UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

SPAZI UNIFORMI

TEOREMA DI HAHN-BANACH

RELATORE:
PROF.SSA LUISA FIOROT

LAUREANDA: GIULIA GALLINA
MATRICOLA: 1201630

ANNO ACCADEMICO 2022/2023
24/02/2023

Introduzione

Uno spazio vettoriale topologico è una delle strutture su cui poggia l'analisi funzionale; consiste in uno spazio su cui sono definite sia una struttura topologica, sia una struttura lineare. La ricerca in tale ambito è stata iniziata da Stefan Banach intorno al 1920. In questa tesi introdurremo anche la nozione di struttura uniforme, mostreremo come ad ogni struttura uniforme sia canonicamente associata una struttura topologica. Le funzioni uniformemente continue saranno definite come le funzioni che rispettano le strutture uniformi.
Nel primo capitolo vengono trattate le strutture topologiche in generale, quindi le nozioni di filtri, topologie su un insieme e reti. Inoltre si studia il concetto di continuità sia applicato ai filtri, sia alle reti. Nel capitolo successivo è illustrato il significato di pseudometrica e di struttura uniforme, dando importanza alla nozione di completezza di uno spazio uniforme. Il terzo è incentrato sulle topologie vettoriali: si danno le definizioni di spazi vettoriali topologici, pseudo-seminorme, spazi nomati e spazi di Banach. Si constata che ogni topologia vettoriale è definita da una famiglia di pseudo-seminorme e che esiste una sola uniformità che ha una base invariante per traslazioni compatibile con una topologia vettoriale. Si sono così ricavate le tecniche per dimostrare i risultati dell'ultimo capitolo: *il teorema di Hahn-Banach*, dimostrato contemporaneamente dai due matematici, che è un teorema di separazione di insiemi convessi in uno spazio vettoriale topologico e *il teorema del grafico chiuso*, a cui è associato *il teorema della mappa aperta*.
Le referenze di questa tesi sono gli appunti di istituzioni di analisi superiore per la laurea in matematica del professor Tullio Valent.

Indice

Capitolo 1

Topologie, continuità, compattezza

1.1 Filtri

Definizione 1.1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ l'insieme delle parti di X. Un filtro su X è un sottinsieme non vuoto $\mathcal{F}$ di $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ tale che

1. la parte vuota di X non appartiene a $\mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$;
3. $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F}$.

Definizione 1.2. Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X, ogni sottinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{F}$ tale che per ogni $A \in \mathcal{F}$ esiste $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq A$ si dice una base del filtro $\mathcal{F}$.

Detto $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{P} \text{ t.c. } \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } B \in A\}$, essendo B base, $\mathcal{F} \subseteq G$, ma dalla 3 della definizione 1.1 si ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, quindi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Proposizione 1.3. *Un sottinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(X)$ è una base per un filtro su X se e solo se $\mathcal{B}$ non è vuoto, $\emptyset \notin \mathcal{B}$ e l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ contiene un elemento di $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con le proprietà volute. Se definisco $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } B \subseteq A\}$, allora $\mathcal{F}$ è filtro su X. Infatti:

1. $\emptyset \notin B$ quindi non appartiene nemmeno a $\mathcal{F}$;
2. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, esistono $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $B_1 \subseteq A_1$ e $B_2 \subseteq A_2$, quindi $A_1 \cap A_2 \supseteq B_1 \cap B_2$, dove $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ perchè esiste $C \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 \supseteq C$. Quindi $C \subseteq A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$;
3. Se $A \in \mathcal{F}$, quindi esiste $B \subseteq A$ con $B \in \mathcal{B}$, e se $C \in \mathcal{P}(X)$ con $A \subseteq C$, allora $B \subseteq A \subseteq C$, quindi $C \in \mathcal{F}$.

$\square$

Definizione 1.4. Un sottinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{P}$(X) si dice una prebase per un filtro su X se esiste un filtro su X che contiene $\mathcal{S}$.

Ogni sottinsieme di un filtro $\mathcal{F}$ su X che genera $\mathcal{F}$ dicesi una prebase del filtro $\mathcal{F}$. Ovviamente ogni base di un filtro è una prebase del filtro stesso.

Definizione 1.5. Un filtro su X si dice un ultrafiltro se esso è un elemento massimale dell'insieme, ordinato per inclusione, dei filtri su X (cioè se esso è tale che nessun filtro su X lo contiene strettamente).

Proposizione 1.6. *Per ogni filtro su X esiste un ultrafiltro su X che lo contiene.*

Proposizione 1.7. *Se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro su X e $A \in \mathcal{P}(X)$, allora $A \in \mathcal{F}$ oppure $\complement A \in \mathcal{F}$*

Definizione 1.8. Siano X, Y due insiemi e f una funzione di X in Y. Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X il sottinsieme $f(\mathcal{F})$ di $\mathcal{P}$(Y) definito da fF) = {f(A) t.c. A $\in \mathcal{F}$} è una base per un filtro su Y che diremo il filtro immagine del filtro $\mathcal{F}$ tramite f.

1.2 Topologie su un insieme

Definizione 1.9. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}$(X) l'insieme delle parti di X. Una struttura topologica su X è un'applicazione $x \to \mathcal{F}$(x), di X nell'insieme dei filtri su X, aventi le seguenti proprietà:

1. $U \in \mathcal{F}(\mathrm{x}) \implies x \in U$;
2. Per ogni $U \in \mathcal{F}(x)$ esiste $V \in \mathcal{F}$ tale che $U \in \mathcal{F}(y)\ \forall y \in V$.

Definizione 1.10. Posto $\mathcal{T}$={$A \in \mathcal{P}(X)$ t.c. $A \in \mathcal{F}(x)\ \forall x \in A$}, gli elementi dell'insieme $\mathcal{T}$ sono chiamati i sottinsiemi aperti di X e i complementari degli elementi di $\mathcal{T}$ sono chiamati i sottinsiemi chiusi di X. Allora $\mathcal{T}$ ha le seguenti proprietà:

1. L'insieme vuoto e X appartengono a $\mathcal{T}$;
2. L'unione di ogni sottinsieme di $\mathcal{T}$ è un elemento di $\mathcal{T}$;
3. L'intersezione di ogni sottinsieme finito di $\mathcal{T}$ è un elemento di $\mathcal{T}$.

Ogni sottinsieme $\mathcal{T}$ di $\mathcal{P}(X)$ avente le proprietà 1, 2, 3 della definizione 1.10 sarà detto una topologia su X. Quindi definire una struttura topologica su X equivale a fissare una topologia su X.

