processo di intensità, agli istanti t_1, ... , t_N ed
% utilizzando lo schema di Eulero
% In base ai valori ottenuti, quindi, si calcola
% l'approssimazione del CVA, come visto

% Caso corr=-0.689:
% 1) Relazioni tra il processo dei prezzi e le intensità di
% insolvenza
% Vale l'ipotesi (si veda pag.10) che y sia correlata allo
% stesso modo ad x ed ad L, dunque il valore della
% correlazione è ottenibile a partire dal
% valore corr=correlazione(d_lambda, d_S) che esprime
% la correlazione degli
% incrementi del processo di intensità e del processo dei
% prezzi e si suppone sia un valore dato, per ora pari a
% -0.689
corr=-0.689;
% Calcolo rho(dy, dS):

```

```

corr_temp=sqrt(sigma_x^2+ sigma_L^2 + 2*rho_xL*sigma_x*sigma_L)/(sigma_x
+ sigma_L);
rho_yS= corr * corr_temp; % Relazione di pag.10
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
   rho_yx 1 rho_xL;
   rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
% 2) Simulazione dell'evoluzione dei prezzi e del
% processo di intensità
% Funzione che esegue la simulazione:
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, l o,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x, mu_L, sigma_L, A);
% Questa funzione restituisce:
% a) Una matrice LAMBDA di dimensione Mx(N+1) che
% rappresenta, ad ogni istante t_i(j) (colonna), l'integrale
% avente estremi 0 e t_i(j) del processo di intensità
% in ciascuno degli M scenari (riga)
% 2) una matrice S, anch'essa di dimensione Mx(N+1), la quale rappresenta,
per ogni istante t_i(1), .. , t_i(N)
% (colonna) e per ciascuno degli M scenari (riga),
% l'evoluzione del prezzo di una singola unità di una
% quantità fissata di petrolio
% 3) Stima del CVA
% Ora posso procedere con la stima del CVA
K=126; % Strike price sul petrolio nel contratto Swap
[CVA_1, RCS_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1]=calcolo_CVA_RCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
% Ottengo, attraverso questa funzione, 4 valori:
% il CVA, il valore al tempo 0 di un PCS con strike K e
% senza rischio di insolvenza,
% il valore del CVA espresso in termini percentuali
% relativamente al secondo
% e lo stimatore della varianza del CVA
% Stampa i risultati:
risultati='Per correlazione = %f, CVA= %f, CVA_perc= %f, varianza= %f\n';
fprintf(risultati, corr, CVA_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1);

% % Caso corr=-0.0:
corr=0.0;
rho_yS= corr * corr_temp; % Relazione di pag.10

```

```

rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
   rho_yx 1 rho_xL;
   rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x, mu_L, sigma_L, A);
[CVA_2, RCS_2, CVA_P_2, VAR_CVA_2]=calcolo_CVA_RCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
risultati='Per correlazione = %f, CVA= %f, CVA_perc= %f, varianza= %f\n';
fprintf(risultati, corr, CVA_2, CVA_P_2, VAR_CVA_2);

% Caso corr=0.689
corr=0.689;
rho_yS= corr * corr_temp; % Relazione di pag.10
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
   rho_yx 1 rho_xL;
   rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x, mu_L, sigma_L, A);
[CVA_3, RCS_3, CVA_P_3, VAR_CVA_3]=calcolo_CVA_RCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
risultati='Per correlazione = %f, CVA= %f, CVA_perc= %f, varianza= %f\n';
fprintf(risultati, corr, CVA_3, CVA_P_3, VAR_CVA_3);

% PARTE 2:
% ORA FACCIAMO VARIARE LA VOLATILITÀ DEI PREZZI
% tramite FATTORI MOLTIPLICATIVI
% per ciascun valore della volatilità dei prezzi ottenuto
% calcolo il CVA in corrispondenza di valori della
% correlazione tra gli incrementi dell'intensità di
% insolvenza e gli incrementi dei prezzi
% pari a corr = -0.689, -0.276, -0.138, 0.0, 0.138,
% 0.276, 0.689
% faccio, quindi, il grafico
% (ascisse: fattori moltiplicativi, ordinate:CVA)

```

