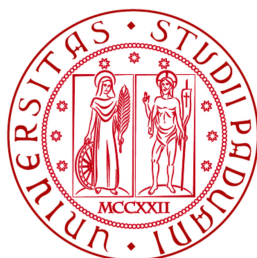


Università degli Studi di Padova

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
“Galileo Galilei”



Tesi di Laurea Triennale in Astronomia

**STATISTICHE DI MERGING
DI ALONI DI MATERIA OSCURA
IN SIMULAZIONI COSMOLOGICHE
AD N CORPI**

Relatore:
Prof. Giuseppe Tormen

Candidato:
Riccardo Matrecano

Correlatore:
Michele Boldrin

Anno Accademico 2014-2015

Abstract *La tesi si occupa dell'analisi statistica di aggregazione di aloni di materia oscura in simulazioni ad N corpi, nel contesto della formazione gerarchica delle strutture cosmiche, con attenzione alla distribuzione dei rapporti di massa fra progenitori principali e satelliti più massicci, per evidenziare caratteristiche universali in relazione al redshift di aggregazione e alle masse degli aloni risultanti.*

Indice

1	L'Universo imperturbato	7
1.1	Principio cosmologico	7
1.2	L'espansione dell'Universo	8
1.3	Fluido cosmico e sistema di coordinate comoving	9
1.4	La metrica di Robertson-Walker	10
1.5	Le equazioni di Friedmann	10
1.6	Il redshift cosmologico	11
1.7	Il modello cosmologico Λ CDM	13
1.8	Breve storia termica dell'Universo	15
1.9	L'inflazione	16
2	L'Universo perturbato	19
2.1	Il modello di Jeans in un Universo statico	19
2.1.1	Approccio qualitativo	19
2.1.2	Approccio fisico-matematico	20
2.2	Il modello di Jeans in un Universo in espansione	24
2.3	Storia delle perturbazioni: scenari bottom-up e top-down	26
2.4	Aspetti statistici	27
2.4.1	Campi stocastici, ipotesi ergodica e campi gaussiani	27
2.4.2	Varianza puntuale, varianza di massa e spettro di potenza	28
2.4.3	Spettri di potenza scale-free: lo spettro di Zel'dovich	29
2.4.4	Fluttuazioni di densità critica	31
3	Le simulazioni cosmologiche ad N-corpi	33
3.1	Simulazioni cosmologiche ad N-corpi	33
3.1.1	Condizioni iniziali e al contorno	35
3.2	Le simulazioni "Le SBARBINE"	35
3.2.1	Identificazione degli aloni	36
3.3	Merger trees e unevolved subhalo mass function	37

4	Statistiche di merging fra aloni di materia oscura	39
4.1	Descrizione del codice ed elaborazione dei dati	39
4.2	Studio preliminare	40
4.3	Risultati e sviluppi futuri	40
A	Figure del testo	43
	Bibliografia	51

Capitolo 1

L'Universo imperturbato

Per studiare le statistiche di *merging* di aloni di materia oscura all'interno della teoria della formazione delle strutture, è opportuno ricordare alcuni concetti, che verranno ripresi successivamente, riguardanti l'Universo imperturbato.

1.1 Principio cosmologico

L'Universo su piccole scale appare estremamente disomogeneo; se si introduce infatti il concetto di densità media dell'Universo ρ_b (dove b sta per *background*), si osserva che tutte le strutture cosmiche su scale minori degli ammassi di galassie presentano una densità media molto maggiore della ρ_b . Se invece si studiano sorgenti cosmiche nelle bande elettromagnetiche radio e X, si nota un maggior grado di omogeneità e isotropia. Ciò viene ancor più evidenziato dalla radiazione cosmica di fondo nelle microonde (CMB), radiazione formatasi, secondo il *modello cosmologico standard*, nell'istante del Big Bang, ma visibile solo dopo il momento dell'ultimo scattering fra barioni e fotoni.¹

Tali osservazioni possono essere formalizzate nel cosiddetto *Principio Cosmologico*, il quale afferma che l'Universo è omogeneo e isotropo su di una scala opportunamente grande. Tale principio rappresenta un postulato, pur ragionevolmente supportato dalle osservazioni, che semplifica drasticamente la modellizzazione fisico-matematico dell'Universo: si sta infatti supponendo che sia possibile applicare a tutto il cosmo le leggi della fisica (valide nella nostra porzione di Universo).

¹Parleremo di questo più avanti, nel Capitolo riservato alla storia termica dell'Universo.

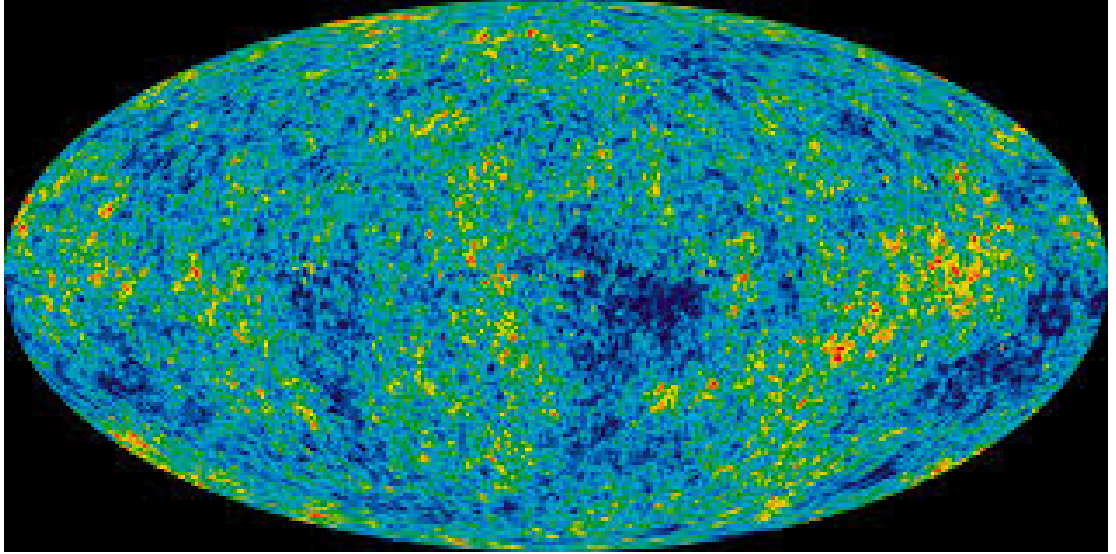


Figura 1.1.1: Mappa del cielo ottenuta con la missione WMAP con risoluzione angolare di $10'$. Il grado di anisotropia della radiazione è di poche parti su 10^5 .

1.2 L'espansione dell'Universo

Nel 1929 Hubble scoprì una caratteristica fondamentale dell'Universo: la sua espansione. Egli infatti, attraverso varie osservazioni di oggetti cosmici sufficientemente distanti dalla Terra, formulò la nota *legge di Hubble*. L'astronomo americano aveva osservato che gli spettri di tali sorgenti si presentavano “spostati” verso il rosso e aveva interpretato questa caratteristica come dovuto all'effetto Doppler.²

All'interno della teoria della Relatività Speciale, l'effetto Doppler viene descritto dall'equazione

$$\lambda_{oss} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \lambda_{em} \quad (1.1)$$

ove λ_{oss} e λ_{em} rappresentano la lunghezza d'onda nel sistema di riferimento dell'osservatore e quella nel sistema di riferimento dell'emettitore e v è la velocità relativa fra i due sistemi di riferimento.

In approssimazione di piccole velocità v , vale la seguente definizione di redshift z

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1 \approx \frac{v}{c} = z \quad (1.2)$$

²Le sorgenti devono essere sufficientemente distanti affinché le loro velocità peculiari siano molto minori della loro velocità di recessione, dovuta all'espansione dell'Universo.

Hubble scoprì che sussisteva un'ulteriore relazione di proporzionalità diretta, fra redshift e distanza della sorgente cosmica d

$$z = k \cdot d \quad (1.3)$$

Unendo le due equazioni si trova la legge di Hubble

$$v \simeq H_0 d \quad (1.4)$$

con $H_0 = k \cdot c$ costante di Hubble.

Assumendo che lo spazio si espanda in maniera omogenea e isotropa (cioè invocando il Principio Cosmologico), si può dimostrare la legge di Hubble.

1.3 Fluido cosmico e sistema di coordinate comoving

Se si ipotizza di diffondere omogeneamente la materia presente nell'Universo al suo interno, si ottiene il cosiddetto *fluido* o *substrato cosmico*: esso sarà ovviamente costituito da diverse componenti (materiale non relativistica, relativistica...) e avrà una densità di energia ρ_b .

Si consideri un sistema di riferimento generico e si effettui il cambio di coordinate, o meglio il riscaldamento

$$\vec{x}(t) = \frac{a(t)}{a_0} \vec{r} \quad (1.5)$$

ove la funzione $a(t)$ è detta fattore di scala universale e stabilisce come si espande o si contrae l'Universo al trascorrere del tempo (è stato sottinteso $a_0 = a(t_0)$, con t_0 tempo cosmico attuale; spesso si pone $a_0 = 1$).

Il sistema di coordinate \vec{r} viene detto *sistema di coordinate comoving* ed è quello in cui la posizione degli osservatori fondamentali non varia nel tempo. Si può riscrivere la legge di Hubble in questo nuovo sistema di coordinate

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \frac{\vec{r}}{a(t_0)} = H(t)\vec{x} = H(t) \frac{a(t)}{a_0} \vec{r} \quad (1.6)$$

e si ottiene un'espressione della costante di Hubble in funzione del tempo

$$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.7)$$

1.4 La metrica di Robertson-Walker

Su grandi scale la forza di gravità domina sulle altre tre interazioni fondamentali. Ciò comporta la necessità di utilizzare una teoria della gravitazione per descrivere l'Universo: la teoria della Relatività Generale.

All'interno della visione general-relativistica, la gravità rappresenta una proprietà geometrica locale dello spazio-tempo, rappresentabile matematicamente attraverso la scrittura dell'elemento di linea (o metrica).

La metrica più generale di uno spazio-tempo che soddisfi il Principio Cosmologico è quella di Robertson-Walker:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.8)$$

ove:

- r, θ e ϕ sono le coordinate comoventi;
- t è la coordinata temporale nel sistema di riferimento;
- $a(t)$ è il fattore di scala universale;
- K è il parametro di curvatura, riscalato in modo da assumere solo valori $1, -1$ e 0 . In particolare K vale 1 per uno spazio chiuso (o a curvatura positiva), -1 per uno aperto (o a curva negativa) e 0 per uno piatto (o a curvatura nulla).

1.5 Le equazioni di Friedmann

Per ottenere informazioni sull'evoluzione temporale del parametro di scala $a(t)$, bisogna innanzitutto considerare le equazioni di campo di Einstein, che hanno la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

ove $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, R e $T_{\mu\nu}$ rappresentano rispettivamente il tensore di Ricci, il tensore metrico, il parametro di curvatura scalare e il tensore energia-impulso. Si noti come l'equazione colleghi le caratteristiche geometriche dello spazio-tempo (primo membro) al suo contenuto di materia-energia (secondo membro).

Risolvendo tali equazioni per un fluido omogeneo e isotropo (come abbiamo ipotizzato essere il substrato cosmico) di pressione p e densità di energia ρc^2 , si ottengono le equazioni di Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) a \quad (1.10)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 - Kc^2 \quad (1.11)$$

Risolviendo ulteriormente per a queste ultime due equazioni, si ottiene la funzione che descrive l'evoluzione temporale del fattore di scala.

A questo punto si possono introdurre i cosiddetti *parametri cosmologici*:

- $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ è il parametro di Hubble e attualmente si stima $H_0 = 72.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, nonostante rimangano ancora incertezze sul valore esatto. Per comodità lo si preferisce esprimere come parametro adimensionale $h = \frac{H}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}$;
- $q(t) \equiv -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)^2}$ è il parametro di decelerazione;
- $\Omega \equiv \sum_i \Omega_i \equiv \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H(t)^2}$ è il parametro di densità dell'Universo. Nell'espressione precedente i indica le varie componenti dell'Universo, $\rho_c = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}$ è la densità critica.

Vale inoltre la seguente equazione (ricavabile sostituendo le definizioni dei parametri cosmologici all'interno delle equazioni di Friedmann)

$$\Omega(t) = 2q(t) \quad (1.12)$$

cioè la densità è legata alla decelerazione dell'espansione dell'Universo.

1.6 Il redshift cosmologico

Si è già definito il concetto di redshift $z \equiv \frac{v}{c}$ per oggetti cosmici sufficientemente vicini al nostro sistema di riferimento. Si estenderà ora tale concetto (in modo consistente con la definizione precedente) per corpi celesti molto distanti dalla nostra Galassia.

Si consideri la metrica di Robertson-Walker (Eq. 1.8) e due eventi spaziotemporali O e P separati da un intervallo di tipo luce. Si ipotizzi di porsi in un sistema di riferimento tale per cui le coordinate θ e ϕ non varino lungo il percorso OP . Si avrà quindi

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - \frac{a(t)^2}{a_0^2} \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \rightarrow \frac{ca_0 dt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.13)$$

ove si è presa la soluzione con il segno positivo per rendere consistenti fra loro l'andamento del tempo e della coordinata radiale.

Integrando per un impulso luminoso sul percorso OP di lunghezza spaziale r_0 :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.14)$$

Si consideri un secondo impulso luminoso emesso ad una distanza temporale dt_e dal primo; esso percorrerà una distanza spaziale identica al precedente impulso, in quanto l'espansione dell'Universo non è rilevante nel dt_e trascorso. Quindi possiamo scrivere

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.15)$$



Figura 1.6.1: Successione temporale degli eventi di emissione ed osservazione del primo e del secondo impulso.