Facciamo degli esempi:

1. L'insieme delle topologie su X è ordinato per inclusione: tale insieme ha un elemento minimo e un elemento massimo. Il minimo è la topologia banale: $\{\emptyset, X\}$; il massimo è la topologia discreta: $\mathcal{P}(X)$.

2. L'insieme degli intervalli $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, è una base per una topologia su $\mathbb{R}$ detta la topologia usuale su $\mathbb{R}$.

1.3 Applicazioni continue

Siano $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spazi topologici, $\mathcal{B}_Y$ una base di $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{S}_Y$ una prebase di $\mathcal{T}_Y$, $f : X \to Y$ un'applicazione di X in Y, $\mathcal{F}_X(x)$ il filtro degli intorni di $x \in X$ per $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{F}_Y(f(x))$ il filtro degli intorni di $f(x)$ per $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{B}_Y(f(x))$ una base di $\mathcal{F}_Y(f(x))$, $\mathcal{S}_Y(f(x))$ una prebase di $\mathcal{F}_Y(f(x))$.

Definizione 1.11. Si dice che $f : X \to Y$ è continua in x se l'immagine inversa di ogni intorno di $f(x)$ è un intorno di x, cioè se $U \in \mathcal{F}_Y(f(x)) \implies f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_X(x)$, dove $f^{-1}(U) = \{x \in X \text{ t.c. } f(x) \in U\}$.

Equivalentemente: per ogni $U \in \mathcal{F}_Y(f(x))$ esiste $V \in \mathcal{F}_X(x)$ tale che $f(V) \subseteq U$. Ossia il filtro su Y generato da $f(\mathcal{F}_X(x))$ contiene $\mathcal{F}_Y(f(x))$. Come studiato nei corsi di analisi, vale il seguente teorema:

Teorema 1.12. *$f : X \to Y$ è continua se e solo se sussiste una delle seguenti proprietà:*

1. $A \in \mathcal{T}_Y \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$, *cioè l'immagine inversa di ogni aperto di Y è un aperto di X;*

2. $A \in \mathcal{B}_Y \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$*;*

3. $A \in \mathcal{S}_Y \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$*;*

4. *l'immagine inversa di ogni chiuso di Y è un chiuso di X;*

5. $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$.

1.4 Filtri convergenti, Reti

Definizione 1.13. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e, per ogni $x \in$ X, sia $\mathcal{F}(x)$ il filtro degli intorni di x per $\mathcal{T}$. Un filtro $\mathcal{F}$ su X si dice convergente a x se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}(x)$ $\exists x$.

In tale caso diremo che x è un punto limite di $\mathcal{F}$ e scriveremo $\mathcal{F} \to x$.

Definizione 1.14. Uno spazio topologico X si dice uno spazio di Hausdorff (o spazio separato) se per ogni coppia di punti distinti x, y di X esistono un intorno U di x e un intorno V di y disgiunti (cioè tali che $U \cap V = \emptyset$). La topologia di uno spazio di Hausdorff si dice una topologia di Hausdorff (o separata).

Proposizione 1.15. *Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se ogni filtro su X convergente ha un solo punto limite.*

Dimostrazione. Se X non è spazio di Hausdorff allora esistono $x, y \in X$, con $x \neq y$, tali che il sottinsieme $\mathcal{B}$ di X, $\mathcal{B} = \{U \cap V : U \in \mathcal{F}(x), V \in \mathcal{F}(y)\}$ è una base per un filtro su X. Allora per definizione si ha che X contiene $\mathcal{F}(x) = \{U \cap X : U \in \mathcal{F}(x)\}$ e X contiene $\mathcal{F}(y) = \{X \cap V : V \in \mathcal{F}(y)\}$. Quindi X converge sia a x, che a y.
Viceversa se esiste un filtro $\mathcal{F}$ su X che converge a due punti x, y, $x \neq y$, allora $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}$: Quindi $U \cap V \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{F}(x), \forall V \in \mathcal{F}(y)$ perchè un filtro su X non contiene la parte vuota di X. Allora X non è di Hausdorff. □

Proposizione 1.16. *Siano X, Y due spazi topologici.*
Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $x \in X$ se e solo se, per ogni filtro $\mathcal{F}$ su X convergente a x, il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite f converge a $f(x)$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}_X(x)$ il filtro degli intorni di x in X e $\mathcal{F}_Y(f(x))$ il filtro degli intorni di $f(x)$ in Y. Per definizione f è continua se e solo se il filtro immagine di $\mathcal{F}_X(x)$ contiene $\mathcal{F}_Y(f(x))$. Inoltre $\mathcal{F}_X(x)$ converge a x. Quindi $\mathcal{F}_Y(f(x))$ converge a $f(x)$. □

Definizione 1.17. Un insieme filtrante (o diretto) è un insieme A su cui è assegnato un preordine (indicato con il simbolo $\leqslant$) tale che per ogni $\alpha \in A$ e $\beta \in A$ esiste $\gamma \in A$ tale che $\alpha \leqslant \gamma$ e $\beta \leqslant \gamma$.

Una rete in un insieme X è una funzione a valori in X definita in un insieme filtrante. L'insieme ordinato $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un insieme filtrante. Le reti definite in $\mathbb{N}$ si chiamano successioni.

Definizione 1.18. Sia X uno spazio topologico e sia $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una rete in X. Se il filtro associato alla rete in $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a $x \in X$, allora si dice che la rete converge a x. Dunque x è un limite della rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ e si scrive $lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$ (o più brevemente $x_\alpha \mapsto x$).

Definizione 1.19. Sia $s : A \to X$ una rete in X. Se B è un insieme filtrante e $\varphi : B \to A$ è un'applicazione conservante il preordine e tale che per ogni $\alpha \in A$ esiste $\beta \in B$ con $\alpha \leqslant \varphi(\beta)$, allora la rete $s \circ \varphi : B \to X$ dicesi una sottorete della rete s.

Definizione 1.20. Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una rete in X. Per ogni $\alpha \in A$, l'insieme $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ è una base per un filtro su X, dove $S_\alpha = \{x_\beta : \beta \in A, \beta \geqslant \alpha\}$. Tale filtro è detto filtro associato alla rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Definizione 1.21. La rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge a $x \in X$ se il filtro a essa associato converge a x. Allora x è per definizione il limite della rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, ovvero $x_\alpha \longmapsto x$.

