

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

**Introduzione alle varietà toriche da un punto di vista
algebrico e simplettico**

Relatrice

Prof.ssa Luisa Fiorot

Laureanda

Valentina Fabris

2006268

Anno Accademico 2023/2024

23/02/2024

Indice

| | |
|---|------------|
| Indice | i |
| Introduzione | iii |
| 1 Varietà toriche affini | 1 |
| 1.1 Nozioni preliminari | 1 |
| 1.2 Il toro | 2 |
| 1.3 Reticoli e ideali torici | 3 |
| 1.4 Semigrupperi affini | 7 |
| 2 Varietà toriche proiettive e politopi | 11 |
| 2.1 Varietà proiettive | 11 |
| 2.2 Varietà toriche proiettive | 13 |
| 2.3 Varietà toriche proiettive equivarianti | 14 |
| 2.4 Politopi | 15 |
| 2.5 Decomposizione orbitale | 17 |
| 3 Varietà toriche simplettiche | 21 |
| 3.1 Prerequisiti di geometria simplettica | 21 |
| 3.2 Azioni hamiltoniane | 22 |
| 3.3 Varietà toriche simplettiche | 24 |
| 4 Teorema di Delzant | 27 |
| 4.1 Politopi di Delzant | 27 |
| 4.2 Spazi orbitali | 29 |
| 4.3 Riduzione simplettica | 29 |
| 4.4 Costruzione di Delzant | 31 |
| Bibliografia | 35 |

Introduzione

Il proposito di questo lavoro è quello di fornire un'introduzione alle *varietà toriche*, sia da un punto di vista algebrico, che da un punto di vista симпlettico. Questa tesi sarà dunque divisa in due parti dalla simile struttura, che tratteranno i due diversi approcci. A un richiamo di nozioni base di geometria algebrica e симпlettica, seguirà l'introduzione delle varietà toriche, presentandone una costruzione dalla quale emergerà la connessione con i *politopi*. Ricordiamo che con politopo si intende l'involuppo convesso di un sottoinsieme finito S .

Nel primo capitolo verranno introdotte alcune definizioni di geometria algebrica necessarie per la trattazione a venire. In seguito, verrà fornita una caratterizzazione algebrica delle varietà toriche, a partire dai loro *caratteri* e *sottogruppi a un parametro*. Seguirà poi la trattazione degli *ideali torici*: infatti una varietà torica può essere vista come una varietà algebrica definita da un ideale generato da binomi i cui esponenti hanno particolari proprietà correlate al semigruppone affine e dunque al sottoreticolo relativo alla varietà. In questo contesto, con *reticolo* si fa riferimento a un gruppo abeliano libero di rango finito.

Il secondo capitolo verterà sulla connessione tra *politopi* e *varietà toriche*: verrà infatti provata l'effettiva corrispondenza biunivoca che sussiste tra le facce di un politopo e le orbite dell'azione di un toro, concludendo così la trattazione dell'argomento dal punto di vista algebrico.

Nel terzo capitolo verranno introdotte delle nozioni di base di geometria симпlettica, necessarie per definire le *varietà toriche симпlettiche*. Una varietà torica симпlettica è una varietà симпlettica (M, ω) dotata di un'azione hamiltoniana effettiva di un toro \mathbb{T} di dimensione pari alla metà della dimensione di M :

$$\dim(\mathbb{T}) = \frac{1}{2} \dim(M)$$

e la cui scelta corrisponde alla mappa dei momenti μ .

Il focus del quarto capitolo sarà quello di presentare una classe particolare di politopi, detti *politopi di Delzant*. Essi sono particolari politopi soddisfacenti alle proprietà di *simplicity*, *rationality* e *smoothness*. Il risultato principale di questa sezione sarà il *teorema di Delzant*, che prova l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra varietà toriche симпlettiche e politopi di Delzant. Per provare l'esistenza di tale mappa, verrà usata una particolare tecnica, la *riduzione симпlettica*, allo scopo di associare un politopo n -dimensionale Δ a una varietà torica симпlettica $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$.

Capitolo 1

Varietà toriche affini

In questo capitolo si darà la definizione di *varietà torica* e se ne fornirà una descrizione dal punto di vista algebrico. Prima di tutto, però, bisogna dare alcune definizioni di base di geometria algebrica

1.1 Nozioni preliminari

Definizione 1.1.1 (Varietà affine). *Consideriamo un ideale $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Ad esso rimane associata una varietà affine*

$$V(I) = \{p \in \mathbb{C}^n \text{ t.c. } f(p) = 0 \forall f \in I\}$$

e ad una varietà affine $V \subseteq \mathbb{C}^n$ si può associare l'ideale

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \text{ t.c. } f(p) = 0 \forall p \in V\}.$$

Il più importante oggetto algebrico associato ad una varietà affine V è il suo *anello delle coordinate*

$$\mathbb{C}[V] = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{I(V)}$$

Gli elementi di $\mathbb{C}[V]$ possono essere interpretati come funzioni polinomiali a valori in \mathbb{C} su V . Si osservi che $\mathbb{C}[V]$ ha la struttura di una \mathbb{C} -algebra: ciò significa che la sua struttura di spazio vettoriale è compatibile con la sua struttura di anello.

Un fatto di notevole importanza, è la corrispondenza tra i punti di una varietà affine V e gli ideali massimali del suo anello delle coordinate $\mathbb{C}[V]$. Infatti, a un punto $p \in V$ rimane associato l'ideale massimale

$$m_p = \{f \in \mathbb{C}[V] \text{ t.c. } f(p) = 0\}$$

e tutti gli ideali massimali di $\mathbb{C}[V]$ si ottengono in questo modo. Dato che la varietà affine V può essere ricostruita dal suo anello delle coordinate usando come punti gli ideali massimali si definisce

$$V = \text{Spec}(\mathbb{C}[V]).$$

Data una varietà affine $V \subseteq \mathbb{C}^n$, useremo due topologie. La prima è la *topologia standard*, indotta dall'usuale topologia su \mathbb{C}^n . La seconda è la *topologia di Zariski* che definiamo come segue.

Definizione 1.1.2 (Topologia di Zariski). *Data una varietà affine V contenuta in \mathbb{C}^n , la topologia su V che ha come chiusi sottovarietà di V , ossia varietà affini di \mathbb{C}^n contenute in V , si dice topologia di Zariski. Gli aperti di Zariski sono i complementari dei chiusi.*

Si osservi che gli aperti di Zariski sono aperti anche nella topologia standard, dal momento che le sottovarietà sono chiuse in essa (infatti i polinomi sono funzioni continue).

Definizione 1.1.3 (Chiusura di Zariski). *Dato un sottoinsieme $S \subseteq V$, la sua chiusura \bar{S} nella topologia di Zariski è la più piccola sottovarietà di V contenente S . \bar{S} verrà chiamata chiusura di Zariski di S .*

Esempio 1.1.1.

Il toro n -dimensionale $T = (\mathbb{C}^*)^n$ è un insieme affine aperto:

$$(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus V(x_1 \dots x_n) \subseteq \mathbb{C}^n$$

con anello delle coordinate

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \dots x_n} = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

Gli elementi di questo anello si chiamano polinomi di Laurent.

1.2 Il toro

La varietà affine $(\mathbb{C}^*)^n$ è un gruppo sotto l'operazione di moltiplicazione componente per componente. Il toro affine n -dimensionale è una varietà affine isomorfa a $(\mathbb{C}^*)^n$, ed esso eredita la struttura di gruppo dall'isomorfismo. Iniziamo definendone il *carattere* e i *sottogruppi a un parametro*.

Definizione 1.2.1 (Carattere). *Un carattere di un toro T è un morfismo $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ che è un omomorfismo di gruppi.*

Per esempio, $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ fornisce il carattere $\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ definito da

$$\chi^m(t_1, \dots, t_n) = t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}$$

Si dimostra che *tutti* i caratteri di $(\mathbb{C}^*)^n$ si ottengono in questo modo; si veda [2].

Considerato un toro arbitrario T , i suoi caratteri formano un gruppo abeliano libero M di rango uguale alla dimensione di T . Ossia se $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$, allora $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}^n$. Enunciamo i seguenti risultati riguardanti i tori.

Proposizione 1.2.1. *Siano T_1 e T_2 due tori, e sia $\Phi : T_1 \rightarrow T_2$ un morfismo che sia un omomorfismo di gruppi. Allora l'immagine di Φ è un toro ed è chiusa in T_2 .*

Proposizione 1.2.2. *Sia T un toro e sia $H \subseteq T$ una sottovarietà irriducibile di T , che sia anche sottogruppo. Allora H è un toro.*

Per la dimostrazione dei due precedenti risultati, si rimanda a [2].

Consideriamo ora uno spazio vettoriale W di dimensione finita su \mathbb{C} . Supponiamo che un toro T agisca linearmente su W , ove si denoti con $t \cdot w$ l'azione di $t \in T$ su $w \in W$. Dato $\chi^m \in M$, definiamo:

$$W_m = \{w \in W \text{ t.c. } t \cdot w = \chi^m(t)w \forall t \in T\}$$

Definizione 1.2.2 (Sottogruppo a un parametro). *Un sottogruppo a un parametro di un toro T è un morfismo $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$ che è un omomorfismo di gruppi.*

Per esempio $u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ fornisce un sottogruppo a un parametro $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ definito da:

$$\lambda^u(t) = (t^{b_1}, \dots, t^{b_n})$$

Si dimostra che *tutti* i sottogruppi a un parametro di $(\mathbb{C}^*)^n$ si ottengono in questo modo; si veda [2]. Segue che il gruppo dei sottogruppi a un parametro di $(\mathbb{C}^*)^n$ è naturalmente isomorfo a \mathbb{Z}^n . Dato T un toro arbitrario, i sottogruppi a un parametro formano un gruppo abeliano libero N di rango uguale alla dimensione di T . Ovvero se $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$, allora $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*, T) \simeq \mathbb{Z}^n$.