```

% ed esporto i dati in un file

% Definisco il vettore dei fattori moltiplicativi che utilizzo
% per far variare la volatilità di L e di x
fm=linspace(0.4,2,20);
n_molt=length(fm);
% Definisco il vettore delle correlazioni tra gli
% incrementidei due processi
corr_m=[-0.689, -0.276, -0.138, 0.0, 0.138, 0.276, 0.689];
n_corr=length(corr_m);
% Definisco una matrice 7xs in cui ogni riga contiene i
% valori del CVA (al variare, nelle colonne, della volatilità
% dei prezzi su fm tramite i moltiplicatori definiti in fm)
% in corrispondenza di uno dei valori
% della correlazione elencati sopra
CVA_s=zeros(n_corr, n_molt);
CVA_s_P=zeros(n_corr, n_molt);
RCS_s=zeros(n_corr, n_molt);
% Apro un file in cui scriverò i risultati
fileID=fopen('output_RCS_s.txt','w');
fprintf(fileID, '\r\n\r\n%15s %15s %15s %12s %12s %12s %12s\r\n', 'sigmaX',
'sigmaL', 'corr', 'CVA', 'RCS', 'CVA_P', 'VAR');

% Faccio variare le volatilità del processo dei prezzi:
for h=1:n_molt
sigma_x_molt=sigma_x*fm(:,h);
sigma_L_molt=sigma_L*fm(:,h);
% Ricalcolo i valori di PHI:
phi_M=phi(x0,k_x,sigma_x_molt,mu_L,sigma_L_molt,rho_xL,t_i,FM);
% Fissata la volatilità, faccio variare la corelazione
% tra gli incrementi dei due processi:
for l=1:n_corr
corr_temp =sqrt(sigma_x_molt^2 + sigma_L_molt^2 + 2* rho_xL* sigma_x_molt*sigma_L_molt
/ (sigma_x_molt + sigma_L_molt);
rho_yS= corr_m(:,l) * corr_temp; % Relazione di pag.10
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
rho_yx 1 rho_xL;
rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);

```

```

% Simulo i processi nei nuovi parametri:
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i, M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x_molt, mu_L, sigma_L_molt, A);
[CVA_1, RCS_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1]=calcolo_CVA_RCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
% Copio l'output nel file
risultati=[ sigma_x_molt; sigma_L_molt; corr_m(:,1); CVA_1; RCS_1; CVA_P_1;
VAR_CVA_1];
fprintf(fileID,'%15f %15f %15f %12f %12f %12f %12f\r\n', risultati);
CVA_s(1,h)=CVA_1;
CVA_s_P(1,h)=CVA_P_1;
RCS_s(1,h)=RCS_1;
end
end

% Faccio il grafico del CVA
plot(fm, CVA_s(1,:), fm, CVA_s(2,:), fm, CVA_s(3,:), fm, CVA_s(4,:), fm,
CVA_s(5,:), fm, CVA_s(6,:), fm, CVA_s(7,:))
title('CVA di un Receiver Commodity Swap al variare della volatilità del
prezzo del petrolio');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380', 'Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');
figure
% Grafico del CVA INTESO COME % DEL RCS
plot(fm, CVA_s_P(1,:), fm, CVA_s_P(2,:), fm, CVA_s_P(3,:), fm, CVA_s_P(4,:),
fm, CVA_s_P(5,:), fm, CVA_s_P(6,:), fm, CVA_s_P(7,:))
title('CVA percentuale di un Receiver Commodity Swap al variare della volatilità
del prezzo del petrolio');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA %');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380', 'Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');
fclose(fileID);

% PARTE 3:
% ORA FACCIO VARIARE LA VOLATILITÀ DELL'INTENSITÀ DEL PROCESSO

% Utilizzo i seguenti moltiplicatori:
fm=linspace(0.05,0.15,20);
n_molt=length(fm);

```

