

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

FENOMENOLOGIA DEGLI TSUNAMI

Candidato: FEDERICA LORENZI

Relatore: PROF. ANTONIO PONNO

Anno accademico 2015-2016

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Proprietà della Korteweg de Vries	5
1.1.1	Metodo spettrale	5
1.1.2	Leggi di conservazione	6
2	Deduzione della KdV a costanti variabili	9
2.1	Studio delle equazioni del moto	9
2.2	Deduzione della Korteweg de Vries a costanti variabili	13
2.3	Considerazioni sulla KdV a costanti variabili	17
3	Fondale variabile	19
3.1	Fondale rapidamente variabile	19
3.2	Fondale lentamente variabile	21
4	Approccio numerico	23
A	Schema numerico	29
	Bibliografia	31

Capitolo 1

Introduzione

Tsunami ed onde solitarie

Gli tsunami sono fenomeni naturali causati dall'improvviso spostamento di un'ingente massa d'acqua, causato da terremoti sottomarini, da eruzioni vulcaniche o frane sottomarine e costiere.

Lo spostamento d'acqua prodotto si propaga progressivamente in superficie creando onde superficiali molto lunghe (aventi cioè una lunghezza d'onda tipicamente di qualche centinaia di chilometri) e quindi di lungo periodo (qualche decina di minuti) in condizioni di mare aperto.

Le onde di maremoto si distinguono dalle comuni onde del mare per alcune sostanziali caratteristiche: infatti le comuni onde marine sono generate dal vento e muovono solo gli strati più superficiali della colonna d'acqua, mentre non si verifica alcun movimento in profondità; contrariamente le onde di tsunami muovono tutta la colonna d'acqua, dal fondale alla superficie e sono molto più veloci.

Questo spiega perché le onde di tsunami, anche basse, sono in grado di causare gravi danni, penetrando nell'entroterra anche per parecchie centinaia di metri. Proprio da queste proprietà devastanti deriva il nome giapponese *tsunami*, costituito dalle parole *tsu*, che significa *porto*, e *nami*, ossia *onda*.

Un'altra differenza dalle normali onde marine è che queste hanno lunghezze d'onda di pochi metri e un periodo di solo qualche secondo, mentre le onde di maremoto sono caratterizzate da lunghezze d'onda molto elevate, dell'ordine delle decine o centinaia di chilometri e viaggiano ad elevata velocità in mare aperto, raggiungendo anche i 700-800 km/ora. Sono inoltre in grado di propagarsi per migliaia di chilometri conservando pressoché inalterata la loro energia e sono quindi in grado di abbattersi con eccezionale violenza anche su coste molto lontane dal punto di origine. Le onde di tsunami, che in mare aperto passano spesso inosservate per la loro scarsa altezza, quando si avvicinano alla costa subiscono una trasformazione: la loro velocità si riduce e l'altezza dell'onda aumenta, fino ad arrivare a raggiungere anche alcune decine di metri. [1]

La prima osservazione di *onda solitaria* che viaggia lasciando inalterato il proprio profilo avvenne nel 1834 ad opera dell'ingegnere navale John Scott Russell, mentre cavalcava lungo il canale che congiungeva Edinburgo a Glasgow. Mentre stava cercando di determinare la struttura più efficiente per le barche del canale, una barca trainata da una coppia di cavalli si fermò improvvisamente e Russell notò il comportamento anomalo dell'onda generata dalla barca. Infatti la massa d'acqua messa in moto continuò la sua corsa e Russell seguì a cavallo l'onda che proseguiva senza mutare la sua forma, riportando quanto segue nelle sue osservazioni:

I believe I shall best introduce this phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped-not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation; then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or dimension of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to foot and half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation a name which it now very generally bears. [2]

In generale, si definisce *solitone* una qualunque soluzione di un'equazione, o di un sistema, non lineare che rappresenta un'onda:

- che si propaga senza mutare il proprio profilo.
- localizzata, cioè che decade o tende ad un valore costante all'infinito.
- interagente con altri solitoni, però conservando la propria identità. [3]

Quindi il suffisso *-one* è giustificato dal comportamento dell'oggetto matematico, che ha forti analogie con quello delle particelle elementari. Nelle ricerche successive, Russell trovò sperimentalmente che la velocità di propagazione dell'onda di traslazione seguiva la legge:

$$c^2 = g(h + a) \tag{1.1}$$

ove h è la profondità del fondale ed a l'ampiezza dell'onda: perciò solitoni con ampiezza maggiore sono più veloci.

Successivamente, a partire dall'equazione del moto dei fluidi inviscidi e incomprimibili, Bussinesq e Lord Rayleigh dedussero la 1.1 e trovarono che, in condizioni di acque basse, il profilo dell'onda solitonica segue l'equazione:

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)) \quad (1.2)$$

con

$$\beta^{-2} = \frac{4h^2(h+a)}{3a}$$

La condizione di acqua bassa significa che l'ampiezza dell'onda sia molto minore della profondità, e la lunghezza d'onda sia molto maggiore di h , condizioni che sono verificate ad esempio nel caso degli tsunami.

Infine, Korteweg e de Vries trovarono una semplice equazione descrivente la propagazione di onde superficiali unidirezionali, in un canale a bassa profondità, nella forma

$$u_t + \alpha uu_x + \gamma u_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

dove α e γ incorporano i parametri fisici del problema come la densità del fluido, la tensione superficiale e la profondità della regione in cui l'onda si propaga.

1.1 Proprietà della Korteweg de Vries

L'equazione di Korteweg-de Vries, più brevemente detta *KdV*, ammette soluzione esatta della forma 1.2, che ben si presta a rappresentare un'onda a forma di campana che si muove a velocità costante senza cambiare forma.

La 1.3 ammette quindi soluzione solitonica, cioè un'onda di traslazione localizzata notevolmente stabile.

Descriveremo brevemente alcune delle proprietà della *KdV* a coefficienti costanti, per poi generalizzare questi risultati al caso di costanti variabili, che ben descrivono il caso di fondale variabile. L'intento sarà quello di determinare la fenomenologia di un'onda di tsunami nel caso in cui si muova verso una regione in cui avviene il sollevamento del fondale oceanico.

1.1.1 Metodo spettrale

La spiegazione della stabilità dei solitoni giace nell'analisi del metodo spettrale, che evidenzia il forte legame, sebbene non banale, tra la *KdV*, che è non lineare, ed un'equazione lineare. [4]

L'equazione in questione è quella di *Schrödinger*

$$-\psi_{xx} - u\psi = \lambda\psi \quad (1.4)$$

con parametri λ , t e potenziale $u(x, t)$, con $u \rightarrow 0$ velocemente per $|x| \rightarrow \infty$.

In generale, sappiamo che esistono degli autovalori λ , dipendenti da t , soluzioni

dell'equazione agli autovalori con $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx < \infty$.

Se $\lambda(t)$ è autovalore dell'equazione di Schrödinger e $\psi(x, t)$ è autofunzione, allora sostituendo

$$u = -\lambda - \frac{\psi_{xx}}{\psi}$$

nella 1.3, si ottiene

$$\lambda_t \psi^2 + (\psi h_x - \psi_x h)_x = 0 \quad (1.5)$$

dove

$$h = \psi_t - 2(-u + 2\lambda) \psi_x - u_x \psi$$

Normalizzando la ψ e integrando la 1.5 si ottiene $\lambda_t = 0$.

Perciò se $u(x, t)$ è soluzione della 1.3 e λ è autovalore della 1.4, allora λ non dipende dal tempo.