Sottraendo Eq. 1.14 a 1.15 si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} &= 0 \\ \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{ca_0 dt}{a(t)} - \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

da cui

$$\int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{ca_0 dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{ca_0 dt}{a(t)} \quad (1.17)$$

ed essendo $dt_e/t_e, dt_0/t_0 \ll 1$, possiamo concludere

$$\frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_0}{a(t_0)} \quad (1.18)$$

Quest'ultima equazione afferma che un intervallo di tempo scorre in maniera differente a seconda del valore del fattore di scala a cui viene effettivamente misurato.

Le frequenze fotoniche dipendono dall'inverso dell'intervallo temporale

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.19)$$

e la formula per calcolare il redshift sarà

$$\frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} \equiv z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 \quad (1.20)$$

È importante notare come la nuova definizione di redshift permetta di osservare oggetti a $z > 1$, mentre l'approssimazione per oggetti vicini non lo consenta.

1.7 Il modello cosmologico Λ CDM

Fin dagli anni '30 del secolo scorso furono messe in evidenza incongruenze fra la quantità di materia osservabile, cioè emittente radiazione elettromagnetica, all'interno di strutture cosmiche legate gravitazionalmente (ad esempio le galassie) e le velocità di moto di alcune componenti di tali strutture. Questo problema fu risolto ipotizzando la presenza della cosiddetta *materia oscura*, una forma di materia che ha una sezione d'urto praticamente nulla con i fotoni, ma che interagisce solamente attraverso la forza di gravità.

Nel corso degli anni varie osservazioni si sono concentrate sulla costruzione di mappe per visualizzare la distribuzione della materia oscura all'interno dell'Universo, ed è stato possibile stimare anche la quantità di materia oscura presente al suo interno. I valori oggi accettati dal modello cosmologico standard sono $\Omega_b = 0.048$ per la materia barionica e $\Omega_{DM} = 0.253$ per la materia oscura. In totale per la componente materiale si ha $\Omega_m = 0.301$.

Un grande problema è rappresentato dalla natura della materia oscura. Essa infatti potrebbe presentarsi sotto due differenti "specie", cioè materia oscura fredda e calda. All'interno del modello cosmologico standard viene accettata la prima, cioè un tipo di materia non barionica, non termalizzata, non collisionale e in moto a velocità non relativistiche, il cui candidato principale fra le particelle del modello standard sarebbe il neutralino.

Tra i primi anni '80 e la fine degli anni '90 sono emersi ulteriori problemi ed evidenze osservative che hanno messo in crisi il sistema cosmologico fino ad allora accettato. In particolare risultava che l'Universo non fosse in una fase di espansione decelerata, come ci si aspetterebbe se fosse presente solamente la componente massiva (l'interazione gravitazionale causa infatti l'attrazione fra le varie strutture cosmiche), bensì l'espansione risultava accelerata. Per risolvere tali incongruenze fra dati sperimentali e previsioni teoriche, si è dovuto postulare l'esistenza di un'ulteriore forma di energia responsabile dell'accelerazione: *l'energia oscura*. Essa viene rappresentata matematicamente dalla cosiddetta *costante cosmologica* Λ , che va a modificare le equazioni di

Friedmann nel modo seguente:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} - \frac{\Lambda}{3} \right) a \quad (1.21)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 - Kc^2 + \Lambda\frac{a^2}{3} \quad . \quad (1.22)$$

Il modello cosmologico standard che oggi risulta più accreditato si chiama modello Λ CDM, per la presenza della costante cosmologica Λ e della materia oscura fredda (*Cold Dark Matter*).

Come per le altre forme di energia, anche per la costante cosmologica si definisce il parametro $\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3H(t)^2}$ e risulta essere $\Omega_\Lambda = 0.699$. Quindi $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda \simeq 1$, il che comporta un valore di $K \simeq 0$, cioè un Universo pressochè piatto.

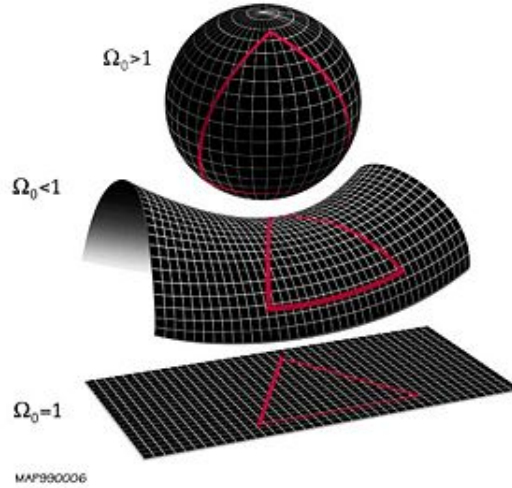


Figura 1.7.1: Rappresentazione bidimensionale di possibili universi in base al valore del parametro Ω_0 .

Infine si può calcolare la vita dell'Universo (considerando corretti i valori accettati dal modello cosmologico standard) facendo uso della seguente relazione

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t dt' = \int_0^{a_0} \frac{da}{\dot{a}} = \\ &= \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z) [(1+z)^3 \Omega_m + (1+z)^2 (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) + (1+z)^4 \Omega_\gamma + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

ove si è indicato con Ω_γ il parametro di densità dei fotoni. Risolvendo l'integrale e sostituendo i valori dei parametri cosmologici, l'Universo risulta avere 13.7 miliardi di anni.

1.8 Breve storia termica dell'Universo

La storia dell'Universo è descrivibile attraverso le equazioni di Friedmann. Esse contengono al loro interno i parametri cosmologici, fra cui il parametro di densità $\Omega(t) = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H(t)^2}$, che a sua volta dipende dalla densità di energia $\rho(t)$.

Come già è stato fatto precedentemente, si definisce una densità di energia per ogni componente dell'Universo; tuttavia ognuna di esse dipende dal volume dell'Universo (e quindi dal parametro di scala a) in maniera differente.

Svolgendo semplici conti (che qui verranno omessi) si può dimostrare che

$$\rho_\gamma(t) = \rho_{\gamma,0} \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^{-4} \quad (1.24)$$

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3} \quad (1.25)$$

$$\rho_\Lambda(t) = \rho_{\Lambda,0} \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^0 = \rho_{\Lambda,0} \quad (1.26)$$

ove $\rho_{\gamma,0}$, $\rho_{m,0}$ e $\rho_{\Lambda,0}$ sono rispettivamente la densità di energia fotonica, materiale e di energia oscura al tempo cosmico attuale. Queste tre equazioni valgono nell'ipotesi in cui non vi siano conversioni di energia fra le varie componenti. La componente dominante è quella che contribuisce maggiormente al parametro di densità Ω ; il fatto che $\rho = \rho(t)$ vuol dire che la componente dominante nel corso della storia dell'Universo non è sempre la stessa.

Attualmente il rapporto fra la densità di energia materiale e quella di energia fotonica vale

$$\frac{\rho_{m,0}}{\rho_{\gamma,0}} \sim 3000 \quad (1.27)$$

Tuttavia è esistito un istante $t = t_{equiv}$ a cui tale rapporto è valso 1

$$\frac{a(t_{equiv})}{a_0} = \frac{\rho_{\gamma,0}}{\rho_{m,0}} = (1+z)^{-1} \Rightarrow z_{equiv} \sim 3000 \quad (1.28)$$

Questo periodo a $z_{equiv} \sim 3000$ viene detto *epoca dell'equivalenza*. Prima di tale epoca era la componente fotonica a dominare sulla materia, mentre a

redshift minori avviene il contrario.

Oggi l'Universo si presenta praticamente trasparente, cioè la probabilità che ha un fotone di essere assorbito durante il proprio tragitto nel cosmo è praticamente nulla. Tuttavia non è sempre stato così. Andando indietro nel tempo, la densità di energia dei fotoni della CMB aumenta, fino ad arrivare a $z_{rec} \sim 1100$, epoca durante la quale la materia si presenta in forma ionizzata a causa dell'elevata energia dei fotoni della CMB: tale epoca è detta *della ricombinazione*. In questo Universo la sezione d'urto fra fotoni e particelle (in particolare elettroni) è molto elevata, tanto da causare continui assorbimenti e riemissioni dei fotoni da parte della materia. L'Universo a tale redshift rappresenta il nostro *orizzonte cosmologico*, cioè oltre tale limite esso ci appare opaco e non sono possibili osservazioni dirette: l'epoca della ricombinazione può essere considerata come la superficie di ultimo scattering della radiazione di fondo nelle microonde.

Un periodo più recente è invece l' *epoca del disaccoppiamento* fra materia e radiazione, la quale si colloca a $z \sim 300$.

1.9 L'inflazione

Il modello cosmologico fin qui delineato porta in modo naturale a porsi alcuni dubbi e presenta alcune incongruenze con i dati osservativi.

- L'Universo si presenta estremamente piatto, con un valore di Ω prossimo a 1, nonostante una piccolissima fluttuazione (dell'ordine di 10^{-60}) di $\Omega(t_P)$ al tempo di Planck $t_P = 10^{-34}s$ causerebbe una grossa modifica del valore di Ω al tempo attuale: come si spiega tutto ciò?
- Se osserviamo due regioni opposte sulla volta celeste al momento dell'ultimo scattering ($z \sim 1100$), si nota come esse siano termalizzate, nonostante secondo il modello cosmologico classico non siano mai state in contatto causale;
- Le teorie fisiche utilizzate per spiegare la natura della materia e dell'energia oscura prevedono l'esistenza di monopoli magnetici, che tuttavia non vengono mai osservati nel nostro Universo;
- Cosa ha causato la perfetta omogeneità e isotropia su grandi scale all'interno dell'Universo?

- Cosa dà luogo alle perturbazioni iniziali di densità nella materia oscura e come si distribuiscono?

Questi dubbi, insieme ad altri che non sono stati citati, hanno portato alla formazione della teoria dell'inflazione. Secondo questa teoria l'Universo avrebbe subito un periodo di fortissima espansione accelerata, a causa di una particella chiamata *inflatone*, in un tempo molto breve (da circa $10^{-37}s$ a $t < 10^{-11}s$), tale da portare il parametro di scala ad aumentare di un fattore e^{60} . Gli inflatoni sarebbero poi decaduti in altre particelle e non sarebbero più rilevabili oggi.

Non ci si dilungherà oltre sulla descrizione di questa teoria, in quanto non rappresenta un argomento centrale all'interno della tesi. È però importante ricordare che, secondo la teoria inflazionaria, le fluttuazioni iniziali

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \rho_b}{\rho_b} \equiv \frac{\delta\rho(\vec{x}, t)}{\rho_b} \quad (1.29)$$

hanno una distribuzione gaussiana.

Capitolo 2

L'Universo perturbato

Nel modello cosmologico Λ CDM, descritto nel capitolo precedente, la densità di massa è dominata dalla componente di materia oscura fredda, interagente solamente attraverso la forza gravitazionale.

Piccole fluttuazioni di densità δ all'interno del fluido di materia oscura portano alla formazione di oggetti di piccola massa, i quali in seguito si uniscono a formare oggetti di massa maggiore, secondo un processo detto di *clustering gerarchico*. Le fluttuazioni iniziali sono molto piccole, $\delta \ll 1$, e crescono in modo lineari; quando queste, a causa della crescita della perturbazione, arrivano a valori $\delta \sim 1$, si parla di regime non lineare. È a questo punto che avviene il collasso gravitazionale del sistema e si origina una struttura stabile in equilibrio viriale: tale struttura viene chiamata *alone di materia oscura*. Gli aloni formano delle buche di potenziale in cui viene attratta la materia barionica, che darà origine alle strutture visibili.

2.1 Il modello di Jeans in un Universo statico

2.1.1 Approccio qualitativo

Per comprendere qualitativamente il processo di instabilità gravitazionale, si immagini una distribuzione uniforme di fluido (per esempio di materia oscura), in cui esistano piccole fluttuazioni di densità. Si consideri una regione dove la materia oscura è sovradensa rispetto alla media e si supponga che sia sferica, con raggio R , densità media ρ , massa $M \propto \rho R^3$. Inoltre si ipotizzi che la velocità tipica delle particelle sia v .

Per capire come evolverà il sistema, occorre considerare due processi: da una parte la gravità tra le particelle tende a condensare la regione, facendola diventare sempre più piccola e densa; dall'altra il moto delle particelle tende

a diffondere e a cancellare la sovradensità. Il bilancio tra questi due effetti si può esprimere in diversi modi equivalenti, ma ci si limiterà ad uno solo di essi.

L'energia cinetica e quella potenziale del sistema si scrivono rispettivamente come

$$E_k \simeq \frac{1}{2} M v^2 \quad (2.1)$$

$$E_p \simeq -\frac{GM^2}{R} \simeq -GM\rho R^2 \quad (2.2)$$

e ponendo la somma delle due energie a zero

$$E_k + E_p = 0 \rightarrow \frac{1}{2} M v^2 = GM\rho R^2 \quad (2.3)$$

$$R \equiv R_J = v \sqrt{\frac{1}{2G\rho}} \quad (2.4)$$

ove R_J è detto *raggio di Jeans*. Una fluttuazione di densità con raggio maggiore del proprio R_J avrà $E_p > E_k$, e si avrà il collasso gravitazionale della fluttuazione. Viceversa la fluttuazione verrà cancellata¹ dalla diffusione dovuta al moto delle particelle.

