



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Risultati recenti sull’equazione di Hamilton-Jacobi quantistica

Relatore

Prof. Marco Matone

Laureando

Paolo Zerbini

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Introduzione	1
2	La necessità di una deformazione dell'equazione classica	2
2.1	Deduzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi classica	2
2.2	Trasformazioni di punto ed equazione di Hamilton-Jacobi	3
3	Deduzione della deformazione quantistica dell'equazione di Hamilton-Jacobi	4
3.1	Il potenziale quantistico nel caso 1-dimensionale	5
3.1.1	Dimostrazione del teorema 2	6
3.1.2	L'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica unidimensionale	9
3.2	Riproduzione dei risultati della meccanica quantistica	9
4	La forma generale della QHJE	10
4.1	Il paradosso di Einstein nella formulazione geometrica	11
4.2	Riduzione di QHJE ed equazione di continuità ad un'unica equazione	12
5	Conseguenze della formulazione geometrica	13
5.1	Non-trivialità del potenziale quantistico	13
5.2	I limiti $E, \hbar \rightarrow 0$ e l'introduzione di costanti fondamentali	14
6	L'equazione di Wheeler-DeWitt nella formulazione geometrica	16
6.1	La Hamilton-Jacobi associata alla funzione d'onda dell'universo	16
6.2	Potenziale quantistico e costante cosmologica	18
7	Conclusioni	19
	Bibliografia	20

1 Introduzione

La versione quantistica dell'equazione di Hamilton-Jacobi è impiegata in diversi contesti. Un esempio rilevante è la formulazione Bohmiana della meccanica quantistica. Tale formulazione presenta alcune problematiche, tra cui il paradosso di Einstein, che consiste nell'impossibilità di definire il limite classico per il momento di una particella in uno stato legato. Si propone quindi una formulazione alternativa, denominata formulazione geometrica, dell'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica, basata sulla richiesta di esistenza, per una qualsiasi coppia di stati, di una trasformazione delle coordinate che li mappi l'uno nell'altro. Si osserverà che seguendo tale formulazione il paradosso di Einstein non sussiste. Si vedrà inoltre che la validità della formulazione è corroborata dal fatto che riproduce naturalmente alcuni importanti risultati della meccanica quantistica, senza fare ricorso all'interpretazione assiomatica della funzione d'onda.

Successivamente ci si concentrerà su alcuni risultati peculiari della formulazione geometrica, tra cui il fatto che il potenziale quantistico, ovvero il termine che differenzia l'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica dalla sua controparte classica, non è mai banale.

Infine si considererà l'applicazione di tale teoria nel contesto della relatività generale, in particolare si esaminerà la formulazione geometrica dell'equazione per la gravitazione quantistica per eccellenza, l'equazione di Wheeler-DeWitt, nella quale il potenziale quantistico assume il ruolo di energia intrinseca del vuoto, identificabile con l'elusiva energia oscura e quindi con la costante cosmologica Λ .

2 La necessità di una deformazione dell'equazione classica

2.1 Deduzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi classica

Un sistema hamiltoniano (n -dimensionale) è un sistema fisico la cui dinamica è descritta dalle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{dq}{dt} = \nabla_p H \\ \dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\nabla_q H \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $q \in \mathbb{R}^n$ sono le coordinate, $p \in \mathbb{R}^n$ i momenti ad esse coniugati e $H(q, p, t)$ l'hamiltoniana. Tali equazioni possono essere riscritte definendo $x = (q, p)$ e introducendo la matrice simplettica standard:

$$J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

Così facendo le equazioni di Hamilton sono sintetizzate nell'equazione differenziale

$$\dot{x} = J\nabla_x H \quad (2.2)$$

Un campo vettoriale come quello al secondo termine della (2.2), ovvero della forma $X_H(x, t) = J\nabla_x H(x, t)$, è detto campo hamiltoniano. Un cambiamento di variabili $y = f(x)$ che mantiene la struttura hamiltoniana del sistema, ovvero che coniuga ogni campo hamiltoniano $J\nabla_x H$ in un nuovo campo hamiltoniano $J\nabla_y K$, è detta trasformazione canonica.¹

Le proprietà caratterizzanti delle trasformazioni canoniche, enunciate nel teorema seguente, costituiscono il punto di partenza per la deduzione della forma classica dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

Teorema 1 *Detti $x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $y = (Q, P) \in \mathbb{R}^{2n}$, si consideri la trasformazione $y = f(x)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. f è una trasformazione canonica.
2. $\nabla_x f$ è una matrice simplettica (soddisfa la relazione $(\nabla_x f)^T J (\nabla_x f) = J$).
3. f conserva le parentesi di Poisson, ovvero $\{F, G\}_x = \{F \circ f^{-1}, G \circ f^{-1}\}_y$
4. \forall hamiltoniana $H \exists K$ tale che la forma differenziale

$$\Delta\pi_{H,K}(x, f(x), t) = \left[\frac{1}{2}(Jx) \cdot dx - H(x, t)dt \right] - \left[\frac{1}{2}(Jf) \cdot df - K(f, t)dt \right] \quad (2.3)$$

sia una forma esatta.

L'ultima affermazione (4) implica l'esistenza di una funzione $G(x, y, t)$ che abbia per differenziale

$$dG = \frac{1}{2}(Jx \cdot dx - Jy \cdot dy) + (K - H)dt \quad (2.4)$$

Tornando alla notazione estesa $x = (q, p)$, $y = (Q, P)$ e definendo $\varphi(q, p) = -\frac{1}{2}q \cdot p$, si ottiene la forma

$$dG = p \cdot dq - P \cdot dQ + d\varphi(q, p) - d\varphi(Q, P) + (K - H)dt \quad (2.5)$$

$$dS = p \cdot dq - P \cdot dQ + (K - H)dt \quad (2.6)$$

¹Si sottolinea che in questo caso si trattano le coordinate q e i momenti p come variabili indipendenti, contrariamente a quanto sarà fatto nel caso delle trasformazioni di punto, dove i momenti sono definiti in base alla trasformazione delle coordinate.

La funzione $S(q, Q, t) := G(q, Q, p, P, t) - \varphi(q, p) + \varphi(Q, P)$ è detta azione (o generatrice) e identifica la trasformazione canonica f che conduce al sistema di hamiltoniana K . Ponendo $K = 0$, il sistema trasformato è triviale: le variabili Q e P , sono costanti lungo le traiettorie del sistema, in base alle equazioni (2.1). Sulla base della (2.5) si ottengono le seguenti informazioni sull'azione:

$$\nabla_q S = p \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \quad (2.7)$$

che possono essere ridotte ad un'unica equazione, che prende il nome di equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \nabla_q S, t) = 0 \quad (2.8)$$

Nel caso stazionario l'hamiltoniana H , e quindi $\nabla_q S$, non hanno una dipendenza esplicita dal tempo; perciò, affinché (2.8) sia vera $\forall t$, anche $\frac{\partial S}{\partial t}$ non deve dipendere dal tempo. L'azione può quindi essere scritta come $S(q, t) = S_0(q) - Et$, dove S_0 è detta azione ridotta. A partire da questa scrittura, concentrandosi sul caso $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ (si considera un potenziale indipendente dai momenti) si ottiene l'equazione di Hamilton-Jacobi stazionaria (CSHJE)

$$\frac{1}{2m} (\nabla_q S_0)^2 + W(q) = 0 \quad (2.9)$$

dove $W(q) = V(q) - E$.

Si sottolinea che risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi equivale a risolvere le equazioni di Hamilton del sistema, in quanto, nota S , è possibile ricostruire la trasformazione che conduce a $K(Q, P) = 0$ e, di conseguenza, determinare le leggi del moto del sistema a partire dai valori costanti di (Q, P) (noti dalle condizioni iniziali).

2.2 Trasformazioni di punto ed equazione di Hamilton-Jacobi

Si cerca ora la trasformazione di coordinate invertibile $q \longleftrightarrow q_0$ tale che $S_0(q) = S_0^0(q_0)$, dove q_0 è il sistema di coordinate corrispondente a hamiltoniana nulla e S_0^0 l'azione corrispondente. Assumendo l'esistenza di una tale trasformazione per ogni sistema, si può scrivere, componendo le mappe di trasformazione di due sistemi arbitrari, l'equivalenza

$$S_0^a(q_a) = S_0^b(q_b). \quad (2.10)$$

Tuttavia, poiché nel sistema con $H = 0$ si ha $S_0^0(q_0) = costante$, la mappa è chiaramente non invertibile e di conseguenza non è possibile avere equivalenza tra due sistemi arbitrari.²

La non equivalenza dei sistemi può sembrare un risultato naturale della meccanica classica, ma si nota con un semplice esempio che ha implicazioni non banali.

Si considerino due particelle libere di massa m_a e m_b in moto relativo a velocità v ; nel sistema di riferimento solidale ad una prima particella si ha $p_a = 0$ e $p_b = m_b v$, da cui $S_0^a(q_a) = costante$ e $S_0^b(q_b) = m_b v q_b$. Dato che la prima è costante mentre la seconda dipende esplicitamente da q_b , non esiste una trasformazione di coordinate invertibile che porti a (2.10). Se, invece, ci si pone nel sistema di riferimento del centro di massa (ad esempio) si trovano $S_0^a(q_a) = -\tilde{p} q_a$ e $S_0^b(q_b) = \tilde{p} q_b$, dove $\tilde{p} = |m_a v_a| = |m_b v_b|$, che sono chiaramente equivalenti tramite $q_a \rightarrow q_b = -q_a$.

Da questa semplice osservazione si evince che, in meccanica classica, (2.10) non può essere soddisfatta in ogni sistema di riferimento (l'equivalenza di due stati è quindi legata alla scelta del riferimento). Si vedrà che l'implementazione di (2.10) richiede una modifica della CSHJE.