Inoltre a ciascun λ_n dello spettro discreto è associata una soluzione solitonica della *KdV*: perciò conoscendo lo spettro discreto degli autovalori, e la condizione iniziale del profilo dell'onda $u(x, 0)$, è possibile conoscere il numero di solitoni emergenti per $t \rightarrow \infty$ (e se emergono solo solitoni) come anche l'ampiezza di ciascuno di essi. Con un profilo iniziale del tipo

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}^2(x) = q(q+1) \operatorname{sech}^2(x)$$

con $q > 0$, si possono calcolare esplicitamente gli autovalori riducendo

$$-\psi_{xx} + (q(q+1) \operatorname{sech}^2(x) + \lambda) \psi = 0$$

ad un'equazione associata di Legendre, da cui si ottiene:

$$\lambda_n = -m^2 \quad \mathbb{N} \ni m < q$$

mentre l'ampiezza e la velocità dell' n -esimo solitone è:

$$A_n = 2\lambda_n$$

$$c_n = -4\lambda_n$$

Quindi ci saranno due casistiche: se $q \in \mathbb{Z}$, da un solitone iniziale di ampiezza $q(q+1)$ emergeranno per $t \rightarrow \infty$ esattamente q solitoni, altrimenti emergeranno m solitoni più una coda oscillante che si muove nel verso opposto a quello di propagazione dell'onda e che gradualmente si annulla. [5]

1.1.2 Leggi di conservazione

Associata alla *KdV* ci sono un infinito numero di leggi di conservazione del tipo

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial P_m}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

dove Q_m e P_m sono polinomi di u e delle sue derivate rispetto a x . [5]
Perciò esistono infiniti integrali primi del tipo

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_m dx = \text{cost.}$$

in modo particolare tre quantità fondamentali che sono costanti del moto:

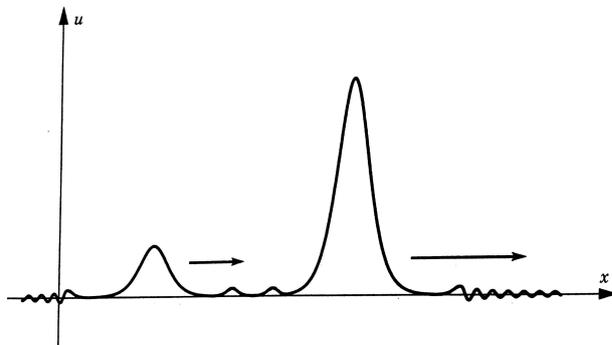
- $massa = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx$
- $momento = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx$
- $energia = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - u^3 \right) dx$

Il valore di ciascun integrale primo è determinato dalla condizione iniziale del profilo $u(x, 0)$ e l'effettivo valore della costante ci fornisce le informazioni sul numero di solitoni formantesi e soprattutto se si generano unicamente solitoni o ulteriore radiazione.

Perciò nel caso in cui $u(x, 0)$ si scompone in m solitoni per $t \rightarrow \infty$ allora ciascun I_m si scrive:

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_m dx \sim \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} Q_m^{(i)} dx = \text{cost.} \quad (1.7)$$

dove $Q_m^{(i)}$ è il polinomio Q_m calcolato sull' i -esimo solitone.



Capitolo 2

Deduzione della KdV a costanti variabili

Alcuni dei risultati generali della classica equazione di Korteweg de Vries a coefficienti costanti sono stati estesi ed applicati al caso di fondale variabile in modo continuo, portando alla formulazione più generale della 1.3 come

$$H_{\chi} + \frac{3}{2}d^{-7/4}HH_{\xi} + \frac{1}{6}d^{1/2}\kappa H_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.1)$$

dove $H(\chi, \xi)$ descrive il pelo libero dell'acqua, mentre $d = d(\sigma\chi)$ è una funzione continua che descrive la variazione del fondale, in modo tale che la profondità dell'acqua diminuisca ad un valore finito non nullo.

In questo capitolo verrà studiato come si ricava la 2.1 per poi esaminare il comportamento di un singolo solitone che entra in una regione in cui il fondale varia in modo continuo.

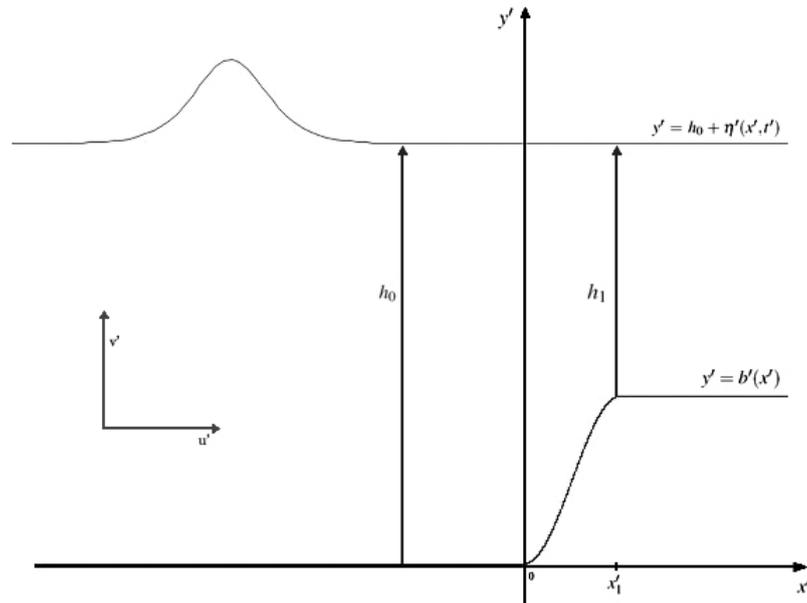
2.1 Studio delle equazioni del moto

Il sistema che verrà studiato è il seguente: come mostrato in 2.1 un'onda solitonica di ampiezza a e lunghezza d'onda λ si muove lungo un tratto a profondità costante h_0 , entrando successivamente nella regione $0 < x' < x'_1$ dove avviene il sollevamento del fondale ed infine vi è una regione a profondità h_1 nuovamente costante.

Il pelo libero dell'acqua è descritto da $y' = h_0 + \eta'(x', t')$, mentre il fondale è descritto da $y' = b'(x')$, con:

$$b'(x') = \begin{cases} 0 & \text{per } x' \leq 0 \\ h_1 - h_0 & \text{per } x' \geq x'_1 \end{cases}$$

Figura 2.1:



Similmente alla classica KdV , la seguente analisi prenderà in esame l'equazione del moto di un fluido ideale (perciò non viscoso), incomprimibile e bidimensionale, dalle quali si ricaverà l'equazione di Korteweg de Vries a costanti variabili. Come nel caso dell'equazione classica saranno necessarie ulteriori assunzioni, in modo da poter lavorare in condizioni di acqua bassa.