2.1.2 Approccio fisico-matematico

Per descrivere l'evoluzione temporale di un fluido perfetto occorre scrivere le equazioni che legano tra loro i vari campi del fluido. Nel caso più generale questi sono: densità, velocità, pressione, entropia e potenziale gravitazionale. Tali equazioni sono

- l'equazione di continuità, espressione della conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

- l'equazione di Eulero, espressione della conservazione del momento, equivalente alla seconda legge della dinamica per un elemento di fluido

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (2.6)$$

¹Quando una fluttuazione viene cancellata a causa della diffusione si dice che la fluttuazione si *rilassa*.

- l'equazione di Poisson, che lega il campo gravitazionale alla sua sorgente

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.7)$$

- un'equazione di stato del fluido che legghi tra loro pressione, densità ed entropia

$$p = p(\rho, S) \quad (2.8)$$

- un'equazione che descriva l'evoluzione temporale dell'entropia

$$\frac{dS}{dt} = \dots \quad (2.9)$$

Nella trattazione seguente ci si limiterà a considerare fluidi ad entropia costante nel tempo (*adiabatici*) e nello spazio (*isoentropici*), cosicchè le ultime due equazioni diventano

$$\frac{dS}{dt} = 0 \rightarrow S = \text{cost.} \quad (2.10)$$

$$p = p(\rho) \quad (2.11)$$

Soluzione imperturbata

Il sistema di equazioni scritto sopra ammette come soluzione un Universo statico, omogeneo ed isotropo:

$$\rho = \rho_b = \text{cost.} \quad (2.12)$$

$$p = p_b = \text{cost.} \quad (2.13)$$

$$\vec{v} = \vec{0} \quad (2.14)$$

$$\phi = \text{cost.} \quad (2.15)$$

Si noti però che una tale soluzione è in realtà inconsistente con $\rho_b \neq 0$, cioè un Universo contenente materia (si parla infatti di *Jeans swindle*). Infatti l'Eq. (2.7) non può essere soddisfatta contemporaneamente da $\phi = \text{cost.} \wedge \rho_b \neq 0$. Equivalentemente, possiamo dire che una distribuzione infinita e omogenea di materia non ammette soluzioni statiche, perchè tramite l'equazione di Poisson implicherebbe un potenziale non uniforme.

Soluzioni lineari perturbate

Nonostante l'inconsistenza di una soluzione statica imperturbata, è ugualmente utile studiare l'esistenza di soluzioni che costituiscano piccole perturbazioni intorno alla soluzione imperturbata.

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$\rho = \rho_b(1 + \delta) = \rho_b + \delta\rho \quad (2.16)$$

$$p = p_b + \delta p \quad (2.17)$$

$$v = \delta v \quad (2.18)$$

$$\phi = \phi_b + \delta\phi \quad (2.19)$$

ove $\delta \ll 1$ è definito dall'Eq.(1.29).

Inserendo queste soluzioni nelle equazioni che descrivono i campi del fluido, eliminando i termini di ordine superiore al primo e sottraendo le soluzioni costanti, si ottengono le seguenti

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_b(\nabla \cdot \delta\vec{v}) = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_b}\nabla\delta p - \nabla\delta\phi = -\frac{v_s^2}{\rho_b}\nabla\delta\rho - \nabla\delta\phi \quad (2.21)$$

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \quad (2.22)$$

avendo usato $\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \delta\rho = v_s^2\delta\rho$ nella Eq.(2.21), con v_s^2 velocità del suono nel fluido.

Dato questo sistema di tre equazioni, si cercano onde piane come soluzioni: ciò equivale a passare nello spazio di Fourier.² Le soluzioni saranno del tipo

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = \delta\rho_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t) \quad (2.23)$$

$$\delta\vec{v}(\vec{r}, t) = \delta\vec{v}_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t) \quad (2.24)$$

$$\delta\phi(\vec{r}, t) = \delta\phi_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t) \quad (2.25)$$

Sostituendo quest'ultime nelle Eq. (2.20), (2.21), (2.22) e manipolando algebricamente, si ottiene la cosiddetta *relazione di dispersione del sistema*

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_b \quad (2.26)$$

²Le onde piane sono soluzioni del tipo

$$f(\vec{r}, t) = f_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)$$

con \vec{k} vettore d'onda, ω pulsazione e f_k ampiezza dell'onda, indipendente da \vec{r} e t .

A questo punto occorre distinguere il caso $\omega^2 > 0$ da quello $\omega^2 < 0$. Il valore che li divide, per $\omega^2 = 0$, definisce il numero d'onda di Jeans k_J e la lunghezza d'onda di Jeans $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$ che, come abbiamo visto nella discussione qualitativa, separa due regimi opposti per le soluzioni

$$k_J \equiv \sqrt{\frac{4\pi G\rho_b}{v_s^2}} \quad (2.27)$$

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = \frac{v_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{G\rho_b}} \quad (2.28)$$

Si noti che λ_J ha la stessa dipendenza da $\sqrt{G\rho_b}$ di R_J , usato nella trattazione qualitativa.

Cosa succede all'onda piana in questi due casi? Si riscrive la pulsazione come

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right] \rightarrow \omega = \pm k v_s \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

e si studiano i due casi

- $\omega^2 > 0$ (cioè $\lambda < \lambda_J$): $\delta\rho$ è rappresentata da una coppia di onde *progressive* che si propagano a velocità $c_s = v_s \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. I due casi estremi che si presentano sono per $\lambda \rightarrow 0$ (onda sonora, cioè che si propaga a $c_s = v_s$) e per $\lambda \rightarrow \lambda_J$ (onda stazionaria con $c_s = 0$);
- $\omega^2 < 0$ (cioè $\lambda > \lambda_J$): la pulsazione può essere riscritta come

$$\omega = \pm i \sqrt{4\pi G\rho_b} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

Quindi l'onda $\delta\rho$ risulta essere

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = \delta\rho_k \exp(\pm|\omega|t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (2.31)$$

che rappresenta un'onda stazionaria crescente o decrescente nel tempo: è questo il fenomeno dell'*instabilità gravitazionale*. Poichè si sta trattando la crescita delle perturbazioni, si considera solamente l'onda con ampiezza crescente

Il tempo caratteristico di crescita della perturbazione è pari a

$$\tau \equiv \frac{1}{|\omega|} = \sqrt{4\pi G\rho_b} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

che per $\lambda \gg \lambda_J$ diventa

$$\tau_{ff} = \sqrt{4\pi G\rho_b} \propto (G\rho_b)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

2.2 Il modello di Jeans in un Universo in espansione

Per introdurre uno studio qualitativo³ dell'instabilità gravitazionale in un Universo di Einstein-de Sitter⁴ in espansione, è opportuno ricordare alcune scale di grandezza spaziali e temporali.

Innanzitutto diamo la definizione di orizzonte cosmologico R_H

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = a(t) \int_0^t cd\tau \quad (2.34)$$

dove τ è il tempo conforme. Per perturbazioni su scale maggiori di R_H , il fluido è soggetto alla sola gravità.

Una seconda scala da tenere in considerazione è la scala di Jeans λ_J . Per perturbazioni che si collocano in $\lambda_J \ll \lambda < R_H$ la gravità predomina sulle forze di pressione.

L'ultima scala da considerare è la scala di dissipazione λ_D . Le perturbazioni che soddisfano $\lambda_D < \lambda < \lambda_J$ si propagano come onde acustiche, mentre quelle che si collocano a $\lambda < \lambda_D$ vengono cancellate da processi irreversibili, che dipendono dal tipo di materia in cui nasce l'onda.

Le scale di grandezza temporale rilevanti per lo studio dell'instabilità gravitazionale sono quelle in cui l'Universo (o alcune sue componenti) passa da un regime relativistico ad uno non relativistico. L'epoca che noi tratteremo maggiormente sarà quella dell'equivalenza fra radiazione e materia, di cui abbiamo parlato nella Sez. 1.8.

Si inizierà discutendo dell'instabilità per la radiazione in un Universo dominato da radiazione, cioè in un regime temporale $t < t_{equiv}$ e in un regime spaziale $\lambda < \lambda_J$, $\lambda > \lambda_J$. In tali condizioni la velocità del suono è circa pari a quella della luce ($v_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$), quindi $\lambda_J = 2ct\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, mentre per il raggio dell'orizzonte vale $R_H(t < t_{equiv}) = 2ct$. Ciò comporta che prima dell'equivalenza

³Non ci occuperemo del problema tramite un approccio formale, che richiederebbe l'utilizzo della teoria della Relatività Generale.

⁴L'Universo di Einstein-de Sitter è un Universo dominato dalla materia e piatto, cioè tale che la densità di materia ugua gli la densità critica ρ_c .

la scala di Jeans sia sempre maggiore dell'orizzonte, cioè per la radiazione non esiste instabilità gravitazionale entro l'orizzonte.

Tale fatto si spiega ricordando che in un Universo dominato da radiazione la velocità del suono è prossima a quella della luce, il che ha un'importante conseguenza pratica: poichè le onde acustiche si propagano a velocità così alta, la pressione è estremamente efficiente nel cancellare le fluttuazioni di densità, e quindi l'Universo si può considerare con buona approssimazione come imperturbato: $\delta \approx \delta_R \approx 0$.

Si tratterà ora dell'instabilità per la materia oscura in un Universo dominato da radiazione, cioè nello stesso regime temporale precedente, ma in regime spaziale $\lambda_{J,DM} < \lambda < R_H$. In particolare, svolgendo i conti che qui ometteremo, si può notare come il tempo di free-fall gravitazionale abbia l'andamento $\tau_{ff} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_{DM}}}$, mentre il tempo di espansione dell'Universo è dato da $\tau_H \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_R}}$. Ricordando che vale $\rho_R > \rho_{DM}$, ne consegue che $\tau_{ff} > \tau_H$, cioè l'espansione dell'Universo non permette la crescita delle perturbazioni di materia oscura: si parla del fenomeno della *stagnazione* delle perturbazioni di materia oscura o effetto Meszaros [Meszaros, 1974]. Tuttavia, non appena ci si trova a $t > t_{equiv}$, la materia diventa la componente dominante e le perturbazioni di materia oscura iniziano a crescere.

Infine si parla dell'instabilità per la materia barionica su scale minori dell'orizzonte e maggiori di Jeans. Fino alla ricombinazione dell'idrogeno ($t < t_{rec}$) le fluttuazioni nei barioni sono legati a quelle nella radiazione, perchè gli ioni di idrogeno sono accoppiati agli elettroni dalle forze coulombiane, e questi ultimi sono accoppiati alla radiazione dallo scattering Thomson. Dopo la ricombinazione e il disaccoppiamento, δ_B ha un periodo di crescita accelerata dovuta al fatto che i barioni, una volta disaccoppiati dalla radiazione, subiscono l'attrazione delle perturbazioni nella componente di materia oscura (sentono le buche di potenziale della materia oscura). Questa attrazione accelera la crescita di δ_B e la porta presto a regime con quella di δ_{DM} . Questo fenomeno è chiamato *catch up* dei barioni.

Dissipazione per free-streaming L'Universo non è un fluido ideale e ciò diventa evidente quando si studiano fluttuazioni su scale molto piccole, alle quali diventano rilevanti i fenomeni microfisici. Nel caso della materia oscura, la dissipazione delle perturbazioni avviene per *free-streaming*, cioè le particelle si diffondono da regioni sovradense a regioni sottodense, livellando le disomogeneità su tutte le scale al di sotto della scala da loro percorsa entro il tempo t .

La scala di free-streaming misura quindi lo spazio percorso dalle particelle di materia oscura in un tempo t ; la definizione è simile alla scala dell'orizzonte cosmologico, ma la differenza sta nell'uso della velocità v_X di moto delle particelle al posto della velocità della luce

$$\lambda_{FS}(t) = a(t) \int_0^t \frac{v_X(t') dt'}{a(t')} \quad (2.35)$$

Si definisce inoltre la massa di free-streaming come

$$M_{FS} \propto \rho_{DM} \lambda_{FS}^3 \quad (2.36)$$

che rappresenta la massa limite sotto la quale le fluttuazioni vengono cancellate.

2.3 Storia delle perturbazioni: scenari bottom-up e top-down

La massa M_J della materia oscura dipende dalla velocità tipica delle particelle che la compongono. Possiamo quindi immaginare che M_J nel caso HDM (Hot Dark Matter, formata da particelle relativistiche) sia maggiore rispetto al caso CDM (Cold Dark Matter, formata da particelle non-relativistiche). Da un lato abbiamo il caso dei neutrini e di altre particelle candidate a far parte della HDM, che raggiungono valori massimi di $M_{J,HDM}(a_{equiv})$ pari a $10^{12} - 10^{14} M_\odot$; dall'altro si trovano particelle, come il neutralino, appartenenti alla CDM, che presentano masse di Jeans con valori cosmologicamente trascurabili: nel caso del neutralino $M_{J,CDM} \approx 10^{-6} M_\odot$. Questo significa che in un Universo di CDM tutte le perturbazioni di interesse cosmologico possono crescere perchè sia la massa di Jeans che quella di free-streaming sono irrilevanti. Di conseguenza tipicamente le prime fluttuazioni a diventare non lineari e a collassare in aloni di materia oscura saranno quelle corrispondenti a piccole masse. Le perturbazioni di massa maggiore collasseranno più tardi, aggregando le strutture più piccole già collassate. Questo tipo di crescita viene detto *gerarchico*, o *bottom-up*, ed è lo scenario più consistente con le osservazioni. Ad esempio gli ammassi di galassie, che sono i sistemi legati più massicci osservati nell'Universo, sono più giovani delle galassie che li compongono, e a redshift sempre maggiori il loro numero diminuisce.