L'imposizione dell'equivalenza (2.10) costituisce il fondamento della formulazione geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica, perciò la si formalizza nella seguente ipotesi:

Ipotesi 1 (Trasformazioni di punto) \forall coppia arbitraria di stati di singola particella esiste una trasformazione di coordinate invertibile $q_a \leftrightarrow q_b$, detta trasformazione di punto, tale che l'uguaglianza $S_0^a(q_a) = S_0^b(q_b)$ sia ben definita.

²L'equivalenza è, in ogni caso, possibile solo tra sistemi il cui stato ha il medesimo numero di gradi di libertà; in seguito si farà riferimento, per semplicità, a stati di singola particella.

Si sottolinea che quest'ipotesi implica che S_0 non sia mai costante, poiché, come osservato in precedenza, ciò impedirebbe l'invertibilità di $q_a \leftrightarrow q_b$.

Si esamina ora come tale assunzione interagisca con l'equazione (2.9), in particolare ci si concentra sulla trasformazione dello stato $W(q)$. Sia \mathcal{H} lo spazio dei possibili stati $W(q) = V(q) - E$ e si consideri una coppia arbitraria di stati W_1, W_2 . Per l'ipotesi 1 esiste una trasformazione $q \rightarrow q^v$ che trasformi il primo stato nel secondo, ovvero $W_1(q) \rightarrow W_1^v(q^v) = W_2(q^v)$. I momenti sono dati, per definizione, da

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \quad p_j^v = \frac{\partial S_0^v}{\partial q_j^v} \quad (2.11)$$

perciò, definendo $\Lambda_j^i = \partial q_i / \partial q_j^v$, si ha che

$$p_j^v = \Lambda_j^i p_i. \quad (2.12)$$

Si sottolinea che imporre la validità dell'ipotesi 1 implica $\det \Lambda \neq 0$; in particolare, ciò deve essere valido per la trasformazione $q \rightarrow q_0$ che porta a $W_0(q_0) = 0$. Le proprietà di trasformazione di W possono essere studiate sulla base di quelle di S_0 , grazie all'equazione di Hamilton-Jacobi: dato che è valida in entrambi i sistemi di coordinate si ha

$$\frac{1}{2m} (\nabla_q S_0)^2 + W(q) = 0 \quad \frac{1}{2m} (\nabla_{q^v} S_0^v)^2 + W^v(q^v) = 0 \quad (2.13)$$

da cui, sfruttando (2.11) e (2.12) per esprimere tutto in funzione delle q ,

$$\frac{W^v(q^v)}{W(q)} = \frac{-\frac{1}{2m} (\nabla_{q^v} S_0^v)^2}{-\frac{1}{2m} (\nabla_q S_0)^2} = \frac{(\Lambda \nabla_q S_0)^2}{(\nabla_q S_0)^2} \quad (2.14)$$

Esplicitando quindi nello stato trasformato e definendo $(p^v|p) = \frac{p^\dagger \Lambda^\dagger \Lambda p}{p^\dagger p}$, si ottiene che la trasformazione è, in generale, della forma

$$W(q) \rightarrow W^v(q^v) = (p^v|p)W(q). \quad (2.15)$$

Dalla (2.15) risulta chiaro che lo stato $W_0(q_0) = 0$ è un punto fisso in H : non esiste infatti alcuna v -mappa che conduca da W_0 ad uno stato non banale. È quindi evidente che la CSHJE e l'esistenza di trasformazioni di punto tra stati arbitrari sono incompatibili.

Per curare tale incompatibilità si cerca una deformazione della CSHJE compatibile con l'ipotesi 1 e che si riduca alla (2.9) in qualche limite (si osserverà che tale limite è $\hbar \rightarrow 0$).

3 Deduzione della deformazione quantistica dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Si osserva che, poiché i momenti e le coordinate sono generati rispettivamente da S_0 e la sua trasformata di Legendre (T_0) come $p = \nabla_q S_0$ e $q = \nabla_p T_0$, l'aggiunta di una costante a S_0 non incide sulla dinamica del sistema. Si deduce quindi che l'equazione che definisce S_0 deve dipendere solo dalle derivate di primo ordine o superiore di tale funzione: la forma generale è quindi $\mathcal{F}(q, \nabla S_0, \nabla^2 S_0, \dots)$. Affinché sia coerente con l'ipotesi 1, si deforma quindi l'equazione classica, aggiungendovi un termine detto potenziale quantistico ($Q(q)$), la cui forma sarà esaminata in seguito:

$$\frac{1}{2m} (\nabla_q S_0)^2 + W(q) + Q(q) = 0 \quad (3.1)$$

Così facendo si ha che la trasformazione (2.15) non si applica più al solo W ma alla somma $W + Q$; ne segue che, presi singolarmente, i due termini trasformeranno secondo le leggi generali

$$\begin{cases} W(q) \rightarrow W^v(q^v) = (p^v|p)W(q) + (q; q^v) \\ Q(q) \rightarrow Q^v(q^v) = (p^v|p)Q(q) - (q; q^v) \end{cases} \quad (3.2)$$

dove il termine non omogeneo $\pm(q; q^v)$, la cui forma sarà determinata in seguito, è cruciale ai fini della discussione. A partire da $W(q) = 0$ è ora possibile, tramite una v -mappa, raggiungere uno stato non banale. Ciò risolve l'incompatibilità tra la richiesta dell'esistenza di una trasformazione di punto tra stati arbitrari e l'equazione di Hamilton-Jacobi.

3.1 Il potenziale quantistico nel caso 1-dimensionale

Si cercano ora informazioni sul termine $(q; q^v)$, che conducano ad una definizione consistente del termine di potenziale quantistico. Si considerino tre stati distinti $W^a(q_a), W^b(q_b), W^c(q_c) \in \mathcal{H}$, per cui, da (3.2), valgono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} W^b(q_b) = (p^b|p^a)W^a(q_a) + (q_a; q_b) \\ W^b(q_b) = (p^b|p^c)W^c(q_c) + (q_c; q_b) \\ W^c(q_c) = (p^c|p^a)W^a(q_a) + (q_a; q_c) \end{cases} \quad (3.3)$$

Sostituendo la terza relazione nella seconda e uguagliando le prime due si ottiene

$$\begin{aligned} (p^b|p^a)W^a(q_a) + (q_a; q_b) &= (p^b|p^c)[(p^c|p^a)W^a(q_a) + (q_a; q_c)] + (q_c; q_b) \\ (p^c|p^b)[(q_a; q_b)] &= (p^c|p^b)[(p^b|p^c)(q_a; q_c) + (q_c; q_b)] \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la relazione $(p^b|p^c)(p^c|p^a) = (p^b|p^a)$, che segue direttamente dalla definizione di $(p^b|p^a)$. Esplicitando ora in $(q_a; q_c)$ e scrivendo¹

$$(q_c; q_b) = -(p^c|p^b)(q_b; q_c) \quad (3.4)$$

si ottiene la seguente relazione, nota come condizione di cociclo

$$(q_a; q_c) = (p^c|p^b)(q_a; q_b) + (q_b; q_c) . \quad (3.5)$$

Fino ad ora non si è fatta alcuna ipotesi sul sistema in esame, perciò la condizione di cociclo rimane valida per qualsiasi dimensionalità del sistema. Ci si concentra ora su sistemi unidimensionali (in seguito si esaminerà anche il caso generale), in cui la condizione (3.5) assume la forma

$$(q_a; q_c) = \left(\frac{\partial q_b}{\partial q_c} \right)^2 (q_a; q_b) + (q_b; q_c) \quad (3.6)$$

Si introduce ora la derivata Schwarziana:

Definizione 1 Si definisce la derivata Schwarziana di una funzione scalare $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) come la funzione $\{f(x), x\}$ data da

$$\{f(x), x\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (3.7)$$

dove ogni apice indica una derivazione rispetto al secondo argomento (i.e. x).

La derivata Schwarziana $\{f(x), x\}$ gode della seguente proprietà di composizione:

$$\{f \circ g, x\} = \{f \circ g, g\}(g')^2 + \{g, x\} \quad (3.8)$$

Da tale legge segue immediatamente che $\{q_a; q_b\}$ soddisfa la (3.6). In particolare, la derivata Schwarziana risulta essere l'unica soluzione della condizione di cociclo 1-dimensionale:

Teorema 2 A meno di una costante moltiplicativa e un termine di cobordo, la condizione (3.6) definisce la derivata Schwarziana.

Si ottiene quindi che $(q_a; q_b) = -\beta\{q_a, q_b\}$, con $\beta \in \mathbb{R}^+$ [1].

¹Questa scrittura è ottenuta confrontando le trasformazioni $W^b \rightarrow W^c$ e $W^a \rightarrow W^b$.