Proposizione 1.22. *Siano X, Y spazi topologici. $f : X \to Y$ è continua in $x \in X$ se e solo se per ogni rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in X convergente a x, la rete $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ in Y converge a f(x).*

Dimostrazione. Ad ogni rete in uno spazio topologico X è stato associato un filtro su X con gli stessi punti limite. Viceversa ad ogni filtro $\mathcal{F}$ su X si può associare una rete tale che il filtro ad essa associato coincida con $\mathcal{F}$, quindi che ha gli stessi punti limite di $\mathcal{F}$. Sia infatti $E = \{(\alpha, A) : A \in \mathcal{F}, \alpha \in A\}$, E è un insieme filtrante rispetto al preordine $(\alpha, A) \leqslant (\beta, B) \iff A \supseteq B$. Inoltre se $S_{\mathcal{F}}(\alpha, A) = \alpha \quad \forall(\alpha, A) \in E$, l'applicazione $S_{\mathcal{F}} : E \to X$ è una rete, con filtro associato $\mathcal{F}$. ($X_{\mathcal{F}}$ è la rete associata al filtro $\mathcal{F}$). $\square$

Proposizione 1.23. *Se f, g sono due applicazioni continue di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff Y, allora l'insieme $H = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.*

Dimostrazione. $\complement H$ è aperto in X, cioè per ogni $x \in \complement H$ esiste un intorno di x contenuto in $\complement H$. Infatti se $x_0 \in \complement H$, allora $f(x_0) \neq g(x_0)$. Dunque, essendo Y uno spazio di Hausdorff, esistono un intorno U di $f(x_0)$ e un intorno di V di $g(x_0)$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Per la continuità di f e di g in x_0, esiste un intorno W di x_0 tale che $f(W) \subseteq U$ e $g(W) \subseteq V$. Quindi $f(W) \cap g(W) = \emptyset$, con $W \subseteq \complement H$. $\square$

Capitolo 2

Pseudometriche e uniformità

Definizione 2.1. Sia X un insieme. Una pseudometrica su X è un'applicazione $d : X \times X :\to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geqslant 0\}$ tale che

1. $d(x,x) = 0 \quad \forall x \in X$;
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$;
3. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Se inoltre $d(x,y) = 0 \implies x = y$, allora d si dice una metrica su X e il numero $d(x,y)$ è detto la d-distanza di x da y.

Un insieme X su cui è assegnata una pseudometrica (risp. metrica) d è detto uno spazio pseudometrico (risp. metrico) ed è indicato con (X,d).

Definizione 2.2. Siano $(X, d_X), (Y, d_Y)$ due spazi pseudometrici. L'applicazionde $f : X \to Y$ è detta isometria di (X, d_X) in (Y, d_Y) se essa conserva le distanze. Ovvero $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$ $\forall x, y \in X$. Se d_X è metrica, allora l'isometria f è iniettiva.

Si noti che ad ogni spazio pseudometrico è canonicamente associato uno spazio metrico: se (X,d) è spazio pseudometrico, si definisce $\overline{X} = X/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza tale che $x \sim y \iff d(x,y) = 0$. Quindi $x_1 \sim x_2$ e $y_1 \sim y_2 \implies d(x_1,x_2) = d(y_1,y_2)$. Allora se π è la proiezione canonica di X su $\overline{X}$, ovvero la funzione che a $x \in X$ associa la classe di quivalenza di x, si pone $\overline{d}(\pi(x), \pi(y)) = d(x,y)$ $\forall x, y \in X$ e $\overline{d}$ è una metrica su $\overline{X}$. Lo spazio metrico $(\overline{X}, \overline{d})$ è canonicamente associato allo spazio pseudometrico (X,d) e π è isometria di (X,d) su $(\overline{X}, \overline{d})$.

Definizione 2.3. Sia d una pseudometrica sull'insieme X. Sia $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Allora l'insieme $S_d = \{y \in X \text{ t.c. } d(x,y) < r\}$ si chiama d-sfera aperta di centro x e raggio r. Per ogni $x \in X$ e per ogni $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, l'insieme delle d-sfere aperte è base della topologia $\mathcal{T}$ su X. Verrà indicata come la topologia definita dalla pseudometrica d.

Definizione 2.4. Una topologia su un insieme X dicesi pseudometrizzabile (risp. metrizzabile) se è definibile da una pseudometrica (risp. metrica) su X. Uno spazio topologico si dice pseudometrizzabile o metrizzabile se lo è la topologià ad esso associato.

Definizione 2.5. Sia d una psudometrica sull'insieme X. Per ogni numero reale positivo r poniamo $U_{d,r} = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leqslant r\}$, cioè $U_{d,r} = d^{-1}([0,r])$. L'insieme $\mathcal{B}$=$\{U_{d,r} : r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ è una base per un filtro, $\mathcal{U}(d)$, su $X \times X$, che diremo uniformità su X definita dalla pseudometrica d.

Definizione 2.6. Sia $X \neq \emptyset$ e sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche. Allora $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è la topologia su X che ha come prebase $\{S_{d(x,r)}$ t.c. $d \in \mathcal{P}, x \in X, r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}\}$, dove $S_{d(x,r)}$ è definito appena sopra.

Definizione 2.7. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche sull'insieme X. L'uniformità su X definita dalla famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche è una prebase $\{U_{d,r}$ t.c. $d \in \mathcal{P}, r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}\}$ per un filtro $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ su $X \times X$, dove $U_{d,r} = \{(x,y) \in X \times X$ t.c. $d(x,y) \leqslant r\}$.

Allora $\mathcal{F}(x) = \{U(x)$ t.c. $U \in \mathcal{U}(\mathcal{P})\}$ è il filtro degli intorni di x per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ definita da $\mathcal{P}$, dove $U(x) = \{y \in X$ t.c. $(x,y) \in U\}$.

Definizione 2.8. Un filtro $\mathcal{U}$ su $X \times X$ è un'uniformità su X se e solo se

1. ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene la diagonale $\Delta(X \times X) = \{(x,x) : x \in X)\}$ di $X \times X$;

2. $U \in \mathcal{U} \implies U^{-1} \in \mathcal{U}$, dove U^{-1}=$\{$(y,x) : (x,y) $\in U\}$ (simmetrico di U);

3. $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{U}$ tale che $V \circ V \subseteq U$, dove $V \circ V = \{(x,z) \in X \times X : (x,y) \in V, (y,z) \in V$ per qualche $y \in X\}$.

Definizione 2.9. Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche sull'insieme X, l'insieme $\{U_{d,r} : d \in \mathcal{P}, r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}\}$, con $U_{d,r} = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leqslant r\}$, è una prebase per un filtro $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ su $X \times X$, detta uniformità su X definita dalla famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche.