Nel caso della materia oscura calda, invece, il free-streaming cancella tutte le fluttuazioni al di sotto della massa di Jeans, che è molto elevata. Questo significa che le uniche perturbazioni a sopravvivere sono quelle corrispondenti a masse molto grandi, che saranno le prime a collassare e a formare aloni

virializzati di dimensioni dell'ordine dei gruppi o degli ammassi di galassie. In questo scenario le galassie si formano in seguito, per frammentazione dalle strutture più grandi e tale modalità di crescita viene detta *top-down*. Ciò significa che, in un universo di HDM, gli ammassi di galassie sono più vecchi delle galassie che essi ospitano, in aperto contrasto con le osservazioni. Inoltre, il free-streaming della HDM fa sì che non si possa formare un numero sufficiente di galassie ad alto redshift (dell'ordine di $z = 5 - 6$), di nuovo in contrasto con le osservazioni. Questi problemi hanno portato, nella seconda metà degli anni '90, ad abbandonare definitivamente i modelli di pura HDM.

2.4 Aspetti statistici

2.4.1 Campi stocastici, ipotesi ergodica e campi gaussiani

Nell'Universo sono presenti moltissimi fenomeni che agiscono contemporaneamente, il che rende molto difficoltosa (se non impossibile) la ricerca di soluzioni esatte che tengano in considerazione tutti i loro effetti. Per questa ragione si studiano tali fenomeni come *stocastici* o *casuali*. Nonostante nella concezione classica si utilizzino modelli stocastici per aggirare l'ignoranza di un processo fisico, in realtà la ragione ultima di questa ignoranza risiede nel principio di indeterminazione di Heisenberg. Per queste ragioni i modelli di formazione delle strutture cosmiche sono teorie stocastiche, cioè il loro scopo è dare una corretta descrizione statistica dell'Universo.

I modelli teorici che studiano i fenomeni di instabilità gravitazionale sono spesso determinati dalla conoscenza di un solo campo scalare, che nel caso di perturbazioni adiabatiche è il potenziale gravitazionale peculiare newtoniano $\phi(\vec{x})$; tuttavia l'equazione di Poisson dice che una descrizione equivalente, a meno di vincoli sulle condizioni al contorno, è data dal campo di fluttuazione di densità $\delta(\vec{x})$, il che permette di spostare lo studio della struttura su grande scala dell'Universo all'analisi delle proprietà statistiche del campo $\delta(\vec{x})$.

L'ipotesi di partenza che si fa è una riformulazione statistica del Principio Cosmologico: $\delta(\vec{x})$ è un campo stocastico *omogeneo* ed *isotropo*. Nell'ambito di questo modello, l'Universo che si osserva è quindi il prodotto di una realizzazione del campo stocastico $\delta(\vec{x})$. Come ogni variabile stocastica, $\delta(\vec{x})$ è caratterizzata dalla propria funzione di densità di probabilità $p(\delta)$, che dà la probabilità congiunta che il campo $\delta(\vec{x})$ assuma un valore ben definito $\bar{\delta}(\vec{x})$ nella posizione \vec{x} .

Una seconda osservazione riguarda i metodi di indagine dell'Universo. La

nascita ed evoluzione delle strutture cosmiche non è un processo riproducibile in laboratorio, e le osservazioni permettono soltanto la (parziale) conoscenza di una sola realizzazione statistica del campo $\delta(\vec{x})$. Tuttavia la teoria fornisce la distribuzione di probabilità su un insieme statistico. Per poter dedurre le proprietà del campo stocastico $\delta(\vec{x})$ da una sola sua realizzazione occorre fare un'ipotesi, nota come *ipotesi ergodica*: le medie di un campo stocastico prese sull'insieme statistico, sono equivalenti alle medie spaziali di ogni sua realizzazione. In tal modo, regioni di Universo sufficientemente separate sono tra loro statisticamente indipendenti e quindi sono equivalenti a realizzazioni statistiche diverse dello stesso processo stocastico.

Esiste inoltre un teorema che dimostra l'ergodicità di un campo stocastico nel caso gaussiano con spettro di potenza continuo.

Nel modello standard di formazione delle galassie si ritiene che le fluttuazioni in densità siano state originate dall'amplificazione di fluttuazioni quantistiche durante l'espansione inflazionaria. Tali fluttuazioni in densità costituiscono un campo stocastico scalare gaussiano su qualsiasi scala k . Ciò significa che, se si potessero fare un gran numero (idealmente infinito) di realizzazioni stocastiche di Universo, per ogni valore di k si avrebbe una distribuzione gaussiana intorno allo zero della parte reale e di quella immaginaria di $\hat{\delta}(\vec{k})$. Inoltre, essendo il valore della fluttuazione di densità nello spazio delle configurazioni $\delta(\vec{x})$ una somma di onde piane (nel limite lineare), che sono campi stocastici gaussiani, anche $\delta(\vec{x})$ è un campo stocastico gaussiano. Per descrivere un campo stocastico gaussiano che ha valor medio zero è necessaria la sola conoscenza della varianza: nel seguito si troverà una relazione per quella del campo $\delta(\vec{x})$.

2.4.2 Varianza puntuale, varianza di massa e spettro di potenza

Si consideri un campo gaussiano $\delta(\vec{x})$ con valore di aspettazione nullo e si definisca la varianza come

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta(\vec{x})^2 \rangle \quad (2.37)$$

Usando l'ipotesi ergodica, si può pensare di dividere l'Universo in un gran numero di volumi V_∞ (idealmente infinito), considerati come realizzazioni indipendenti del campo, e di calcolare σ^2 come media spaziale sui singoli volumi, mediata successivamente tra i volumi

$$\sigma^2 \equiv \left\langle \frac{1}{V_\infty} \int \delta^2 d^3x \right\rangle = \frac{1}{V_\infty} \int \langle \delta(\vec{x})^2 \rangle d^3x \quad (2.38)$$

Si può dimostrare inoltre che vale

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3k \quad (2.39)$$

ove $P(k)$ è detto *spettro di potenza* e dà indicazioni su quanto è importante, nell'integrale di Fourier, il contributo delle fluttuazioni su scala k per formare la fluttuazione generica $\delta(\vec{x})$ nello spazio delle configurazioni. $P(k)$ è quindi una misura della potenza delle fluttuazioni di scala k .⁵

La varianza σ^2 del campo $\delta(\vec{x})$ caratterizza l'ampiezza quadratica media delle fluttuazioni di densità puntuali. Per le osservazioni si hanno invece a disposizione campioni di oggetti, come galassie, ammassi di galassie... , di cui si conosce solamente la posizione. Per poter confrontare questi dati con la teoria occorre legare la distribuzione delle galassie a quella globale della materia e mediare i campi su volumi finiti, necessario per poter confrontare una distribuzione discreta (le galassie) con una continua (la materia).

La prima operazione richiede però un'assunzione molto forte, cioè che la materia luminosa tracci le sovradensità di massa. Questo concetto viene formalizzato con il *parametro di bias* b , che permette di collegare la fluttuazione nel numero di galassie entro un generico volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ alla corrispondente fluttuazione di massa nello stesso volume

$$\delta_g = b \delta_m \quad (2.40)$$

ove il campo δ_m è la convoluzione del campo puntuale di fluttuazioni $\delta(\vec{x})$ con un filtro W di raggio R (detto *funzione finestra*) o equivalentemente è la fluttuazione media di densità entro il volume V .

Poichè il campo δ_m è legato al campo stocastico gaussiano $\delta(\vec{x})$ tramite una convoluzione, anch'esso sarà un campo stocastico gaussiano, descritto dalla propria varianza $\sigma_m^2 \equiv \langle \delta_m^2 \rangle$.

2.4.3 Spettri di potenza scale-free: lo spettro di Zel'dovich

Si è visto come la funzione di correlazione $\xi(r)$, la varianza σ^2 e la varianza di massa σ_m^2 siano tutte quantità legate allo spettro di potenza $P(k)$. Se si assume per $P(k)$ una forma funzionale semplice, del tipo $P(k) \propto k^n$ con n

⁵In realtà, ad essere precisi, $P(k)$ dà una misura della densità di potenza delle fluttuazioni di scala k : infatti le unità di misura dello spettro sono L^{-3} .

indice spettrale, è possibile semplificare i conti e avanzare considerazioni sui vari campi. Spettri di potenza di questo tipo sono detti spettri di potenza *a legge di potenza o scale-free*, perchè la loro pendenza logaritmica è la stessa su tutte le scale. Un esempio di questo tipo di spettro è lo spettro primordiale delle fluttuazioni di densità, per il quale si assume $n = 1$ (*spettro di Zel'dovich*).

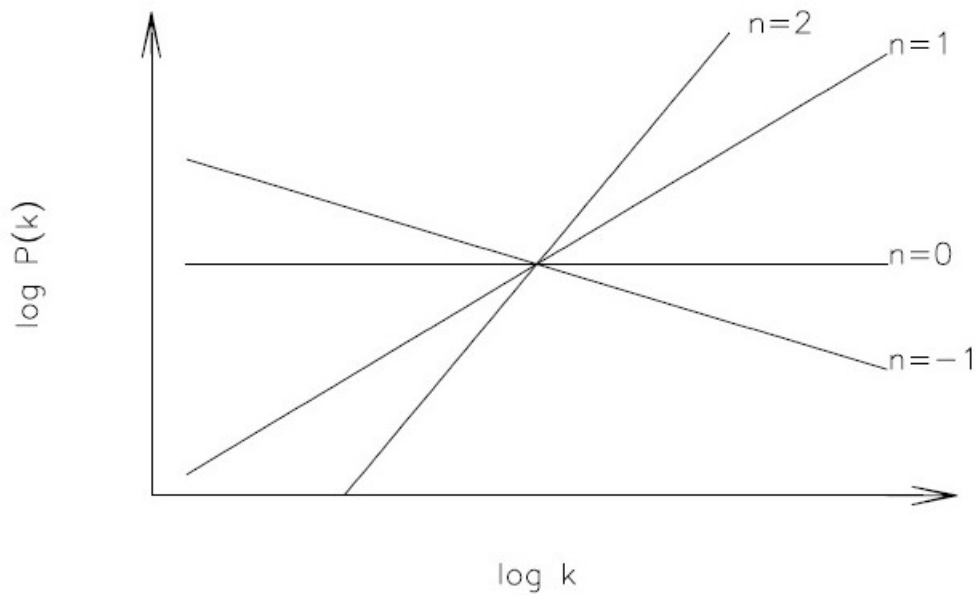


Figura 2.4.1: Spettri di potenza scale-free.

Tuttavia lo spettro primordiale si evolve a causa di vari fenomeni: per esempio il free-streaming modifica lo spettro rilassando le fluttuazioni a k elevati e per questo motivo lo spettro risulterà essere non lineare. Come viene mostrato in Fig. 2.4.2, lo spettro di materia oscura fredda (CDM) a $z = 0$ ha una pendenza locale $n_{eff} \sim -1.5$ sulla scala k delle fluttuazioni responsabili della formazione degli ammassi di galassie, mentre ha una pendenza $n_{eff} \sim -2.5$ sulla scala delle galassie.

Partendo dalla teoria lineare dell'instabilità gravitazionale, è possibile ricavare delle leggi di scala non lineari che descrivano le proprietà evolutive dei sistemi virializzati (gli aloni di materia oscura). L'assunzione che ci permette di legare i due regimi è che il limite $\delta(\vec{x}) \rightarrow 1$ corrisponde a un sistema collassato e in equilibrio dinamico. Questa assunzione è giustificata dal modello di collasso di una perturbazione sferica in un Universo in espansione e convalidata da numerose simulazioni numeriche.

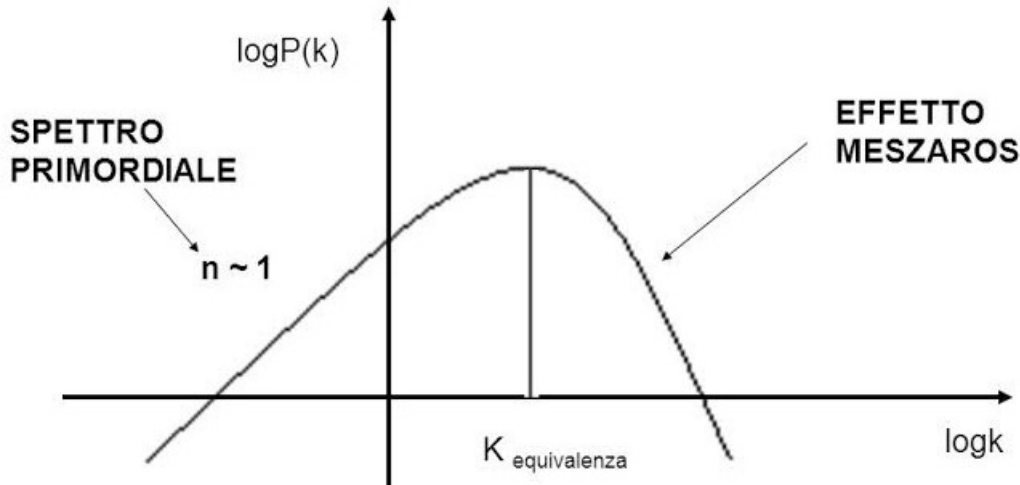


Figura 2.4.2: Spettro di potenza evoluto. A causa dell'effetto Meszaros le fluttuazioni a k elevati sono state tagliate.