3.1.1 Dimostrazione del teorema 2

Se $(f(q), q)$ soddisfa la condizione di cociclo, aggiungedovi un termine di cobordo del tipo

$$(f(q), q) \rightarrow (f(q), q) + (\partial_q f)^2 G(f(q)) - G(q)$$

non si altera la validità della condizione, infatti tutti i termini aggiuntivi prodotti si elidono, riconducendo alla condizione di cociclo di partenza. Si vuole dunque fissare questa libertà sulla base del fatto che l'equazione (3.1) dipende solo dalle derivate di S_0 e non da S_0 stessa: dal momento che, nel caso $W^0(q_0) = 0$, la trasformazione dello stato in (3.2) assume la forma $W(q) = (q_0; q)$ si evince che anche le dipendenze di (q_0, q) sono soggette al vincolo di cui sopra, quindi $G(q_0) = \text{costante} = G(q)$; in particolare, dato che nel caso 1-dimensionale è possibile ricavare q_0 dalla (2.10) come

$$q_0 = (S_0^0)^{-1} \circ S_0(q) \quad (3.9)$$

si ha che $(q_0; q)$ dipenderà solamente dalle derivate di q_0 di ordine primo o superiore. Ciò implica che il termine non omogeneo delle trasformazioni di stato è indipendente da costanti additive nel primo argomento:

$$(q_a + B; q_b) = (q_a; q_b) \quad (3.10)$$

da cui consegue direttamente (usando (3.4)) una relazione analoga per il secondo argomento:

$$(q_a; q_b + B) = -(p^b | p^a)(q_b + B; q_a) = -(p^b | p^a)(q_b; q_a) = (q_a; q_b) \quad (3.11)$$

Se invece si considera una dilatazione di un fattore costante $A \neq 0$, si ha che la valutazione di $(Aq; q)$ in $q = 0$ è indipendente da A , perciò risulta

$$(Aq; q)|_{q=0} = (q; q)|_{q=0} = 0 \quad (3.12)$$

D'altra parte, per la (3.11), vale $(Aq; q + B) = (Aq; q)$, perciò $(Aq; q)$ non dipende da q , quindi $(Aq; q) = 0 = (q; Aq)$, applicando la (3.4) per la seconda uguaglianza. Dalla condizione di cociclo si deduce quindi che

$$(q_a; Aq_b) = A^{-2}(q_a; q_b) + (q_b; Aq_b) = A^{-2}(q_a; q_b) \quad (3.13)$$

e, grazie alla (3.4)

$$(Aq_a; q_b) = -A^2(\partial_{q_b} q_a)^2(q_b; Aq_a) = -(\partial_{q_b} q_a)^2(q_b; q_a) = (q_a; q_b) \quad (3.14)$$

Si passa ora a considerare un'operazione di inversione. Si definisca $f(q) = q^{-2}(q; q^{-1})$; per una qualsiasi costante A risulta, in base a quanto visto per le dilatazioni e (3.4),

$$\begin{aligned} f(Aq) &= (Aq)^{-2}(Aq; (Aq)^{-1}) = A^{-2}q^{-2}(q; A^{-1}q^{-1}) = q^{-2}(q; q^{-1}) = f(q) \\ f(q^{-1}) &= q^2(q^{-1}; q) = q^2[-q^{-4}(q; q^{-1})] = -f(q) \\ f(Aq) &= -f(q^{-1}) \end{aligned}$$

Deve allora essere valida, $\forall q$, l'identità

$$0 = f(q) + f(q^{-1}) = q^{-2}(q; q^{-1}) + q^2(q^{-1}; q) \Leftrightarrow (q; q^{-1}) = (q^{-1}; q) = 0 \quad (3.15)$$

Quest'ultimo risultato, combinato con il cociclo (3.6) e la (3.4), conduce all'invarianza per inversione del primo argomento:

$$(q_a, q_b^{-1}) = (\partial_{q_b^{-1}} q_b)^2(q_a; q_b) + (q_b, q_b^{-1}) = q_b^4(q_a; q_b) \quad (3.16)$$

$$(q_a^{-1}; q_b) = -(\partial_{q_b} q_a^{-1})^2(q_b; q_a^{-1}) = -q_a^{-4}(\partial_{q_b} q_a)^2 q_a^4(q_b; q_a) = (q_a; q_b) \quad (3.17)$$

Dilatazioni, traslazioni e inversioni generano il gruppo di trasformazione di Möbius, definito come

$$PSL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \gamma(q) \left| \gamma(q) = \frac{Aq + B}{Cq + D}, AD - BC \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right. \right\} \quad (3.18)$$

In base a quanto mostrato finora, si può enunciare il seguente lemma:

Lemma 1 *Affinché la condizione di cociclo sia soddisfatta, data una trasformazione $\gamma(q) \in PSL(2, \mathbb{C})$ devono essere rispettate le seguenti proprietà*

$$(\gamma(q_a); q_b) = (q_a; q_b) \quad (3.19)$$

$$(q_a; \gamma(q_b)) = \left(\frac{\partial \gamma(q_b)}{\partial q_b} \right)^2 (q_a; q_b) \quad (3.20)$$

Si consideri ora la trasformazione nella forma generale $q \rightarrow \tilde{q} = q + \varepsilon f(q)$. Poiché si è visto che $(\tilde{q}; q)$ dipende solo dalle derivate di \tilde{q} , che in questo caso sono della forma² $\varepsilon f^{(k)}(q)$ (dove $f^{(k)}(q) = \partial_q^k f(q)$), si ottiene, al primo ordine in ε ,

$$(q + \varepsilon f(q); q) = c_1 \varepsilon f^{(k)}(q) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.21)$$

Sulla base del lemma 1 si ha quindi che devono essere valide, definendo $F(Aq) = Af(q)$,

$$(Aq + \varepsilon Af(q); Aq) = A^{-2}(q + \varepsilon f(q); q) = c_1 A^{-2} \varepsilon f^{(k)}(q) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$(Aq + \varepsilon F(Aq); Aq) = c_1 \varepsilon \partial_{Aq}^k F(Aq) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = c_1 \varepsilon A^{1-k} f^{(k)}(q) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Eguagliando queste due si evince che, necessariamente, $k = 3$.

Tale ragionamento può essere esteso all'ordine ε^n , infatti il termine n-esimo è una somma di termini della forma

$$c_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^n \varepsilon \partial_{Aq}^{i_k} F(Aq) = c_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon^n A^{(n - \sum_{k=1}^n i_k)} \prod_{k=1}^n f^{(i_k)}(q) \quad (3.22)$$

Affinché questa sia consistente sia con la dipendenza di $(\tilde{q}; q)$ dalle derivate di \tilde{q} che con il lemma 1,³ gli ordini di derivazione i_k devono rispettare i seguenti vincoli

$$\begin{cases} i_k \geq 1 & \forall k \in [1, n] \\ \sum_{k=1}^n i_k = n + 2 \end{cases} \quad (3.23)$$

Si hanno quindi solo due possibili combinazioni di derivate per il termine in ε^n :

$$i_\ell = 3 \wedge i_k = 1 \quad \forall k \in [1, n] \setminus \{\ell\} \quad \text{oppure} \quad i_\ell = i_j = 2 \wedge i_k = 1 \quad \forall k \in [1, n] \setminus \{\ell, j\}$$

Ne segue che $(\tilde{q}; q)$ può essere scritto come la serie di potenze in ε

$$(q + \varepsilon f(q); q) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[c_n f^{(3)}(q) (f^{(1)}(q))^{n-1} + d_n (f^{(2)}(q))^2 (f^{(1)}(q))^{n-2} \right] \quad (3.24)$$

con c_n, d_n costanti (in base a quanto visto, $d_1 = 0$).

Si considerino ora le trasformazioni che collegano tre sistemi q_a, q_b e q_c , scrivibili come

$$q_b = v^{yx}(q_x) = q_x + \varepsilon_{yx}(q_x) \quad (3.25)$$

Dall'imposizione dell'esistenza delle trasformazioni di punto invertibili, segue che valgono le seguenti proprietà:

$$v^{ab} = (v^{ba})^{-1} \quad (3.26)$$

$$v^{ca} = v^{cb} \circ v^{ba} \quad (3.27)$$

²La derivata prima è $\partial_q \tilde{q} = 1 + \varepsilon f'(q)$; tuttavia, "1" produce, al primo ordine in ε , un termine costante che può essere eliminato grazie alla libertà sul termine di cobordo. Per ordini superiori invece, i termini generati da "1" possono essere assorbiti nelle costanti c_n dei diversi ordini. Per questi motivi non si riporta il termine costante nel seguito.

³Come nel caso dell'ordine 1, dal lemma si giunge ad una relazione totalmente analoga alla (3.22), ma con esponente di A fissato a -2

Devono quindi essere equivalenti le scritture $q_b = q_a + \varepsilon_{ba}(q_a)$ e $q_b = q_a - \varepsilon_{ab}(q_b)$; esprimendo q_b secondo la (3.25) nell'argomento di ε_{ab} , il confronto di queste due porta alla seguente identità:

$$\varepsilon_{ba} = -\varepsilon_{ab} \circ (\mathbb{I} + \varepsilon_{ba}) \quad (3.28)$$

Considerando invece le trasformazioni $q_a = q_c + \varepsilon_{ac}(q_c)$ e $q_a = q_b + \varepsilon_{ab}(q_b)$ si ottiene, sostituendovi la (3.25) per q_b , la relazione

$$\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ab} \circ (\mathbb{I} + \varepsilon_{bc}) + \varepsilon_{bc} = (-\mathbb{I} + \varepsilon_{ab}) \circ (\mathbb{I} + \varepsilon_{cb}) + \mathbb{I} \quad (3.29)$$

Ci si riconduce ora a quanto visto sopra ponendo $\varepsilon_{yx}(q_x) = \varepsilon f_{yx}(q_x)$, con $\varepsilon \rightarrow 0$; dalla condizione di cociclo (3.6) e dall'espressione al primo ordine di $(q + \varepsilon f(q); q)$ (3.21) si ottiene quindi

$$c_1 \varepsilon_{ac}^{(3)}(q_c) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = (1 + \varepsilon_{bc}^{(1)}(q_c))^2 \left[c_1 \varepsilon_{ab}^{(3)}(q_b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - c_1 \varepsilon_{cb}^{(3)}(q_b) - \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \quad (3.30)$$

D'altra parte, al primo ordine in ε , (3.29) diventa

$$\varepsilon^{ac} = \varepsilon^{ab} - \varepsilon^{cb} \quad (3.31)$$

Queste due equazioni sono consistenti solamente se $c_1 \neq 0$: ponendo, per assurdo, $c_1 = 0$, il cociclo (3.30) assumerebbe la forma

$$\mathcal{O}_{ac}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}_{ab}(\varepsilon^2) - \mathcal{O}_{cb}(\varepsilon^2) \quad (3.32)$$

dove, in base all'espansione in serie (3.24), ciascun elemento è scritto come

$$\mathcal{O}_{ac}(\varepsilon^2) = c_2 \varepsilon_{ac}^{(3)}(q_c) \varepsilon_{ac}^{(1)}(q_c) + d_2 \left(\varepsilon_{ac}^{(2)}(q_c) \right)^2 + \mathcal{O}_{ac}(\varepsilon^3) \quad (3.33)$$

Sostituire la (3.31) in (3.33) produce una relazione inconsistente con la (3.32) a causa dei termini misti tra le derivate $\varepsilon_{ab}^{(k)}$ e $\varepsilon_{cb}^{(k)}$, assenti nella differenza $\mathcal{O}_{ab}(\varepsilon^2) - \mathcal{O}_{cb}(\varepsilon^2)$. Tale inconsistenza potrebbe essere risolta ponendo $(q_a; q_c) = 0$, ma tale possibilità è esclusa dall'imposizione dell'ipotesi 1. Riassumendo:

Lemma 2 *Considerata una trasformazione di coordinate $q_a = q_b + \varepsilon_{ab}(q_b)$, l'unica soluzione della condizione di cociclo (3.6) dipendente dalle sole derivate di q_a ha la forma*

$$(q_a; q_b) = c_1 \varepsilon_{ab}^{(3)}(q_b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad c_1 \neq 0$$

Si vuole ora dimostrare che questo lemma implica che $(q_a; q_b) \propto \{q_a, q_b\}$.