Proposizione 2.10. *$\mathcal{U}(\mathcal{P})$ soddisfa le tre proprietà della definizione 2.8.*

Dimostrazione.

1. Coincide con la proprietà riflessiva. Infatti $d(x,x) = 0 \leqslant r \forall x \in X$.

2. Coincide con la proprietà simmetrica. Infatti se $(x,y) \in U$ allora $d(x,y) \leqslant r$. Ma per definizione di pseudometrica, $d(x,y) = d(y,x) \leqslant r$. Ovvero $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

3. Coincide con la disuguaglianza triangolare. Infatti se $(x, z) \in U$, allora $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ implica che esiste un $y \in X$. Quindi $\forall U \in \mathcal{U}$, esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \circ V \subseteq U$.

□

Per quanto visto sopra, all'uniformità $\mathcal{U}$ su X è associata una topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U})$, detta topologia definita dall'uniformità $\mathcal{U}$, per la quale il filtro degli intorni $x \in X$ è l'insieme $\{U(x) : U \in \mathcal{U}\}$, con $U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$.

Definizione 2.11. Una topologia $\mathcal{T}$ sull'insieme X dicesi uniformizzabile se essa è definita da qualche uniformità su X, cioè da qualche famiglia di pseudometriche su X; ogni uniformità su X definente $\mathcal{T}$ dicesi compatibile con la topologia $\mathcal{T}$. Uno spazio topologico dicesi uniformizzabile se la sua topologia è uniformizzabile.

Definizione 2.12. Siano $(X,\mathcal{U}_\mathcal{X})$, $(Y,\mathcal{U}_\mathcal{Y})$ spazi uniformi. L'applicazione $f : X \to Y$ dicesi uniformemente continua (rispetto alle uniformità $\mathcal{U}_\mathcal{X}$ e $\mathcal{U}_\mathcal{Y}$) se per ogni $U \in \mathcal{U}_\mathcal{Y}$ esiste $V \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ tale che $(x_1, x_2) \in V \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in U$. Cioè tale che $(x_1, x_2) \in V \Rightarrow f^{(2)}(x_1, x_2) \in U$, dove $f^{(2)}(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$.

Proposizione 2.13. *Se (X, $\mathcal{U}_\mathcal{X}$), (Y $\mathcal{U}_\mathcal{Y}$), (Z, $\mathcal{U}_\mathcal{Z}$) sono spazi uniformi e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sono uniformemente continue, allora anche $g \circ f : X \to Z$ è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Se g è uniformemente continua, allora per ogni $U \in \mathcal{U}_Z$ esiste $W \in \mathcal{U}_Y$ tale che $(y_1, y_2) \in W \Rightarrow (g(y_1), g(y_2)) \in U$.
Se f è uniformemente continua, allora per ogni $W \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $(x_1, x_2) \in V \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in W$.
Quindi $\forall (x_1, x_2) \in V \Rightarrow (g(f(x_1)), g(f(x_2))) \in U$. Quindi $g \circ f$ è uniformemente continua. □

2.1 Completezza

Definizione 2.14. Un filtro $\mathcal{F}$ su X è di Cauchy (per l'uniformità $\mathcal{U}$ su X) se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $M \in \mathcal{F}$ tale che $M \times M \subseteq U$.

Quindi $\mathcal{F}$ è di Cauchy se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $x \in X$ tale che $U(x) \in \mathcal{F}$.

Definizione 2.15. Una rete (e in particolare una successione) in X è di Cauchy se il filtro su X ad essa associato è di Cauchy.

Ne segue facilmente che la rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in X è di Cauchy se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \alpha_0 \Rightarrow (x_\alpha, x_\beta) \in U$.

Ad esempio la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X è di Cauchy se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n, m \in \mathbb{R}, n \geqslant n_0, m \geqslant m_0 \Rightarrow (x_n, x_m) \in U$.

Proposizione 2.16. *Se $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio uniformizzabile, ogni filtro su X convergente è di Cauchy per ogni uniformità su X compatibile con $\mathcal{T}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche su X che definiscono $\mathcal{T}$. Se il filtro $\mathcal{F}$ su X converge a $x_0 \in X$, allora, $\forall d \in \mathcal{P}$ e $\forall \epsilon > 0$, $\mathcal{F} \supseteq S_d(x_0, \epsilon)$. Sia $M = S_d(x_0, \frac{\epsilon}{2})$, si ha $M \in \mathcal{F}$ e $d(x, x_0) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in M$, dove $d(x, y) < \epsilon \quad \forall x, y \in M$ perchè $d(x, y) \leqslant d(x, x_0) + d(y, x_0)$. □

Definizione 2.17. Uno spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$ è detto completo (per l'uniformità $\mathcal{U}$ su X) se ogni filtro di Cauchy su X è convergente per la topologia su X definita da $\mathcal{U}$.

Proposizione 2.18. *Ogni sottinsieme chiuso di uno spazio uniforme completo è completo in esso.*

Dimostrazione. Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio uniforme completo e sia B un sottoinsieme di X chiuso per la topologia definita da $\mathcal{U}$. Se $(x_i)_{i\in I}$ è una rete di Cauchy in B, allora è di Cauchy anche in $(X,\mathcal{U})$. Essendo $(X,\mathcal{U})$ completo, allora $(x_i)_{i\in I}$ è convergente in X. Se $x \in X$ è un suo limite, allora $x \in \overline{B}$: $x \in B$ perchè B è chiuso. □