Ciò significa che una volta poste

$$\varepsilon = \frac{a}{h}$$

$$\delta = \frac{h}{\lambda}$$

la condizione di *shallow waters* si traduce in:

- $\varepsilon \ll 1$
- $\delta \ll 1$

In particolare, se si assume che

$$\delta^2 = O(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

allora gli effetti dispersivi e quelli non lineari del sistema fisico si manifestano con uguale importanza e si combinano generando la particolare fenomenologia delle onde solitoniche. [3]

Le condizioni di fluido ideale incomprimibile si traducono in:

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \vec{u}' &= 0 \\ \nabla' \times \vec{u}' &= 0 \\ \frac{D\vec{u}'}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P' + \vec{g}\end{aligned}$$

Con condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}P' &= P_a \\ v' &= \frac{Dh}{Dt} = \eta'_{t'} + u' \eta'_{x'}\end{aligned}$$

per $y' = h_0 + \eta'(x', t')$, mentre per $y' = b'(x')$

$$\frac{v'}{u'} = \frac{db'(x')}{dx'}$$

Riscrivendo la condizione di incomprimibilità e l'equazione di Eulero per ciascuna componente:

$$u'_{x'} + v'_{y'} = 0 \quad (2.2)$$

$$u'_{t'} + u' u'_{x'} + v' u'_{y'} + \frac{1}{\rho} P'_{x'} = 0 \quad (2.3)$$

$$v'_{t'} + u' v'_{x'} + v' v'_{y'} + \frac{1}{\rho} P'_{y'} + g = 0 \quad (2.4)$$

Le equazioni del moto possono essere riscritte in termini di variabili adimensionali, utilizzando la lunghezza d'onda λ e la velocità caratteristica del solitone $c_0 = \sqrt{gh_0}$, con il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x & y' &= h_0 y & t' &= t \frac{\lambda}{c_0} \\ \partial_x &= \lambda \partial_{x'} & \partial_y &= h_0 \partial_{y'} & \partial_t &= \frac{\lambda}{c_0} \partial_{t'}\end{aligned}$$

Allora la 2.2, 2.3 e 2.4 diventano:

$$\frac{u'_x}{\lambda} + \frac{v'_y}{h_0} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{c_0}{\lambda} u'_{t'} + \frac{u'}{\lambda} u'_{x'} + \frac{v'}{h_0} u'_{y'} + \frac{1}{\lambda \rho} P'_{x'} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{c_0}{\lambda} v'_{t'} + \frac{u'}{\lambda} v'_{x'} + \frac{v'}{h_0} v'_{y'} + g + \frac{1}{h_0 \rho} P'_{y'} = 0 \quad (2.7)$$

Con condizioni a contorno

$$\begin{cases} P' = P_a & \text{per } y = 1 + \frac{\eta'}{h_0} \\ v' = \frac{c_0}{\lambda} \eta'_t + \frac{u'}{\lambda} \eta'_x \\ \frac{v'}{u'} = \frac{1}{\lambda} \frac{db'(x)}{dx} & \text{per } y = b'(x) \end{cases}$$

A questo punto, similmente a quanto fatto prima, introduciamo:

$$\bar{u} = \frac{u'}{c_0} \quad \bar{v} = \frac{\lambda v'}{h_0 c_0} \quad \bar{P} = \frac{P' - P_a}{\rho g h_0} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta'}{h_0} \quad \bar{b} = \frac{b'}{h_0}$$

Che sostituite nelle equazione del moto:

$$\frac{c_0}{\lambda} \bar{u}_x + \frac{c_0}{\lambda} \bar{v}_y = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{c_0^2}{\lambda} \bar{u}_t + \frac{c_0^2}{\lambda} \bar{u} \bar{u}_x + \frac{c_0^2}{\lambda} \bar{v} \bar{u}_y + \frac{g h_0}{\lambda} \bar{P}_x = 0 \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{c_0}{\lambda}\right)^2 h_0 \bar{v}_t + \left(\frac{c_0}{\lambda}\right)^2 h_0 \bar{u} \bar{v}_x + \left(\frac{c_0}{\lambda}\right)^2 h_0 \bar{v} \bar{v}_y + g + g \bar{P}_y = 0 \quad (2.10)$$

Quindi dividendo entrambi i membri della 2.8 per $\frac{c_0}{\lambda}$, della 2.9 per $\frac{c_0^2}{\lambda}$ e la 2.10 per g :

$$\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0 \quad (2.11)$$

$$\bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + \bar{P}_x = 0 \quad (2.12)$$

$$\delta^2 (\bar{v}_t + \bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y) + 1 + \bar{P}_y = 0 \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \bar{P} = 0 & \text{per } y = 1 + \bar{\eta} \\ \bar{v} = \bar{\eta}_t + \bar{u} \bar{\eta}_x \\ \frac{\bar{v}}{\bar{u}} = \frac{d\bar{b}(x)}{dx} & \text{per } y = \bar{b}(x) \end{cases}$$

Esplicitando l'ampiezza dell'onda, si può riscrivere η' nel seguente modo:

$$\eta' = a\eta \quad \bar{\eta} = \frac{\eta'}{h_0} = \frac{a}{h_0} \eta = \varepsilon \eta$$

Possiamo fare l'ulteriore assunzione che la dinamica del sistema sia descritta dal parametro $\varepsilon \ll 1$:

$$\bar{u} = \varepsilon u \quad \bar{v} = \varepsilon v \quad \bar{P} = 1 - y + \varepsilon p$$

2.2. DEDUZIONE DELLA KORTEWEG DE VRIES A COSTANTI VARIABILI 13

Dove la pressione è stata scritta come somma del contributo idrostatico e di un termine perturbativo dovuto al moto del fluido.

Allo stesso modo di quanto fatto per la superficie libera dell'acqua, possiamo esplicitare la funzione $\bar{b}(x)$ in termini di un parametro caratteristico che descriva la variazione del fondale:

$$\bar{b} = B(\alpha x) \quad \alpha \ll 1$$

Perciò le 2.11, 2.12 e 2.13 diventano:

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.14)$$

$$u_t + \varepsilon(uu_x + vv_y) + p_x = 0 \quad (2.15)$$

$$\delta^2(v_t + \varepsilon(uv_x + vv_y)) + p_y = 0 \quad (2.16)$$

Con condizioni al contorno:

$$\begin{cases} 1 - y + \varepsilon p = 0 & \text{per } y = 1 + \varepsilon \eta \\ v = \eta_t + \varepsilon u \eta_x \\ \frac{v}{u} = \alpha B'(\alpha x) & \text{per } y = B(\alpha x) \end{cases}$$

Il problema così posto coinvolge tre parametri:

- ε stima la non-linearità dell'onda. L'aver posto $\varepsilon \ll 1$ implica avere piccole ampiezze.
- δ^2 stima gli effetti dispersivi. In questo caso abbiamo caratterizzato $\delta^2 = \kappa \varepsilon$ con $\kappa = O(1)$, cioè abbiamo assunto che il contributo dispersivo e quello non-lineare abbiano pari importanza sulla dinamica del sistema.
- α , che descrive la variazione del fondale, si assume essere $\alpha = \varepsilon \sigma$, dove σ caratterizza il tasso di variazione.

2.2 Deduzione della Korteweg de Vries a costanti variabili

Una classica tecnica per ottenere delle equazioni valide nel far field è quella di scegliere appropriatamente un riscaldamento che porti a delle coordinate unitarie caratteristiche.

Essendo il contributo della non-linearità dell'ordine di ε^{-1} , il cambio di coordinate più ovvio è [5]:

$$\begin{cases} \xi = f(x, \varepsilon) - t \\ \chi = \varepsilon x \\ \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \partial_\chi + f_x \partial_\xi \\ \frac{\partial}{\partial t} = -\partial_\xi \end{cases}$$

$$\varepsilon u_\chi + f_x u_\xi + v_y = 0 \quad (2.17)$$

$$-u_\xi + \varepsilon(\varepsilon u u_\chi + u f_x u_\xi + v u_y) + \varepsilon p_\chi + f_x p_\xi = 0 \quad (2.18)$$

$$\kappa \varepsilon(-v_\xi + \varepsilon(\varepsilon u v_\chi + u f_x v_\xi + v v_y)) + p_y = 0 \quad (2.19)$$

e le boundary conditions diventano:

$$\begin{cases} 1 - y + \varepsilon p = 0 & \text{per } y = 1 + \varepsilon \eta \\ v = -\eta_\xi + \varepsilon u(\varepsilon \eta_\chi + f_x \eta_\xi) \\ \frac{v}{u} = \varepsilon \sigma B'(\sigma \chi) & \text{per } y = B(\sigma \chi) \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema si deduce perciò che

$$p = \eta$$

L'intento è di trovare una soluzione del tipo

$$g(\xi, \chi, y, \varepsilon) = g_0(\xi, \chi, y) + \varepsilon g_1(\xi, \chi, y) + o(\varepsilon^2)$$

$$\eta(\xi, \chi, \varepsilon) = \eta_0(\xi, \chi) + \varepsilon \eta_1(\xi, \chi) + o(\varepsilon^2)$$

Dove $g(\xi, \chi, y)$ è una qualunque delle u, v, p , che poi sostituiamo in 2.17, 2.18 e 2.19 per ottenere delle relazioni fondamentali all'ordine zero e al primo ordine.