Si può definire come segue un prodotto scalare naturale:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$$

- *INTRINSECO*: dato un carattere χ^m e un sottogruppo a un parametro λ^u , la loro composizione $\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ è un carattere di \mathbb{C}^* , dato da $t \mapsto t^l$ per qualche $l \in \mathbb{Z}$. Allora abbiamo che $\langle m, u \rangle = l$.
- *CONCRETO*: Se $T = (\mathbb{C}^*)^n$ con $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, allora abbiamo che:

$$\langle m, u \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

ossia l'usuale prodotto scalare.

Ne segue che i caratteri e i sottogruppi a un parametro di un toro T formano gruppi abeliani liberi M e N di rango finito con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ che identifica N con $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ e M con $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$.

1.3 Reticoli e ideali torici

Definizione 1.3.1 (Varietà torica affine). *Una varietà torica affine è una varietà affine irriducibile V tale che:*

- il toro $T_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ sia contenuto in V , e sia esso sottoinsieme aperto rispetto alla topologia di Zariski di V
- l'azione di T_N su se stesso si estende a un'azione di T_N su V .

Nella precedente definizione, con *azione* si intende quella data dalla struttura di gruppo, ossia quella data dal morfismo $T_N \times V \rightarrow V$ ove la coppia (t, v) viene mandata in $t \cdot v$ e dove \cdot è l'operazione di gruppo ereditata da $T_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$.

Esempio 1.3.1.

La curva piana $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ ha una cuspidale nell'origine. Essa costituisce una varietà torica affine con toro

$$T_N = \mathbb{C}^* \simeq C \setminus \{0\} = C \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3) \text{ t.c. } t \in \mathbb{C}^*\},$$

ove l'isomorfismo è dato da $t \mapsto (t^2, t^3)$. In questo caso l'azione di T_N si estende a C nel seguente modo:

$$t \cdot (x, y) = (t^2x, t^3y)$$

Definizione 1.3.2 (Reticolo). *Un reticolo è un gruppo abeliano libero di rango finito. Dunque un reticolo di rango n è isomorfo a \mathbb{Z}^n .*

Ad esempio, un toro T_N ha reticoli M dei caratteri e N dei sottogruppi a un parametro. Dato un toro T_N con reticolo dei caratteri M , un insieme $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, definisce i caratteri

$$\chi^{m_i} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^*$$

Consideriamo quindi la mappa

$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^s$$

definita da:

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \in \mathbb{C}^s$$

Definizione 1.3.3. *Dato un insieme finito $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$, la varietà torica affine $Y_{\mathcal{A}}$ è definita come la chiusura di Zariski dell'immagine della mappa $\Phi_{\mathcal{A}}$ definita sopra.*

La definizione è giustificata dal seguente risultato.

Proposizione 1.3.1. *Dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ come sopra, sia $\mathbb{Z}\mathcal{A} \subseteq M$ il sottoreticolo generato da \mathcal{A} . Allora $Y_{\mathcal{A}}$ è una varietà torica affine il cui toro ha reticolo dei caratteri $\mathbb{Z}\mathcal{A} \leq M$. In particolare, la dimensione di $Y_{\mathcal{A}}$ è uguale al rango di $\mathbb{Z}\mathcal{A}$.*

Dimostrazione.

Consideriamo la mappa tra tori

$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^s$$

Per la Proposizione 1.2.1, l'immagine $T = \Phi_{\mathcal{A}}(T_N)$ è un toro ed è chiusa in $(\mathbb{C}^*)^s$. Ciò implica che $Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$, dal momento che $Y_{\mathcal{A}}$ è la chiusura di Zariski dell'immagine. Ne segue che l'immagine T è un aperto di Zariski in $Y_{\mathcal{A}}$. Inoltre, T è irriducibile (è un toro), dunque anche la sua chiusura di Zariski $Y_{\mathcal{A}}$ è irriducibile.

Si consideri ora l'azione di T . Dal momento che $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$, un elemento $t \in T$ agisce su \mathbb{C}^s e manda varietà in varietà. Allora:

$$T = t \cdot T \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$$

mostra che $t \cdot Y_{\mathcal{A}}$ è una varietà contenente T . Dunque $Y_{\mathcal{A}} \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$ per definizione di chiusura di Zariski. Sostituendo t con t^{-1} si ottiene $Y_{\mathcal{A}} \subseteq t^{-1} \cdot Y_{\mathcal{A}}$, dunque l'azione di T induce un'azione su $Y_{\mathcal{A}}$. Si conclude che $Y_{\mathcal{A}}$ è una varietà torica affine.

Resta da calcolare il reticolo dei caratteri di T , che sarà temporaneamente denotato con M' . Dal momento che $T = \Phi_{\mathcal{A}}(T_N)$, vi è il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_N & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} & (\mathbb{C}^*)^s \\ & \searrow & \downarrow \\ & & T \end{array}$$

Questo diagramma di tori induce un diagramma commutativo di reticoli di caratteri:

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}} & \mathbb{Z}^s \\ & \searrow & \downarrow \\ & & M' \end{array}$$

Dal momento che $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^s \rightarrow M$ manda la base standard e_1, \dots, e_s in m_1, \dots, m_s , l'immagine di $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}$ è $\mathbb{Z}\mathcal{A}$. Dal diagramma otteniamo che $M' \simeq \mathbb{Z}\mathcal{A}$. Allora si ottiene il risultato voluto, dal momento che la dimensione di un toro equivale al rango del suo reticolo dei caratteri. \square

In termini concreti, fissata una base di M , assumiamo $M = \mathbb{Z}^n$. Allora gli s vettori in $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ possono essere visti come le colonne di una matrice A $n \times s$ a entrate intere. In questo caso, la dimensione di $Y_{\mathcal{A}}$ è semplicemente il rango della matrice A .

Sia $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s])$ una varietà torica affine ottenuta da un insieme finito $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$. Possiamo descrivere l'ideale $I(Y_{\mathcal{A}}) \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ come segue. Come nella dimostrazione della Proposizione 1.3.1, $\Phi_{\mathcal{A}}$ induce una mappa tra i reticoli dei caratteri

$$\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^s \rightarrow M$$

che manda la base standard e_1, \dots, e_s nella base m_1, \dots, m_s . Sia L il kernel di questa mappa, abbiamo allora la seguente sequenza esatta sinistra:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow M$$

In parole più semplici, gli elementi $l = (l_1, \dots, l_s) \in L$ soddisfano $\sum_{i=1}^s l_i m_i = 0$. Dato $l = (l_1, \dots, l_s) \in L$ definiamo

$$l_+ = \sum_{l_i > 0} l_i e_i$$

$$l_- = - \sum_{l_i < 0} l_i e_i$$

Notiamo che $l = l_+ - l_-$ e che $l_+, l_- \in \mathbb{N}^s$. Il binomio

$$x^{l_+} - x^{l_-} := \prod_{l_i > 0} x_i^{l_i} - \prod_{l_i < 0} x_i^{-l_i}$$

si annulla sull'immagine di $\Phi_{\mathcal{A}}$ e dunque su $Y_{\mathcal{A}}$, dato che $Y_{\mathcal{A}}$ è la chiusura di Zariski dell'immagine. Infatti:

$$\prod_{l_i > 0} (t^{m_i})^{l_i} = \prod_{l_j < 0} (t^{m_j})^{-l_j}$$

$$t^{\sum_{l_i > 0} m_i l_i} = t^{\sum_{l_j < 0} m_j l_j}.$$

Proposizione 1.3.2. *L'ideale della varietà torica affine $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$ è dato da:*

$$I(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^{l_+} - x^{l_-} \text{ t.c. } l \in L \rangle = \langle x^\alpha - x^\beta \text{ t.c. } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ e } \alpha - \beta \in L \rangle$$

Dimostrazione.

L'uguaglianza dei due ideali risulta evidente dalle definizioni precedenti. Denotiamo l'ideale a destra dell'uguaglianza con I_L . Ricordiamo che $I(Y_{\mathcal{A}}) = \{f \in \mathbb{C}^s \text{ t.c. } f(p) = 0 \forall p \in V\}$. Abbiamo appena mostrato che $x^{l_+} - x^{l_-}$ si annulla in $Y_{\mathcal{A}}$, quindi per definizione appartiene a $I(Y_{\mathcal{A}})$, da cui si ottiene $I_L \subseteq I(Y_{\mathcal{A}})$. Dobbiamo provare l'inclusione opposta. Si scelga un ordine monomiale $>$ su $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ e un isomorfismo $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$. Allora possiamo assumere che $M = \mathbb{Z}^n$ e che la mappa $\Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^s$ sia data dai monomi di Laurent t^{m_i} nelle variabili t_1, \dots, t_n . Se per assurdo $I_L \neq I(Y_{\mathcal{A}})$, scegliamo $f \in I(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$ tale che il suo monomio principale $x^\alpha = \prod_{i=1}^s x_i^{a_i}$ abbia grado minimo. Dal momento che $f(t^{m_1}, \dots, t^{m_s})$ è identicamente nullo come polinomio nelle variabili t_1, \dots, t_n , deve verificarsi una cancellazione che coinvolge il termine proveniente da x^α . In altre parole, f contiene un monomio $x^\beta = \prod_{i=1}^s x_i^{b_i} < x^\alpha$ tale che

$$\prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{a_i} = \prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{b_i}$$

ciò implica che

$$\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i$$

ossia tale che $\alpha - \beta = \sum_{i=1}^s (a_i - b_i) e_i \in L$. Allora $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ per la definizione di I_L . Segue che $f - x^\alpha + x^\beta \in I(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$ e ha un termine di grado massimo strettamente minore di quello di f che però era stato scelto di grado minimo. Questa contraddizione completa la dimostrazione. \square

Da 1.3.2 risulta naturale la seguente definizione.