2.4.4 Fluttuazioni di densità critica

Come è stato detto precedentemente, le fluttuazioni di densità a redshift molto alti hanno valori estremamente bassi, tali da rendere valida l'approssimazione lineare. Man mano che le fluttuazioni si amplificano, $\delta(\vec{x})$ tende al valore dell'unità ed esse entrano in regime non lineare: a questo punto la regione si separa dall'espansione generale dell'Universo e collassa formando un alone virializzato, cioè una struttura per cui vale il teorema del viriale⁶. Secondo il modello del collasso sferico, si ha una struttura virializzata quando

$$\frac{\rho_{pert}(t_{vir})}{\rho_b(t_{vir})} \simeq 200 \quad (2.41)$$

e questo risultato sarà utile in seguito, quando si parlerà delle simulazioni. Se si utilizzasse invece una teoria del collasso lineare, per un alone virializzato il rapporto precedente risulterebbe avere il valore $\delta_c = 1.686$. All'interno del contesto della teoria del collasso gravitazionale si definisce inoltre la massa M_* tipica di un alone in fase di collasso, dipendente dal redshift z .

⁶Il teorema del viriale afferma che $2T + U = 0$, con T energia cinetica e U energia potenziale.

Capitolo 3

Le simulazioni cosmologiche ad N-corpi

Le simulazioni numeriche sono uno strumento importantissimo per lo studio della cosmologia, in particolare permettono di riprodurre processi di instabilità gravitazionale e di merging di strutture di materia oscura. I risultati ottenuti vanno poi confrontati con modelli analitici di evoluzione delle perturbazioni non lineari; tuttavia, mentre le simulazioni numeriche richiedono solamente una grande capacità di calcolo da parte dei computer, i modelli analitici devono essere spesso approssimati.

Negli anni sono state sviluppate macchine sempre più efficienti, tanto da permettere la creazione di codici ad *N-corpi*, cioè simulazioni che “seguono” il moto delle N particelle nel corso di tutta la loro durata. Le particelle rappresentano campionamenti in massa del fluido cosmico contenuto all’interno della *box* della simulazione.

Questi codici sono adatti allo studio del comportamento della materia su grandi scale e, nel nostro caso particolare, della materia oscura.

3.1 Simulazioni cosmologiche ad N-corpi

Come detto precedentemente, le simulazioni *N-corpi* descrivono l’evoluzione temporale e spaziale di ognuna delle N particelle facentene parte. In particolare, nel caso dei codici applicati allo studio della materia oscura¹, si impone che il moto delle particelle sia determinato dalla sola forza di gravità. Le

¹Nelle simulazioni cosmologiche che studiano la formazione delle strutture cosmiche può essere trascurato l’effetto gravitazionale della materia barionica, in quanto, come si è avuto modo di vedere nei capitoli precedenti, esso è minimo rispetto a quello dovuto alla materia oscura (in particolare CDM).

equazioni che vanno risolte sono

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\vec{F}_i}{m} \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \quad (3.3)$$

ove \vec{x}_i e \vec{v}_i sono la posizione e la velocità dell' i -esima particella, mentre \vec{F}_i è la forza subita dall' i -esima particella.

Le tecniche numeriche discretizzano le equazioni differenziali, cioè considerano variazioni finite delle quantità in gioco. Per tale motivo la prima equazione verrà risolta così

$$\frac{\vec{x}_i(t + \Delta t) - \vec{x}_i(t)}{\Delta t} = \vec{v}_i \quad (3.4)$$

Seguendo tale ragionamento, ogni grandezza viene modificata ogni volta che sarà trascorso un intervallo di tempo Δt e non istantaneamente.

Esistono vari modi differenti per costruire l'interazione gravitazionale all'interno delle simulazioni ad N-corpi:

- *Particle-Particle*: la forza su ogni particella viene calcolata semplicemente sommando vettorialmente il contributo gravitazionale dovuto alle altre. Questo metodo è estremamente preciso, ma richiede tempi di calcolo molto lunghi, soprattutto per simulazioni con un numero N di particelle molto grande;
- *Particle-Mesh* (abbreviato con PM): il cubo di lato L che contiene la simulazione viene suddiviso in M nodi equidistanti e le particelle vengono distribuite su di essi, per poi calcolare le forze gravitazionali agenti nei nodi. Tale metodo richiede un minor tempo di calcolo, ma perde molta risoluzione nello studio del moto delle particelle;
- *Particle-Particle-Particle-Mesh* (abbreviato con P^3M): questo metodo unisce i due precedenti distinguendo forze su grande scala, che vengono calcolate con il PM , e forze su piccola scala, computate con il PP . La difficoltà risiede nella scelta della distanza critica che discrimina fra i due metodi;
- *Tree code*: le particelle vengono suddivise in celle, all'interno delle quali la forza sulle particelle vicine viene calcolata per somma diretta. Lo spazio viene suddiviso in celle cubiche, ognuna delle quali ne contiene

altre otto e si continua a dividere lo spazio, finchè ogni cella contiene solo una particella; a questo punto si calcola la forza dalle celle minori a quelle più grandi. Questo metodo permette di mantenere un’alta risoluzione senza eccessiva spesa in termini di tempo.

3.1.1 Condizioni iniziali e al contorno

Le condizioni iniziali definiscono la situazione di partenza della simulazione e la problematica maggiore è la riproduzione di un Universo imperturbato. Posizionare le particelle nei nodi di un reticolo che copra l’intero volume potrebbe rappresentare una soluzione, ma in tale modo si impone una regolarità che potrebbe influenzare le proprietà statistiche del sistema.

Una seconda soluzione è rappresentata dalle condizioni iniziali *glass*. Le particelle vengono distribuite in maniera casuale nello spazio e si impone che la forza di gravità sia repulsiva; in questo modo, dopo un tempo sufficientemente lungo, le particelle si allontanano l’una dall’altra e subiscono una forza prossima allo zero. Questa configurazione non presenta alcuna struttura su piccola scala, il che elimina i problemi della prima soluzione.

All’interno di una simulazione le particelle si trovano racchiuse in un volume cubico di dimensione predefinita, che dovrebbe rappresentare una porzione di Universo. Poichè lo scopo delle simulazioni è riprodurre nel modo più preciso possibile l’evoluzione di una regione di Universo, bisogna costruire un buon modello per i limiti della regione studiata: si ha il problema delle *condizioni al contorno*. La risoluzione di questa problematica è estremamente importante per le simulazioni racchiuse in volumi molto grandi e la soluzione più comune è l’introduzione della periodicità dello spazio fra facce opposte del cubo in cui è contenuta la simulazione.

3.2 Le simulazioni “Le SBARBINE”

Per questo lavoro di tesi sono state utilizzate “Le SBARBINE”, un set di sei simulazioni cosmologiche a N-corpi di materia oscura. Queste seguono l’evoluzione di 1024^3 particelle in sei volumi di dimensioni diverse tramite il codice GADGET-2 (Galaxies with Dark matter and Gas intERacT) [Springel et al., 2001], che calcola le forze gravitazionali usando il *Tree Code*, mentre rappresenta la componente fluida con un codice idrodinamico SPH².

²I codici idrodinamici vengono utilizzati per descrivere la componente materiale barionica sotto forma di gas.

L'Universo simulato è di tipo Λ CDM, i cui parametri sono assunti essere quelli derivanti dalle recenti osservazioni del telescopio Planck, cioè $\Omega_m = 0.307$, $\Omega_\Lambda = 0.693$ e $h = 0.677$, e come spettro iniziale di potenza quello generato dal codice CAMB. Le condizioni iniziali sono prodotte perturbando una distribuzione *glass* con N-GenIC. I parametri caratteristici delle simulazioni sono contenuti nella Tab.3.1.

nome	box [$Mpc h^{-1}$]	z_{iniz}	$m_P [M_\odot h^{-1}]$
Ada	62.5	99	$1.94 \cdot 10^7$
Bice	125	99	$1.55 \cdot 10^8$
Cloe	250	99	$1.24 \cdot 10^9$
Dora	500	99	$9.92 \cdot 10^9$
Emma	1000	99	$7.94 \cdot 10^{10}$
Flora	2000	99	$6.35 \cdot 10^{11}$

Tabella 3.1: Sono qui elencati alcuni dei parametri caratteristici delle simulazioni. Con il termine “box” viene indicato il valore del lato della *box*, z_{iniz} è il valore del redshift al primo snapshot, m_P è il valore della massa di ogni particella di materia oscura.

Il valore della massa di ogni particella cambia a seconda della simulazione, cioè varia la risoluzione in massa, a partire da un minimo di $\sim 2 \cdot 10^7 M_\odot h^{-1}$ in Ada a un massimo di $6.35 \cdot 10^{11}$ in Flora.

3.2.1 Identificazione degli aloni

Al fine di identificare gli aloni di materia oscura ne “Le SBARBINE” si utilizza una stima della sovradensità all’interno di regioni sferiche centrate sulle particelle. Per ogni output temporale (detto *snapshot*), si stima la densità locale di materia oscura intorno ad ognuna delle particelle (per esempio l’ i -esima), considerando la distanza dalla decima particella più vicina e imponendo $\rho_i \propto d_{i,10}^{-3}$. Si crea una lista in cui si ordinano le particelle in base alla densità e si sceglie come centro dell’alone la posizione della particella a cui è associata la maggiore densità locale. Intorno a questa particella vengono tracciate delle shell sferiche di raggi crescenti, a cui corrisponderanno densità decrescenti. Questa operazione viene bloccata nel momento in cui la densità in una determinata shell scende sotto un livello di densità critico determinato dal redshift, pari a $200\rho_b(z)$. Le particelle che si trovano all’interno dell’ultima shell fanno parte dell’alone e vengono utilizzate per calcolarne le proprietà viriali. Dopo aver identificato tutte le particelle del primo alone, esse vengono cancellate dalla lista di cui si è parlato sopra. Quindi si ripete

il procedimento per gli aloni successivi, fino ad identificare tutte le particelle della simulazione. Vengono considerati *aloni* solo le strutture con più di 10 particelle legate gravitazionalmente, mentre le altre vengono considerate *particelle di campo*.

3.3 Merger trees e unevolved subhalo mass function

Dopo aver identificato tutti gli aloni a tutti i redshift, si può procedere alla costruzione dei *merger trees* di ognuno di essi.

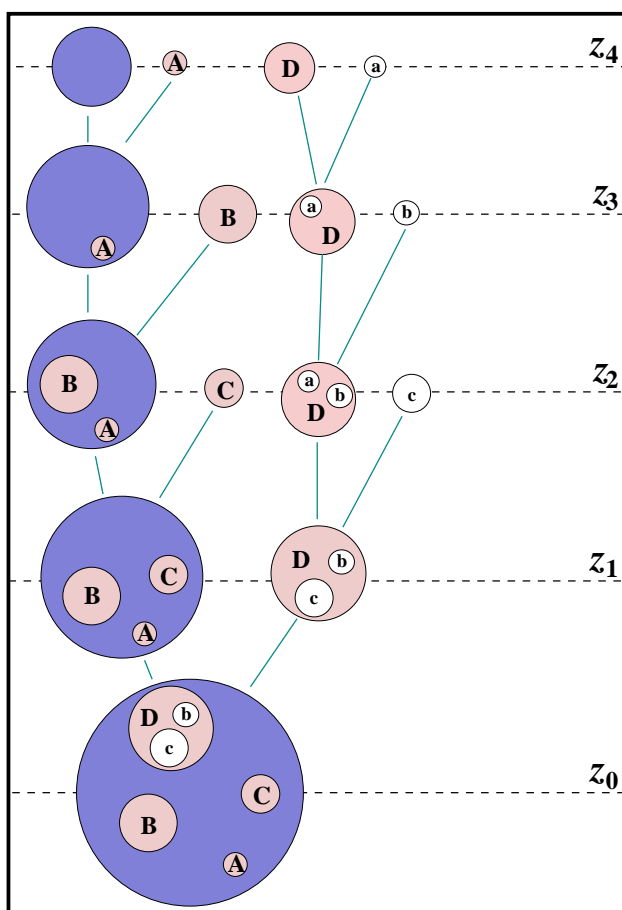


Figura 3.3.1: Esempio di *merger tree* di un alone identificato a redshift z_0 . In viola è rappresentato il progenitore principale ad ogni redshift, mentre in rosa e bianco sono indicati i satelliti. Il ramo di sinistra che unisce tutti i progenitori principali è il main branch.

Si consideri l'alone i -esimo $M_{z_0,i}$ a redshift z_0 : definiremo *progenitori* all'output temporale precedente $z_0 + \Delta z$ gli aloni che donano almeno una particella a $M_{z_0,i}$ al redshift z_0 . Il progenitore che fornisce la maggior parte della massa di $M_{z_0,i}$ verrà chiamato *progenitore principale*, mentre quelli che donano almeno il 50% della loro massa vengono detti *satelliti*. Si definiscono invece *children* gli aloni che al redshift $z_0 - \Delta z$ hanno ricevuto almeno una particella dall'alone $M_{z_0,i}$.

Iterando questa procedura per z crescenti, si ottiene il cosiddetto *merger tree* dell'alone $M_{z_0,i}$. Il ramo che collega i progenitori principali a redshift differenti è detto *main branch* [Giocoli et al., 2010].

Si definisce *Unevolved Subhalo Mass Function* (d'ora in poi USMF) la funzione di massa dei satelliti che entrano in un alone ad ogni redshift. Si è ritenuto necessario definirla in quanto verrà utilizzata nel Cap. 4 nell'interpretazione dei dati acquisiti sperimentalmente.

Capitolo 4

Statistiche di merging fra aloni di materia oscura

Lo scopo della tesi è studiare per ogni alone identificato ne “Le SBARBINE” ad un determinato redshift la distribuzione dei rapporti di massa fra progenitore principale e satellite più massiccio allo snapshot precedente, per evidenziare caratteristiche universali in relazione al redshift di aggregazione e alle masse degli aloni risultanti.