Poiché sia $(q_a; q_b)$ che $\{q_a, q_b\}$ soddisfano la condizione di cociclo, essa è soddisfatta anche da $[q_a; q_b] = (q_a; q_b) - c_1 \{q_a, q_b\}$. Ponendosi nelle ipotesi del lemma 2, la derivata schwarziana (sviluppata al primo ordine in ε) assume la forma

$$\begin{aligned} \{q + \varepsilon f(q), q\} &= \frac{\varepsilon f^{(3)}}{1 + \varepsilon f^{(1)}} - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2 (f^{(2)})^2}{(1 + f^{(1)})^2} \\ &= \varepsilon f^{(3)} (1 - \varepsilon f^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) - \frac{3}{2} \varepsilon^2 (f^{(2)})^2 (1 - \varepsilon f^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2))^2 \\ &= \varepsilon f^{(3)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Poiché vale una forma analoga per $(q + \varepsilon f(q); q)$, risulta anche

$$[q + \varepsilon f(q); q] = \tilde{c}_1 \varepsilon f^{(3)}(q) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Sottraendo, in accordo con la definizione di $[q_a; q_b]$, le espansioni al primo ordine di $(q_a; q_b)$ e $\{q_a, q_b\}$ si evince che $\tilde{c}_1 = 0$ e, come visto in precedenza, ciò comporta $[q_a; q_b] = 0$. Si conclude quindi che

$$(q_a; q_b) = -\frac{\hbar^2}{4m} \{q_a, q_b\} \quad (3.35)$$

dove si è posto $c_1 = -\frac{\hbar^2}{4m}$ cosicché, nel limite $\hbar \rightarrow 0$, il termine non omogeneo in (3.2) si annulli. La presenza della massa a denominatore è invece spiegata considerando la trasformazione tra stati di singola particella con masse diverse: in tal caso l'analogo della (3.6) è

$$m_a(q_a; q_c) = m_a \left(\frac{\partial q_b}{\partial q_c} \right)^2 (q_a; q_b) + m_b(q_b; q_c) \quad (3.36)$$

che, affinché l'uguaglianza sia valida, implica che la massa del primo argomento di $(q_a; q_b)$ compaia al denominatore.

3.1.2 L'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica unidimensionale

Rifacendosi alla (3.2) si ha quindi che il termine di potenziale quantistico, nel caso 1-dimensionale, trasforma secondo la legge

$$Q^v(q^v) = (\partial_{q^v} q)^2 Q(q) + \frac{\hbar^2}{4m} \{q, q^v\} \quad (3.37)$$

Si deduce quindi che la forma del potenziale quantistico deve essere

$$Q(q) = \frac{\hbar^2}{4m} \{S_0, q\} \quad (3.38)$$

infatti, ponendo $S_0^v(q^v) = S_0(q(q^v))$ e computando di conseguenza $Q^v(q^v) = \frac{\hbar^2}{4m} \{S_0^v, q^v\}$, si riottiene la (3.37).

L'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica stazionaria (QSHJE) nel caso 1-dimensionale è quindi

$$\frac{1}{2m} (\nabla_q S_0)^2 + W(q) + \frac{\hbar^2}{4m} \{S_0, q\} = 0 \quad (3.39)$$

Tale equazione, come inizialmente richiesto, è coerente con l'ipotesi 1 e, nel limite classico, si riconduce alla CSHJE poiché, per costruzione, $Q(q) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0$.

3.2 Riproduzione dei risultati della meccanica quantistica

Affinché la formulazione proposta sia valida, deve riprodurre la fenomenologia della meccanica quantistica osservata sperimentalmente. Per questo motivo, ci si propone di fornire una spiegazione, basata su quanto mostrato fino ad ora, di alcuni importanti risultati riguardanti una particella immersa in un potenziale 1-dimensionale; in particolare si esamineranno i fenomeni di quantizzazione dell'energia e il tunneling quantistico, nonché l'impossibilità di definire la traiettoria di una particella.

Nota la soluzione $S_0(q)$ di (3.39), si verifica che

$$\psi(q) = \frac{1}{\sqrt{S_0'}} \left(A e^{\frac{i}{\hbar} S_0} + B e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \right) \quad (3.40)$$

risolve l'equazione di Schrödinger stazionaria (SSE) associata al sistema, ovvero

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V \right) \psi = E \psi \quad (3.41)$$

Il rapporto $w = \frac{\psi^D}{\psi}$, dove ψ e ψ^D sono soluzioni linearmente indipendenti di (3.41), costituisce la mappa trivializzante, ovvero la trasformazione di coordinate che manda W in $W^0 = 0$.⁴

Sulla base di ciò è possibile dedurre la quantizzazione dell'energia come conseguenza diretta dell'ipotesi sulle trasformazioni di punto, senza ricorrere all'identificazione assiomatica di ψ con l'ampiezza di probabilità: si dimostra che

Teorema 3 *Detti q_-, q_+ i valori minimo e massimo per cui $W(q)$ cambia segno, si ha che, se*

$$W(q) \geq \begin{cases} P_-^2 > 0, & q < q_- \\ P_+^2 > 0, & q > q_+ \end{cases}$$

allora w è un auto-omeomorfismo locale di $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se e solo se (3.41) ammette una soluzione $\psi \in L^2(\mathbb{R}) = \{\psi \mid \int \bar{\psi} \psi dx < \infty\}$ [2].

⁴Si può verificare che, note due soluzioni indipendenti di un'equazione del tipo $(\partial_x^2 + W(x))\psi = 0$, il cambio di coordinate $x \rightarrow w = \psi^D/\psi$ conduce a $\partial_w^2 \psi = 0$, risolta da $\psi = 1$, $\psi^D = w$.

Affinché si possa implementare l'ipotesi 1, la w deve essere un auto-omeomorfismo; ne segue che, per il teorema 3, la QSHJE è ben definita solo per valori di energia E per i quali la SSE associata ammette soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$, ovvero i valori appartenenti allo spettro discreto (quantizzato).

È inoltre possibile spiegare il tunneling quantistico come conseguenza diretta dell'ipotesi 1. Classicamente, la definizione $p = \sqrt{2m(E - V)}$ produce una zona proibita $\Omega = \{q \in \mathbb{R} \mid V(q) - E > 0\}$ in cui p assume valore immaginario. D'altra parte, a causa della presenza del potenziale quantistico nel caso della QSHJE, la definizione diventa $p = \partial_q S_0 = \sqrt{2m(E - V - Q)}$; tale correzione è tale da rendere p una quantità sempre reale: poiché la trasformazione (3.9) deve essere un auto-omeomorfismo di $\tilde{\mathbb{R}}$, S_0 deve assumere valore reale $\forall q \in \mathbb{R}$ e, di conseguenza

$$p = \partial_q S_0 \in \mathbb{R} \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

Si conclude quindi che, nella formulazione geometrica, non compare alcuna regione proibita ed è quindi possibile che una particella superi una barriera di potenziale maggiore della sua energia cinetica [1]. Si noti che anche in questo caso la spiegazione non ricorre all'interpretazione probabilistica della funzione d'onda.

Un altro importante risultato della meccanica quantistica risiede nell'inesistenza delle traiettorie. Anche questo può essere riprodotto nel contesto della formulazione geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica, come conseguenza della quantizzazione dell'energia. Lungo una traiettoria $q = q(t)$, per il principio variazionale di Hamilton, la variazione dell'azione deve essere nulla, perciò, variando rispetto ad energia e tempo si ha

$$\delta S(q, t) = \delta(S_0(q) - E(t - t_0)) = \frac{\partial S_0}{\partial E} \delta E - t \delta E - E \delta t = 0 \quad (3.42)$$

che è verificata solo se vale la relazione

$$\frac{\partial S_0}{\partial E}(q) = t - t_0 \quad (3.43)$$

Invertendo tale equazione si trova l'espressione di q in funzione di t , ovvero la traiettoria. Nel caso di uno spettro quantizzato la derivata parziale $\partial S_0 / \partial E$ non è ben definita, perciò, in base alla (3.43), non lo è nemmeno il tempo. Dall'imposizione della condizione di cociclo (3.5) emergono delle condizioni all'infinito su $w = \psi^D / \psi$ che possono essere soddisfatte solo in spazi compatti, che portano alla quantizzazione dell'energia [3]. Ne segue che la QSHJE è ben definita solo nel caso di spettro discreto, con lo spettro continuo emergente come caso limite. Nel caso di una particella libera, la spaziatura tra i livelli energetici è legata alla geometria dello spazio tridimensionale, in particolare, in analogia con il caso di una buca di potenziale infinitamente profonda, risulta di ordine R^{-2} , con R una qualche lunghezza caratteristica cosmologica.