Definizione 1.3.4 (Ideale di reticolo, ideale torico). *Sia $L \subseteq \mathbb{Z}^s$ un sottoreticolo.*

- *L'ideale $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \text{ t.c. } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ e } \alpha - \beta \in L \rangle$ si dice ideale di reticolo.*
- *Un ideale di reticolo primo si dice ideale torico.*

Dal momento che le varietà toriche sono irriducibili, gli ideali considerati nella Proposizione 1.3.2 sono ideali torici.

Proposizione 1.3.3. *Un ideale $I \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ è torico se e solo se è primo ed è generato da binomi del tipo $x^\alpha - x^\beta$.*

Dimostrazione.

Per definizione se I è torico allora esso è primo e generato da binomi. Supponiamo dunque che I sia primo e generato da binomi $x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$. Osserviamo ora che $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ è non vuoto, dal momento che contiene $(1, \dots, 1)$ ed è un sottogruppo di $(\mathbb{C}^*)^s$. Dal momento che $V(I) \subseteq \mathbb{C}^s$ è irriducibile, segue che $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ è una varietà irriducibile di $(\mathbb{C}^*)^s$, che è anche sottogruppo. Per la Proposizione 1.2.2, $T = V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ è un toro. La proiezione sulla i -esima coordinata fornisce un carattere $T \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow \mathbb{C}^*$, che può essere scritto come $\chi^{m_i} : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ per $m_i \in M$. Segue che $V(I) = Y_{\mathcal{A}}$ per $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ e dato che I è ideale primo, abbiamo $I = I(Y_{\mathcal{A}})$ per il teorema degli zeri di Hilbert. Allora I è ideale torico per la Proposizione 1.3.2. \square

1.4 Semigrupp affini

Definizione 1.4.1 (Semigruppo). *Un semigruppo è un insieme S dotato di un'operazione associativa binaria dotato dell'identità.*

Affinchè un semigruppo sia un *semigruppo affine*, richiediamo che:

- l'operazione binaria su S sia commutativa. Indicheremo l'operazione con $+$ e l'elemento identico con 0 . Dunque un insieme finito $\mathcal{A} \subseteq S$ fornisce:

$$\mathbb{N}\mathcal{A} = \left\{ \sum_{m \in \mathcal{A}} a_m m \text{ t.c. } a_m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S$$

- Il semigruppo è finitamente generato, ossia vi è un insieme finito $\mathcal{A} \subseteq S$ tale che $\mathbb{N}\mathcal{A} = S$
- Il semigruppo può essere immerso in un reticolo M .

Definizione 1.4.2 (Algebra di semigruppo). *Dato un semigruppo affine $S \subseteq M$, l'algebra di semigruppo $\mathbb{C}[S]$ è lo spazio vettoriale su \mathbb{C} con base S e moltiplicazione indotta dalla struttura di semigruppo di S .*

Precisamente, si pensi ad M come il reticolo dei caratteri di un toro T_N , così m fornisce il carattere χ^m . Allora abbiamo:

$$\mathbb{C}[S] = \left\{ \sum_{m \in S} c_m \chi^m \text{ t.c. } c_m \in \mathbb{C} \text{ e } c_m = 0 \forall m \in S \setminus F \text{ con } F \text{ insieme finito} \right\}$$

con moltiplicazione indotta da:

$$\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}.$$

Se $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ per $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$, allora $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$.

Esempio 1.4.1.

Se e_1, \dots, e_n è una base di un reticolo M , allora M è generato da $\mathcal{A} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ come semigruppone affine. Ponendo $t_i = \chi^{e_i}$, si identifica l'algebra del semigruppone $\mathbb{C}[M]$ con l'anello dei polinomi di Laurent:

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}],$$

come visto in precedenza, $\mathbb{C}[M]$ risulta essere l'anello delle coordinate del toro T_N .

I semigruppone affini permettono di generare varietà toriche affini come segue.

Proposizione 1.4.1. *Sia $S \subseteq M$ un semigruppone affine.*

- $\mathbb{C}[S]$ è un dominio di integrità ed è finitamente generato come \mathbb{C} -algebra.
- $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ è una varietà torica affine il cui toro ha reticolo dei caratteri $\mathbb{Z}S$, e se $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$, con $\mathcal{A} \subseteq M$ insieme finito, allora $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) = Y_{\mathcal{A}}$.

Dimostrazione.

Come è stato osservato in precedenza, se $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$, allora $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$, dunque $\mathbb{C}[S]$ è finitamente generato. Dal fatto che $S \subseteq M$, segue che $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$, quindi dall'Esempio 1.4.1 segue che $\mathbb{C}[S]$ è dominio di integrità. Consideriamo il seguente omomorfismo di \mathbb{C} -algebre:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] &\longrightarrow \mathbb{C}[M] \\ x_i &\longmapsto \chi^{m_i} \end{aligned}$$

ciò corrisponde al morfismo

$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^s$$

definito da:

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \in \mathbb{C}^s$$

equivalentemente, possiamo scrivere $\pi = (\Phi_{\mathcal{A}})^*$. Si può verificare che il kernel di π è l'ideale torico $I(Y_{\mathcal{A}})$. L'immagine di π è $\mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}] = \mathbb{C}[S]$, e l'anello delle coordinate di $Y_{\mathcal{A}}$ è

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[Y_{\mathcal{A}}] &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Y_{\mathcal{A}}) \\ &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\ker(\pi) \\ &\simeq \operatorname{Im}(\pi) = \mathbb{C}[S]. \end{aligned}$$

Ciò prova che $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S]) = Y_{\mathcal{A}}$. Dal momento che $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ implica $\mathbb{Z}S = \mathbb{Z}\mathcal{A}$ il toro $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S]) = Y_{\mathcal{A}}$ ha il reticolo di caratteri desiderato per la Proposizione 1.3.1. \square

Il seguente esempio chiarisce il significato della Proposizione 1.4.1.

Esempio 1.4.2.

Si consideri il semigruppato $S \subseteq \mathbb{Z}$ generato da 2 e da 3, dunque $S = \{0, 2, 3, \dots\}$. Per studiare l'algebra di semigruppato $\mathbb{C}[S]$ ci riconduciamo all'Esempio 1.3.1. Ponendo $\mathcal{A} = \{2, 3\}$, allora $\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2, t^3)$ e l'ideale torico è dato da $I(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^3 - y^2 \rangle$. Dunque abbiamo che :

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t^2, t^3] \simeq \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle x^3 - y^2 \rangle}$$

e la varietà torica affine $Y_{\mathcal{A}}$ è la cubica cuspidale $x^3 = y^2$.

Capitolo 2

Varietà toriche proiettive e politopi

Nel Capitolo 1, sono state introdotte le *varietà toriche affini*. In generale, una varietà torica è una varietà irriducibile X su \mathbb{C} contenente un toro $T_N \simeq ((\mathbb{C}^*))^n$ come aperto di Zariski, tale che l'azione di $(\mathbb{C}^*)^n$ su sè stesso si estenda a un'azione su X .

2.1 Varietà proiettive

In questo capitolo tratteremo di varietà toriche proiettive. Ricordiamo che lo spazio proiettivo \mathbb{P}^n è definito da

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

dove \mathbb{C}^* agisce via omotetie, ossia $\lambda \cdot (a_0, \dots, a_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ per $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Allora (a_0, \dots, a_n) sono coordinate omogenee di un punto in \mathbb{P}^n e sono ben definite a meno di omotetie.

Diciamo che un polinomio $p \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ si azzerava in un punto $[w_0, \dots, w_n]$ se $p(\lambda w_0, \dots, \lambda w_n) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$. Si noti che questa condizione implica che ogni componente omogenea di p si annulla. Verrà considerata la *topologia di Zariski* su \mathbb{P}^n : un chiuso di Zariski in \mathbb{P}^n è un insieme di zeri comuni di un numero finito di polinomi di $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Un aperto di Zariski è il complementare di un chiuso.

Un'ipersuperficie in \mathbb{P}^n è l'insieme degli zeri di un polinomio omogeneo non costante in $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n] \setminus \{0\}$ il grado del quale è detto grado dell'ipersuperficie. Ricordiamo che un polinomio si dice *ridotto* se ciascuno dei suoi fattori irriducibili ha molteplicità 1.

Definizione 2.1.1 (Varietà proiettiva). *Una varietà proiettiva è un sottoinsieme non vuoto e chiuso di uno spazio proiettivo \mathbb{P}^n .*

Definizione 2.1.2 (Topologia di Zariski su varietà proiettive). *La topologia di Zariski su una varietà proiettiva $X \subset \mathbb{P}^n$ è la topologia secondo la quale gli aperti di Zariski (rispettivamente i chiusi) sono tutti gli insiemi ottenuti intersecando X con un aperto (rispettivamente con un chiuso) in \mathbb{P}^n .*

Una varietà proiettiva X si dice irriducibile se non può essere scritta come unione di due opportuni sottoinsiemi chiusi.

Esempio 2.1.1.

Il prodotto di due spazi proiettivi è una varietà proiettiva. Ciò può essere visto tramite l'immersione di Segre:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\rightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m} \\ ([z], [w]) &\mapsto [z \otimes w] \end{aligned}$$

Le coordinate omogenee di un punto dell'immagine $[z \otimes w]$ sono

$$y_{ij} := z_i w_j, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m$$

L'immagine di S è descritta dal sistema di equazioni

$$y_{ij} y_{kl} = y_{kj} y_{il}, \quad i, k = 0, \dots, n; \quad j, l = 0, \dots, m$$

Dunque $S(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \simeq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è un sottoinsieme chiuso non vuoto di \mathbb{P}^{nm+n+m} . In particolare, $S(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ è il sottoinsieme di punti $[y_{00} : y_{01} : y_{10} : y_{11}] \in \mathbb{P}^3$, determinato dall'equazione quadratica

$$y_{00} y_{11} = y_{01} y_{10}$$

dunque $S(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ è una ipersuperficie non degenera di grado 2 in \mathbb{P}^3 .