```

CVA_n=zeros(n_corr, n_molt);
CVA_n_P=zeros(n_corr, n_molt);
RCS_n=zeros(n_corr, n_molt);
% Apro un file in cui memorizzerò l'output
fileID=fopen('output_RCS_y.txt','w');
fprintf(fileID, '\r\n\r\n%15s %15s %12s %12s %12s\r\n', 'nu', 'corr',
'CVA', 'RCS', 'CVA_P', 'VAR');
% Ricalcolo i valori di PHI:
phi_M=phi(x0,k_x,sigma_x,mu_L,sigma_L,rho_xL,t_i,FM);
% Faccio variare la volatilità del processo di intensità
% utilizzando i moltiplicatori
for h=1:n_molt
nu_molt=nu*fm(:,h);
psi1_M=psi1(t_cds, r_cds, X_CDS, delta, t_i, r_i, k,mu, nu_molt, y0)';
% Faccio variare la correlazione tra gli incrementi dei
% due processi:
for l=1:n_corr
corr_temp=sqrt(sigma_x^2+ sigma_L^2 +
2*rho_xL*sigma_x*sigma_L)/(sigma_x + sigma_L);
rho_yS= corr_m(:,l) * corr_temp;
rho_yx=rho_yS;
rho_yL=rho_yS;
% Matrice di correlazione y, x, L
R=[1 rho_yx rho_yL;
rho_yx 1 rho_xL;
rho_yL rho_xL 1];
A=sqrtm(R);
[S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i,M, x0, y0, lo,
phi_M, psi1_M, k, N, mu, nu, k_x, sigma_x_molt, mu_L, sigma_L_molt, A);
[CVA_1, RCS_1, CVA_P_1, VAR_CVA_1]=calcolo_CVA_RCS(Ma, N, K, B, B_0, S,
Lambda, delta);
% Copio l'output nel file:
risultati=[ nu_molt; corr_m(:,l); CVA_1; RCS_1; CVA_P_1; VAR_CVA_1];
fprintf(fileID,'%15f %15f %12f %12f %12f %12f\r\n', risultati);
CVA_n(1,h)=CVA_1;
CVA_n_P(1,h)=CVA_P_1;
RCS_n(1,h)=RCS_1;
end
end
fclose(fileID);

% Grafico del CVA

```

```

figure
plot(fm, CVA_n(1,:), fm, CVA_n(2,:), fm, CVA_n(3,:), fm, CVA_n(4,:), fm,
CVA_n(5,:), fm, CVA_n(6,:), fm, CVA_n(7,:))
title('CVA di un Receiver Commodity Swap al variare della volatilità dell
insolvenza');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380', 'Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');

```

```
% Grafico del CVA inteso come % del PCS
```

```

figure
plot(fm, CVA_n_P(1,:), fm, CVA_n_P(2,:), fm, CVA_n_P(3,:), fm, CVA_n_P(4,:),
fm, CVA_n_P(5,:), fm, CVA_n_P(6,:), fm, CVA_n_P(7,:))
title('CVA percentuale di un Payer Commodity Swap al variare della volatilità
di intensità insolvenza');
xlabel('Moltiplicatori');
ylabel('CVA %');
legend('Corr = -0.6890', 'Corr = -0.2760', 'Corr = -0.1380', 'Corr = 0',
'Corr = 0.1380', 'Corr = 0.2760', 'Corr = 0.6890');

```

- File bootstrapCDS.m:

```
% Funzione che esegue il Bootstrap a partire dalle quotazioni dei CDS nel
mercato
```

```

function Q_bootstrap = bootstrapCDS(t_cds, r_cds, X_CDS, t_i, r_i, delta)
% INPUT:
% X_CDS dati di mercato con le rispettive date t_cds
% r_i valori della struttura a termine in corrispondenza
% delle date presenti in t_i
M=length(t_cds);
N=length(t_i);
% Costruisco:
% la matrice di bootstrap A
% il vettore D contenente i fattori di attualizzazione
% B(0,t_cds(j)) per j=1, .. , M
A=zeros(M,M); % Inizializzo la matrice A
D=zeros(1,M); % Inizializzo D

r_past=0.025; % "approssimo" il valore al tempo 0 della
              % struttura a termine