Teorema 2.19. *Siano $(X,\mathcal{U_X})$, $(Y,\mathcal{U_Y})$ spazi uniformi e A un sottinsieme di X denso in X per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U_X})$. Se $(Y,\mathcal{U_Y})$ è completo e $(\mathcal{T}(\mathcal{U_Y}))$ è di Hausdorff, allora ogni applicazione $f : A \to Y$ uniformemente continua si estende in modo univoco a $\overline{f} : X \to Y$.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{P}_X$ e $\mathcal{P}_Y$ due famiglie filtranti di pseudometriche che definiscono $\mathcal{U}_X$ e $\mathcal{U}_Y$. Sia $x \in X = \overline{A}$, allora esiste una rete $(\mathrm{x}_i)_{i\in I}$ in A convergente a x. Questo perchè $\forall U \in \mathcal{F}(x)$, $\mathrm{U}\cap A \neq \emptyset$, quindi $\forall U \in \mathcal{F}(x)$, esiste $x_U \in U \cap A$. Essendo $\mathcal{F}(x)$ filtrante rispetto alla relazione d'ordine $U \leqslant V \iff U \supseteq V$, allora $U \to x_U$ è una rete in A che converge a x.
Per la proposizione 2.16, la rete è di Cauchy rispetto a $\mathcal{U}_x$. Dunque la rete $(f(x_i))_{i\in I}$ in Y è di Cauchy rispetto a $\mathcal{U}_Y$. Essendo $(Y,\mathcal{U}_Y)$ completo e $\mathcal{T}(\mathcal{U}_Y)$ di Hausdorff, la rete converge a un unico elemento di Y. Tale elemento è indipendente dalla particolare scelta di $(x_i)_{i\in I}$, quindi lo si può indicare con $\overline{f}(x)$.
E' stata così definita un'applicazione $\overline{f} : X \to Y$ che coincide con f perchè se $x \in A$ e $(x_i)_{i\in I}$ è una rete in A convergente a x, per la continuità di f, $f(x_i) \to f(x)$. Quindi $\mathrm{f(x)}=\overline{f}(x)$.
Resta da dimostrare che è uniformemente continua e che è unica.
Siano $d \in \mathcal{P}_Y$ e $\epsilon > 0$. Poichè f è uniformemente continua, $\exists \delta \in \mathcal{P}_Y$ e $r > 0$ tali che se $a, b \in A$ e $\delta(a, b) \leqslant r \implies d(f(a), f(b)) \leqslant \epsilon$.
Siano $x, y \in X$ tali che $\delta(x, y) < r$ e $(x_i)_{i\in I}$, $\quad (y_\lambda)_{\lambda\in L}$ due reti in A tali che $x_i \to x$ e $y_\lambda \to y$. Per definizione, l'insieme prodotto $I \times L$ è filtrante rispetto alla relazione $(i_1, \lambda_1) \leqslant (i_2, \lambda_2) \iff i_1 \leqslant i_2$ e $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Quindi l'applicazione $(i, \lambda) \to (x_i, y_\lambda)$ di $X \times X$ è una rete che converge a (x, y).

Per la continuita di λ, la rete $(i,\lambda) \to \lambda(x_i, y_\lambda)$ in $\mathbb{R}$ converge a $\delta(x,y)$ (che è $< r$ per ipotesi). Allora esiste $(i_0, \lambda_0) \in I \times L$ tale che $i \geqslant i_0, \lambda \geqslant \lambda_0 \implies \delta(x_i, y_\lambda) \leqslant r$. Si può ora concludere perchè $i \geqslant i_0, \lambda \geqslant \lambda_0 \implies d(f(x_i), f(y_\lambda)) \leqslant \epsilon$, dove $d(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \leqslant \epsilon$ perchè d è continua e $f(x_i) \to \overline{f}(x)$, $f(y_\lambda) \to \overline{f}(y)$ per quanto detto sopra.
Per dimostrare l'unicità, basta ricordare il principio del prolungamento delle identità: siano f, g due applicazioni continue di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff Y e A un sottinsieme di X denso in X. Allora $f(x) = g(x)\ \forall x \in A \implies f = g$. Infatti si ha $A \subseteq H = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Poiché H è chiuso e A è denso in X, necessariamente $H = X$. □

2.2 Completamenti

Teorema 2.20. *1. Se (X,d) è uno spazio pseudometrico esiste una isometria iniettiva i di (X,d) in uno spazio pseudometrico completo (X^*, d^*) tale che i(X) è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$;*

2. Se $(\hat{X}, \hat{d})$ è lo spazio metrico canonicamente associato a (X^*, d^*) e π è l'isometria canonica di (X^*, d^*) su $(\hat{X}, \hat{d})$, allora $(\hat{X}, \hat{d})$ è completo e $j = \pi \circ i$ è una isometria di (X,d) in $(\hat{X}, \hat{d})$ tale che j(X) è denso in $\hat{X}$ con la topolgia $\mathcal{T}(\hat{d})$;

3. Se (X,d) è uno spazio metrico, allora l'isometria j è iniettiva e la coppia $(j, (\hat{X}, \hat{d}))$ con le proprietà suddette è unica a meno di una isometria (iniettiva), nel senso che, se j_1 è una isometria di (X,d) nello sazio metrico completo $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ tale che $j_1(X)$ è denso in $\hat{X}_1$ con la topologia $\mathcal{T}(\hat{d}_1)$ e j_2 è una isometria di (X,d) nello spazio metrico completo $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ tali che $j_2(X)$ è denso in $\hat{X}_2$ con la topologia $\mathcal{T}(d_2)$, allora esiste un'unica isometria g di $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ su $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ tale che $j_2 = g \circ j_1$.

Dimostrazione.

1. Sia $d^* : X^* \times X^* \to \mathbb{R}$ la funzione

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \tag{2.2.1}$$

con X^* l'insieme delle successioni di Cauchy in (X,d), $x^* = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y^* = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il limite appena definito esiste finito. Infatti $\mathbb{R}$ è completo; inoltre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy in (X,d) e $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant |d(x_n, y_n) - d(y_n, y_m)| + |d(y_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \leqslant |d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)| \leqslant \epsilon + \epsilon$ quindi anche $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.
Si verifica poi che d^* è pseudometrica su X^*. Infatti $d^*(x^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$; $d(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = d(y^*, x^*)$; $d^*(x^*, z^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}(d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) = d^*(x^*, y^*) + d(y^*, z^*)$.

Sia poi $i : X \to X^*$ tale che ad ogni $x \in X$ associa la successione costante: $x \mapsto n$. i è isometria iniettiva di (X, d) in (X^*, d^*) e $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$. Infatti se $x^* = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allora $\lim_{n\in\mathbb{N}} i(x_n) = x^*$ e $d(x^*, i(x_N)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \leqslant \epsilon$. Quindi converge a x^* in $\mathcal{T}(d^*)$.
Infine resta da dimostrare che (X^*, d^*) è completo. Poiché $i(X)$ è denso in X^*, allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ tale che $d^*(x^*_n, i(x_n)) \leqslant \frac{1}{n}$, dove, come sopra, $x^* = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X, d) e $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X^*, d^*). Quindi $x^* \in X^*$. Infatti $d(x_n, x_m) = d^*(i(x_n), i(x_m)) \leqslant d^*(i(x_n), x^*_n) + d^*(x^*_n, x^*_m) + d(x^*_m, i(x_m))$. Si osservi poi che $d^*(x^*_n, x^*) \leqslant d^*(x^*_n, i(x_n)) + d^*(i(x_n), x^*)$ e che $i(x_n) \to x^*$. Allora si può concludere che la successione di Cauchy $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X^*, d^*) converge proprio a x^*: $d^*(x^*_n, x^*) \leqslant d^*(x^*_n, i(x_n)) + d^*(i(x_n), x^*) \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \epsilon$, ovvero (X^*, d^*) è completo.