4.1 Descrizione del codice ed elaborazione dei dati

I dati utilizzati per questo lavoro di tesi sono stati estrapolati da due file (per ogni snapshot xxx):

- il file `SO.xxx.gv` che fornisce le informazioni principali sulla componente di materia oscura;
- il file `treefile_dm.xxx` che contiene le informazioni su tutti i progenitori allo snapshot precedente.

Nel caso de “Le SBARBINE”, descritte nel capitolo precedente, si hanno 6 diverse simulazioni che variano per risoluzione in massa. Gli *snapshot* per ogni simulazione sono 56 (da 0, corrispondente a $z_{max} = 99$, a 55, corrispondente a $z_0 = 0$).

Per il nostro lavoro ci si è concentrati sugli snapshot 27, 36, 43, 48 e 55, corrispondenti a redshift 4.2, 2, 1, 0.5 e 0, rispettivamente. Sono stati quindi analizzati 5 file `SO.xxx.gv` e 5 `treefiles` per ogni simulazione.

Identificati tutti gli aloni con più di 10 particelle agli snapshot 27, 36, 43, 48 e

55, sono state raccolte le masse del progenitore principale M_{PP} e del satellite più massiccio M_S , per poi costruire la distribuzione dei rapporti $x = \frac{M_S}{M_{PP}}$ ad ogni redshift e per ogni bin di massa considerati. Sono stati utilizzati, infatti, solo i dati relativi ad aloni di massa compresa fra $10^{10}M_\odot$ e $10^{14}M_\odot$ e quest'intervallo è stato poi suddiviso in quattro, così da produrre altrettanti bin di massa.

4.2 Studio preliminare

Prima di passare alla parte centrale del lavoro, è opportuno soffermarsi su uno studio preliminare che è stato effettuato.

Si è voluto verificare che il processo di merging fra aloni avvenisse in modo tale che alla fine di questo il progenitore principale contenesse il satellite più massiccio. L'alternativa a questa modalità è quella in cui vari satelliti (con una massa simile) vanno a comporre l'alone finale; in questo caso vi è maggiore probabilità che il progenitore principale e il secondo satellite più massiccio non siano entrati in contatto, il che potrebbe causare problemi nella ricerca di caratteristiche universali della distribuzione dei rapporti di massa cercata. Questa differenza può essere visualizzata tramite la distribuzione del rapporto $r = \frac{M_{PP}}{M_H}$. In particolare, se la distribuzione di r avrà il proprio picco intorno al valore 1, sarà avvalorata la prima tesi; se il picco risulterà essere spostato a valori molto più bassi, sarà accreditata la seconda tesi.

Come si può vedere nella Fig. A.0.1 in Appendice A, i picchi di ogni distribuzione si collocano ad un valore di poco inferiore all'unità.

4.3 Risultati e sviluppi futuri

I risultati ottenuti dall'elaborazione dei dati raccolti si possono vedere nelle Fig. A.0.2 e A.0.3.

La Fig. A.0.3 mostra cinque grafici a redshift 4.2, 2, 1, 0.5 e 0. Ogni grafico contiene 4 curve, che rappresentano la distribuzione di x per ogni bin di massa.

Le curve sono normalizzate per il numero di aloni che sono stati conteggiati sotto la rispettiva curva e per la larghezza dei bin scelti sull'asse x .

La Fig. A.0.2 mostra le stesse curve, ma da una prospettiva differente. I quattro grafici sono infatti divisi per bin di massa e ogni grafico contiene 5 curve, che rappresentano la distribuzione di x ad ogni redshift considerato. Anche in questo caso le curve sono normalizzate per il numero di aloni che

sono stati conteggiati sotto la rispettiva curva e per la larghezza dei bin scelti sull'asse x .

Considerando le due figure, si può affermare che i picchi delle distribuzioni si collocano tutti nella stessa posizione, intorno ad un valore di x compreso fra 0.3 e 1. Fa eccezione la curva 13.5 a redshift 4.2, per la quale si ha un problema di carenza del campione statistico, cioè il numero di aloni identificati è estremamente basso (dell'ordine della decina).

Le code delle varie curve hanno andamenti molto differenti. Osservando infatti la Fig. A.0.2, si può notare come le code a redshift inferiore stiano sistematicamente sopra quelle a redshift superiore: questo si può spiegare considerando che la probabilità che un progenitore principale incontri un satellite con $M_S \ll M_{PP}$ è più alta in un Universo più evoluto. Questo effetto è poco evidente nel primo grafico, poichè il taglio a $\log x \simeq -3$ è frutto del limite inferiore di risoluzione in massa delle simulazioni, ma è ben visibile in tutti gli altri.

Per comprendere l'origine dell'universalità della posizione del picco, dobbiamo parlare nuovamente della USMF, definita in precedenza come la funzione di massa dei satelliti che entrano in un alone ad ogni redshift. Nella Fig. 4.3.1 [Giocoli et al., 2008] vengono mostrate varie USMF ottenute dalla simulazione GIF selezionando in diversi modi il campione statistico. In particolare nel pannello in alto sono state costruite considerando solo il campione di satelliti entrati nel progenitore principale a $z > z_f$, divisi per bin di massa (i numeri nella legenda indicano il valore del logaritmo in base 10 della massa dei satelliti espressa in M_\odot). Con z_f si indica il redshift di formazione, cioè quello al quale il valore della massa del progenitore principale raggiunge metà del valore della massa dell'alone a $z = 0$. Nel pannello centrale sono state ottenute considerando solo il campione di satelliti entrati nel progenitore principale a $z < z_f$, divisi per bin di massa, mentre in basso sono state costruite considerando tutti i satelliti entrati nel progenitore principale a qualsiasi z , divisi per bin di massa. In tutti e tre i pannelli le curve risultano essere sovrapposte, il che porta a dedurre che la USMF non dipenda nè da z , nè dalla massa dell'alone.

Andando a studiare solo il rapporto fra masse del progenitore principale e del satellite più massiccio, in virtù dello studio preliminare condotto in precedenza, il quale ci assicura che $M_{PP} \sim M_H$, il lavoro di tesi si è focalizzato sulla regione ad alti valori di x della USMF. Questo perchè la regione del "ginocchio" della curva è frutto del merging fra gli aloni più massicci, fra cui il satellite più massiccio, da noi studiato.

Il carattere di universalità ritrovato nel picco dei nostri grafici discende quindi direttamente dall'universalità della USMF.

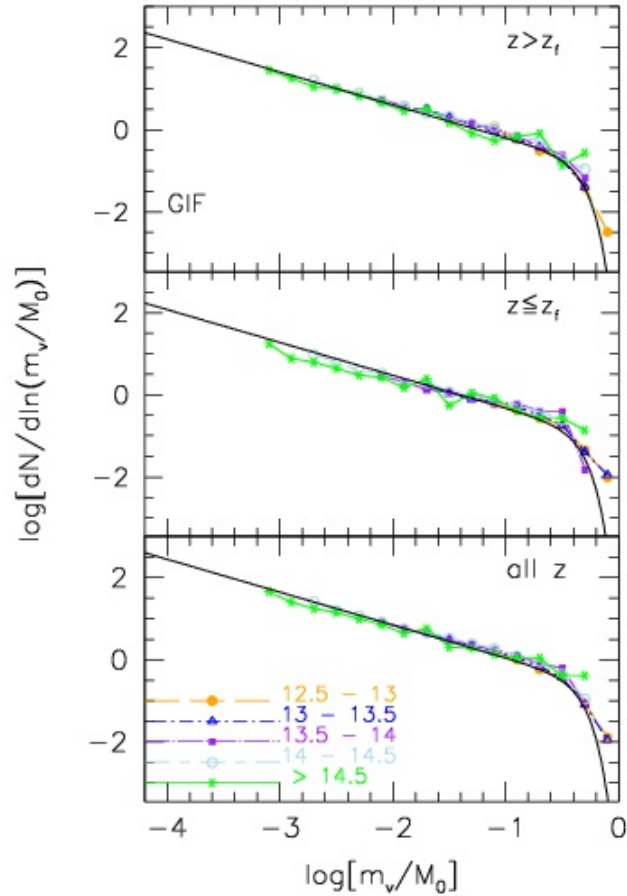
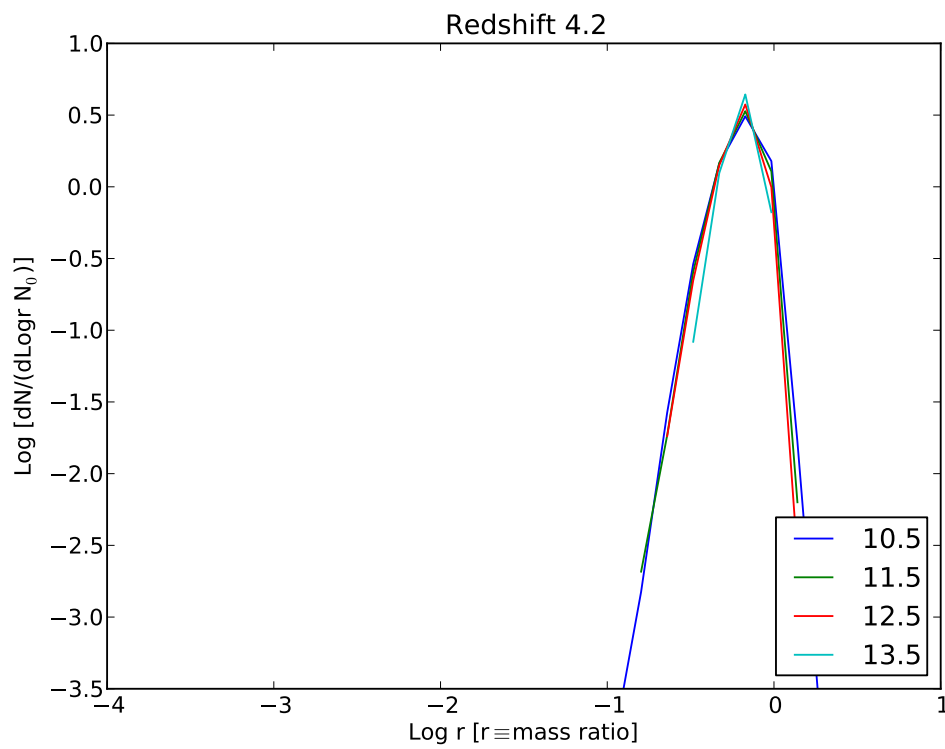


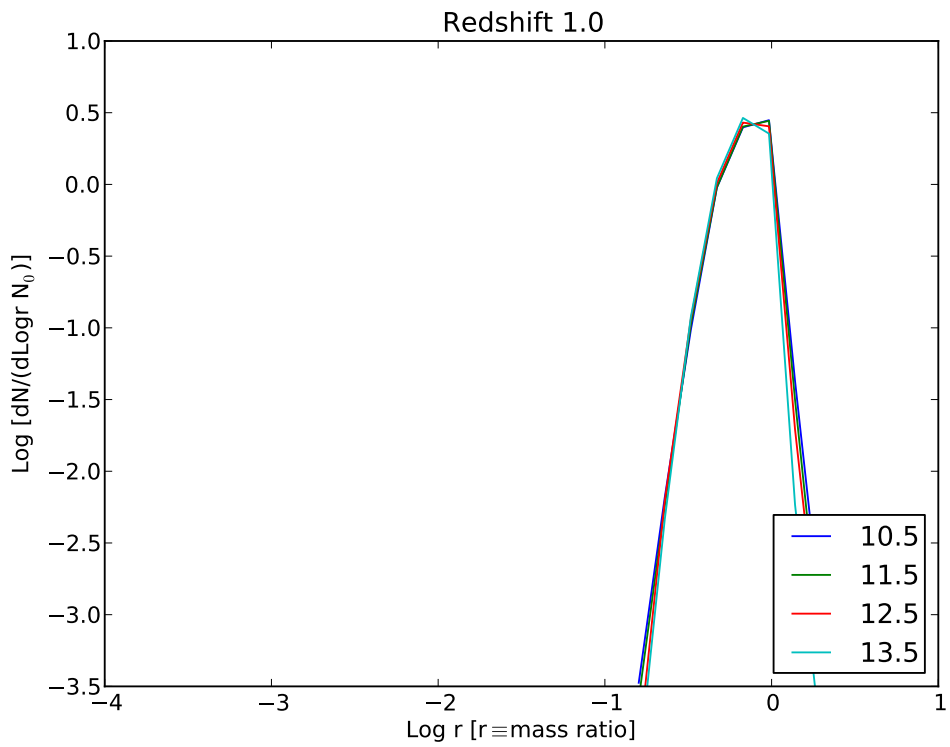
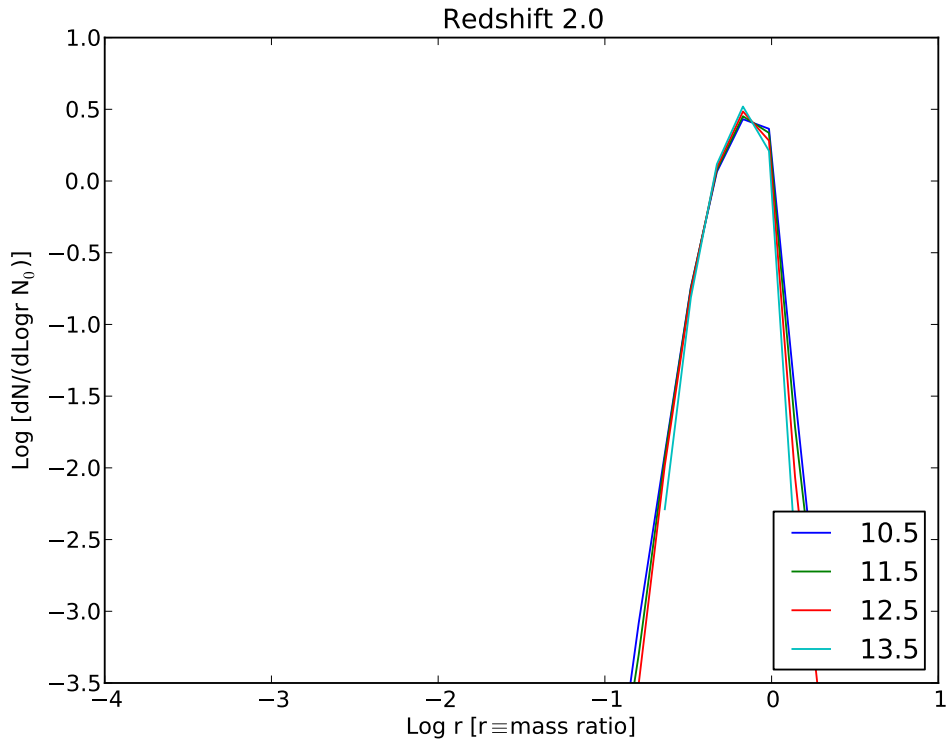
Figura 4.3.1: USMF costruite con campioni statistici differenti mediante la simulazione GIF [Giocoli et al., 2008]. Nei tre pannelli si nota l'indipendenza della USMF dal redshift e dalla massa dell'alone.