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva.

Definizione 2.1.3 (Funzione regolare). *Una funzione regolare su X è una funzione $X \rightarrow \mathbb{C}$ che, localmente in un intorno di ogni punto $x \in X$, può essere scritta come quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado, tale che il denominatore non si annulla in x . L'anello delle funzioni regolari su X si indica con $\mathbb{C}[X]$.*

Tutte le funzioni regolari su \mathbb{P}^n sono costanti. Più genericamente, si dimostra che $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}$ ogniqualvolta che X è una varietà torica irriducibile [3]. L'anello $\mathbb{C}[X]$ non fornisce dunque molte informazioni.

Siano $X \subset \mathbb{P}^n$ e $X' \subset \mathbb{P}^m$ due varietà proiettive. Ricordiamo la mappa di affinizzazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &:= \{[z_0, \dots, z_n] \text{ t.c. } z_k \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n \\ [z_0 : \dots, z_n] &\mapsto \left(\frac{z_0}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k} \right) \end{aligned}$$

Definizione 2.1.4 (Mappa regolare tra varietà toriche). *Una mappa regolare da X a X' è una mappa $\varphi : X \rightarrow X'$ tale che per ogni $x \in X$ esiste un intorno \mathcal{U} di x e un intorno affine \mathcal{V} di $\varphi(x)$ per i quali $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ e $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ è data da m funzioni regolari.*

Esempio 2.1.2.

L'immersione di Veronese di grado d è una mappa $V : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ dove $N = \binom{n+d}{d} - 1$ e $[z_0 : \dots : z_n]$ è mappato nel punto di coordinate omogenee date dai monomi $z_0^{\lambda_0} \dots z_n^{\lambda_n}$, ove gli esponenti $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sono interi non negativi tali che $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = d$.

In particolare, se $n = 1, d = 2$, l'immersione di Veronese è semplicemente data da:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [z_0 : z_1] &\mapsto [z_0^2 : z_0 z_1 : z_1^2] \end{aligned}$$

L'immersione di Veronese è una mappa regolare e permette di passare da problemi concernenti lo studio di ipersuperficie di grado d in \mathbb{P}^n a casi di iperpiani in \mathbb{P}^N .

2.2 Varietà toriche proiettive

Si osservi che \mathbb{P}^n è una varietà torica con toro

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}^n} &= \mathbb{P}^n \setminus V(x_0 \dots x_n) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \text{ t.c. } a_0 \dots a_n \neq 0\} \\ &= \{[1 : t_1 : \dots : t_n] \in \mathbb{P}^n \text{ t.c. } t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}^*\} \simeq (\mathbb{C}^*)^n \end{aligned}$$

L'azione di $T_{\mathbb{P}^n}$ su sè stesso si estende ad un'azione su \mathbb{P}^n , e ciò rende \mathbb{P}^n una varietà torica. Per descrivere i reticoli associati a $T_{\mathbb{P}^n}$, si utilizza la seguente sequenza di tori:

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1} \xrightarrow{\pi} T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 1$$

derivante dalla definizione di \mathbb{P}^n , ove

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{C}^*)^{n+1} &\longrightarrow T_{\mathbb{P}^n} \\ (t_1, \dots, t_{n+1}) &\longmapsto \left[1 : \frac{t_2}{t_1} : \dots : \frac{t_{n+1}}{t_1} \right]. \end{aligned}$$

Quindi il reticolo dei caratteri di $T_{\mathbb{P}^n}$ è

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \text{ t.c. } \sum_{i=0}^n a_i = 0 \right\}$$

e il reticolo dei sottogruppi a un parametro è il quoziente

$$\mathcal{N}_n = \mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}(1, \dots, 1)$$

Sia T_N un toro con gli usuali reticoli M e N . Nel Capitolo 1, abbiamo usato un sottoinsieme finito di M , $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ per creare una varietà torica affine $Y_{\mathcal{A}}$ che sia la chiusura di Zariski dell'immagine della mappa

$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^s$$

definita da:

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \in \mathbb{C}^s$$

Per costruire una varietà torica proiettiva, si consideri $\Phi_{\mathcal{A}}$ come mappa in $(\mathbb{C}^*)^s$, e la si componga con l'omomorfismo $\pi : (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow T_{\mathbb{P}^{s-1}}$ per ottenere

$$T_N \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} (\mathbb{C}^*)^s \xrightarrow{\pi} T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$$

Definizione 2.2.1 (Varietà torica proiettiva). *Dato un insieme finito $\mathcal{A} \subseteq M$, la varietà torica proiettiva $X_{\mathcal{A}}$ è la chiusura di Zariski in \mathbb{P}^{s-1} dell'immagine della mappa $\pi \circ \Phi_{\mathcal{A}}$.*

Le varietà toriche sono semplici da costruire, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.2.1.

Sia $\mathcal{A} = \{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(s)}\}$ un sottoinsieme finito di \mathbb{Z}^n . Resta associata ad \mathcal{A} l'azione di $(\mathbb{C}^*)^n$ sullo spazio proiettivo \mathbb{P}^{s-1} definita da:

$$w \cdot [z_1 : \dots : z_s] = [w^{\lambda^{(1)}} z_1 : \dots : w^{\lambda^{(s)}} z_s]$$

per $w \in (\mathbb{C}^*)^n$. Sia $X_{\mathcal{A}}$ la chiusura dell'orbita di $(\mathbb{C}^*)^n$ rispetto a $[1 : \dots : 1]$. Allora $(\mathbb{C}^*)^n$ è una varietà torica proiettiva.

L'Esempio 2.2.1 è molto importante e ha le seguenti conseguenze.

Esempio 2.2.2.

Fissato un intero positivo d , sia

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{ \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \text{ t.c. } \lambda_i \geq 0 \forall i, \lambda_0 + \dots + \lambda_n = d \} \\ &= \{ \lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(N)} \} \end{aligned}$$

che corrisponde all'insieme di tutti i monomi di Laurent in n variabili di grado d , non contenenti potenze negative. Allora

$$X_{\mathcal{A}} = \overline{\{ [w^{\lambda^{(0)}} : \dots : w^{\lambda^{(N)}}] \text{ t.c. } w \in (\mathbb{C}^*)^{n+1} \}} = V(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{P}^n$$

ove $V : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ è la mappa di Veronese di grado d descritta nell'Esempio 2.1.2.

2.3 Varietà toriche proiettive equivarianti

Definizione 2.3.1 (Varietà torica proiettiva equivariante). *Sia X una varietà torica per un toro $(\mathbb{C}^*)^n$. X è proiettiva equivariante se esiste un'immersione $(\mathbb{C}^*)^n$ -equivariante $X \hookrightarrow \mathbb{P}^k$ per qualche k e per qualche azione di $(\mathbb{C}^*)^n$ su \mathbb{P}^k .*

Sia $\mathcal{A} = \{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}\}$ un sottoinsieme finito di \mathbb{Z}^n . Si consideri l'Esempio 2.2.1.

$$X_{\mathcal{A}} = \overline{\{ [w^{\lambda^{(1)}} : \dots : w^{\lambda^{(k)}}] \in \mathbb{P}^{k-1} \text{ t.c. } w \in (\mathbb{C}^*)^n \}}$$

La varietà torica $X_{\mathcal{A}}$ è chiaramente equivariantemente immersa in \mathbb{P}^{k-1} , ossia l'azione del toro $X_{\mathcal{A}}$ si estende a tutto \mathbb{P}^{k-1} .

Il seguente teorema mostra che ogni varietà torica proiettiva equivariante è equivalente a una varietà della tipologia di $X_{\mathcal{A}}$ per qualche insieme finito $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$.

Teorema 2.3.1. *Sia X una varietà torica $(\mathbb{C}^*)^n$ -equivariantemente immersa in \mathbb{P}^{l-1} . Sia Y il minimo sottospazio proiettivo in \mathbb{P}^{l-1} contenente X , e sia $k - 1$ la dimensione di Y . Allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ contenente k elementi e un isomorfismo $(\mathbb{C}^*)^n$ -equivariante $X_{\mathcal{A}} \rightarrow X$ che si estende a un isomorfismo proiettivo equivariante $\mathbb{P}^{k-1} \rightarrow Y$.*

Dimostrazione.

Ogni azione di $(\mathbb{C}^*)^n$ su \mathbb{P}^{l-1} può essere vista, tramite trasformazioni proiettive, come un'azione lineare su \mathbb{C}^l . Ogni azione lineare di $(\mathbb{C}^*)^n$ su \mathbb{C}^l è diagonalizzabile, dunque in opportune coordinate è data da un insieme di $\lambda^{(i)} \in \mathbb{Z}^n, i = 1, \dots, l$ tale che $w \in (\mathbb{C}^*)^n$ agisce come moltiplicazione per

$$\begin{bmatrix} w^{\lambda^{(1)}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & w^{\lambda^{(l)}} \end{bmatrix}$$

Si consideri un punto $z = [z_1 : \dots : z_l] \in X$ sull'orbita aperta del toro. Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ l'insieme dei $\lambda^{(i)}$ per i quali $z_i \neq 0$.

Allora il sottospazio proiettivo minimale di \mathbb{P}^{l-1} contenente X è

$$Y := \{[w_1 : \dots : w_l] \in \mathbb{P}^{l-1} \text{ t.c. } z_i = 0 \Rightarrow w_i = 0\}$$

La dimensione di Y è $k - 1$, ove k è la dimensione di \mathcal{A} . Si ottiene dunque un isomorfismo $(\mathbb{C}^*)^n$ -equivariante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{k-1} & \xrightarrow{\cong} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\cong} & X \end{array}$$

□

Esempio 2.3.1.