2. Per definizione, sia $\hat{X} = X^*/\sim$, dove $x^* \sim y^* \Leftrightarrow d^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, con x^*, y^* definite come al punto 1. Sia poi $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{d}(\pi(x^*), \pi(y^*)) = d^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{x}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{y}$.
Allora per un ragionamento analogo a quanto visto sopra, $(\hat{X}, \hat{d})$ è completo, $j = \pi \circ i$ è isometria di (X, d) in $(\hat{X}, \hat{d})$ e $j(X)$ e denso in $\hat{X}$ con $\mathcal{T}(\hat{d})$.

3. Sia (X, d) spazio metrico. Allora j è un'isometria iniettiva e $(j, (\hat{X}, \hat{d}))$ è unica a meno di isometria. Supponiamo che esista j_1 isometria di (X, d) nello spazio metrico completo $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ tale che $j_1(X)$ è denso in $(\hat{X}_1, \mathcal{T}(\hat{d}_1))$ e j_2 isometria di (X, d) nello spazio metrico completo $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ tale che $j_2(X)$ è denso in $(\hat{X}_2, \mathcal{T}(\hat{d}_2))$. Allora esiste un'unica isometria g di $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ su $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ tale che $j_2 = g \circ j_1$. Graficamente si ha che:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & \hat{X}_1 \arrow[dl, "g"] \\ \hat{X}_2 & \end{tikzcd}$$

Si consideri ora questo secondo grafico in cui $j_2 \circ j_1^{-1} : j_1(X) \to \hat{X}_2$ si estende all'applicazione uniformemente continua $g : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ e analogamente $j_1 \circ j_2^{-1} : j_2(X) \to \hat{X}_1$ si estende all'applicazione uniformemente continua $h : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$. Graficamente si ha che:

$$
\begin{tikzcd}
\hat{X}_1 \arrow[r, "g"] & \hat{X}_2 \arrow[r, "h"] & \hat{X}_1 \\
j_2(x) \arrow[u, hook] \arrow[r, "id"] & j_2(x) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

g e h sono una l'inversa dell'altra perchè $h \circ g_{|j_1(X)} = id_{\hat{X}_1}$ e analogamente $g \circ h$ è l'identità su $\hat{X}_2$.
Infine resta da provare solo che $g : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ è un'isometria: siano $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}_1$, e sia $\lim_{n\to\infty} j_1(x_n) = \hat{x}$, $\lim_{n\to\infty} j_1(y_n) = \hat{y}$, con $x_n, y_n \in X$, dove $\lim_{n\to\infty} g(j_1(x_n))$=$\lim_{n\to\infty} j_2(x_n) = g(\hat{x})$. Allora, poiché $\hat{d_1}$, $\hat{d_2}$ sono continue e j_1, j_2 sono isometrie,

$$
\begin{aligned}
\hat{d_2}(g(\hat{x}), g(\hat{y})) &= \lim_{n\to\infty} \hat{d_2}(j_2(x_n), j_2(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \hat{d_1}(j_1(x_n), j_1(y_n)) = \hat{d_1}(\hat{x}, \hat{y}).
\end{aligned}
$$

$\square$

Definizione 2.21. Se (X, d) è uno spazio pseudometrico, ogni coppia $(i, (X^*, d^*))$ si dice completamento di (X, d) se (X^*, d^*) è uno spazio pseudometrico completo e i una isometria iniettiva di (X, d) in (X^*, d^*) tale che $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$.

Esempio 2.22. Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali ed e la metrica euclidea definita su essi. Sia poi d la metrica definita da $d(x, y) = |arctg(x) - arctg(y)|$. d ed e sono topologicamente equivalenti, ma non uniformemente perchè non definiscono la stessa uniformità. Infatti $(\mathbb{R}, e)$ è uno spazio metrico completo per il Teorema di Cauchy, invece lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ non è completo. Questo perchè se $x \in \mathbb{R}$ e considero l'isometria $x \to arctg(x)$ che va da $(\mathbb{R}, d)$ sullo spazio metrico $((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), e)$, quest'ultimo non è uno spazio completo. Per convincersene basti considerare la successione $(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ che è di Cauchy ma non convergente in esso. Essendo poi che ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio uniforme completo, è completo in esso, allora $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], e)$ è completo e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è denso in esso, quindi si riesce a trovare un completamendo di $(\mathbb{R}, d)$: $(arctg, ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], e))$.

2.3 Insiemi convessi e seminorme

Definizione 2.23. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Un sottinsieme A di X dicesi convesso se $\forall \mathrm{x}_1, x_2 \in A, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$.

Definizione 2.24. Se A e B sono sottinsiemi di X si dice che A assorbe B se esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tale che $\lambda B \subseteq A$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leqslant \lambda_0$. Se A sottinsieme di X assorbe ogni punto di X, allora si dice che A è assorbente. Ovvero se per ogni $x \in X$ esiste $\lambda(x) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, tale che $|\lambda| \leqslant \lambda(x)$ $\Rightarrow \lambda x \in A$, allora A è assorbente.

Definizione 2.25. Un sottinsieme A di X è equilibrato se $|\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \lambda A \subseteq A$.

Definizione 2.26. Una seminorma su X è un'applicazione $p : X \to \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha:

1. p(x+y)$\leqslant$ p(x)+p(y);
2. $p(\lambda x)$=$|\lambda|p(x)$ (quindi p(0)=0).

Ovvero p è subadditiva e assolutamente omogenea di grado 1.

Se inoltre si ha $p(0) = 0 \implies x = 0$ alllora p è norma su X e si indica con $\| \cdot \|$.

Proposizione 2.27. *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ o su $\mathbb{R}$. Se p è una seminorma su X e $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, gli insiemi $\{x \in X : p(x) < \epsilon\}$, $\{x \in X : p(x) \leqslant \epsilon\}$ sono convessi, equilibrati, assorbenti. Viceversa se U è un sottinsieme di X convesso, equilibrato e assorbente, allora la funzione $p_U(x)$=$inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0, x \in \lambda U\}$ è una seminorma su X e vale $\{x \in X : p_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x \in X : p_U(x) \leqslant 1\}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che se p è una seminorma su X, se $d_p(x, y) = p(x-y)$ per ogni $x, y \in X$, allora d_p è una pseudometrica su X e $\forall x, y, z \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti proprietà:

1. $d_p(x, y)$=$d_p(x + z, y + z)$, ovvero d è invariante per traslazioni;
2. $d_p(\lambda x, \lambda y)$=$|\lambda| d_p(x, y)$.