Giunti a queste conclusioni, ci si può chiedere quali siano i possibili sviluppi futuri per un lavoro di questo genere. In particolare potrebbe essere interessante studiare eventuali nuove modalità di normalizzazione delle distribuzioni, con l'obiettivo di interpretare da un punto di vista più approfondito la fisica sottostante alle simulazioni. Inoltre si dovranno analizzare possibili bias statistici dovuti ad effetti numerici tralasciati nell'ambito di questo lavoro. Infine si potrà ottenere un'analisi più approfondita del fenomeno descritto ampliando il campione statistico utilizzato.

Appendice A

Figure del testo





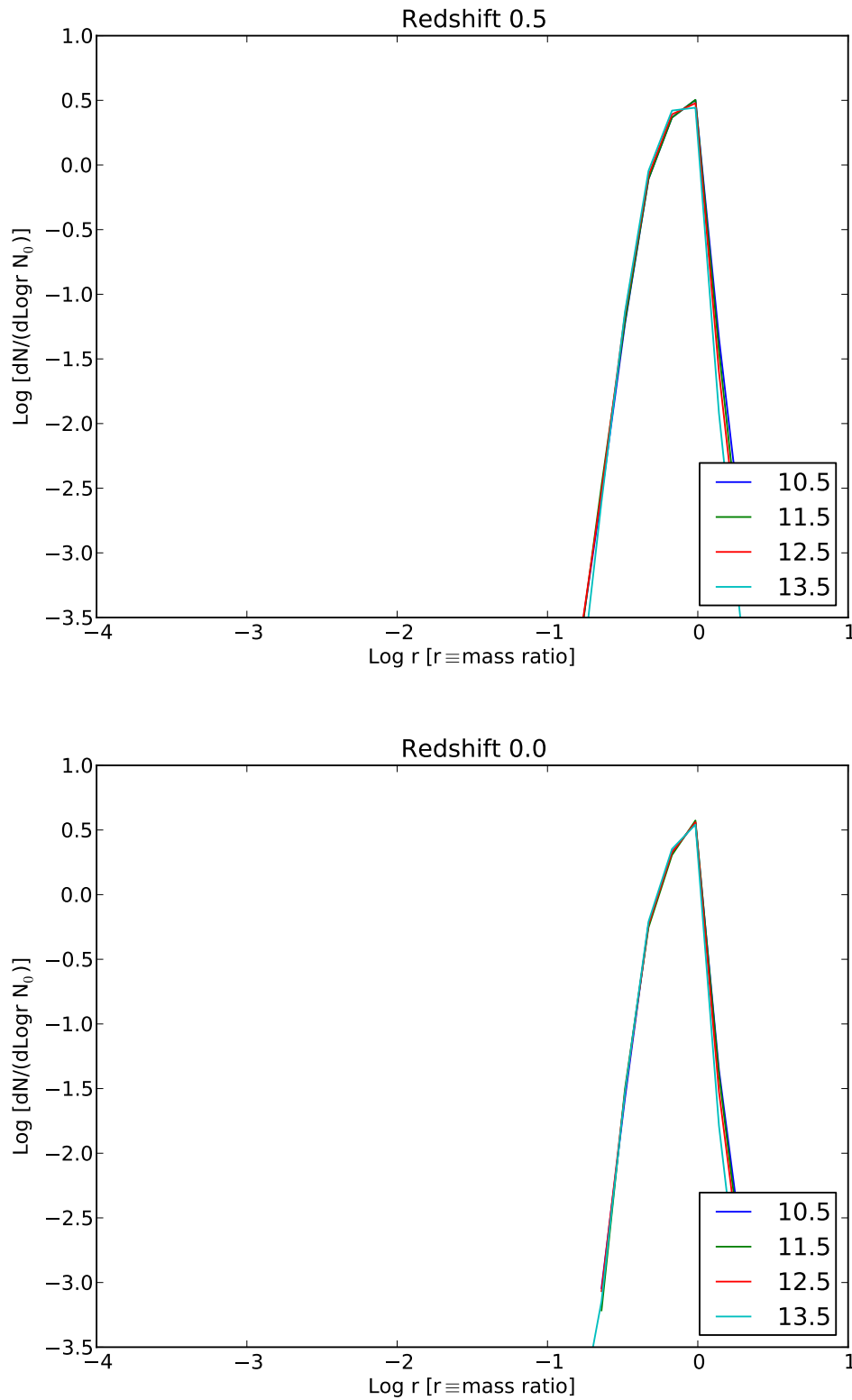
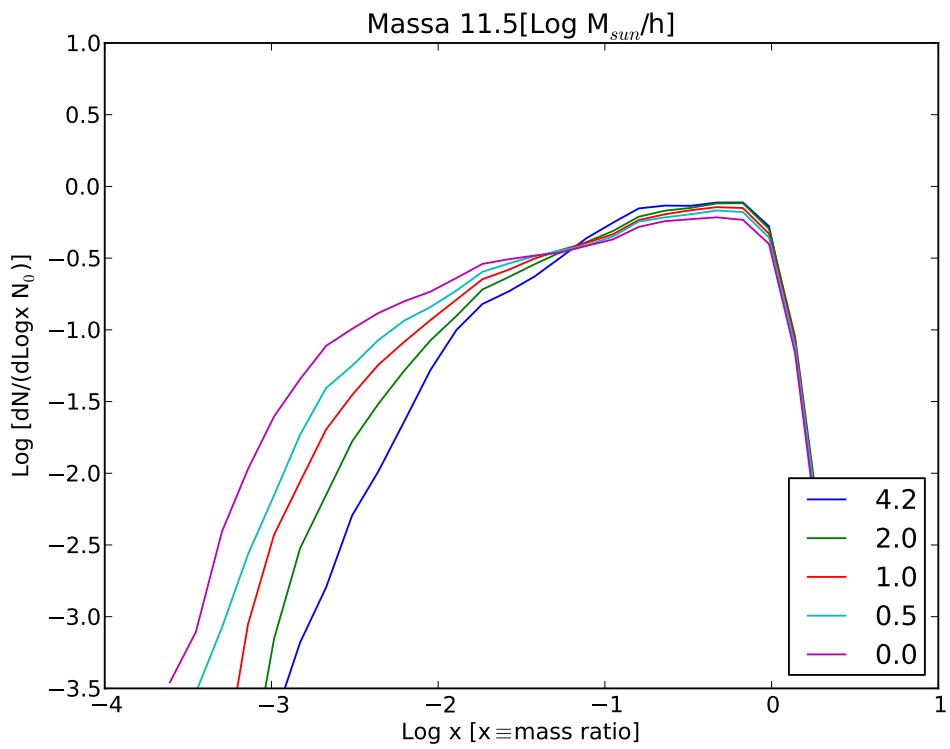
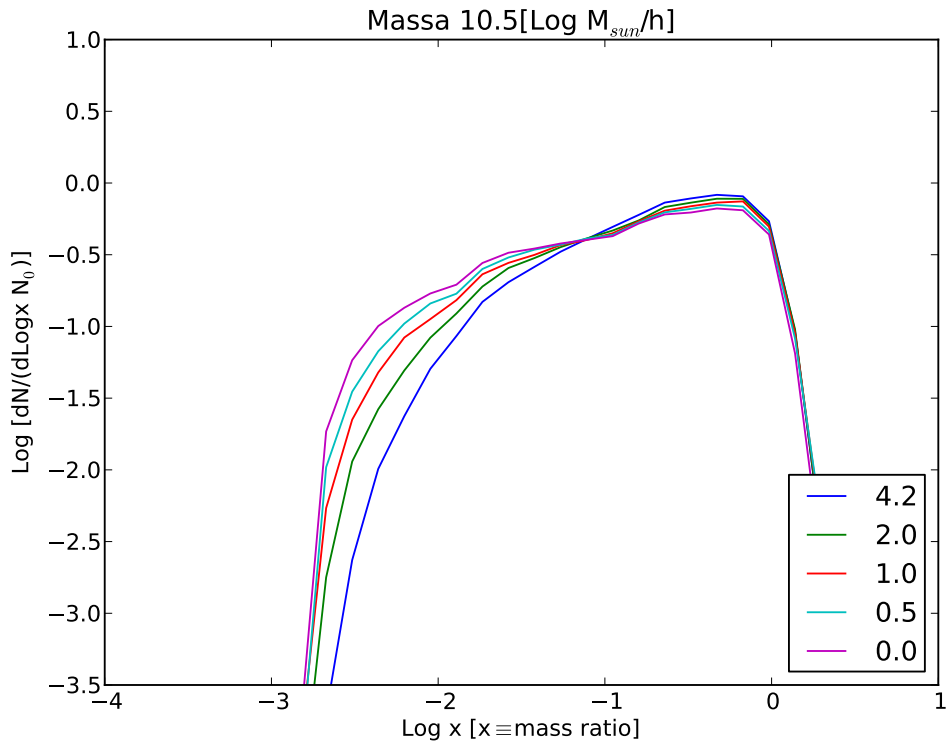


Figura A.0.1: I cinque grafici rappresentano la distribuzione del rapporto $r = \frac{M_{PP}}{M_H}$ per ogni bin di massa ad ogni redshift considerato (il numero segnalato per la massa è il valore del logaritmo in base 10 del centro del bin).