L'inesistenza delle traiettorie suggerisce inoltre che l'interpretazione probabilistica della ψ possa, in questa formulazione, essere dedotta senza essere imposta come assioma.

4 La forma generale della QHJE

Si vuole ora ricavare la forma generale dell'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica, nel caso n -dimensionale e con l'hamiltoniana dipendente esplicitamente dal tempo. Per fare ciò ci si rifà a quanto visto all'inizio del paragrafo 3.2: assumendo che nel caso generale si abbia un legame analogo tra la soluzione S della Hamilton-Jacobi e la soluzione ψ dell'equazione di Schrödinger, si pone

$$\psi(q, t) = R(q, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(q, t)} \quad (4.1)$$

dove $R(q, t)$ è una funzione reale e $q \in \mathbb{R}^n$. La forma generale dell'equazione di Schrödinger è

$$H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_q^2 + V \right] \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (4.2)$$

Sostituendovi la funzione d'onda (4.1), si ottiene

$$V - \frac{i\hbar}{mR} \nabla S \cdot \nabla R - \frac{\hbar^2}{2mR} \nabla^2 R + \frac{(\nabla S)^2}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S = -\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{i\hbar}{R} \frac{\partial R}{\partial t}$$

da cui, separando le parti immaginaria e reale, si giunge al sistema di equazioni ricercato

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \\ \frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla \cdot (R^2 \nabla S) = 0 \end{array} \right. \quad (4.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \\ \frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla \cdot (R^2 \nabla S) = 0 \end{array} \right. \quad (4.3b)$$

dove la (4.3a) è l'equazione di Hamilton-Jacobi (QHJE), con potenziale quantistico

$$Q(q, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (4.4)$$

mentre la (4.3b), invece, è un'equazione di continuità che definisce la relazione tra R e l'azione S .

Si verifica ora la consistenza tra il risultato generale e quanto dimostrato per il caso stazionario unidimensionale (3.39): in tale situazione, il sistema (4.3) si riduce a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + V - E - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q} \left(R^2 \frac{\partial S_0}{\partial q} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (4.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + V - E - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q} \left(R^2 \frac{\partial S_0}{\partial q} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (4.5b)$$

Si nota che l'equazione di continuità è di semplice risoluzione poiché è soddisfatta solamente se

$$R^2 \frac{\partial S_0}{\partial q} = k$$

con $k \in \mathbb{R}$ costante. R è quindi legata a S_0 dalla relazione

$$R = \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Si osserva immediatamente che questo risultato riproduce la forma di ψ trovata in (3.40).

Nota la forma di R in termini di S_0 , è possibile calcolare il potenziale quantistico (4.4), che, come atteso, coincide con la derivata Schwarziana di S_0 rispetto a q :

$$Q(q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = +\frac{\hbar^2}{4m} \{S_0, q\}$$

Si conclude, inserendo tale potenziale in (4.5a), che il sistema (4.3) e l'equazione (3.39) sono tra loro consistenti.

4.1 Il paradosso di Einstein nella formulazione geometrica

La formulazione geometrica fornisce una soluzione naturale al cosiddetto paradosso di Einstein, che riguarda il limite classico del momento di una particella confinata. Si consideri una particella in uno stato legato stazionario (1-dimensionale) di energia E ben definita; si può dimostrare che la funzione d'onda $\psi_E \in L^2(\mathbb{R})$ associatavi è proporzionale ad una funzione reale. Secondo la (4.1), la soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria¹ $H\psi_E = E\psi_E$ diventa quindi $\psi_E(q) = R(q)e^{\frac{i}{\hbar}S_0(q)}$, dove, affinché ψ_E sia reale, S_0 deve essere una costante. Tale soluzione, accettata come stato fisico nella formulazione Bohmiana, conduce alla situazione paradossale osservata da Einstein: il momento $p = \nabla S_0$ risulta nullo e quindi, identificando $p = m\dot{q}$, la particella è a riposo a livello quantistico

¹Nel caso stazionario si decompone la funzione d'onda in $\psi(q, t) = \psi_E(q)\varphi(t)$, dove la componente di evoluzione temporale è data dalla fase $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$.

e dovrebbe iniziare a muoversi nel limite $\hbar \rightarrow 0$ (si pensi, ad esempio, ad un oscillatore armonico); tuttavia è evidente che $S_0 = \text{costante}$ non può avere un limite classico non banale.

D'altra parte si osserva che, nota una soluzione S_0 del sistema (4.5), anche $-S_0$ è soluzione, perciò la forma più generale della soluzione di $H\psi_E = E\psi_E$ è la combinazione lineare

$$\psi_E(q) = R \left(A e^{\frac{i}{\hbar} S_0} + B e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \right) \quad (4.6)$$

con A e B costanti. Nella formulazione geometrica questa forma è naturalmente selezionata come stato fisico della particella confinata poiché la condizione di realtà si traduce in $A = \overline{B}$, senza alcun vincolo sulla forma di S_0 . L'azione ridotta, in accordo con l'ipotesi 1, risulta quindi non banale, perciò il limite classico del momento è ben definito e il paradosso di Einstein non emerge [4].

Il limite classico di p sarà discusso in dettaglio nel paragrafo 5.2, dove si vedrà che richiederne la consistenza con i risultati della meccanica classica implica l'introduzione di lunghezze fondamentali.

4.2 Riduzione di QHJE ed equazione di continuità ad un'unica equazione

Si mira ora a scrivere la QHJE e l'associata equazione di continuità come un'unica equazione. Per fare ciò si introducono due campi vettoriali \mathcal{E} e \mathcal{B} tali che siano soddisfatte le seguenti equazioni²

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 4\pi R^2 \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \mathcal{B} - \frac{1}{c_\psi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{mc_\psi} R^2 \nabla S \quad (4.8)$$

dove c_ψ è una costante con le dimensioni di una velocità; confrontando la derivata temporale di (4.7) con la divergenza di (4.8), si evince che la validità di queste equazioni implica, dette $\rho = R^2$ la densità di massa e $j = \frac{1}{m} R^2 \nabla S$ la densità di corrente di massa, la validità dell'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \quad (4.9)$$

che coincide con la (4.3b).

Si vuole ora scrivere la (4.3a) in termini dei campi \mathcal{E} , \mathcal{B} ; si osserva innanzitutto che i momenti coniugati assumono la forma

$$\nabla S = mc_\psi \frac{\nabla \times \mathcal{B} - \frac{1}{c_\psi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}}{\nabla \cdot \mathcal{E}} = \frac{4\pi j}{\nabla \cdot \mathcal{E}} \quad (4.10)$$

Il termine $\frac{\nabla^2 R}{R}$, che definisce il potenziale quantistico, può essere espresso in termini del solo campo \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 R}{R} &= \frac{1}{R} \nabla \cdot \left(\frac{1}{2R} \nabla R^2 \right) = \frac{1}{2R} \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \nabla R^2 + \frac{1}{R} \nabla \cdot (\nabla R^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\nabla \cdot (\nabla R^2)}{R^2} - \frac{(\nabla R^2)^2}{2R^4} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\nabla^2 (\nabla \cdot \mathcal{E})}{\nabla \cdot \mathcal{E}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla (\nabla \cdot \mathcal{E})}{\nabla \cdot \mathcal{E}} \right)^2 \right] =: \frac{1}{2} [\mathcal{E}, q] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sostituendo (4.10) e (4.11) nella QHJE si ottiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{8\pi^2}{m} \frac{j^2}{(\nabla \cdot \mathcal{E})^2} + V - \frac{\hbar^2}{4m} [\mathcal{E}, q] = 0 \quad (4.12)$$

Nel caso stazionario, in cui si è visto che $\partial_t S = -E$ e $j = \frac{mc_\psi}{4\pi} \nabla \times \mathcal{B}$, tale equazione si riduce a

$$\frac{mc_\psi^2}{2} \left(\frac{\nabla \times \mathcal{B}}{\nabla \cdot \mathcal{E}} \right)^2 + V - E - \frac{\hbar^2}{4m} [\mathcal{E}, q] = 0 \quad (4.13)$$

²L'utilizzo del rotore nella definizione di \mathcal{B} limita la validità di quanto segue al caso di uno spazio 3-dimensionale.

Nel caso dipendente dal tempo, invece, l'equazione può essere riscritta confrontando la derivata temporale di (4.10) con il gradiente di (4.12), ottenendo

$$(\nabla \cdot \mathcal{E}) \frac{\partial j}{\partial t} - j \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathcal{E}) + \frac{4\pi}{m} j \nabla j - \frac{2\pi}{m} \nabla \ln(\nabla \cdot \mathcal{E}) + \nabla V (\nabla \cdot \mathcal{E})^2 - \frac{\hbar^2}{4m} \nabla[\mathcal{E}, q] = 0 \quad (4.14)$$

Si ricorda che per costruzione j può essere scritto in termini di \mathcal{E} e \mathcal{B} , quindi l'equazione trovata rappresenta una riduzione del sistema (4.3) ad una singola equazione differenziale, sebbene complessa, in \mathcal{E} e \mathcal{B} .

5 Conseguenze della formulazione geometrica

In questo capitolo si metteranno in luce alcune importanti conseguenze legate strettamente alla formulazione geometrica della QSHJE. Questi risultati, assenti nella formulazione Bohmiana, costituiscono la base per quanto verrà discusso nel capitolo 6.