t_past=0;
temp=0;

```

```

indice_temp=1;
for j=1:M % Calcolo B(0, t_cds(j))=B(1,j), al variare di j.
    % Utilizzo la regola del trapezio, ma poiché
    % uso t_i(1), ..., t_i(N) come istanti discreti
    % su cui approssimare l'integrale
    % se devo approssimare B(0, t_cds(j))
    % gli istanti discreti saranno
    % t_i(1), ... , t_i(k), t_cds(j)
    % ove k è l'ultimo indice tale che t_i(k) < t_cds(j)
    % e nella sommatoria dovrò considerare
    % r_i(1), ... , r_i(k), r_cds(j)
    % (un campionamento non uniforme a causa
    % dell'ultimo dato)
    for i=indice_temp:N % faccio variare gli istanti di t_i
        temp=r_i(i)+r_past;
        D(1,j)=D(1,j)+0.5*(t_i(i)-t_past)*temp;
        t_past=t_i(i);
        r_past=r_i(i);
        if( i<N && gt(t_i(i+1), t_cds(j)))
            % SE t_i(i) è
            % l'ultimo istante precedente t_cds(j)
            indice_temp=i+1;
            % Alla prossima iterazione in j posso partire
            % da questo indice
            % Considero l'intervallo rimanente
            % [t_i(i),t_cds(j)] :
            temp=r_cds(j)+r_past;
            D(1,j)=D(1,j)+0.5*(t_cds(j)-t_i(i))*temp;
            D(1,j+1)=D(1,j);
            % Allo prossima iterazione in j, avrò già
            % integrato
            % fino a t_cds(j) < t_i(indice_temp)
            t_past=t_cds(j);
            r_past=r_cds(j);
            % Ho aggiornato i valori iniziali per la
            % prossima iterazione in j
            break;
            % esco dal ciclo for perchè ho terminato
            % di calcolare B(0, t_cds(j))
        end
    end
end
end

```

```

D=exp(-D); % Fattori di attualizzazione

% Creo, innanzitutto, il vettore dei termini noti
b= D(1) * ((1-delta)*ones(1,M) -X_CDS*t_cds(1));
% Creo la matrice A del Bootstrap
for k=1:M % Genero singolarmente ciascuna riga,
            % attraverso un ciclo for
            % basandomi su quanto discusso nella
            % teoria per estrarre la sp dai CDS
    A(k,k)=(1-delta)*D(k); % Termine sulla diagonale
    if (k>1)
        for i=1:k-1
            A(k,i)=D(i) * (1-delta) +D(i+1) * ( X_CDS(k) * (t_cds(i+1)-t_cds(i))
-1 + delta);
        end
    end
end

% Risolvo il sistema, ottenendo l'output ovvero le
% probabilità di sopravvivenza
Q_bootstrap=linsolve(A,transpose(b));
% OUTPUT: n probabilità di sopravvivenza stimate
% S(t_cds(1)), .. , S(t_cds(M))
end

```

- File calcolo\_CVA\_PCS.m:

```

% Funzione che calcola il CVA di un Payer Commodity
% Swap
function [CVA, PCS_0, CVA_P, VAR_CVA]=calcolo_CVA_PCS(M,N,K,B,B_0,S,Lambda,delta)
J=zeros(M,1);
% Vettore in cui memorizzo la stima del CVA per ciascuno degli M scenari
PCS=zeros(M,N);
% Matrice tale che la colonna j-sima contiene il valore,
% per ciascuno degli M scenari, di un Payer Commodity
% Swap con strike K all'istante t_i(j) e con date
% di pagamento corrispondenti a t_i(j+1), .. , t_i(N)
for j=1:N
% Calcolo PCS_j
% ovvero il valore al tempo t_i(j) di un Payer Commodity
% Swap
    PCS(:,j)=(N-j+1)*S(:,j+1)-(K*ones(1,N-j+1)*B(j,j:N)')*ones(M,1);
% Ai fini del calcolo del CVA, calcolo la parte positiva
    PCS(:,j)=PCS(:,j).*(PCS(:,j)>0);
end

```

```

    % Aggiorno la sommatoria che determina il CVA
    J=J+(exp(-Lambda(:,j)) - exp(-Lambda(:,j+1))).*PCS(:,j);
end
J=(1-delta)*J; % Loss given default
% Per ottenere il CVA devo effettuare la media aritmetica
% degli M valori
% memorizzati in J :
CVA=(1/M)*ones(1,M)*J;
% VARIANZA CAMPIONARIA:
VAR_CVA=(1/M^2)*((J-CVA))'*(J-CVA);
% Esprimo anche il rischio di controparte come una
% percentuale, in 5 anni, del
% valore in 0 di un PCS, con strike K ed avente
% transazioni in t_i(1), .. , t_i(N),
% il quale, senza ipotesi di rischio di insolvenza,
% assume il valore:
PCS_0=(1/M)*ones(1,M)*(S(:,2:N+1)-K*ones(M,N))*B_0';
% Valore del CVA inteso come percentuale del valore appena ottenuto:
CVA_P=CVA*100/PCS_0;
end

```

- File calcolo\_CVA\_RCS.m:

```

% Funzione che calcola il CVA di un Receiver Commodity
% Swap
function [CVA, RCS_0, CVA_P, VAR_CVA]=calcolo_CVA_RCS(M,N,K,B,B_0,S,Lambda,delta)
J=zeros(M,1);
% Vettore in cui memorizzo la stima del CVA per
% ciascuno degli M scenari
RCS=zeros(M,N);
% Matrice tale che la colonna j-sima contiene il valore,
% per ciascuno degli M scenari, di un Receiver
% Commodity Swap con strike K all'istante t_i(j) e con
% date di pagamento corrispondenti a t_i(j+1), .. , t_i(N)
for j=1:N
    % Calcolo RCS_j
    % ovvero il valore al tempo t_i(j) di un Receiver
    % Commodity Swap
    RCS(:,j)=- (N-j+1)*S(:,j+1)+(K*ones(1,N-j+1)*B(j,j:N)')*ones(M,1);
    % Ai fini del calcolo del CVA, calcolo la parte positiva
    RCS(:,j)=RCS(:,j).*(RCS(:,j)>0);
    % Aggiorno la sommatoria che determina il CVA:
    J=J+(exp(-Lambda(:,j)) - exp(-Lambda(:,j+1))).*RCS(:,j);
end

```

```

J=(1-delta)*J;
% Per ottenere il CVA devo effettuare la media aritmetica
% degli M valori memorizzati in J:
CVA=(1/M)*ones(1,M)*J;
% VARIANZA CAMPIONARIA
VAR_CVA=(1/M^2)*((J-CVA))'*(J-CVA);
% Esprimo il rischio di controparte come una
% percentuale, in 5 anni, del
% valore in 0 di un RCS con strike K ed avente transazioni
% in t_i(1), .. , t_i(N)

% Valore, al tempo 0, di un Receiverr Commodity Swap,
% senza ipotesi di rischio di insolvenza:
RCS_0=(1/M)*ones(1,M)*(S(:,2:N+1)-K*ones(M,N))*B_0';
% Valore del CVA inteso come percentuale del valore
% appena ottenuto:
CVA_P=CVA*100/RCS_0;
end

```

- File fattori\_di\_attualizzazione\_zero.m:

```

function B_0=fattori_di_attualizzazione_zero(t_i,r_i)
% Calcolo B(0, t_i(1)), ... , B(0, t_i(N)), con la
% regola del trapezio
N=length(t_i);
B_0=zeros(1,N);
temp= 0.025 + r_i(1);
% Nota: ho approssimato il valore di r in 0
% con 0,025 osservando il grafico nell'articolo
B_0(:,1)=(t_i(1)/2)*temp;
for k=2:N
    temp=temp+r_i(k-1)+r_i(k);
    B_0(:,k)=t_i(k)/(2*k)*temp;
end
B_0=exp(-B_0);
end

```

- File fattori\_di\_attualizzazione.m:

```

% Funzione che, dati gli istanti discreti t_i(1), ... , t_i(N),
% calcola, approssimando attraverso la tecnica del
% trapezio, i fattori di attualizzazione B(t_i(j),t_i(i)),
% per j=1, .. , N e per i>=j
% Memorizzandoli in una matrice triangolare superiore

```

```

function B = fattori_di_attualizzazione(t_i,r_i)
% Devo calcolare
% B(t_i(j), t_i(i)), per j=1, .. , N-1 e i>=j
% (banalmente porrò B(t_i(N), t_i(N))=1)
% tali valori sono memorizzati in una matrice NxN
% triangolare superiore B
% tale che:
% B(j,i)=0 per i<j, B(j,i)=B(t_i(j),t_i(i)) per i>=j

% Utilizzo la regola del trapezio:
N=length(t_i);
B=zeros(N, N);
for j=1:N
% Faccio variare t_i(j) e calcolo B(t_i(j),t_i(i)), per i>j
    temp=0;
    B(j,j)=1; % Termine diagonale
    if j<N
        for i=j+1:N % Calcolo B(t_j, t_i)
            temp=temp+r_i(i-1)+r_i(i);
            B(j,i)=(1/2)*((t_i(i)-t_i(j))/(i-j))*temp;
            B(j,i)=exp(-B(j,i));
        end
    end
end
end

end

```

- File phi.m:

```

% Definizione della funzione che calibra ai dati di
% mercato il processo che descrive l'evoluzione del
% prezzo del petrolio
function phi_M = phi(x0, k_x, sigma_x, mu_L, sigma_L, rho_xL, t_i, FM)
% INPUT:
% il valore iniziale x0
% kx, sigmax, ml, sigmal, rhoxl: i parametri che
% caratterizzano la dinamica del processo dei prezzi
% t_i: un vettore che contiene gli istanti temporali
% discreti sui quali si
% effettua la calibrazione
% FM: i dati di mercato corrispondenti agli istanti discreti
% in [0 t_i] (ho aggiunto l'istante iniziale 0 !)

```

```

t_i=[0 t_i]; % aggiungo l'istante iniziale
N= length(t_i);

% Ottengo il vettore che contiene i valori assunti da phi
% negli istanti discreti considerati, calibrando ai dati di
% mercato, tramite formula chiusa
a = exp(-k_x*t_i);
b=ones(1,N);
V= (power(sigma_x,2) / (2*k_x) )*(b - exp(-2*k_x*t_i) ) + power(sigma_L,
2) * t_i + ((2*sigma_x*sigma_L*rho_xL)/k_x)*(b - a);
phi_M= log(FM) - x0*a - mu_L* t_i - 0.5 * V;
end

```

- File psi1.m:

```

% Funzione che ottiene, calibrando dal mercato, i valori
% di psi agli istanti [0 t_i] ove t_i è un insieme di istanti
% discreti specificati in input
function psi1_M=psi1(t_cds, r_cds, X_CDS, delta, t_i, r_i, k, mu, nu, y0)

% 1) ottengo le probabilità di insolvenza agli istanti
% temporali descritti da t_cds effettuando un bootstrap
qt_CDS=bootstrapCDS(t_cds, r_cds, X_CDS, t_i, r_i, delta);

% 2) Devo stabilire, a partire dai dati appena ottenuti, la
% probabilità di sopravvivenza per ciascun istante
% discreto descritto dal vettore t_i, a partire dalle
% probabilità di sopravvivenza che ho trovato
% e sono definite sugli istanti t_cds che sono le
% scadenze dei CDS, quindi a tal proposito utilizzo il
% criterio approssimante:
% se u appartiene a [t_i(j-1), t_i(j)[, allora S(u)=
% S(t_i(j-1))
% (bucketing approximation)
N=length(t_i);
M=length(t_cds);
qt=ones(1,N);
k=1;
for j=1:N % scorro gli istanti in t_i
    for i=k:M-1
        if ( ge(t_i(j),t_cds(i)) && lt(t_i(j), t_cds(i+1)))
            qt(j)=qt_CDS(i);
            k=i;
            break;
        end
    end
end

```

```

                % se t_i(j) appartiene a [t_cds(i),t_cds(i+1)), allora
                % S(t_i(j))= S(t_cds(i)) e passa a t(j+1)
                % per i=1, .. , M-1
            end
            if (ge(t_i(j), t_cds(M)))
                qt(j)=qt_CDS(M);
            end
        end
    end
end

% 3) Calcolo i valori assunti da psi in 0, t_i(1), .. , t_i(N)
% PROCEDIMENTO:
% psi(0)=-y0 (perchè suppongo per ipotesi lambda(0)=0)
% per quanto riguarda psi(t_i(1)), ... , psi(t_i(N))
% approssimo la derivata di Psi
% con il rapporto incrementale (a sinistra)
% psi(j) approx to (Psi(j)-Psi(j-1))/(t_i(j)-t_i(j-1))

h=sqrt( power(k,2) + 2*power(nu,2)); % parametri
% Calcolo la formula chiusa che definisce Psi:
temp=exp(t_i*h) - ones(1,N);
d= 2*h*ones(1,N)+(k+h)*temp;
A=(2*h*exp( (k+h)*t_i / 2)./d).^((2*k*mu)/(nu^2));
C=(2*temp)./d;
Psi_G=log( A .* exp( -C * y0)./ qt);

% Approssimo la derivata con i rapporti incrementali,
% ottenendo psi:
psi1_M =ones(1,N+1);
lo=0.0;
%psi(0):
psi1_M(1)=lo -y0; % Ho supposto che lambda(0)=0 e che
                  % y0 sia dato