Non tutte le varietà toriche proiettive sono proiettive equivarianti, per esempio, la cubica nodale $X \subset \mathbb{P}^2$ data dall'equazione

$$z_0 z_2^2 = z_1^3 - z_0 z_1^2$$

è una varietà torica, ma non ammette immersioni proiettive equivarianti. Per una dimostrazione di questo fatto, si veda [5], pagina 169.

2.4 Politopi

Definizione 2.4.1 (Politopo). *Un politopo in \mathbb{R}^n è l'involuppo convesso di un numero finito di punti in \mathbb{R}^n , ossia, dato un insieme finito $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un politopo è un insieme del tipo:*

$$P = \text{Conv}(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \text{ t.c. } \lambda_u \geq 0 \sum_{u \in S} \lambda_u = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

La dimensione di un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è la dimensione del più piccolo spazio affine di \mathbb{R}^n contenente P . Sia u un vettore nello spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Otteniamo i due seguenti insiemi:

$$H_{u,b} = \{m \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \langle m, u \rangle = b\}$$

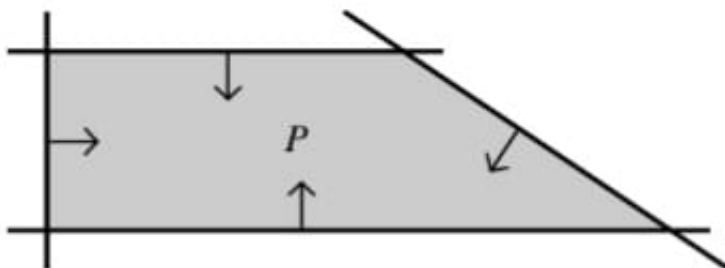
$$H_{u,b}^+ = \{m \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \langle m, u \rangle \geq b\}.$$

Un sottoinsieme $Q \subseteq P$ si dice *faccia* di P se esiste un vettore u come sopra, $b \in \mathbb{R}$ tale che:

$$Q = H_{u,b} \cap P$$

$$P \subseteq H_{u,b}^+,$$

in questa situazione, $H_{u,b}$ si dice iperpiano affine di supporto. L'immagine mostra un politopo con le linee di supporto delle sue facce 1-dimensionali. Le frecce nella figura indicano i vettori u .



Possiamo anche vedere P come faccia di se stesso. Ogni faccia di P è ancora un politopo. Le facce di P di particolare interesse sono chiamate *faccette*, *spigoli* o *vertici*, e hanno rispettivamente dimensione $\dim P - 1$, 1 e 0 . Di seguito troviamo alcune proprietà delle facce di un politopo P :

- P è l'involuppo convesso dei suoi vertici.
- Se $P = \text{Conv}(S)$, ogni vertice di P appartiene a S .
- Se Q è una faccia di P , allora le facce di Q sono le facce di P appartenenti a Q .
- Ogni faccia non banale Q di P è data dall'intersezione delle faccette contenenti Q .

Un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ può essere scritto come intersezione finita di H_{u_i, b_i}^+ :

$$P = \bigcap_{i=1}^s H_{u_i, b_i}^+,$$

il viceversa è vero se l'intersezione è limitata. Di seguito è riportato il famoso esempio del *politopo di Birkhoff*.

Esempio 2.4.1.

Una matrice $d \times d$ $\mathcal{M} \in M_{d,d}(\mathbb{R})$ si dice doppiamente stocastica se le sue entrate sono non negative e la somma delle entrate di ogni riga e di ogni colonna dà 1. Se consideriamo $M_{d,d}(\mathbb{R})$ come lo spazio affine \mathbb{R}^{d^2} con coordinate a_{ij} , allora l'insieme \mathcal{M}_d di tutte le matrici bistocastiche è definito dalle disuguaglianze:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j \\ \sum_{i=1}^d a_{ij} &\geq 1, \quad \sum_{i=1}^d a_{ij} \leq 1 \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^d a_{ij} &\geq 1, \quad \sum_{j=1}^d a_{ij} \leq 1 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Queste disuguaglianze implicano facilmente che $0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j$, dunque \mathcal{M}_d è limitato e dunque è un politopo.

Birkhoff e Von Neumann hanno provato indipendentemente che i vertici di \mathcal{M}_d sono le $n!$ matrici di permutazione e che $\dim \mathcal{M}_d = (d-1)^2$. In letteratura, \mathcal{M}_d ha vari nomi, tra cui politopo di Birkhoff e politopo di trasporto.

2.5 Decomposizione orbitale

Sia $\mathcal{A} = \{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}\}$ un sottoinsieme finito di \mathbb{Z}^n . La varietà torica associata ad \mathcal{A} è, come mostrato nella sezione 2.2.

$$X_{\mathcal{A}} = \overline{[w^{\lambda^{(1)}} : \dots : w^{\lambda^{(k)}}] \in \mathbb{P}^{k-1} \text{ t.c. } w \in (\mathbb{C}^*)^n}$$

Proposizione 2.5.1. *Sia P l'inviluppo convesso in \mathbb{R}^n dell'insieme \mathcal{A} di cui sopra. Allora vi è una funzione biunivoca tra le facce non vuote del politopo P e le $(\mathbb{C}^*)^n$ -orbite in $X_{\mathcal{A}}$ data da:*

$$\begin{aligned} \{\text{facce del politopo } P\} &\longrightarrow \{(\mathbb{C}^*)^n\text{-orbite in } X_{\mathcal{A}}\} \\ F &\longmapsto X^0(F) \end{aligned}$$

ove

$$X^0(F) = \{[u] \in X_{\mathcal{A}} \text{ t.c. } \forall \lambda : u_{\lambda} = 0 \iff \lambda \notin F\}$$

La dimensione di $X^0(F)$ è la dimensione di F . Inoltre, la chiusura di $X(F)$ di $X^0(F)$ è uguale alla varietà torica $X_{\mathcal{A} \cap F}$. Se F e F' sono due facce di P , allora

$$X(F') \subset X(F) \iff F' \subset F$$

Dimostrazione.

Sia $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{C}^k$ tale che $[u] := [u_1 : \dots : u_k] \in X_{\mathcal{A}}$. Dato $\lambda^{(i)} \in \mathcal{A}$, abbiamo che la $\lambda^{(i)}$ -esima componente di u è data da

$$u_{\lambda^{(i)}} = (0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0)$$

Dimostriamo innanzitutto che la corrispondenza è ben definita, ossia che $X^0(F)$ è effettivamente un'orbita. Chiaramente $X^0(F)$ è invariante

$$[u] \in X^0(F) \implies w \cdot [u] \in X^0(F)$$

Inoltre, ogni coppia $[u], [u']$ è in relazione: per mostrare che esiste infatti un $w \in (\mathbb{C}^*)^n$ tale che $u_\lambda = w^\lambda u_{\lambda'}$ $\forall \lambda \in F$, si noti che $u_\lambda = w_1^\lambda$ e $u_{\lambda'} = w_2^\lambda$ per qualche $w_1, w_2 \in (\mathbb{C}^*)^n$, quindi basta prendere $w = w_1 w_2^{-1}$.

Per provare l'iniettività, dobbiamo mostrare che

$$F' \neq F \implies X^0(F') \neq X^0(F)$$

Senza perdere di generalità, assumiamo che esista un $\lambda \in F'$ tale che $\lambda \notin F$. Perciò, se $[u] \in X^0(F)$, allora $u_\lambda = 0$, dunque $[u] \notin X^0(F')$.

Per provare la suriettività, dobbiamo mostrare che ogni $[u] \in X_{\mathcal{A}}$ appartiene a qualche $X^0(F)$. Introduciamo la notazione

$$[v_F] := [v_1 : \dots : v_k] \text{ tale che } \begin{cases} v_i = 1 & \lambda^{(i)} \in F \\ v_i = 0 & \lambda^{(i)} \notin F \end{cases}$$

In particolare avremo che $[v_P] = [1 : \dots : 1]$. Per definizione di $X_{\mathcal{A}}$, gli $[u] \in X_{\mathcal{A}}$ sono della forma

$$[u] = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \cdot [v_P]$$

per una qualche mappa analitica f definita sul disco punturato data da:

$$f : \{z \in \mathbb{C}^* \text{ t.c. } |z| < \epsilon\} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n$$

$$f(z) = (c_1 z^{a_1} + \dots, \dots, c_n z^{a_n} + \dots)$$

per alcune costanti $c_i \in \mathbb{C}^*$, alcuni esponenti $a_i \in \mathbb{Z}$ e dove i puntini di sospensione rappresentano termini di grado più alto.

Dato $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, sia $f_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione lineare definita dal prodotto interno con a , $f_a(\lambda) := a \cdot \lambda$.

Sia

$$F_a := \{\lambda \in P \text{ dove il valore di } f_a \text{ è minimo}\}$$

L'insieme F_a è una faccia di P , chiamata faccia di supporto di f_a . Per semplicità, supponiamo che $F_a \cap \mathcal{A} = \{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}\}$. Il caso generale è più complesso solo dal punto di vista della notazione. Sia $c = (c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Allora si ha che:

$$\begin{aligned} [u] &= \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \cdot [v_P] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} [(f(z))^{\lambda^{(1)}} : \dots : (f(z))^{\lambda^{(k)}}] \\ &= [c^{\lambda^{(1)}} + \dots : c^{\lambda^{(2)}} + \dots : \dots] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} [c^{\lambda^{(1)}} : c^{\lambda^{(2)}} : 0 : \dots : 0] \\ &= c \cdot [v_{F_a}] \in X^0(F_a) \end{aligned}$$

ove, nell'uguaglianza centrale, tutte le coordinate omogenee sono state divise per $z^{a \cdot \lambda^{(1)}} = z^{a \cdot \lambda^{(2)}}$ e i puntini di sospensione rappresentano dei termini con sole positive potenze di z . \square

Capitolo 3

Varietà toriche simplettiche

In questo capitolo andremo a definire le *varietà toriche simplettiche*, ma prima di tutto introdurremo delle nozioni base di geometria simplettica e di meccanica hamiltoniana.