5.1 Non-trivialità del potenziale quantistico

Si consideri un sistema unidimensionale stazionario. Dalla legge di composizione della derivata Schwarziana (3.8) si ottiene, ponendo $f(q) = e^{\frac{2i}{\hbar} S_0}$ e $g(q) = S_0(q)$, la relazione

$$\{e^{\frac{2i}{\hbar} S_0}, q\} = \frac{2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \{S_0, q\} \quad (5.1)$$

Confrontare questa con la (3.39) consente di riscrivere la QSHJE come

$$\{e^{\frac{2i}{\hbar} S_0}, q\} = \frac{4m}{\hbar^2} W(q) \quad (5.2)$$

Si consideri ora una particella libera con energia nulla, ovvero lo stato $W(q) = 0$; in questo caso l'equazione precedente assume la forma

$$\{e^{\frac{2i}{\hbar} S_0}, q\} = 0 = \{q, q\} \quad (5.3)$$

Poiché si è dimostrato che la derivata Schwarziana è invariante per trasformazioni di Möbius, la (5.3) è risolta, in generale, se

$$e^{\frac{2i}{\hbar} S_0} = \gamma[q] = \frac{Aq + B}{Cq + D} \implies S_0 = \frac{\hbar}{2i} \ln \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (5.4)$$

dove $\gamma[q]$ è un elemento del gruppo $PSL(2, \mathbb{C})$.¹ Lo stesso risultato può essere ottenuto considerando che, se $W(q) = 0$, le soluzioni indipendenti della SSE associata sono $\psi_1 = q$ e $\psi_2 = cost..$ D'altra parte si è visto che le soluzioni possono essere scritte come $\psi = e^{\frac{i}{\hbar} S_0}$ e $\psi = e^{-\frac{i}{\hbar} S_0}$. Il rapporto tra due soluzioni indipendenti è quindi

$$\frac{\psi}{\psi^D} = e^{\frac{2i}{\hbar} S_0} = \frac{Aq + B}{Cq + D}$$

dove $Aq + B$ e $Cq + D$ sono combinazioni lineari indipendenti di ψ_1 e ψ_2 . Si riottiene quindi l'azione ridotta come

$$S_0 = \frac{\hbar}{2i} \ln \frac{\psi}{\psi^D} \quad (5.5)$$

che coincide con quanto ricavato tramite l'invarianza per trasformazioni di Möbius.

Nota l'espressione di S_0 , è possibile calcolare il potenziale quantistico tramite la (3.38); tuttavia, in

¹La condizione $AD - BC \neq 0$ esclude il caso $A = C = 0$, che porterebbe ad un'azione ridotta costante, che sarebbe in contrasto con le ipotesi della formulazione.

questo caso, conviene osservare che l'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica prevede che, se $W(q) = 0$, $Q(q)$ si elida esattamente con il termine cinetico:

$$Q(q) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 = +\frac{\hbar^2}{8m} \frac{(AD - BC)^2}{(ACq^2 + (AD + BC)q + BD)^2} \quad (5.6)$$

Dal momento che $AD - BC \neq 0$ dalla definizione (3.18), è possibile, tramite un riscaldamento, fissare un valore arbitrario per tale differenza; si ponga $AD - BC = i$. Definendo $\ell_0 = \ell_1 + i\ell_2$,² con

$$\ell_1 = \frac{1}{2AC} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \ell_2 = \frac{AD + BC}{2AC} \in \mathbb{R} , \quad (5.7)$$

si ottiene il potenziale quantistico nella forma

$$Q(q) = -\frac{\hbar^2}{8m} \frac{\ell_1^2}{((q + \ell_2)^2 + \ell_1^2)^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\ell_0 + \bar{\ell}_0)^2}{|q - i\ell_0|^4} \neq 0 \quad (5.8)$$

Contrariamente a quanto avviene nella formulazione Bohmiana, in cui si avrebbe $S_0 = \text{costante}$ e quindi $Q(q) = 0$, nella formulazione geometrica il potenziale quantistico ha un'espressione non banale anche per lo stato libero di energia nulla [1]. Si deduce quindi che il potenziale quantistico rappresenta un'energia intrinseca, caratteristica di qualsiasi sistema fisico soggetto alla QSHJE.

5.2 I limiti $E, \hbar \rightarrow 0$ e l'introduzione di costanti fondamentali

Si vuole ora discutere il comportamento dei momenti $p = \nabla S_0$ nei limiti $E \rightarrow 0$ e $\hbar \rightarrow 0$ mostrando come la consistenza di tali limiti con i risultati classici richieda che si introducano delle lunghezze fondamentali.

Si consideri una particella libera di energia non nulla ($W(q) = -E$); due soluzioni reali indipendenti della SSE associata sono:

$$\psi_1 = a \sin kq \quad \psi_2 = b \cos kq$$

dove $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. In generale, due funzioni d'onda indipendenti sono quindi dalle combinazioni $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$ e $\psi^D = C\psi_1 + D\psi_2$, con $AD - BC \neq 0$. Sostituendo tali espressioni nell'equazione per l'azione ridotta (5.5) si ottiene il momento

$$p_E = \frac{\partial S_0}{\partial q} = \frac{i\hbar}{2} \frac{(AD - BC)(\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2)}{AC\psi_1^2 + (AD + BC)\psi_1\psi_2 + BD\psi_2^2} \quad (5.9)$$

Si noti che $Q(q) = -\frac{p_E^2}{2m}$, dove p_E è calcolato con la (5.9), rappresenta la generalizzazione della (5.6). Ripercorrendo quanto fatto nel paragrafo precedente ($\ell_E = \ell_1 + i\ell_2$) e sostituendo le espressioni di ψ_1 e ψ_2 si ottiene

$$p_E = \hbar\ell_1 \frac{\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2}{(\psi_1 + \ell_2\psi_2)^2 + \ell_1^2\psi_2^2} = -\frac{\hbar(\ell_E + \bar{\ell}_E)abk}{2|a \sin kq - i\ell_E b \cos kq|^2} \quad (5.10)$$

Per consistenza con le soluzioni della SSE con $W(q) = 0$, ψ_1 e ψ_2 devono soddisfare i limiti

$$\lim_{E \rightarrow 0} \psi_1 = \lim_{E \rightarrow 0} a \sin kq = q \quad \lim_{E \rightarrow 0} \psi_2 = \lim_{E \rightarrow 0} b \cos kq = 1$$

Una possibile soluzione è porre $a = 1/k$ e $b = 1$. Il momento della particella libera è quindi

$$p_E = \pm \frac{\hbar(\ell_E + \bar{\ell}_E)}{2|k^{-1} \sin kq - i\ell_E \cos kq|^2} . \quad (5.11)$$

Affinché tale espressione sia coerente con il risultato classico e con quanto ricavato nel paragrafo 5.1 si pongono le seguenti condizioni

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} p_E = \pm \sqrt{2mE} \quad (5.12)$$

$$\lim_{E \rightarrow 0} p_E = \pm \frac{\hbar(\ell_0 + \bar{\ell}_0)}{2|q - i\ell_0|^2} \quad (5.13)$$

²La realtà di ℓ_1 e ℓ_2 è garantita dal fatto che la (5.6) deve essere reale $\forall q$.

La presenza del termine $-i\ell_E \cos kq$ a denominatore nella (5.11) suggerisce che ℓ_E debba dipendere dall'energia affinché il limite (5.12) sia soddisfatto. Si consideri $\ell_E = k^{-1}f(E, \hbar) + \lambda_E$, con f una funzione reale adimensionale. Con questa identificazione la (5.11) assume la forma

$$p_E = \pm \hbar \frac{2k^{-1} + (\lambda_E + \bar{\lambda}_E)}{2k^{-2}|e^{ikq} + (f(E, \hbar) - 1 + \lambda_E k) \cos kq|^2} = \pm \frac{\sqrt{2mE}f(E, \hbar) + mE(\lambda_E + \bar{\lambda}_E)/\hbar}{|e^{ikq} + (f(E, \hbar) - 1 + \lambda_E k) \cos kq|^2}$$

Da tale espressione si evince che nel limite classico $\lambda_E/\hbar \rightarrow 0$, cosicché il secondo addendo si annulli. Sempre per consistenza con il caso classico f deve tendere all'unità per $\hbar \rightarrow 0$.

Considerando, invece, il limite di energia nulla mantenendo la forma di ℓ_E usata in precedenza, si ottiene

$$p_E \xrightarrow{E \rightarrow 0} \pm \frac{\hbar^2(2mE)^{-\frac{1}{2}}f(E, \hbar) + (\lambda_E + \bar{\lambda}_E)\hbar}{|q - i\hbar(2mE)^{-\frac{1}{2}}f(E, \hbar) - i\lambda_E|^2}$$

la quale può ricondursi alla (5.13) solo se λ_E tende a ℓ_0 nel limite $E \rightarrow 0$ e f è tale da annullare la divergenza di $E^{-1/2}$; questa è la ragione per cui si è introdotta $f(E, \hbar)$ in primo luogo.

Si riportano di seguito i vincoli su f e λ_E dedotti finora:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\lambda_E}{\hbar} = 0 \quad (5.14)$$

$$\lim_{E \rightarrow 0} \lambda_E = \ell_0 \quad (5.15)$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(E, \hbar) = 1 \quad (5.16)$$

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(E, \hbar)}{\sqrt{E}} = 0 \quad (5.17)$$

Dal limite (5.17) si deduce che f deve avere una dipendenza esplicita da E e quindi da k (sostituendo $E = \hbar^2 k^2 / 2m$). Dal momento che f è adimensionale per costruzione mentre $[k] = \mathbb{L}^{-1}$, l'espressione dovrà includere una costante con le dimensioni di una lunghezza. Tuttavia, dato che si sta considerando una particella libera, il problema non fornisce alcuna lunghezza caratteristica, perciò si deve introdurre una lunghezza fondamentale, che non dipende dal sistema. Due possibili candidati sono la lunghezza di Compton (λ_C) e la lunghezza di Planck (λ_P) definite come

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \quad \Longrightarrow \quad x_C = k\lambda_C = \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} \quad (5.18)$$

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad \Longrightarrow \quad x_P = k\lambda_P = \sqrt{\frac{2GmE}{\hbar c^3}} \quad (5.19)$$

La prima possibilità può essere scartata poiché la variabile adimensionale associata (x_C) non dipende da \hbar , quando il limite (5.16) prevede tale dipendenza per f . Si deduce quindi che f sia una funzione del prodotto $k\lambda_P$; si ponga

$$f(E, \hbar) = e^{-\alpha(x_P^{-1})}, \quad \alpha(x_P^{-1}) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_P^{-j} \quad (5.20)$$

I limiti (5.16) e (5.17) si traducono quindi in condizioni sugli α_j .