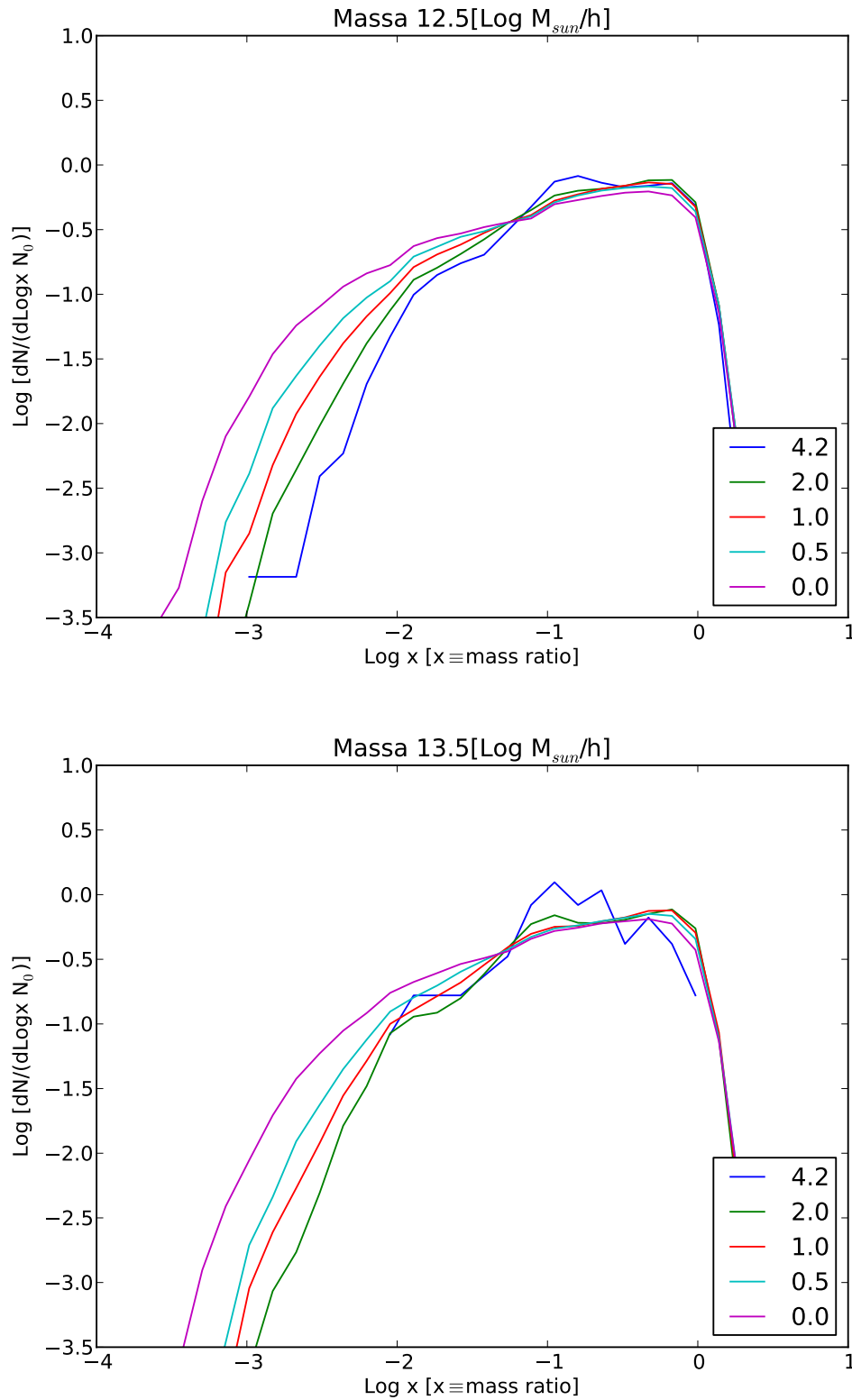
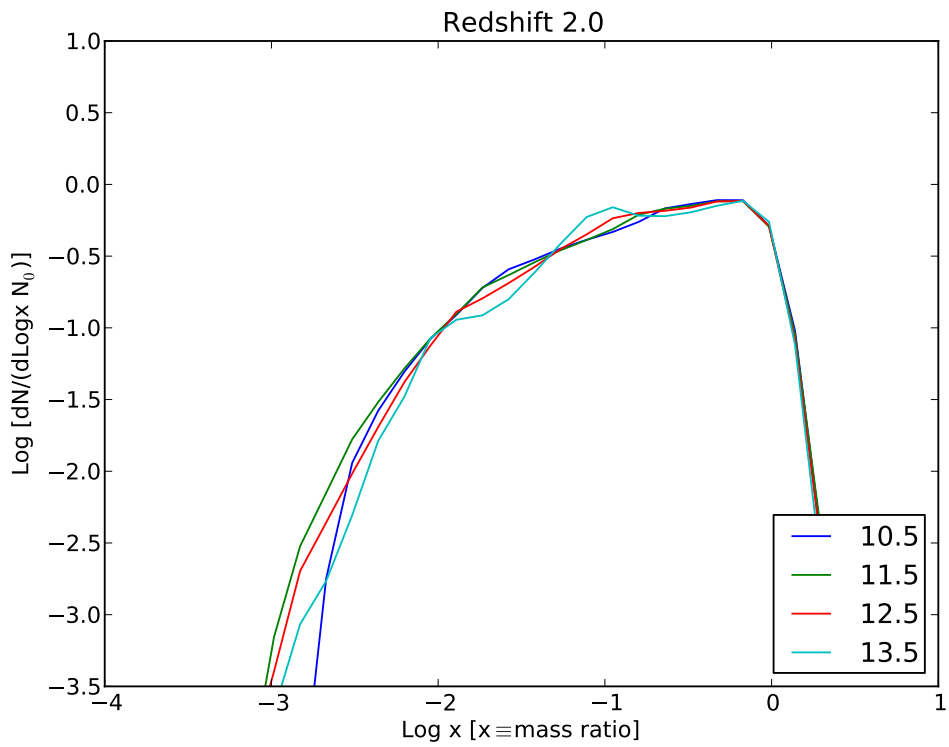
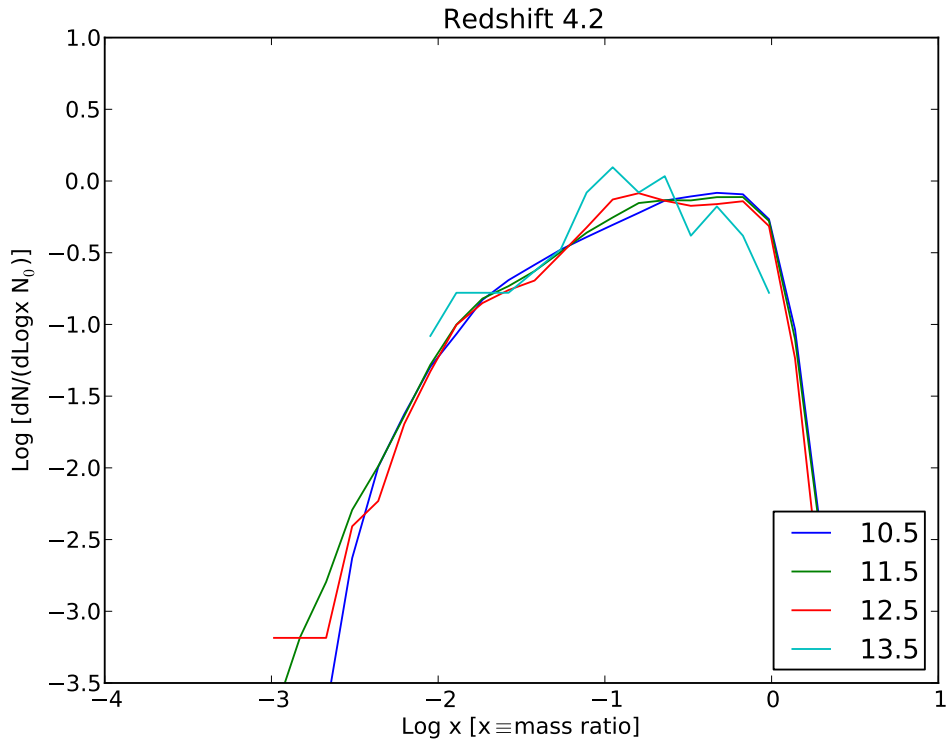
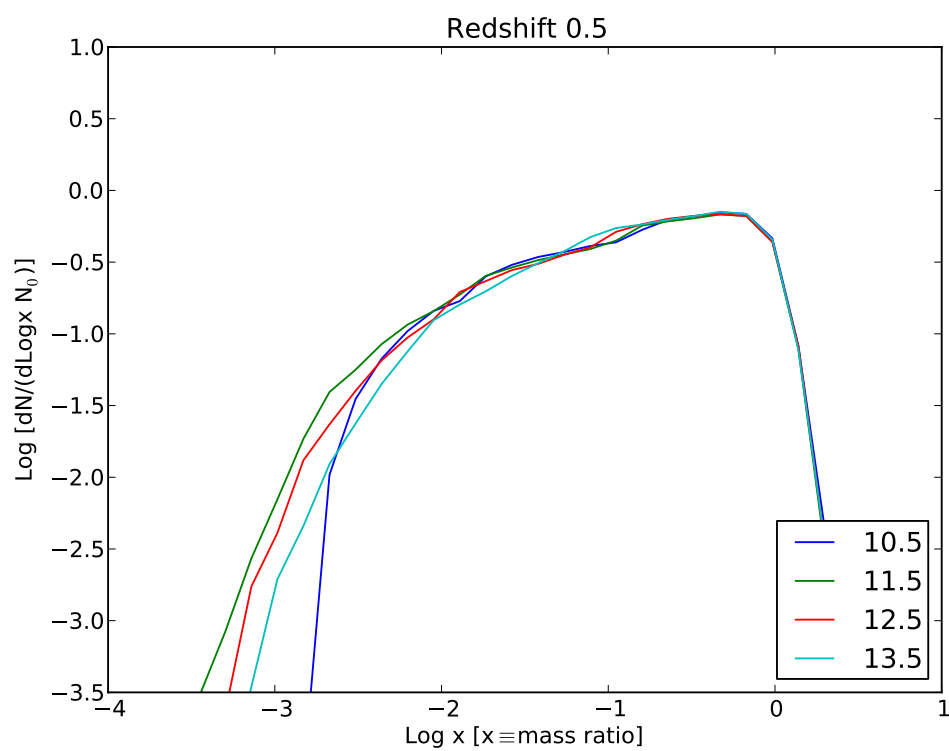
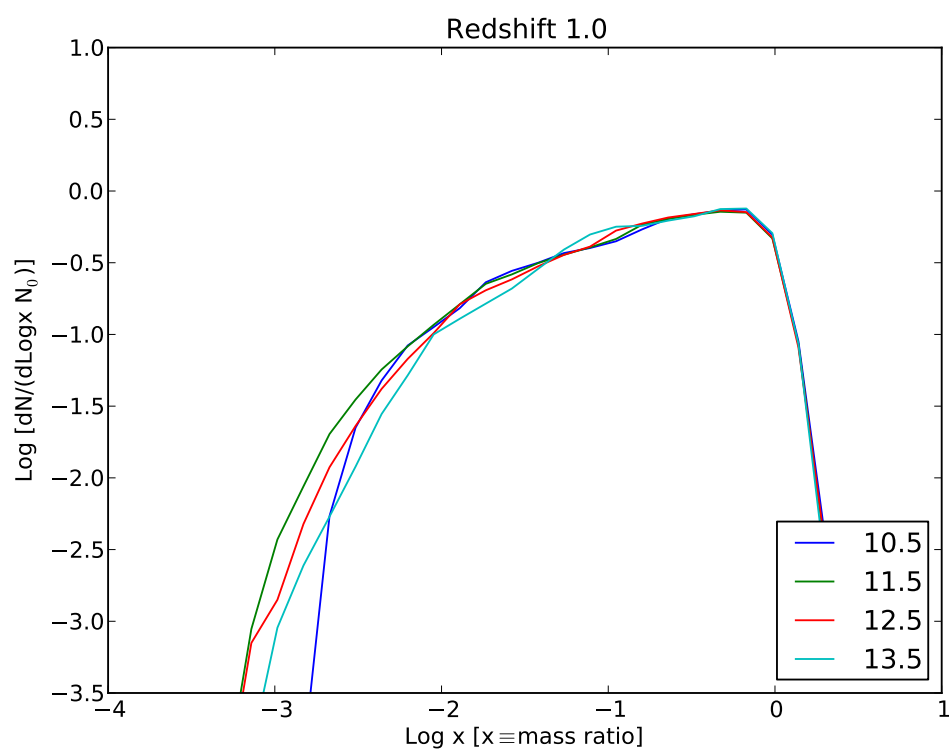


Figura A.0.2: I quattro grafici rappresentano la distribuzione del rapporto $x = \frac{M_S}{M_{PP}}$ per ogni bin di massa ad ogni redshift considerato (il numero segnalato per la massa è il valore del logaritmo in base 10 del centro del bin).





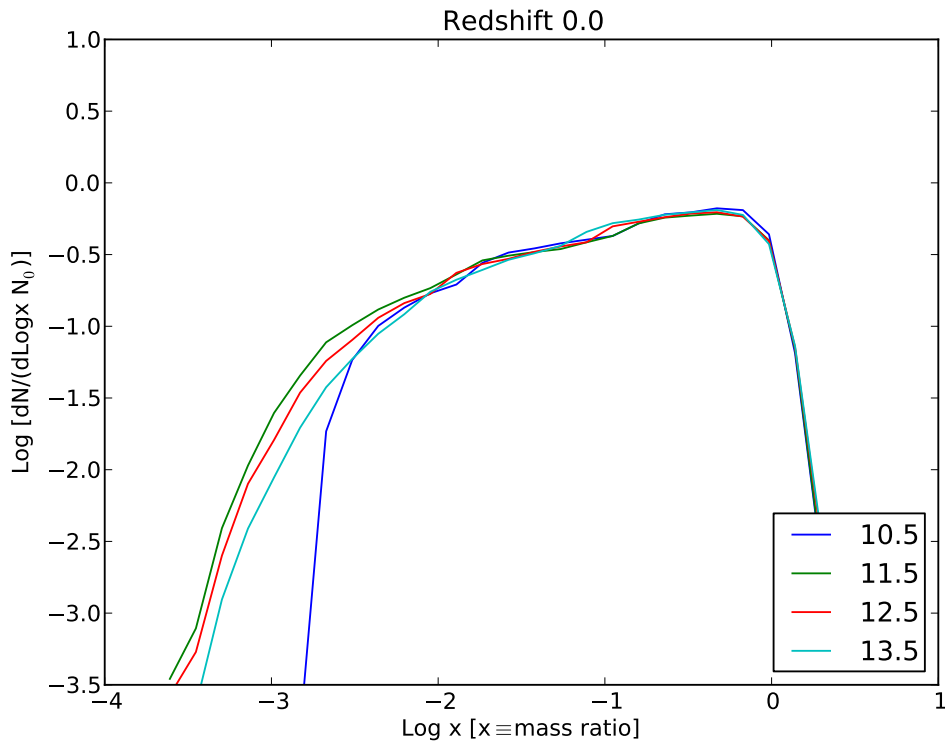


Figura A.0.3: I cinque grafici rappresentano la distribuzione del rapporto $x = \frac{M_S}{M_{PP}}$ per ogni bin di massa ad ogni redshift considerato (il numero segnalato per la massa è il valore del logaritmo in base 10 del centro del bin).

Bibliografia

Giulia Despali. Evoluzione della forma dei protoaloni di materia oscura.

Alberto Franceschini. Corso di cosmologia.

C. Giocoli, G. Tormen, and F. C. van den Bosch. The population of dark matter subhaloes: mass functions and average mass-loss rates. June 2008.

C. Giocoli, G. Tormen, R. K. Sheth, and F. C. van den Bosch. The substructure hierarchy in dark matter haloes. May 2010.

P. Meszaros. The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. December 1974.

B. Ryden. *Introduction to cosmology*. 2003.

V. Springel, N. Yoshida, and S. D. M. White. GADGET: a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations. April 2001.

Giuseppe Tormen. Formazione delle strutture cosmiche.