3.1 Prerequisiti di geometria simplettica

Definizione 3.1.1 (Forma simplettica, varietà simplettica). *Una forma simplettica su una varietà M è una 2-forma chiusa ω su M non degenera in ogni punto di M . Una varietà simplettica è una coppia (M, ω) ove M è una varietà e ω è una forma simplettica su M .*

La dimensione di una varietà simplettica è necessariamente pari.

Esempio 3.1.1.

Sia $M = \mathbb{R}^{2n}$ con coordinate lineari $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. La forma simplettica standard su \mathbb{R}^{2n} è

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$$

Definizione 3.1.2 (Simplettomorfismo). *Siano $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$ delle varietà simplettiche $2n$ -dimensionali, e sia $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ un diffeomorfismo. Allora φ è un simplettomorfismo se il pull-back di ω_2 rispetto a φ è uguale a ω_1 , ossia se:*

$$\varphi^* \omega_2 = \omega_1$$

Teorema 3.1.1 (Teorema di Darboux). *Sia M una varietà differenziale di dimensione pari e ω una 2-forma simplettica definita su di essa. Esiste un atlante di M , detto atlante simplettico, tale che in tutte le sue carte ω assume la forma canonica:*

$$\omega = dq \wedge dp$$

ove con (q, p) si denotano le coordinate locali.

Dunque ogni varietà simplettica (M, ω) è localmente simplettomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, ove $2n$ è la dimensione di M .

Definizione 3.1.3 (Campo vettoriale hamiltoniano e simplettico). *Sia (M, ω) una varietà simplettica. Un campo vettoriale X su M è hamiltoniano se la contrazione $\iota_X \omega$ è esatta. Un campo vettoriale X su M è simplettico se la contrazione $\iota_X \omega$ è chiusa.*

Localmente, su ogni insieme aperto contraibile, ogni campo vettoriale simplettico è hamiltoniano. Indichiamo con $\mathcal{L}_X \omega$ la derivata di Lie di ω rispetto a X . Vale la seguente formula, detta formula di Cartan:

$$\mathcal{L}_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega$$

ove, nel nostro caso $\iota_X \omega$ è contrazione chiusa e $d\omega = 0$. Dunque si ha che

$$\mathcal{L}_X \omega = 0.$$

Se un campo vettoriale X è hamiltoniano con $\iota_X \omega = d\mathcal{H}$ per qualche funzione liscia $\mathcal{H} : M \rightarrow \mathbb{R}$, si ha che:

$$\mathcal{L}_X \mathcal{H} = \iota_X d\mathcal{H} = \iota_X \iota_X \omega = 0$$

Definizione 3.1.4 (Funzione hamiltoniana). *Una funzione hamiltoniana per un campo vettoriale hamiltoniano X su M è una funzione liscia $\mathcal{H} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\iota_X \omega = d\mathcal{H}$.*

In quanto ω è non degenere, ogni funzione $\mathcal{H} \in C^\infty(M)$ è un'hamiltoniana per un qualche campo vettoriale hamiltoniano, perché l'equazione $\iota_X \omega = d\mathcal{H}$ può essere sempre risolta per un campo vettoriale X liscio. Un campo vettoriale hamiltoniano X definisce una funzione hamiltoniana a meno di una funzione localmente costante.

Esempio 3.1.2.

Si consideri la 2-sfera simplettica standard $(\mathbb{S}^2, d\theta \wedge dh)$. Il campo vettoriale $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$ è hamiltoniano con funzione hamiltoniana data dalla funzione altezza:

$$\iota_X (d\theta \wedge dh) = dh.$$

Il moto generato da questo campo vettoriale è una rotazione attorno all'asse verticale, che naturalmente preserva area e altezza.

3.2 Azioni hamiltoniane

Definizione 3.2.1 (Gruppo di Lie). *Un gruppo di Lie \mathcal{G} è una varietà differenziale dotata di un'operazione $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dotata delle seguenti proprietà:*

- $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r \quad \forall p, q, r \in \mathcal{G}$ (associatività),
- $\exists I \in \mathcal{G}$ t.c. $p \cdot I = I \cdot p = p \quad \forall p \in \mathcal{G}$ (elemento neutro),

- $\forall p \in \mathcal{G} \exists p^{-1} \in \mathcal{G}$ t.c. $p \cdot p^{-1} = I$ (inverso),
- le mappe $(p, r) \mapsto p \cdot r$, $p \mapsto p^{-1}$ sono lisce.

Definizione 3.2.2 (Azione di un gruppo di Lie). *Un'azione di un gruppo di Lie \mathcal{G} su una varietà M è un omomorfismo di gruppi*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{G} &\longrightarrow \text{Diff}(M) \\ g &\longmapsto \psi_g, \end{aligned}$$

ove $\text{Diff}(M)$ indica il gruppo dei diffeomorfismi di M . La mappa di valutazione associata con azione $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(M)$ è

$$\begin{aligned} \text{ev}_\psi : M \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (p, g) &\longmapsto \psi_g(p). \end{aligned}$$

L'azione ψ è liscia se la mappa ev_ψ è liscia.

D'ora in avanti assumeremo sempre che l'azione sia liscia.

Sia (M, ω) una varietà simplettica, \mathcal{G} un gruppo di Lie con azione $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(M)$.

Definizione 3.2.3 (Azione simplettica). *L'azione ψ è un'azione simplettica se*

$$\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \text{Sympl}(M, \omega) \subset \text{Diff}(M)$$

ove $\text{Sympl}(M, \omega)$ indica il gruppo dei simplettomorfismi di (M, ω) .

Esempio 3.2.1.

Si consideri la 2-sfera simplettica $(\mathbb{S}^2, d\theta \wedge dh)$ in coordinate cilindriche. Il gruppo dei diffeomorfismi dato dalla rotazione attorno all'asse verticale $\psi_t(\theta, h) = (\theta + t, h)$, $t \in \mathbb{R}$ è un'azione simplettica del gruppo $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\langle 2\pi \rangle$, dal momento che preserva la forma $d\theta \wedge dh$.

Definizione 3.2.4 (Algebra di Lie). *Un'algebra di Lie di campi vettoriali è una collezione di campi vettoriali chiusa per combinazioni lineari e commutazione.*

Sia (M, ω) una varietà simplettica, \mathcal{G} un gruppo di Lie con azione $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(M)$, e sia g l'algebra di Lie di \mathcal{G} con spazio vettoriale duale g^* .

Definizione 3.2.5 (Azione hamiltoniana). *La mappa ψ è un'azione hamiltoniana se esiste una mappa*

$$\mu : M \longrightarrow g^*$$

che soddisfa le due seguenti condizioni:

- $\forall X \in \mathfrak{g}$, sia $\mu^* : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu^X(p) := \langle \mu(p), X \rangle$ la componente di μ lungo X , e sia \bar{X} il campo vettoriale su M generato dal sottogruppo a un parametro $\{\exp(tX) \text{ t.c. } t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{G}$. Allora

$$d\mu^X = \iota_{\bar{X}}\omega$$

ossia la funzione μ^X è una funzione hamiltoniana per il campo vettoriale \bar{X} ,

- la mappa μ è equivariante rispetto alla data azione ψ di \mathcal{G} su M e rispetto all'azione coaggiunta Ad^* di \mathcal{G} su \mathfrak{g}^*

$$\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

$(M, \omega, \mathcal{G}, \mu)$ si dice \mathcal{G} -spazio hamiltoniano, e μ si dice *mappa dei momenti*.

Esempio 3.2.2.

Si consideri nuovamente la situazione presa in esame nell'Esempio 3.2.1. Si tratta di un esempio di azione di \mathbb{S}^1 con mappa dei momenti data dalla funzione altezza, sotto un'opportuna identificazione del duale dell'algebra di Lie di \mathbb{S}^1 con \mathbb{R} .

3.3 Varietà toriche simplettiche

Teorema 3.3.1. *Sia (M, ω) una varietà simplettica compatta e connessa, e sia T^m un m -toro. Si supponga che $\psi : T^m \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ sia un'azione hamiltoniana con mappa dei momenti $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora si ha che:*

- le curve di livello di μ sono connesse,
- l'immagine di μ è connessa,
- l'immagine di μ è l'involuppo convesso dell'immagine dei punti fissi dell'azione.

L'immagine $\mu(M)$ della mappa dei momenti si dice *politopo dei momenti*. Una dimostrazione del Teorema 3.3.1 si può trovare nel testo [7].

Un'azione di un gruppo G su una varietà M si dice *effettiva* se è iniettiva come mappa $G \rightarrow \text{Diff}(M)$, ossia se ogni elemento del gruppo $g \neq e$ ha almeno un punto non fisso, che è $\bigcap_{p \in M} G_p = \{e\}$ ove $G_p = \{g \in G \text{ t.c. } g \cdot p = p\}$ è lo stabilizzatore di p .

Definizione 3.3.1 (Varietà torica simplettica). *Una varietà torica simplettica è una varietà simplettica compatta e connessa (M, ω) munita di un'azione hamiltoniana effettiva di un toro T tale che:*

$$\dim T = \frac{1}{2} \dim M,$$

e con la scelta di una corrispondente mappa dei momenti μ .

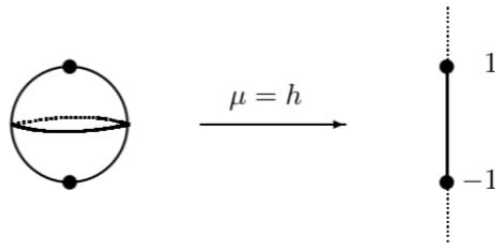
Definizione 3.3.2. *Due varietà toriche simplettiche, $(M_i, \omega_i, T_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ si dicono equivalenti se esiste un isomorfismo $\lambda : T_1 \rightarrow T_2$ e un simplettomorfismo λ -equivariante $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ tale che $\mu_1 = \mu_2 \circ \phi$.*

Esempio 3.3.1.