Per quanto riguarda λ_E , si consideri il limite classico della (5.13): per consistenza con la (5.12) si deve avere

$$\pm \frac{\hbar(\ell_0 + \bar{\ell}_0)}{2|q - i\ell_0|^2} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0 \quad (5.21)$$

ciò implica che $\ell_0 \sim \hbar^s$, con $s \in [-1, 1]$. Tale dipendenza può essere ottenuta come funzione delle lunghezze fondamentali definite sopra, insieme a $\lambda_e = \alpha\lambda_C = \frac{e^2}{mc^2}$. Si ha quindi

$$\ell_0 = \ell_0(\lambda_P, \lambda_C, \lambda_e) \sim \hbar^s, \quad s \in [-1, 1]$$

Una potenza di ordine $s < 1$ non è sufficiente a soddisfare il limite (5.14), perciò si deduce che il rapporto adimensionale λ_E/ℓ_0 dipenda da \hbar . Affinché tutte le condizioni su λ_E siano coerenti si giunge, con un ragionamento analogo a quello seguito per f , alla forma

$$\lambda_E = e^{-\beta(x_P)}\ell_0, \quad \beta(x_P) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_P^j \quad (5.22)$$

da cui

$$\ell_E = k^{-1}e^{-\alpha(x_P^{-1})} + e^{-\beta(x_P)}\ell_0 \quad (5.23)$$

$$p_E = \pm\hbar \frac{2k^{-1}e^{-\alpha(x_P^{-1})} + e^{-\beta(x_P)}(\ell_0 + \bar{\ell}_0)}{2|k^{-1}\sin kq - i(k^{-1}e^{-\alpha(x_P^{-1})} + e^{-\beta(x_P)}\ell_0)\cos kq|^2} \quad (5.24)$$

Si è quindi mostrato che, nella formulazione geometrica della QSHJE, la particella libera ha momento p_E intimamente legato alle lunghezze fondamentali [1]. In particolare, dalla (5.8) segue che il potenziale quantistico di una particella libera con energia nulla dipende dalla lunghezza di Planck; tale osservazione suggerisce una relazione tra la QHJE e la relatività generale, che sarà indagata nel prossimo capitolo.

6 L'equazione di Wheeler-DeWitt nella formulazione geometrica

L'ipotesi 1 ricorda il principio di equivalenza di Einstein nell'ambito della relatività generale: tale principio afferma infatti che per ogni evento nello spazio-tempo esiste un sistema di coordinate localmente inerziali, ovvero in cui le leggi della fisica hanno la stessa forma che avrebbero in un sistema inerziale, non sottoposto all'azione di un campo gravitazionale. Ciò equivale a dire che ogni sistema soggetto a interazioni gravitazionali può essere ricondotto ad un sistema libero, che coincide con l'equivalenza contenuta nell'ipotesi 1 nel caso di un potenziale gravitazionale.

Un altro elemento di somiglianza tra la formulazione proposta e la teoria della relatività generale è la presenza di un termine di energia intrinseca, dato dal potenziale quantistico in QHJE (come osservato nel paragrafo 5.1) e dall'energia oscura in relatività generale. Sulla base di queste osservazioni, ci si propone in questo capitolo di indagare il legame tra potenziale quantistico e costante cosmologica.

6.1 La Hamilton-Jacobi associata alla funzione d'onda dell'universo

Il contesto più naturale per indagare tale legame è l'equazione di Wheeler-DeWitt ovvero l'equazione ottenuta per quantizzazione canonica della relatività generale. Tale equazione è dedotta a partire dalla formulazione ADM (Arnowitt, Deser, Misner) della relatività, in cui si considera lo spazio-tempo come foliato in ipersuperfici a tempo costante $\Sigma_{t_0} = \{x^k | t(x^k) = t_0\}$ [5]. Detto 4g il tensore metrico¹ si definiscono

$$g_{ij} = {}^4g_{ij} \quad N_i = {}^4g_{0i} \quad i, j \in [1, 3] \quad (6.1)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{-{}^4g_{00}}} \quad \bar{g} = \det g_{ij} \quad (6.2)$$

dove N è detto periodo e N_i sono le componenti del campo vettoriale di shift.

L'equazione della relatività di Einstein può essere ricavata dal problema variazionale associato alla densità lagrangiana di Einstein-Hilbert, la quale, in base alle definizioni date, ha la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2k^2} N \sqrt{\bar{g}} ({}^3R - 2\Lambda + K^{ij}K_{ij} - K^2) \quad (6.3)$$

¹La metrica è qui considerata con segnatura $(-, +, +, +)$.

dove $k^2 = 8\pi G/c^4$, 3R la curvatura scalare spaziale intrinseca, Λ la costante cosmologica e $K_{ij} = \frac{1}{N}(\frac{1}{2}\partial_0 g_{ij} - \partial_i N_j)$ la curvatura estrinseca² (K ne è la traccia). Poiché \mathcal{L} non mostra alcuna dipendenza dalle derivate $\partial_0 N_j$ e $\partial_0 N$, si deduce i momenti coniugati a N e N_j siano vincolati ad essere nulli: $\pi^0 = 0$, $\pi^k = 0$ (vincoli primari). La conservazione di questi vincoli nel tempo produce dei vincoli secondari sui supermomenti \mathcal{H}_k e sulla superhamiltoniana \mathcal{H} , dati da

$$\mathcal{H}_k = -2\partial_j \pi_k^j = 0 \quad (6.4)$$

$$\mathcal{H} = 2k^2 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{1}{2k^2} \sqrt{g} ({}^3R - 2\Lambda) = 0 \quad (6.5)$$

dove $\pi^{ij} = -\frac{1}{2k^2} \sqrt{g} (K^{ij} - g^{ij} K)$ sono i momenti coniugati a g_{ij} , mentre G_{ijkl} è la supermetrica di DeWitt, definita come

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{g}} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk} - g_{ij} g_{kl}) \quad (6.6)$$

Prima di procedere con la quantizzazione dei vincoli ottenuti, si richiama la definizione di derivata funzionale:

Definizione 2 Si definisce l'operatore derivata funzionale $\frac{\delta}{\delta f(x)}$ come

$$\frac{\delta G[f]}{\delta f(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[G[f(\cdot + \varepsilon \delta(\cdot - x))] - G[f(\cdot)] \right]$$

dove (\cdot) è l'argomento della funzione f .

Sia ora Ψ un funzionale che risolva l'equazione di Schrödinger $i\hbar \partial_t \Psi = \hat{H} \Psi$, dove \hat{H} è l'operatore hamiltoniano ottenuto quantizzando la trasformata di Legendre di \mathcal{L} . Secondo le regole di quantizzazione canonica, i momenti π^0 e π^k sono identificati con

$$\hat{\pi}^0 = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N} \quad \hat{\pi}^k = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N_k}$$

Ne segue che vincoli primari, a seguito della quantizzazione, diventano

$$-i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta N} = 0 \quad -i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta N_k} = 0 \quad (6.7)$$

da cui si evince che il funzionale Ψ dipende solo dai g_{ij} .

Per i momenti π^{ij} la quantizzazione canonica $\hat{\pi}^{ij} = -i\hbar \delta_{g_{ij}}$ produce un'inconsistenza dimensionale: si ha che $[-i\hbar \delta_{g_{ij}}] = \mathbb{M}(\mathbb{L}\mathbb{T})^{-1}$, mentre dalla definizione risulta $[\pi^{ij}] = \mathbb{M}\mathbb{T}^{-2}$. Dal momento che il rapporto tra le due è una velocità, si sceglie la definizione

$$\hat{\pi}^{ij} = -i\hbar c \frac{\delta}{\delta g_{ij}}$$

A questo punto è possibile quantizzare anche i vincoli secondari. Il vincolo sui supermomenti comporta

$$\mathcal{H}_k = 2i\hbar c g_{kj} \partial_\ell \frac{\delta \Psi}{\delta g_{\ell j}} = 0 \quad (6.8)$$

che è soddisfatta se $\Psi[g_{ij}]$ è invariante per diffeomorfismi dell'ipersuperficie Σ_{t_0} . Il vincolo sulla superhamiltoniana, $\mathcal{H}\Psi = 0$, conduce invece all'equazione di Wheeler-DeWitt (WDW) [6]:

$$\hbar c \left[-2\ell_P^2 G_{ijkl} \frac{\delta^2}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} - \frac{\sqrt{g}}{2\ell_P^2} ({}^3R - 2\Lambda) \right] \Psi = 0 \quad (6.9)$$

dove $\ell_P = \sqrt{\hbar c k} = \sqrt{8\pi\lambda_P}$ è la lunghezza di Planck razionalizzata. Si osserva che, in generale, l'equazione di Wheeler-DeWitt non è ben definita poiché contiene una derivata funzionale di secondo

²La notazione ∂_μ indica le componenti del gradiente covariante.

ordine rispetto g_{ij} e g_{kl} valutati nello stesso punto: ciò può condurre a singolarità di tipo $\delta^{(3)}(0)$; per questo motivo l'equazione va regolarizzata.