Ordine zero

$$-u_{0\xi} + f_x p_{0\xi} = 0 \quad (2.20)$$

$$v_{0y} + f_x u_{0\xi} = 0 \quad (2.21)$$

$$p_{0y} = 0 \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} p_0 = \eta_0 & \text{per } y = 1 \\ v_0 = -\eta_{0\xi} \\ v_0 = 0 & \text{per } y = B(\sigma \chi) \end{cases}$$

Sostituendo la 2.20 nella 2.21 ed integrando in y :

$$v_{0y} = -f_x^2 p_{0\xi} \quad (2.23)$$

$$v_0 = - \int_{B(\sigma \chi)}^y f_x^2 p_{0\xi} dy' = -f_x^2 p_{0\xi} (y - B) \quad (2.24)$$

$$v_0(y = 1) = -\eta_{0\xi} = -(f_x)^2 (1 - B) p_{0\xi} \quad (2.25)$$

2.2. DEDUZIONE DELLA KORTEWEG DE VRIES A COSTANTI VARIABILI 15

ma, poichè $p_0 = \eta_0$ allora:

$$(f_x)^2(1-B) = 1 \implies \frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-B(\sigma\chi)}}$$

Definiamo la profondità locale come $d(\alpha x) = 1 - B(\alpha x)$, perciò:

$$f(x, \varepsilon) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1-B(\alpha x')}} = \int_0^x d^{-1/2}(\alpha x') dx' \quad (2.26)$$

Ricapitolando, all'ordine zero abbiamo trovato

$$v_0 = -\frac{y-B}{d} \eta_0 \xi \quad (2.27)$$

$$u_0 = -\frac{\eta_0}{d^{1/2}} \quad (2.28)$$

$$p_0 = \eta_0 \quad (2.29)$$

Primo ordine

$$-u_{1\xi} + u_0 d^{-1/2} u_{0\xi} + v_0 u_{0y} + p_{0\chi} + d^{-1/2} p_{1\xi} = 0 \quad (2.30)$$

$$-\kappa v_{0\xi} + p_{1y} = 0 \quad (2.31)$$

$$u_{0\chi} + d^{-1/2} u_{1\xi} + v_{1y} = 0 \quad (2.32)$$

Scriviamo esplicitamente le condizioni al contorno:

$$v(\xi, \chi, 1 + \varepsilon \eta) = v(\xi, \chi, 1) + v_y \varepsilon \eta = v_0 + \varepsilon v_1 + v_{0y} \varepsilon \eta_0$$

$$\begin{cases} p_0 = \eta_0 & \text{per } y = 1 \\ v_0 = -\eta_0 \xi & \\ v_0 = 0 & \text{per } y = B(\sigma\chi) \end{cases}$$

Perciò per $y = 1$

$$\eta_1 = p_1 \quad (2.33)$$

$$v_{0y} \eta_0 + v_1 = -\eta_{1\xi} + d^{-1/2} u_0 \eta_{0\xi} \quad (2.34)$$

$$\frac{v_1}{u_0} = \sigma B'(\sigma\chi) \quad \text{per } y = B(\sigma\chi) \quad (2.35)$$

Dalla 2.31 e dalla 2.27 ricaviamo:

$$p_{1y} = \kappa v_{0\xi} = -\frac{\kappa}{d} (y-B) \eta_0 \xi \quad (2.36)$$

Integriamo la 2.36 in y :

$$\int_y^1 p_{1y} dy' = - \int_y^1 -\frac{\kappa}{d}(y-B)\eta_{0\xi\xi}$$

$$\implies p_1(y=1) - p_1(y) = -\frac{\kappa}{2d}(y-B)^2\eta_{0\xi\xi} \Big|_y^1 = -\frac{\kappa}{d}\eta_{0\xi\xi}\left(\frac{1}{2} - B - \frac{y^2}{2} + By\right)$$

Utilizzando la 2.33

$$p_1(y) = \eta_1 + \frac{\kappa}{d}\eta_{0\xi\xi}\left(\frac{1}{2} - B - \frac{y^2}{2} + By\right) \quad (2.37)$$

$$p_{1\xi}(y) = \eta_{1\xi} + \frac{\kappa}{d}\eta_{0\xi\xi\xi}\left(\frac{1}{2} - B - \frac{y^2}{2} + By\right) \quad (2.38)$$

Integriamo in y la 2.32

$$\int_{1-d}^1 v_{1y} dy = - \int_{1-d}^1 (u_{0\chi} + u_{1\xi}d^{-1/2}) dy \quad (2.39)$$

Dapprima integriamo il primo membro e sostituiamo la 2.34 e 2.35:

$$\int_{1-d}^1 v_{1y} dy = v_1(y=1) - v_1(y=1-d) = d^{-1/2}u_0\eta_{0\xi} - \eta_{1\xi} - v_{0y}\eta_0 - u_0\sigma B'(\sigma\chi)$$

Ora, richiamando la 2.27 e la 2.28:

$$\int_{1-d}^1 v_{1y} dy = d^{-1}\eta_0\eta_{0\xi} - \eta_{1\xi} + d^{-1}\eta_0\eta_{0\xi} + d^{-1/2}d_\chi\eta_0 \quad (2.40)$$

Esaminiamo il secondo membro:

$$- \int_{1-d}^1 (u_{0\chi} + u_{1\xi}d^{-1/2}) dy$$

Da 2.28:

$$u_{0\chi} = \frac{\partial}{\partial\chi}(d^{-1/2})\eta_0 = (d^{-1/2})_\chi\eta_0 + d^{-1/2}\eta_{0\chi}$$

Il secondo termine lo ricaviamo dalla 2.30 e dalla 2.27

$$u_{1\xi} = d^{-3/2}\eta_0\eta_{0\xi} + v_0u_{0y} + p_{0\chi} + d^{-1/2}p_{1\xi}$$

Utilizzando le relazioni trovate per l'ordine zero e la 2.38 per $p_{1\xi}$

$$u_{1\xi} = d^{-3/2}\eta_0\eta_{0\xi} + \eta_{0\chi} + d^{-1/2}\left(\eta_{1\xi} + \frac{\kappa}{d}\eta_{0\xi\xi\xi}\left(\frac{1}{2} - B - \frac{y^2}{2} + By\right)\right)$$

Quindi integrando 2.39:

$$2d^{-1}\eta_0\eta_{0\xi} - \eta_{1\xi} + d^{-1/2}d_\chi\eta_0 = \frac{d^{-1/2}d_\chi}{2}\eta_0 - 2d^{1/2}\eta_{0\chi} - \frac{\eta_0\eta_{0\xi}}{d} - \eta_{1\xi} - \frac{\kappa d}{3}\eta_{0\xi\xi\xi} - d^{-1}\eta_0\eta_{0\xi}$$

$$2d^{1/2}\eta_{0\chi} + \frac{1}{2}\frac{d_\chi}{d^{1/2}}\eta_0 + \frac{3}{d}\eta_0\eta_{0\xi} + \frac{\kappa}{3}d\eta_{0\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.41)$$

2.3 Considerazioni sulla KdV a costanti variabili

Possiamo riscrivere la 2.41 utilizzando due diverse sostituzioni per arrivare a due equivalenti equazioni di Korteweg de Vries a coefficienti variabili.