% psi(1):
psi1_M(2) = ( Psi_G(1)) / t_i(1);
% psi(2), ... , psi(N) :
psi1_M(3:N+1) = (Psi_G(2:N) - Psi_G(1:N-1))./(t_i(2:N) - t_i(1:N-1));
end

```

- File simulazione\_processi\_antitetiche.m:

```

% Funzione che simula il processo dei prezzi S ed il processo Lambda degli
integrali dell'intensità

```

```

function [S,Lambda,Ma]=simulazione_processi_antitetiche(t_i, r_i,M,x0,y0,lo,phi_M,p
% 1) Simulazione dell'evoluzione dei prezzi e del processo di intensità:
% Idea: simulo contemporaneamente M evoluzioni
% differenti dei prezzi
% per un numero di istanti pari ad N+1, ove
% N=length(t_i)
% (perchè includo anche l'istante iniziale t=0,
% supponendo che il valore di S in 0 sia noto e pari ad
% exp(phi(0)), ovvero supponendo x(0)=L(0)=0)
% Analogamente, simulo l'evoluzione di M scenari
% differenti relativamente al processo lambda, che
% descrive l'intensità della probabilità di
% insolvenza
% Anche in questo caso, suppongo che il valore di
% lambda in 0 sia noto e pari a 0 (ho posto psi(0)=-y0)

% Ai fini del calcolo della formula del CVA, in seguito a
% queste iterazioni
% devono rimanere memorizzati:
% a) una matrice LAMBDA di dimensione Mx(N+1) che
% rappresenta, ad ogni
% istante t_i(j), l'integrale avente estremi 0 e t_i(j) del
% processo di intensità in ciascuno degli M scenari
% b) una matrice S, anch'essa di dimensione Mx(N+1), la
% quale rappresenta, per ogni istante t_i(1), .. , t_i(N) e
% per ciascuno degli M scenari,
% l'evoluzione del prezzo di una singola unità di una
% quantità fissata di petrolio
% NOTA: avendo AGGIUNTO gli istanti al tempo 0
% le matrici risultano con i valori "shiftati"
% nel senso che l'entrata j+1 sima riguarda
% l'istante t_i(j)
% Imposto i valori iniziali (dati per ipotesi) :
y_past=y0* ones(2*M,1); % y(0)=y0
lambda_past= lo*ones(2*M,1); % lambda(0)=0
x_past=x0* ones(2*M,1); % x(0)=0
L_past=zeros(2*M,1); % L(0)=0
% Definisco le matrici in cui memorizzo i valori di
% Lambda e di S:
Lambda=zeros(2*M,N+1);
S=ones(2*M,N+1);
S(:,1)=exp( phi_M(1)*ones(2*M,1)+x_past+L_past);
temp=zeros(2*M,1);

```

```

% Simulazione (metodo Montecarlo) attraverso lo schema
% di Eulero:
% Eseguo un ciclo sugli istanti t_i(1), .. , t_i(N)

% Memorizzo alcune quantità dello schema di Eulero
% che sono costanti a ciascuna
% iterazione per evitare di calcolarle ogni volta di nuovo
const1_y=1 - 1.0*k/N *mu;
const2_y=1.0*k/N * mu *ones(2*M,1);

for j=1:N
    % Innanzitutto, ottengo le COMPONENTI ALEATORIE
    % che all'istante j-simo e per ciascuno degli M scenari
    % (singolarmente) determinano l'evoluzione del
    % processo del prezzo del petrolio e dell'intensità di
    % insolvenza:
    % Bisogna simulare, per ciascuno degli M scenari, il
    % valore di tre
    % variabili normali correlate tra di loro secondo la
    % matrice R sopra definita