Alla soluzione della (6.9) è attribuito il nome “funzionale d'onda dell'universo” in quanto rappresenta lo stato della metrica dello spazio. Poiché l'operatore di Wheeler-DeWitt è reale, data una soluzione Ψ , anche la complessa coniugata $\bar{\Psi}$ è soluzione.

In analogia con quanto fatto nel capitolo 4 per ottenere la forma generale della QHJE, si attribuisce al funzionale d'onda la forma $\Psi[g_{jk}] = Ae^{\frac{i}{\hbar}S}$, con $A[g_{jk}], S[g_{jk}] \in \mathbb{R}$; in tale ipotesi vale l'identità

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \frac{\delta S}{\delta g_{kl}} + \frac{1}{A} \frac{\delta^2 A}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} + \frac{i}{2\hbar A^2} \left[\frac{\delta}{\delta g_{ij}} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta g_{kl}} \right) + \frac{\delta}{\delta g_{kl}} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \right) \right]$$

Usando questa relazione nella sostituzione di $\Psi = Ae^{iS/\hbar}$ nella (6.9), la parte reale dell'equazione porta all'equazione di Wheeler-DeWitt Hamilton-Jacobi (WDW HJ):

$$\frac{2c\ell_P^2}{\hbar} G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \frac{\delta S}{\delta g_{kl}} - \frac{\hbar c}{2\ell_P^2} \sqrt{g} ({}^3R - 2\Lambda) - \frac{2\hbar c \ell_P^2}{A} G_{ijkl} \frac{\delta^2 A}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} = 0 \quad (6.10)$$

In tale equazione si riconoscono un termine cinetico (in $\frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \frac{\delta S}{\delta g_{kl}}$), un termine “potenziale” legato solo alla metrica g_{jk} , infine, il termine di potenziale quantistico, che tende a 0 per $\hbar \rightarrow 0$, dato da

$$Q[g_{jk}] = -\frac{2\hbar c \ell_P^2}{A} G_{ijkl} \frac{\delta^2 A}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} \quad (6.11)$$

La parte immaginaria è invece

$$-\frac{ic\ell_P^2}{A^2} G_{ijkl} \left[\frac{\delta}{\delta g_{ij}} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta g_{kl}} \right) + \frac{\delta}{\delta g_{kl}} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \right) \right]$$

che, poiché in base alla definizione (6.6) $G_{ijkl} = G_{klij}$, equivale all'equazione di continuità

$$G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta g_{ij}} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta g_{kl}} \right) = 0 \quad (6.12)$$

Si osserva che il sistema costituito da (6.10) e (6.12) ha una forma analoga a quella del sistema (4.3).

6.2 Potenziale quantistico e costante cosmologica

La previsione teorica grossolana ottenuta dalla QFT per la costante cosmologica Λ si discosta di molto dal valore stimato sperimentalmente; tale discrepanza è legata al fatto che la previsione teorica è ottenuta sulla base della formulazione perturbativa della QFT, mentre il caso del vuoto nelle QFT non banali è altamente non perturbativo. In questo paragrafo si vedrà come il potenziale quantistico, nella formulazione geometrica, risulti essere il candidato naturale per spiegare l'origine della costante cosmologica [4].

Si consideri innanzitutto l'equazione di Wheeler-DeWitt nel caso di curvatura scalare e costante cosmologica nulle (${}^3R = 0, \Lambda = 0$):

$$G_{ijkl} \frac{\delta^2}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} \Psi = 0 \quad (6.13)$$

nelle stesse condizioni, la (6.10) assume la forma

$$G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \frac{\delta S}{\delta g_{kl}} - \frac{\hbar^2}{A} G_{ijkl} \frac{\delta^2 A}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} = 0 \quad (6.14)$$

Nell'interpretazione Bohmiana, (6.13) ha come soluzione il funzionale banale $\Psi = Ae^{iS/\hbar} = 0$, da cui segue che $A = 0, S = 0$ e $Q = 0$. Si osserva ora che nel caso della formulazione geometrica, in cui S non può essere banale, $Q \neq 0$.

La (6.13) non soffre della problematica evidenziata nel paragrafo precedente poiché $\Psi[g_{ij}]$ dipende linearmente da g (altrimenti l'equazione non potrebbe essere soddisfatta) e quindi l'operatore $\delta^2/\delta g_{ij}\delta g_{kl}$ è ben definito. Si ha quindi

$$\Psi[g_{ij}] = \mathcal{T}g + C, \quad \mathcal{T}g = \int \mathcal{T}^{ij}(\mathbf{x})g_{ij}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \quad (6.15)$$

dove $C \in \mathbb{C}$ è una costante, mentre $\mathcal{T}^{ij}(x) \in \mathbb{C}$ è un campo di densità tensoriale di peso unitario. Risulta quindi che, eguagliando la (6.15) con $\Psi = Ae^{iS/\hbar}$,

$$S = \frac{\hbar}{2i} \ln \left(\frac{\mathcal{T}g + C}{\overline{\mathcal{T}g + C}} \right) \quad A = |\mathcal{T}g + C| \quad (6.16)$$

È quindi possibile calcolare i momenti coniugati come derivata funzionale di S rispetto a g_{jk} , moltiplicata per c in base alle osservazioni dimensionali fatte nel paragrafo precedente:

$$\pi^{jk} = c \frac{\delta S}{\delta g_{jk}(\mathbf{x})} = \frac{\hbar c}{|\mathcal{T}g + C|^2} \text{Im} [T^{jk}(\mathbf{x})(\overline{\mathcal{T}g + C})] = \hbar c \text{Im} \left(\frac{\mathcal{T}^{jk}(\mathbf{x})}{\mathcal{T}g + C} \right)$$

Dalla (6.14) risulta che il potenziale quantistico è esattamente opposto al termine cinetico, perciò si ottiene

$$\begin{aligned} Q[g_{jk}] &= -\frac{2c\ell_P^2}{\hbar} G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \frac{\delta S}{\delta g_{kl}} = \\ &= -\frac{c^3 \hbar \ell_P^2}{\sqrt{g}} \left\{ \text{Im} \left(\frac{\mathcal{T}_{kl}(\mathbf{x})}{\mathcal{T}g + C} \right) \text{Im} \left(\frac{\mathcal{T}^{kl}(\mathbf{x})}{\mathcal{T}g + C} \right) - \left[\text{Im} \left(\frac{\text{tr}(\mathcal{T}(\mathbf{x}))}{\mathcal{T}g + C} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.17)$$

In analogia con quanto ricavato per una particella libera di energia nulla, il potenziale quantistico della WDW HJ è dunque non banale anche nel caso di ${}^3R = 0$, con costante cosmologica posta a 0. Nel vuoto, $Q[g_{jk}]$ corrisponde quindi ad una densità di energia intrinseca [4].

Tale proprietà suggerisce l'identificazione del potenziale quantistico con il termine di energia oscura (in Λ) nell'equazione (6.10), da cui si ottiene l'equazione

$$\Lambda = -\frac{\ell_P^2}{\hbar c \sqrt{g}} Q[g_{jk}] \quad (6.18)$$

Tale identificazione coincide con la (6.10) con ${}^3R = 0$ e termine cinetico nullo, vale a dire con $S = 0$.³ La (6.18) fornisce un'espressione per la costante cosmologica in termini di Q e quindi della metrica g_{jk} .

7 Conclusioni

Nella formulazione proposta, si è mostrato che l'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica, oltre a riprodurre molti risultati ottenuti dalla formulazione standard, risolve uno dei principali caveat di tale formulazione, rappresentato dal paradosso di Einstein. La formulazione geometrica conduce inoltre a risultati non deducibili dalla formulazione Bohmiana tra cui la non banalità del potenziale quantistico. Questa proprietà è di particolare interesse, poiché suggerisce che il potenziale quantistico ricopra un ruolo importante nella soluzione di uno dei grandi quesiti della fisica contemporanea, riguardante l'origine dell'energia oscura.

Un'altra interessante caratteristica di questa teoria è rappresentata dal legame tra il mondo quantistico e la geometrica dello spazio (e quindi la relatività generale) che ne emerge, evidenziato dalla dipendenza, a livello quantistico, dei momenti di una particella dalla lunghezza di Planck.

³Poiché l'energia del vuoto è una proprietà puramente quantistica, priva di un analogo classico, l'assenza del termine cinetico non dà luogo al paradosso di Einstein.

Bibliografia

- [1] Alon E. Faraggi e Marco Matone. “The Equivalence postulate of quantum mechanics”. In: *Int. J. Mod. Phys. A* 15 (2000), pp. 1869–2017. DOI: 10.1142/S0217751X00000811. arXiv: hep-th/9809127.
- [2] Marco Matone. “The Cocycle of the quantum HJ equation and the stress tensor of CFT”. In: *Braz. J. Phys.* 35 (2005). A cura di Hans-Thomas Elze, pp. 316–327. DOI: 10.1590/S0103-97332005000200017. arXiv: hep-th/0502134.
- [3] Alon E. Faraggi e Marco Matone. “Energy Quantisation and Time Parameterisation”. In: *Eur. Phys. J. C* 74 (2014), p. 2694. DOI: 10.1140/epjc/s10052-013-2694-1. arXiv: 1211.0798 [hep-th].
- [4] Alon E. Faraggi e Marco Matone. “The Geometrical Origin of Dark Energy”. In: *Eur. Phys. J. C* 80.11 (2020), p. 1094. DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-08665-6. arXiv: 2006.11935 [hep-th].
- [5] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner. “The Dynamics of general relativity”. In: *Gen. Rel. Grav.* 40 (2008), pp. 1997–2027. DOI: 10.1007/s10714-008-0661-1. arXiv: gr-qc/0405109.
- [6] Bryce S. DeWitt. “Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory”. In: *Phys. Rev.* 160 (1967). A cura di Li-Zhi Fang e R. Ruffini, pp. 1113–1148. DOI: 10.1103/PhysRev.160.1113.