Con il cambio $\eta_0 = d^{-1/4}H(\xi, \chi)$ otteniamo:

$$H_\chi + \frac{3}{2}d^{-7/4}HH_\xi + \frac{1}{6}d^{1/2}\kappa H_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.42)$$

Invece con la sostituzione $\chi' = \frac{1}{6} \int_0^\chi \frac{3}{2}d^{-7/4}d\hat{\chi}$:

$$H_\chi + 6HH_\xi + \frac{2}{3}\kappa d^{9/4}H_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.43)$$

È da notare che, confrontando le 2.42, 2.43 con la Korteweg de Vries a coefficienti costanti 1.3, la variabile χ assume il significato di coordinata temporale, mentre la ξ è di tipo spaziale. Questo fatto è una naturale conseguenza del cambio di coordinate effettuato

$$\begin{cases} \xi = f(x, \varepsilon) - t \\ \chi = \varepsilon x \end{cases}$$

dove la χ gioca il ruolo di variabile lunga per descrivere l'equazione nel *far field*; tale scelta è stata fatta in modo tale che la funzione che descrive la variazione di profondità dipenda solo da una coordinata spaziale, in questo caso χ .

Inoltre, per la KdV a costanti variabili, si verifica la conservazione della massa e del momento nella stessa forma della classica KdV: possiamo infatti riscrivere la 2.42 come

$$H_\chi + \left(\frac{3}{4}d^{-7/4}H^2 + \frac{1}{6}d^{1/2}\kappa H_{\xi\xi\xi} \right)_\xi = 0$$

ed integrandola in ξ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \int_{-\infty}^{+\infty} H d\xi = 0 \quad (2.44)$$

ricordando che $H(\xi, \chi)$ si annulla rapidamente per $|\xi| \rightarrow \infty$.

Si deduce la conservazione del momento moltiplicando 2.42 per H

$$\left(\frac{H^2}{2} \right)_\chi + \left(\frac{1}{2}d^{-7/4}H^3 + \frac{1}{6}d^{1/2}\kappa \left(HH_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}H_\xi^2 \right) \right)_\xi = 0$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^2 d\xi = 0 \quad (2.45)$$

Si ricavano le medesime leggi di conservazioni in modo analogo per la 2.43.

Capitolo 3

Fondale variabile

Andremo ora a generalizzare, al caso di fondale non uniforme, i risultati e le proprietà presentate nel primo capitolo.

Abbiamo già incontrato i parametri che descrivono il sistema ed in modo particolare σ , il quale caratterizza il tasso di cambiamento del fondale, e verranno quindi identificati due casi con dinamiche ben distinte:

- Per $\sigma \rightarrow \infty$ si ha un rapido sollevamento del fondale, cioè la regione di variazione è confinata in un piccolo spazio.
- Contrariamente, per $\sigma \rightarrow 0$ si ha un sollevamento più dolce del fondale, in cui la variazione è più lenta.

Segue la trattazione analitica del sistema e successivamente quella numerica.

3.1 Fondale rapidamente variabile

Leggi di conservazione

Per il caso di sollevamento ripido, riprendiamo la KdV a costanti variabili nella forma:

$$H_\chi + \frac{3}{2}d^{-7/4}HH_\xi + \frac{1}{6}\kappa d^{1/2}H_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.1)$$

La condizione iniziale di 3.1, che è perciò la condizione della regione a fondale costante, diventa condizione iniziale per la regione a profondità variabile, cioè per $\chi = 0$

In questo particolare caso, sarà più comodo lavorare con le leggi di conservazione: infatti, poiché σ stima il tasso di variazione della profondità, risulta intuitivo costruire le leggi di conservazione già descritte a partire proprio da questo parametro. Ciò che troveremo sarà che per $\sigma \rightarrow \infty$ continuano a valere, a meno di termini trascurabili, la serie di integrali primi 1.7.

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_m dx \sim \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} Q_m^{(n)} dx$$

Infatti, si generalizzano le 1.6 moltiplicando ciascun termine dei polinomi Q_m , P_m con opportune potenze di $\chi = d^{9/4}(\sigma\chi)$.
Perciò, integrando rispetto a ξ la

$$\sum_{n=0}^N \chi^n \frac{\partial Q_{mn}}{\partial \chi} = - \sum_{n=0}^N \chi^n \frac{\partial P_{mn}}{\partial \xi}$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \chi^n (Q_{mn})_x d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \chi^n (P_{mn})_\xi d\xi = - \sum_{n=0}^M \chi^n [P_{mn}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

poichè P_{mn} si annulla rapidamente all'infinito.

Quindi, Se i coefficienti variano con χ come avviene in 3.1, le leggi di conservazione si scrivono

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \chi^n (R_{mn})_x d\xi = 0 \quad (3.2)$$

dove R_{mn} è il prodotto di certe derivate di H rispetto a ξ e N è in funzione di m .
Integrando 3.2 da χ_0 a $\chi > \chi_1$

$$\int_{\chi_0}^{\chi_1} \sum_{n=0}^N D^n (S_{mn})_\chi d\chi + \int_{\chi_1}^{\chi} \sum_{n=0}^N D^n (S_{mn})_\chi d\chi = 0$$

con $S_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{mn} d\xi$.

Possiamo interpretare il parametro σ come $\sigma = (\chi_1 - \chi_0)^{-1}$ in modo tale che

$$d(\sigma\chi) = d\left(\frac{\chi}{\chi_1 - \chi_0}\right) \quad y = \frac{\chi - \chi_0}{\chi_1 - \chi_0}$$

$$\sum_{n=0}^N \int_0^1 [D(y + \sigma\chi_0)]^n S'_{mn} \left(\frac{1}{\sigma}y + \chi_0\right) \frac{1}{\sigma} dy + \left[\sum_{n=0}^N D_0^n S_{mn} \right]_{\chi_0+(1/\sigma)}^{\chi} = 0$$

Dove il primo termine va come $O(\sigma^{-1})$.

Al limite di $\sigma \rightarrow \infty$, che implica $\chi_1 \rightarrow \chi_0$, perciò:

$$\left[\sum_{n=0}^N D_0^n S_{mn} \right]_{\chi_0+(1/\sigma)}^{\chi} = O(\sigma^{-1}) \quad \sigma \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Ora $\left[\sum_{n=0}^N D_0^n S_{mn} \right]_{\chi_0+(1/\sigma)}^{\chi}$ è esattamente la Q_m -esima costante del moto calcolata per la nuova profondità d_0 , con valore iniziale la condizione della regione a profondità unitaria. La relazione 3.3 mostra che si conservano le costanti del moto come nel caso a variabili costanti, oltre alla massa e al momento come già visto. [5]

Formazione di solitoni con il sollevamento del fondale

Similmente a quanto fatto per l'equazione di Korteweg de Vries a variabili costanti, trarremo informazioni sull'evoluzione della dinamica del sistema dall'equazione agli autovalori

$$\psi_{\xi\xi} + \left(\frac{3}{2\kappa} d_0^{-9/4} H + \lambda \right) \psi = 0 \quad (3.4)$$

con condizione iniziale $H(\xi, X_0) = A \operatorname{sech}^2 \beta \xi$.