Questa pseudometrica definisce una uniformità e una topologia su X: l'uniformità e la topologia definite dalla seminorma p su X.
Viceversa se d è una pseudometrica verificante 1 e 2 appena date, allora se $p_d(x) = d(x, 0)$, p è una seminorma su X e vale $d(x, y)$=$p_d(x - y)$. $\square$

Capitolo 3

Spazi vettoriali topologici

3.1 Definizioni e proprietà generali

Definizione 3.1. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Una topologia su X si dice compatibile con la struttura di spazio vettoriale (o topologia vettoriale) se le due operazioni di spazio vettoriale:

$$\begin{array}{ccccccc} X \times X & \longrightarrow & X & \qquad & \mathbb{C} \times X & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x + y & & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x. \end{array}$$

sono continue, dove su $X \times X$ si usa la topologia prodotto.

Uno spazio vettoriale dotato di topologia vettoriale si dice spazio vettoriale topologico (SVT).

Teorema 3.2. *Un filtro $\mathcal{F}$ su uno spazio vettoriale X è il filtro degli intorni dell'origine per una topologia vettoriale su X se e solo se:*

1. $0 \in U \ \forall U \in \mathcal{F}$*;*
2. *per ogni $U \in \mathcal{F}$ esiste $V \in \mathcal{F}$ tale che $V + V \subseteq U$;*
3. $U \in \mathcal{F}$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda U \in \mathcal{F}$*;*
4. *ogni elemento di $\mathcal{F}$ è assorbente;*
5. *ogni elemento di $\mathcal{F}$ contiene qualche elemento di $\mathcal{F}$ equilibrato.*

Dimostrazione. Dimostro solo la necessità:

1. Essendo che $\emptyset \notin \mathcal{F}$, allora $0 \in U \ \forall U \in \mathcal{F}$.
2. $(x, y) \mapsto x + y$ è un'applicazione continua di $X \times X$ in X, quindi $\forall U \in \mathcal{F}$ esistono $V_1, V_2 \in \mathcal{F}$ tali che $V_1, V_2 \subseteq U$. Questo perchè una base di intorni dell'origine di $X \times X$ per la topologia prodotto è $\{V_1 \times V_2 : V_1, V_2 \in \mathcal{F}\}$. Chiamato $V := V_1 \cap V_2$, si ha $V + V \subseteq U$.

3. L'applicazione $x \to \frac{1}{\lambda}$ è continua nell'origine in $X \times X$ a meno di scegliere $\lambda = 0$.

4. Per ogni $x \in E$, l'applicazione $\lambda \to \lambda x$ di $\mathbb{C}$ in X è continua perchè si ottiene componendo $\lambda \to (\lambda, x)$ di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C} \times X$ con $(\lambda, x) \to \lambda x$ di $\mathbb{C} \times X$ in X che sono entrambe applicazioni continue. Allora per ogni $U \in \mathcal{F}$ esiste $\lambda(x) > 0$ tale che $|\lambda| \leqslant \lambda(x) \implies \lambda x \in U$.

5. Sempre per la continuità delle applicazioni del punto 4, segue che $\forall U \in \mathcal{F}$, esistono $\lambda_0 > 0, W \in \mathcal{F}$ tali che $|\lambda| \leqslant \lambda_0, x \in W \implies \lambda x \in U$. Quindi $|\lambda| \leqslant \lambda_0 \implies \lambda W \subseteq U$, con $\bigcup_{|\lambda \leqslant \lambda_0} \lambda W \subseteq U$. Posto $V = \bigcup_{|\lambda \leqslant \lambda_0} \lambda W$, allora la tesi è verificata perchè V è equilibrato.

$\square$

Dall'ultimo punto della dimostrazione si deduce che l'insieme degli intorni equilibrati dell'origine è una base di intorni dell'origine di uno spazio vettoriale topologico.

Proposizione 3.3. *Uno SVT è di Housdorff se e solo se per ogni $x \in X, x \neq 0$, esiste un intorno dell'origine in X che non contiene x.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) E' vero per definizione di SVT di Hausdorff.
($\Leftarrow$) Se $x, y \in X$, $x \neq y$, quindi $x - y \neq 0$, per ipotesi esiste un intorno U di 0 in X tale che $x - y \notin \mathcal{U}$. Sia V un intorno equilibrato dell'origine in X tale che $V + V \subseteq U$. Allora $-V \subseteq V$, quindi $V - V \subseteq U$. Sia $(x+V) \cap (y+V) = \emptyset$. Suppongo per assurdo $x', y' \in V$ tali che $x+x' = y+y'$, $x - y = y' - x' \in V - V \subseteq U$, ma è assurdo perche $x - y \notin U$. $\square$

Proposizione 3.4. *Siano X uno SVT e M un sottospazio vettoriale di X. Lo spazio quoziente X/M è di Hausdorff se e solo se M è chiuso in X.*

Dimostrazione. Il completamento dell'origine in X/M è $\pi(\complement M)$, con π la proiezione canonica di X su X/M. Essendo che π è continua e aperta, allora $\pi(\complement M)$ è aperta in X/M se e solo se $\complement M$ è aperto in X. Ovvero se e solo se M è chiuso in X.
Si può dunque concludere perchè uno SVT è di Hausdorff se e solo se $\{0\}$ è chiuso in X. Infatti se $\{0\}$ è chiuso in X e $x \in X \setminus \{0\}$, allora esiste un intorno di x che non contiene l'origine. Quindi X è di Hausdorff per la proposizione precedente. Viceversa se X è di Hausdorff e $x \in X \setminus \{0\}$ esiste un intorno di x che non contiene l'origine, quindi $X \setminus \{0\}$ è aperto e $\{0\}$ è chiuso in X. $\square$

3.2 Pseudo-seminorme

Definizione 3.5. Se X è uno spazio vettoriale, una pseudo-seminorma su X è un'applicazione $x \to |x|$ di X in $\mathbb{R}$ tale che $\forall x, y \in X$ valgono

1. $|\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow |\lambda x| \leqslant |x|$;
2. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;
3. $|0| = 0$.

Se inoltre $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$, allora $x \to |x|$ dicesi una pseudo-norma.