La circonferenza \mathbb{S}^1 agisce sulla 2-sfera $(\mathbb{S}^2, \omega_{standard} = d\theta \wedge dh)$ tramite rotazioni attorno all'asse verticale:

$$e^{it} \cdot (\theta, h) = (\theta + t, h),$$

con mappa dei momenti data dalla funzione altezza $\mu = h$ e politopo dei momenti $[-1, 1]$.



Capitolo 4

Teorema di Delzant

In questo capitolo verranno descritte le classi di equivalenza di varietà toriche simplettiche mediante i loro politopi dei momenti $\mu(M)$. La riduzione simplettica è la tecnica che viene usata per la costruzione di una varietà torica simplettica tramite l'utilizzo di un appropriato politopo.

4.1 Politopi di Delzant

Definizione 4.1.1 (Politopo di Delzant). *Un politopo di Delzant $\Delta \in \mathbb{R}^n$ è un politopo soddisfacente alle seguenti proprietà:*

- *SIMPLICITY: in ogni vertice si incontrano n spigoli;*
- *RATIONALITY: gli spigoli che si incontrano nel vertice p sono razionali, ossia sono della forma $p + tu_i$, $t \geq 0$, ove $u_i \in \mathbb{Z}^n$;*
- *SMOOTHNESS: per ogni vertice, i corrispondenti u_1, \dots, u_n possono essere scelti come una \mathbb{Z} -base di \mathbb{Z}^n .*

Esempio 4.1.1.

Di seguito vi sono alcuni politopi di Delzant in \mathbb{R}^2 .



Esempio 4.1.2.

Ora sono riportati alcuni esempi di politopi che non sono di Delzant:



Osservazione. Il politopo di sinistra non rispetta la condizione di *smoothness*: dal momento che il triangolo non è isoscele, presi uno dei due cateti e il lato obliquo, essi non generano una base di \mathbb{Z}^2 , mentre il politopo di destra non rispetta la condizione di *simplicity*.

Il teorema di Delzant classifica le classi di equivalenza di varietà toriche simplettiche in termini di politopi di Delzant.

Teorema 4.1.1 (Teorema di Delzant). *Le varietà toriche simplettiche possono essere classificate mediante politopi di Delzant. Nello specifico, la corrispondenza biunivoca tra questi due insiemi è data dalla mappa dei momenti:*

$$\begin{aligned} \{\text{varietà toriche simplettiche}\} &\longrightarrow \{\text{politopi di Delzant}\} \\ (M, \omega, T^n, \mu) &\longmapsto \mu(M) \end{aligned}$$

Nelle seguenti sezioni verrà descritta la costruzione che prova la suriettività della mappa biettiva definita nel Teorema di Delzant. Prima di tutto, però, verrà fornita una descrizione algebrica dei politopi di Delzant.

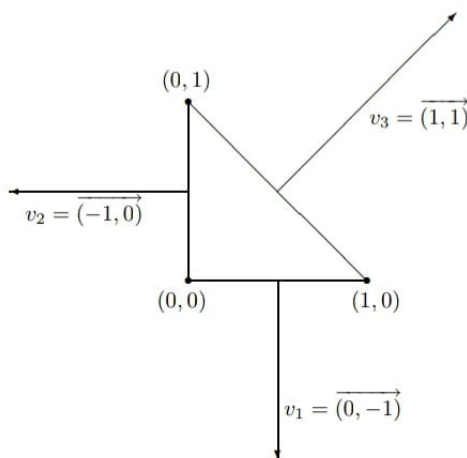
Sia Δ un politopo di Delzant in $(\mathbb{R}^n)^*$, cioè il duale di \mathbb{R}^n , con un numero di faccette pari a d . Sia $v_i \in \mathbb{Z}^n$ con $i = 1, \dots, d$ il vettore primitivo normale alle faccette di Δ . Con vettore $v \in \mathbb{Z}^n$ primitivo si intende un vettore che non può essere scritto come $v = ku$ con $u \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > 1$. Allora possiamo descrivere Δ nel seguente modo:

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ t.c. } \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, d\} \text{ per qualche } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Esempio 4.1.3.

In riferimento alla figura sottostante, si ha:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{x \in (\mathbb{R}^2)^* \text{ t.c. } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 1\} \\ &= \{(\mathbb{R}^2)^* \text{ t.c. } \langle x, (-1, 0) \rangle \leq 0, \quad \langle x, (0, -1) \rangle \leq 0, \quad \langle x, (1, 1) \rangle \leq 1\} \end{aligned}$$



4.2 Spazi orbitali

Sia $\psi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ una qualsiasi azione.

Definizione 4.2.1 (Orbita, stabilizzatore). *Sia $p \in M$. L'orbita di G rispetto a p è data da $\{\psi_g(p) \text{ t.c. } g \in G\}$. Lo stabilizzatore di $p \in M$ è $G_p = \{g \in G \text{ t.c. } \psi_g(p) = p\}$*

Definizione 4.2.2. *L'azione di G su M si dice:*

- transitiva se c'è solo un'orbita,
- libera se tutti gli stabilizzatori sono banali,
- localmente libera se tutti gli stabilizzatori sono discreti.

Sia \sim la seguente relazione di equivalenza. Se $p, q \in M$

$$p \sim q \iff p \text{ e } q \text{ sono sulla stessa orbita}$$

L'insieme quoziente $M/G := M/\sim$ viene detto *spazio orbitale*. Si consideri la seguente mappa:

$$\begin{aligned} \pi : M &\longrightarrow M/G \\ p &\longmapsto \text{orbita di } p, \end{aligned}$$

essa viene detta *proiezione punto-orbita*.

Dotiamo M/G della *topologia quoziente* rispetto a π , ossia la più fine topologia per cui π è continua, ovvero tale che $\mathcal{U} \subseteq M/G$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ è aperto in M .

4.3 Riduzione simplettica

Sia $\omega = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$ la forma simplettica standard su \mathbb{C}^n . Tramite l'utilizzo delle coordinate polari, possiamo scrivere $z = re^{i\theta}$, e dunque esprimere ω nel seguente modo:

$$\omega = \sum r_k dr_k \wedge d\theta_k$$

Infatti si ha che:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k \\ &= \frac{i}{2} \sum (dr_k e^{i\theta_k} + ir_k e^{i\theta_k} d\theta_k) \wedge (dr_k e^{-i\theta_k} - ir_k e^{-i\theta_k} d\theta_k) \\ &= \frac{i}{2} \sum ir_k d\theta_k \wedge dr_j - ir_k \wedge d\theta_k \\ &= \sum r_k dr_k \wedge d\theta_k \end{aligned}$$

Si consideri la seguente azione di \mathbb{S}^1 su (\mathbb{C}^n, ω)

$$t \in \mathbb{S}^1 \longmapsto \psi_t = \text{moltiplicazione per } t.$$

L'azione è hamiltoniana con mappa dei momenti:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto -\frac{\|z\|^2}{2} + \text{costante}. \end{aligned}$$

Ciò si verifica facilmente tramite il passaggio alle coordinate polari, dal momento che:

$$\begin{aligned} d\mu &= -\frac{1}{2}d\left(\sum r_k^2\right) \\ \bar{X} &= \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_n} \\ \iota_{\bar{X}}\omega &= -\sum r_k dr_k = -\frac{1}{2}\sum dr_k^2. \end{aligned}$$

Se poniamo la costante uguale a $\frac{1}{2}$, allora $\mu^{-1}(0) = \mathbb{S}^{2n-1}$ è la sfera unitaria. Lo spazio orbitale del livello zero della mappa dei momenti è

$$\mu^{-1}(0)/\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^{n-1}.$$

Oltretutto, questa costruzione induce una forma simplettica su \mathbb{P}^{n-1} , come particolare conseguenza del seguente teorema.

Teorema 4.3.1 (Marsden-Weinstein, Meyer). *Sia $(M, \omega, \mathcal{G}, \mu)$ un \mathcal{G} -spazio hamiltoniano per un gruppo di Lie compatto \mathcal{G} . Sia $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ la mappa di inclusione. Si supponga che \mathcal{G} agisca liberamente su $\mu^{-1}(0)$. Allora*

- lo spazio orbitale $M_{red} = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$ è una varietà;
- $\pi : \mu^{-1}(0) \rightarrow M_{red}$ è un \mathcal{G} -fibrato principale;
- c è una forma simplettica μ_{red} su M_{red} che soddisfa $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$.

Per una dimostrazione del Teorema 4.3.1 si veda, ad esempio, [8].

Definizione 4.3.1 (Riduzione simplettica). *La coppia (M_{red}, ω_{red}) si dice riduzione simplettica di (M, ω) rispetto a \mathcal{G} e μ .*

4.4 Costruzione di Delzant

In questo paragrafo verrà dimostrata la parte relativa alla suriettività nel Teorema di Delzant, tramite l'utilizzo della riduzione simplettica per associare a un politopo di Delzant Δ n -dimensionale una varietà torica simplettica $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$.

Sia Δ un politopo di Delzant con d faccette. Sia $v_i \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, d$, il vettore primitivo rivolto verso l'esterno normale alle faccette. Per qualche $\lambda_i \in \mathbb{R}$ si ha che:

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ t.c. } \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \ i = 1, \dots, d\}.$$

Sia $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$ la base canonica di \mathbb{R}^d . Si consideri la mappa:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ e_i &\longmapsto v_i. \end{aligned}$$

Lemma 4.4.1. *La mappa π è suriettiva e mappa \mathbb{Z}^d in \mathbb{Z}^n .*

Dimostrazione.