Dall'equazione di Legendre associata risulta che lo spettro degli autovalori è unicamente discreto nel caso:

$$\begin{aligned} \frac{3A}{2\beta^2\kappa} d_0^{-9/4} &= q(q+1) \\ \frac{\lambda}{\beta^2} &= -m^2 \quad m \leq q \end{aligned}$$

Inoltre a ciascuno degli autovalori è associato un solitone di ampiezza

$$A_m = \frac{2Am^2}{q(q+1)}$$

Poichè il profilo iniziale dell'onda deve essere tale da rimanere invariato nella regione a profondità unitaria d , cioè $A = \frac{4\kappa}{3}\beta^2$ allora si trova come risultato:

$$\frac{d_0}{d} = \left[\frac{q(q+1)}{2} \right]^{-4/9} \quad (3.5)$$

3.2 Fondale lentamente variabile

Se invece le proprietà del mezzo variano lentamente, cioè abbiamo $\chi_1 \sim \sigma^{-1} \gg 1$, allora si può utilizzare un'approssimazione adiabatica per descrivere la variazione di propagazione dell'onda solitaria. [7]

Consideriamo perciò l'equazione

$$H_\chi + 6HH_\xi + \lambda(\sigma\chi)H_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.6)$$

ove $\lambda(\sigma\chi) = \frac{2}{3}\kappa d^{9/4}$

Allora l'espansione adiabatica del profilo del solitone è data da:

$$H = H_0 + \sigma H_1 + \dots \quad (3.7)$$

con

$$H_0 = A \operatorname{sech}^2 \left[\beta \left(\xi - \frac{\Phi(\sigma\chi)}{\sigma} \right) \right] \quad (3.8)$$

Posta c la velocità di propagazione del solitone, i parametri che compaiono nella 3.8 sono legati tra loro come:

$$\frac{d\Phi}{d(\sigma\chi)} = c = 2A = 4\lambda\beta^2 \quad (3.9)$$

La variazione di ampiezza A , l'inverso della larghezza β e la velocità di propagazione c sono determinate sfruttando il fatto già noto che per la 3.6 si conserva il momento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2 d\xi = \text{cost} \quad (3.10)$$

Infatti, sostituendo 3.8 in 3.10 ed utilizzando la 3.9 si ricava

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{2/3} \quad \frac{A}{A_0} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{1/3}$$

Tuttavia, oltre al momento, si conserva la massa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H d\xi = \text{cost} \quad (3.11)$$

che non è soddisfatta da 3.8. Perciò la conservazione della massa è garantita da H_1 , cioè dalla generazione di un gradino viaggiante di ampiezza $O(\sigma)$ e con supporto sull'intervallo $0 < x < \frac{\Phi(\sigma\chi)}{\sigma}$.

Quindi il gradino si estende su un zona di $O(\sigma^{-1})$ e quindi trasporta $O(1)$ di massa. La 3.11 diventa

$$\int_{-\infty}^{\Phi(\sigma\chi)/\sigma} H_1 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} H_0 d\xi = \text{cost} \quad (3.12)$$

e dal secondo termine risulta

$$\frac{2A}{\beta} = 4\lambda\beta = 4\beta_0\lambda^{1/3}$$

Capitolo 4

Approccio numerico

Vengono riportati di seguito i risultati numerici, ottenuti con lo schema derivato in Appendice A.

È stato utilizzato come passo temporale $\Delta t = 0,00001$ e quello spaziale $\Delta x = 0,03$. Si è scelto di utilizzare come profilo descrivente la profondità variabile la funzione $d(\sigma\chi)$, così definita:

$$d(\sigma\chi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + d_0 + (1 - d_0) \cos\left(\frac{\pi\chi}{\chi_1}\right) \right] & \text{per } 0 \leq \chi \leq \chi_1 \\ d_0 & \text{per } \chi \geq \chi_1 \end{cases}$$

ove $\chi_1 = 0,05$ nel caso di sollevamento rapido e $\chi_1 = 10$ in quello lentamente variabile.

Perciò sono stati presi in esame i seguenti casi:

- $d_0 = 0,614$ in cui emergereanno due solitoni.
- $d_0 = 0,451$ in cui emergereanno tre solitoni.
- $d_0 = 0,519$ in cui emergereanno due solitoni e radiazione.
- $d_0 = 0,2$ nel caso di sollevamento lento.

Sollevamento rapido del fondale

Per il caso del sollevamento rapido del fondale è stato utilizzato come profilo iniziale:

$$H(\xi, 0) = 12 \operatorname{sech}^2(\xi)$$

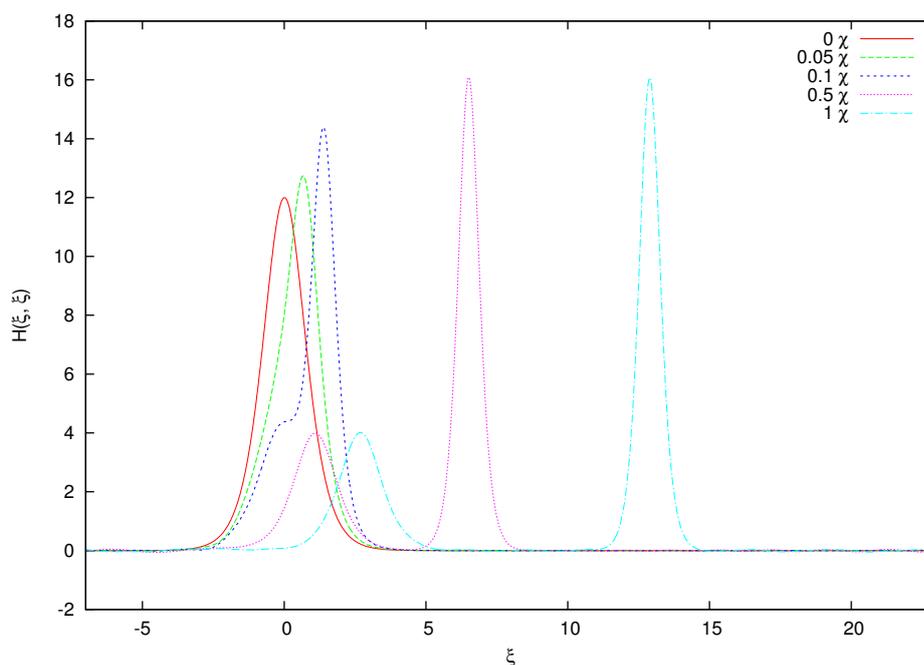
È da notare il fenomeno di *fissione* del solitone iniziale, dal quale saranno generati due o tre solitoni, a seconda della profondità finale d_0 secondo:

$$d_0 = \left[\frac{q(q+1)}{2} \right]^{-4/9}$$

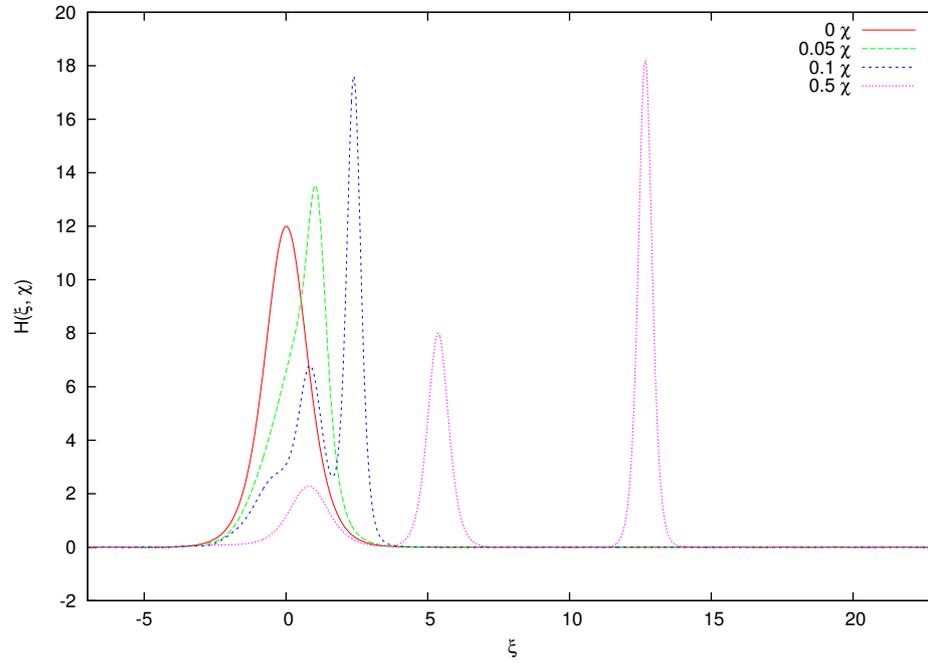
Inoltre vengono confrontate in tabella le ampiezze numeriche con quelle derivate con l'approccio analitico, che seguono:

$$A_m = \frac{2Am^2}{q(q+1)}$$

Figura 4.1: Evoluzione del solitone per $d_0 = 0.614$



	Ampiezza teorica	Ampiezza numerica
primo solitone	16	16,08
secondo solitone	4	4,02