    % a) Innanzitutto determino, per ciascuno degli M
    % scenari, tre valori corrispondenti alle realizzazioni
    % di tre variabili aleatorie normali indipendenti.
    % Memorizzo tali valori in una matrice 3xM.
    W1=randn(3,M);
    % Al fine di correlare, in ciascun scenario, le tre fonti
    % aleatorie tra di loro, premoltiplico per la matrice
    % A, che è la radice della matrice di correlazione
    W1=(A*W1)';
    % Al fine di ridurre la varianza, utilizzo il metodo delle
    % VARIABILI ANTITETICHE: dopo avere ottenuto M
    % valori relativi alle tre fonti di aleatorietà
    % (già correlate tra di loro)
    % imposto altrettanti M valori come l'OPPOSTO dei
    % primi
    W=[W1;-W1];
    % Ora W è una matrice che ha per colonne i valori
    % assunti in ciascuno degli 2*M scenari dalla
    % componente aleatoria (riga) che
    % determina, rispettivamente, i processi y, x ed L

    % b) Implemento lo schema di Eulero:

```

```

% PROCESSO DI INTENSITÀ:
y=const1_y* (y_past) + const2_y + nu* sqrt(abs(y_past)).*W(:,1);
y=abs(y);
% NOTA: ad ogni iterazione considero il valore
% assoluto del valore ottenuto per y, altrimenti il
% processo di intensità diviene decrescente e, in
% seguito, si otterrebbero valori negativi per la
% quantità che deve stimare il CVA
% (in quanto i parametri in generale non garantiscono
% dal punto di vista teorico la positività del
% processo)
lambda =psi1_M(j+1)*ones(2*M,1)+y;
% valore di lambda all'istante corrente

% PROCESSO DEI PREZZI (x ed L):
x=(1 - 1.0*k_x/N)*x_past+ sigma_x* W(:,2);
L=L_past+ 1.0*mu_L/N*ones(2*M,1) + sigma_L * W(:,3);

% PROCESSI LAMBDA ED S:
% Ottengo i valori di Lambda(t_i(j)) (integrale del
% processo di intensità nell'intervallo [0, t_i(j)] )
% e di S( t_i(j) )

% Lambda(:,j+1)= int_0^t_i(j) r(u) du
% Approssimo l'integrale con la REGOLA DEL
% TRAPEZIO:
% temp=0
% al passo j-simo: temp+= lambda(j-1) + lambda(j)
% cosicchè
% Lambda(j)= Lambda(:,j+1)=(1/2)*t_j * temp=
% = (1/2) * t_j * [ lambda(0) + 2* lambda(t_1) + ... +
% 2* lambda(t_(j-1)) + lambda(t_j)]
temp=temp+ lambda_past + lambda;
Lambda(:, j+1)=0.5*t_i(j)/j * temp;

% Processo dei prezzi
S(:,j+1)=exp( phi_M(j+1)* ones(2*M,1) + x + L);

% Aggiorno i valori che servono all'iterazione
% successiva (ovvero i
% valori appena ottenuti di Lambda e di S)
y_past=y;
lambda_past=lambda;

```

```
    x_past=x;
    L_past=L;
end
Ma=2*M;
end
```

# Bibliografia

- [1] Baldi, P.: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Pitagora Editrice - Bologna, 2000.
- [2] Bielecki, T., Rutkowski, M.: *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer, 2002.
- [3] Björk, T.: *Arbitrage Theory In Continuous Time (Second Edition)*, Oxford University Press, 2004.
- [4] Brigo, D., Alfonsi, A.: *Credit Default Swaps Calibration and Option Pricing with the SSRD Stochastic Intensity and Interest-Rate Model*, Finance and Stochastics, Vol. IX (1), 2005.
- [5] Brigo, D., Chourdakis, K., Bakkar, I.: *Counterparty Risk Valuation for Energy-Commodities Swaps: Impact of Volatilities and Correlation*, 2008, disponibile a SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1150818> oppure <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1150818>
- [6] Brigo, D., Mercurio, F.: *Interest Rate Models- Theory And Practice*, Springer, 2006.
- [7] Caravenna, F.: *Analisi stocastica: dispense del corso 2010/11* (accessibili in rete al sito <http://www.matapp.unimib.it/~fcaraven>)
- [8] Gregory, J.: *Counterparty Credit Risk: the New Challenge for Global Financial Markets*, Wiley Finance, 2010.
- [9] Musiela, M., Rutkowski, M.: *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.
- [10] O’Kane, D.: *Modelling single-name and multi-name Credit Derivatives*, Wiley Finance, 2008.
- [11] Pascucci, A.: *Calcolo stocastico per la finanza*, Springer, 2008.
- [12] Schwartz, E., Smith, J.E.: *Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices*, Management Science, vol. 46, , pagine 893-911, 2000.