L'insieme $\{e_1, \dots, e_d\}$ è una base di \mathbb{Z}^d . L'insieme $\{v_1, \dots, v_d\}$ genera \mathbb{Z}^n per la seguente ragione. Si consideri un vertice p , i vettori che individuano gli spigoli $u_1 \dots, u_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ formano una base per $(\mathbb{Z}^n)^*$, la quale, a meno di un cambio di coordinate se necessario, si può assumere essere la base canonica. Allora i corrispondenti vettori primitivi normali alle faccette che si incontrano in p sono simmetrici agli u_i , e dunque formano una base per \mathbb{Z}^n . \square

Dunque π induce una mappa suriettiva, chiamata ancora π , tra tori:

$$\pi : \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z}^d) \longrightarrow \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z}^n)$$

Il kernel N di π è un sottogruppo di Lie $(d - n)$ -dimensionale di \mathbb{T}^d con inclusione $i : N \hookrightarrow \mathbb{T}^d$. Sia \mathfrak{n} l'algebra di Lie di N . La sequenza di tori:

$$1 \rightarrow N \hookrightarrow \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^n \rightarrow 1$$

induce una sequenza di algebre di Lie:

$$0 \rightarrow \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow 0$$

con sequenza dei duali:

$$0 \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow \mathfrak{n}^* \rightarrow 0.$$

Si consideri ora \mathbb{C}^d con la forma simplettica $\omega = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$, e azione hamiltoniana standard del toro \mathbb{T}^d data da:

$$(e^{it_1}, \dots, e^{it_d}) \cdot (z_1, \dots, z_d) = (e^{it_1} z_1, \dots, e^{it_d} z_d).$$

La mappa dei momenti è data da $\phi : \mathbb{C}^d \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^*$ definita da:

$$\phi(z_1, \dots, z_d) = -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + \text{costante}$$

ove la costante viene scelta uguale a $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. Ora, N agisce in modo hamiltoniano con mappa dei momenti

$$i^* \circ \phi : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathfrak{n}^*$$

Sia $Z = (i^* \circ \phi)^{-1}(0)$.

Claim 1. L'insieme Z è compatto e N agisce liberamente su Z . Si posponga per un momento la dimostrazione del **Claim 1**.

Dal momento che i^* è suriettiva, $0 \in \mathfrak{n}^*$ è un valore assunto da $i^* \circ \phi$. Dunque, Z è una sottovarietà compatta di \mathbb{C}^d di dimensione reale $2d - (d - n) = d + n$. Lo spazio orbitale $M_\Delta = Z/N$ è una varietà compatta di dimensione $\dim Z - \dim N = (d + n) - (d - n) = 2n$. La mappa punto-orbita $p : Z \rightarrow M_\Delta$ è un N -fibrato principale su M_Δ . Si consideri il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} T_N & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{C}^d \\ \downarrow p & & \\ M_\Delta & & \end{array}$$

ove $j : Z \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ è l'inclusione. Il Teorema 4.3.1 garantisce l'esistenza di una forma simplettica ω_Δ su M_Δ che soddisfa:

$$p^* \omega_\Delta = j^* \omega.$$

Dal momento che Z è connessa, anche la varietà simplettica compatta $2n$ -dimensionale $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ è compatta.

Dimostrazione Claim 1. L'insieme Z è chiaramente chiuso, dunque per mostrare che è compatto, è sufficiente, per il Teorema di Heine-Borel mostrare che Z è limitato. Sia Δ' l'immagine di Δ tramite π^* . Mostriamo che $\phi(Z) = \Delta'$.

Lemma 4.4.2. *Sia $y \in (\mathbb{R}^d)^*$. Allora:*

$$y \in \Delta' \iff y \in \phi(Z).$$

Dimostrazione.

$y \in \phi(Z)$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- y appartiene all'immagine di ϕ ;
- $i^* y = 0$.

Usando l'espressione di ϕ e la terza sequenza riguardante i duali, si verifica che queste condizioni sono equivalenti a :

- $\langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \dots, d;$
- $y = \pi^*(x)$ per qualche $x \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Si supponga che valga la seconda condizione. Allora:

$$\begin{aligned}
\langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i, \forall i &\iff \langle \pi^*(x), e_i \rangle \leq \lambda_i, \forall i \\
&\iff \langle x, \pi(e_i) \rangle \leq \lambda_i, \forall i \\
&\iff \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \forall i \\
&\iff x \in \Delta.
\end{aligned}$$

Dunque, $y \in \phi(Z) \iff y \in \pi^*(\Delta) = \Delta'$. \square

Dal momento che Δ' è compatto e che $\phi(Z) = \Delta'$, si conclude che Z deve essere limitato, e dunque compatto.

Rimane da mostrare che N agisce liberamente su Z .

Si consideri un vertice p di Δ , e sia $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ l'insieme degli indici delle n faccette che si intersecano in p . Sia $z \in Z$ tale che $\phi(z) = \pi^*(p)$. Allora p è caratterizzato da n equazioni $\langle p, v_i \rangle \leq \lambda_i$, con $i \in I$:

$$\begin{aligned}
\langle p, v_i \rangle \leq \lambda_i &\iff \langle p, \pi(e_i) \rangle \leq \lambda_i \\
&\iff \langle \pi^*(p), e_i \rangle \leq \lambda_i \\
&\iff \langle \phi(z), e_i \rangle \leq \lambda_i \\
&\iff i - \text{esima coordinata di } \phi(z) = \lambda_i \\
&\iff -\frac{1}{2}|z_i|^2 + \lambda_i = \lambda_i \\
&\iff z_i = 0.
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo che $z_i = 0$ per ogni $i \in I$. Dunque i vertici di Δ corrispondono a punti in Z che hanno esattamente n coordinate uguali a zero. Senza perdere di generalità, si può assumere che $I = \{1, \dots, n\}$. Lo stabilizzatore di z è:

$$(\mathbb{T}^d)_z = \{(t_1, \dots, t_n, 1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^d\}.$$

Dal momento che la restrizione $\pi : (\mathbb{R}^d)_z \rightarrow \mathbb{R}^n$ mappa i vettori e_1, \dots, e_n in una base di \mathbb{Z} , v_1, \dots, v_n di \mathbb{Z}^n rispettivamente, dunque $\pi : (\mathbb{T}^d)_z \rightarrow \mathbb{T}^n$ deve essere biettiva. Poiché N è il kernel di $\pi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^n$, si conclude che $N \cap (\mathbb{T}^d)_z = \{e\}$, dunque N agisce liberamente su ogni vertice. Dal momento che i vertici si identificano con punti in Z aventi n coordinate uguali a 0, lo stabilizzatore di ogni punto deve essere incluso nello stabilizzatore di qualche vertice. Ciò conclude la dimostrazione del **claim 1**.

Dato un politopo di Delzant Δ , abbiamo costruito una varietà simplettica $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ ove $M_\Delta = Z/N$ è una varietà compatta $2n$ -dimensionale e ω_Δ è la forma simplettica ridotta. **Claim 2.** La varietà $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ è un \mathbb{T}^n -spazio hamiltoniano con mappa dei momenti μ_Δ tale che $\mu_\Delta(M_\Delta) = \Delta$.

Dimostrazione Claim 2. Sia z tale che $\phi(z) = \pi^*(p)$, ove p indica un vertice di Δ , come nella dimostrazione del Claim 1. Sia $\sigma : \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{T}^d)_z$ l'inversa della biezione precedentemente introdotta $\pi : (\mathbb{R}^d)_z \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dal momento che abbiamo trovato un'inversa destra per π :

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \longrightarrow 1$$

otteniamo un isomorfismo

$$(i, \sigma) : N \times \mathbb{T}^n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{T}^d$$

L'azione di \mathbb{T}^n discende dal quoziente $M_\Delta = Z/N$. Rimane da mostrare che l'azione di \mathbb{T}^n su M_Δ è hamiltoniana con un'opportuna mappa dei momenti. Si consideri il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^d)^* & \simeq & \mathfrak{n}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\sigma^*} (\mathbb{R}^n)^* \\ \downarrow p & & & & & & \\ M_\Delta & & & & & & \end{array}$$

ove l'ultima mappa orizzontale è semplicemente la proiezione sul secondo fattore. Dal momento che la composizione delle mappe orizzontali è costante lungo le N -orbite, si ha una mappa

$$\mu_\Delta : M_\Delta \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

che soddisfa

$$\mu_\Delta \circ p = \sigma^* \circ \phi \circ j.$$

Questa costituisce una mappa dei momenti per l'azione di \mathbb{T}^n su $(M_\Delta, \omega_\Delta)$. L'immagine di μ_Δ è:

$$\mu_\Delta(M_\Delta) = (\mu_\Delta \circ p)(Z) = (\sigma^* \circ \phi \circ j)(Z) = (\sigma^* \circ \pi^*)(\Delta) = \Delta,$$

poichè $\phi(Z) = \pi^*(\Delta)$ e $\sigma^* \circ \pi^* = (\pi \circ \sigma)^* = id$. Si conclude che $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$ è la varietà torica richiesta corrispondente a Δ . \square

Bibliografia

- [1] D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric varieties*, American Mathematical Soc., **124**, (2011).
- [2] E. J. Elizondo, P. Lima-Filho, F. Sottile, Z. Teitler, *Arithmetic toric varieties*, Math. Nachr. **287**, 2-3, (2014), 216–241.
- [3] I. Shafarevich, *Basic algebraic geometry, 1, Varieties in projective space*, Springer Berlin Heidelberg, (2013).
- [4] A. Cannas da Silva, *Symplectic Toric Manifolds*, Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems, (2003), 85–173.
- [5] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, The mathematical gazette, **79**, 485, (1995), 439–440.
- [6] A. Iserles, H.Z. Munthe-Kaas, S.P. Nørsett, A. Zanna, *Lie-group methods*, Acta numerica, Cambridge University Press, **9**, (2000), 215–365.
- [7] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, **27**, (2017).
- [8] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer-Verlag, **3575**, (2001).