Figura 4.2: Evoluzione del solitone per $d_0 = 0.451$ 

	Ampiezza teorica	Ampiezza numerica
primo solitone	18	18,21
secondo solitone	8	7,99
terzo solitone	2	2,28

Nel caso di profondità finale $d_0 = 0,5189$ è possibile visualizzare la formazione di due solitoni accompagnati da una radiazione oscillante.

Tale effetto è sottolineato nelle 4.4 e 4.5.

Figura 4.3: Evoluzione del solitone per $d_0 = 0.519$

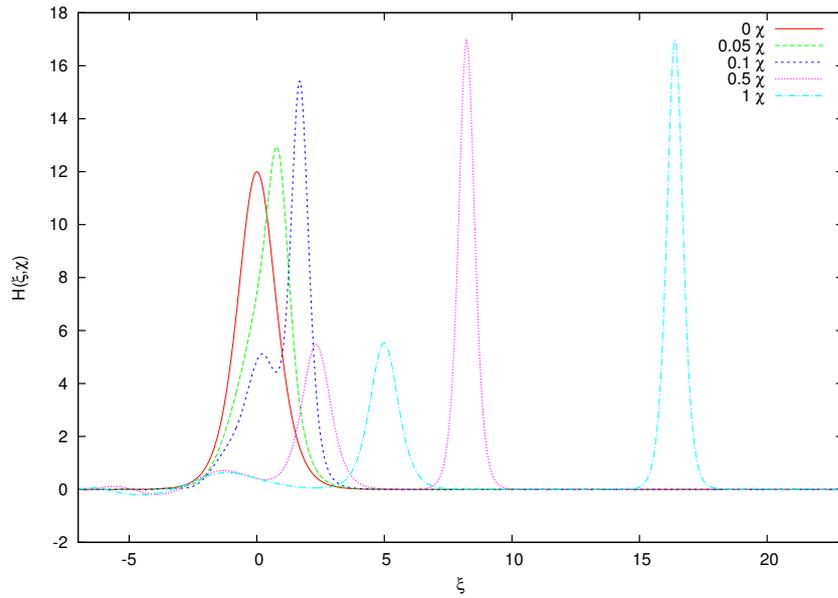


Figura 4.4: Particolare della radiazione nel caso $d_0 = 0.519$

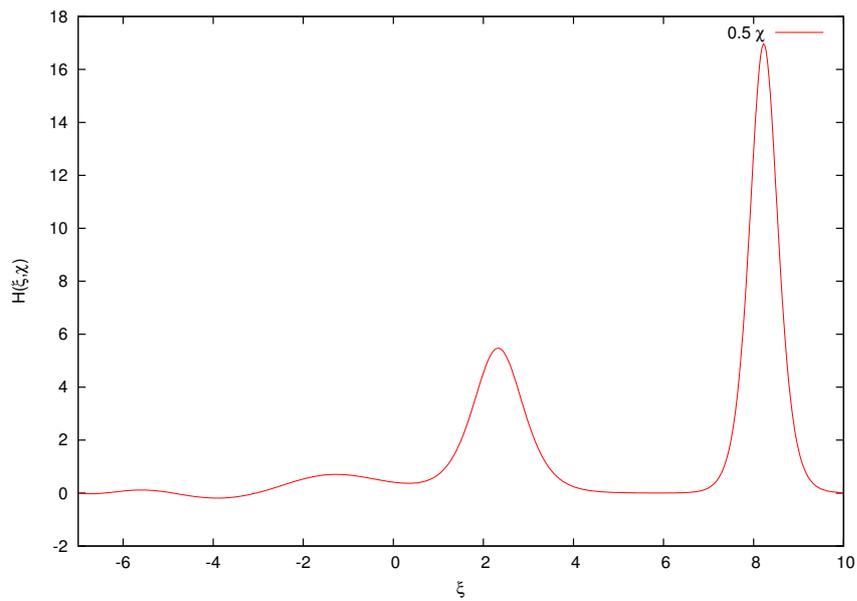
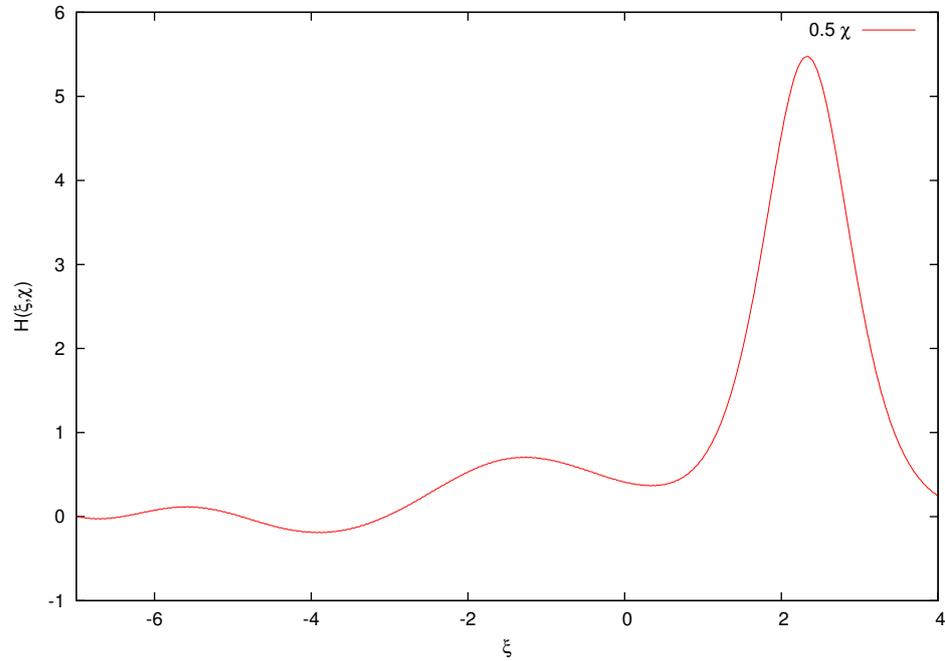
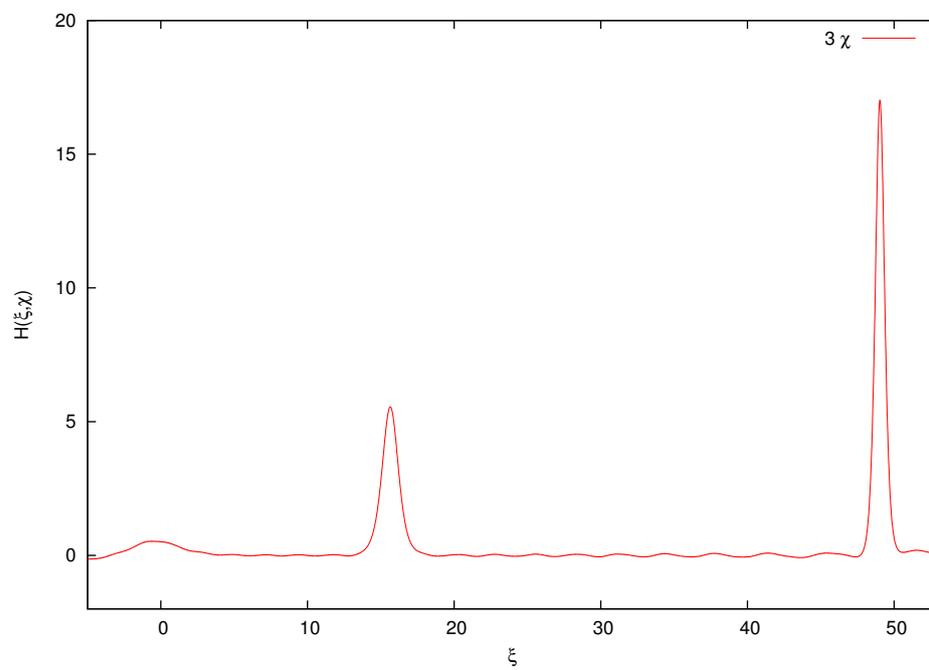


Figura 4.5: Particolare della radiazione nel caso $d_0 = 0.51$ *articolo* 0.15899Figura 4.6: Evoluzione del solitone per tempi lunghi per $d_0 = 0.519$ 

Sollevamento lento del fondale

Per il caso del sollevamento rapido del fondale è stato utilizzato come profilo iniziale:

$$H(\xi, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(\xi)$$

In 4.7 viene riportata l'evoluzione temporale del singolo solitone, dove i solitoni sono stati opportunamente traslati lungo ξ perchè fosse meglio visualizzabile la fenomenologia del sistema. Mentre in 4.8 si nota il gradino che garantisce la conservazione della massa.

Figura 4.7: Evoluzione del solitone per $d_0 = 0.2$

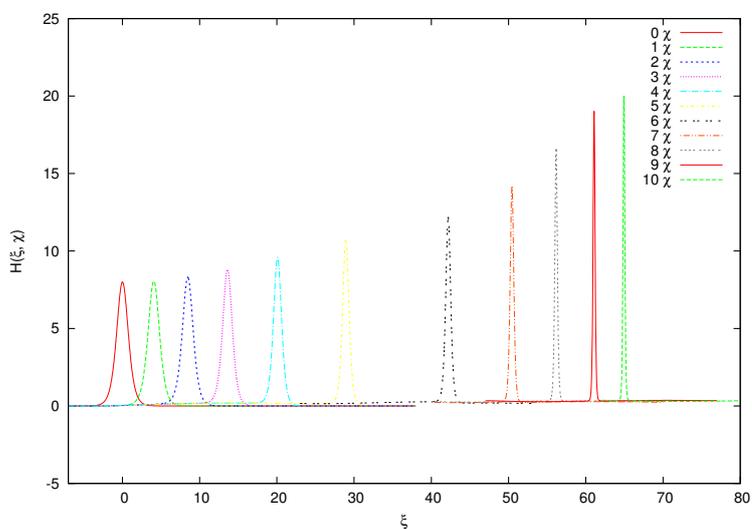
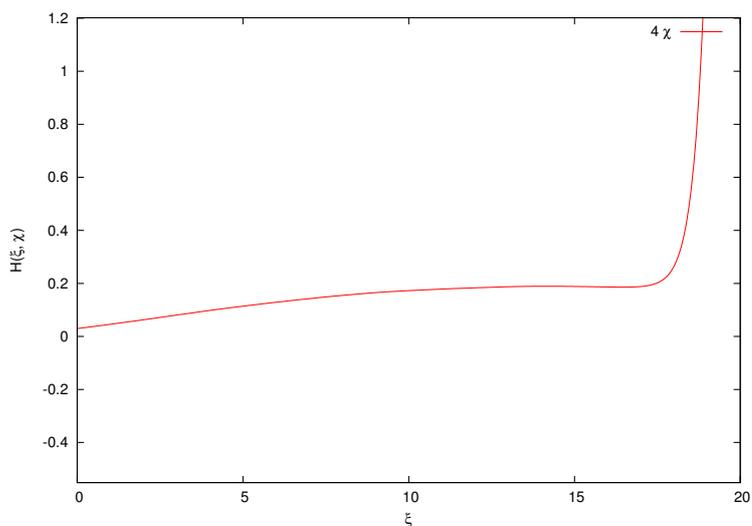


Figura 4.8: Particolare del gradino per $d_0 = 0.2$



Appendice A

Schema numerico

L'equazione studiata per il calcolo numerico è la seguente:

$$u_t + \frac{3}{2}d(t)^{-7/4}uu_x + d(t)^{1/2}u_{xxx} = 0 \quad (\text{A.1})$$

dove lo spazio ed il tempo sono stati discretizzati

$$\begin{aligned}x &\rightarrow i\Delta x \\t &\rightarrow j\Delta t\end{aligned}$$

in modo che la quantità u venga a sua volta discretizzata come:

$$u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$$

Inoltre u viene calcolata come media

$$u = \frac{u_{i+1}^j + u_i^j + u_{i-1}^j}{3} \quad (\text{A.2})$$

Lo schema utilizzato è un CTCS, ottenuto sviluppando in serie di Taylor:

$$u_{i+1}^j = u_i^j + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^j + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^j + o(\Delta x)^3$$

$$u_{i-1}^j = u_i^j - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^j + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^j + o(\Delta x)^3$$

Da cui si ricava, (similmente per la derivata temporale):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (\text{A.3})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} \quad (\text{A.4})$$

Analogamente si ricavano le derivate di ordine superiore:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^j = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^j = \frac{\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^j - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i-1}^j}{2\Delta x} = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} \quad (\text{A.6})$$

Sostituendo le A.2A.3, A.4, A.6 in A.1 allora si ricava:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} + \frac{3}{2}d_j^{-7/4} \left(\frac{u_{i+1}^j + u_i^j + u_{i-1}^j}{3} \right) \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) + d_j^{1/2} \left(\frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} \right) = 0$$

Perciò possiamo scrivere esplicitamente l'algoritmo da implementare come segue:

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} - \frac{1}{2}d_j^{-7/4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1}^j + u_i^j + u_{i-1}^j \right) (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - d_j^{1/2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} \left(u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j \right) \quad (\text{A.7})$$

L'errore di troncamento è proporzionale a Δt^3 ed a $\Delta x \Delta t^2$.

La soluzione rimane stabile se [8]

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(d_j^{-7/4} |u| + \frac{4d_j}{\Delta x^2} \right) \leq 1$$

Bibliografia

- [1] *INGV Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia Sezione Roma2*, <http://roma2.rm.ingv.it/it/tematiche/33/tsunami>
- [2] *Russell J.S. Report on waves, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844*
- [3] *Drazin P.G. & Johnson R.S. Solitons: an Introduction. Cambridge University Press, 1989*
- [4] *Strauss W.A. Partial Differential Equations : An Introduction. Second edition, John Wiley And Sons Ltd, 2008*
- [5] *Johnson R.S. On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society Vol. 73, 183-203,1973*
- [6] *Tappert F. & Zabusky N.J. Physical Review Letters 27, 1774-1776, 1971*
- [7] *El G.A. & Grimshaw R.H.J. Generation of undular bores in the shelves of slowly varying solitary waves, AIP Publishing, 2002*
- [8] *Vliedenthart A.C. On finite difference methods for the Korteweg de Vries equation, Journal of Engineering Mathematics Vol. 5, 137-155, 1971*