Lemma 3.6. *Sia $(V_n)_{n\in\mathbb{R}}$ una successione di sottinsiemi equilibrati di uno spazio vettoriale X tale che $V_{n+1}+V_{n+1} \subseteq V_n$. Esiste una pseudo-seminorma $x \to |x|$ su X tale che $\{x \in X : |x| < \frac{1}{2^n}\} \subseteq V_n \subseteq \{x \in X : |x| \leqslant \frac{1}{2^n}\}$.*

Dimostrazione. Per ogni parte finita $I \neq \emptyset$ di $\mathbb{N}$, sia $V_I = \sum_{i\in I} V_i$ e la funzione $x \to |x|$ di X in $[0,1]$ così definita:

$$\begin{cases} 1 & x \notin V_I \\ inf\{\sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} : I \text{ parte finita non vuota di } \mathbb{N} \text{ tale che } x \in V_I\} & \text{x} \in V_I \exists I \end{cases}$$

Questa funzione è una pseudo-seminorma, ovvero soddisfa le 3 condizioni della definizione precedente.

1. Ogni V_I è equilibrato, quindi la prima condizione è verificata.
2. Se I è una parte finita e non vuota di $\mathbb{N}$, poniamo $p_I = \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i}$. Se $|x| + |y| \geqslant 1$ allora ovviamente vale $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ perchè $|x+y|$ è sempre $\leqslant 1$. Sia allora $|x| + |y| < 1$. Se $\epsilon > 0$ è un numero reale tale che $|x| + |y| + 2\epsilon < 1$, allora esistono due parti finite e non vuote L, M di $\mathbb{N}$ tali che $x \in V_L, y \in V_M$, $p_L < |X| + \epsilon$, $p_M < |y| + \epsilon$. Però $p_L, p_M < 1$, quindi esiste un'unica parte finita e non vuota N di $\mathbb{N}$ tale che $p_L + p_M = p_N$. Per ipotesi $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$, quindi si ha $V_L + V_M \subseteq V_N$, dove $x + y \in V_N$. Per cui $|x+y| \leqslant p_N = p_L + p_M < |x| + |y| + 2\epsilon$. Ovvero $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
3. L'origine di E appartiene a ogni V_n, dunque $|0| = 0$.

Resta da dimostrare $\{x \in X : |x| < \frac{1}{2^n}\} \subseteq V_n \subseteq \{x \in X : |x| \leqslant \frac{1}{2^n}\}$.
Se $x \in V_n$, allora $|x| \leqslant \frac{1}{2^n}$ per come è definita la funzione $x \to |x|$. Invece sia $|x| < \frac{1}{2^n}$. Allora esiste una parte finita e non vuota I di $\mathbb{N}$ tale che $x \in V_I$ e $\sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^n}$ con $n < 0 \forall i \in I$. Quindi $V_i \subseteq V_n \quad \forall i \in I$, con $V_I \subseteq V_n, x \in V_n$. □

Teorema 3.7. *Ogni topologia vettoriale è definita da una famiglia di pseudo-seminorme (cioè dalla famiglia di pseudometriche associate a tali pseudo-seminorme) e quindi è uniformizzabile.*
Se X è uno spazio vettoriale topologico, esiste una e una sola uniformità $\mathcal{U}$ su X compatibile con la topologia di X con una base invariante per traslazioni; una base di $\mathcal{U}$ invariante per traslazioni è $\{\hat{U} : U \in \mathcal{F}(0)\}$, dove

$\hat{U} = \{(x,y) \in X \times X : x - y \in U\}$ e $\mathcal{F}(0)$ è il filtro degli intorni dell'origine in X.
$\mathcal{U}$ è l'uniformità canonica dello spazio vettoriale topologio X.

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale topologico, $\mathcal{T}$ la sua topologia e $\mathcal{F}(0)$ il filtro degli intorni dell'origine in X. Per il teorema 3.2, si ha che $\forall V \in \mathcal{F}(0), \exists (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di intorni equilibrati in X tali che $V_1 \subseteq V$, $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ se n $\geqslant 1$. Questo perchè si è visto che ogni filtro soddisfa che $\forall U \in \mathcal{F}$ esiste $V \in \mathcal{F}$ tale che $V + V \subseteq U$.
Per il lemma sopra citato, esiste quindi una pseudonorma su X, $x \to |x|_V$, tale che:
$\{x \in X : |x|_V < \frac{1}{2^n}\} \subseteq V_n \subseteq \{x \in X : |x|_V \leqslant \frac{1}{2^n}\}$.
Definiamo $\mathcal{T}'$ come la topologia su X definita dalla famiglia di pseudo-seminorme $(|\cdot|_V)_{V\in\mathcal{F}(0)}$, cioe la topologia su X definita dalla famiglia $(d_V)_{V\in\mathcal{F}(0)}$ di pseudometriche invarianti per traslazioni, con $d_V(x,y) = |x-y|_V$.
Allora $(\{x \in X : |x|_v < \frac{1}{2^n}\})_{n\in\mathbb{N},v\in\mathcal{F}(0)}$, oppure $(\{x \in X : |x|_v \leqslant \frac{1}{2^n}\})_{n\in\mathbb{N},v\in\mathcal{F}(0)}$ sono basi di intorni dell'origine in X per $\mathcal{T}'$. Da esse, per traslazione del vettore x, si ottengono due basi di intorni di un punto generico $x \in X$.
Allora, per come è stata definita la pseudonorma $x \to |x|_V$, il filtro degli intorni dell'origine di X, quindi di ogni punto di X, è lo stesso per $\mathcal{T}$ e per $\mathcal{T}'$. Quindi $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
Allora la topologia $\mathcal{T}$ di X è definita dalla famiglia $(|\cdot|)_{V\in\mathcal{F}(0)}$ di pseudo-seminorme e quindi è uniformizzabile.
Analogamente a quanto detto sopra, $(\{(x,y) \in X\times X : |x-y|_V < \frac{1}{2^n}\})_{n\in\mathbb{N},V\in\mathcal{F}(0)}$ o $(\{(x,y) \in X\times X : |x-y|_V \leqslant \frac{1}{2^n}\})_{n\in\mathbb{N},V\in\mathcal{F}(0)}$ sono una base dell'uniformità che chiamiamo $\mathcal{U}$. Allora, sempre per come è stato definito $x \to |x|_V$, segue che $(\{(x,y) \in X \times X : |x-y|_V < \frac{1}{2^n}\}) \subseteq (\{(x,y) \in X \times X : x - y \in V_n\} \subseteq \{(x,y) \in X \times X : |x-y|_v \leqslant \frac{1}{2^n}\}$, quindi una base dell'uniformita $\mathcal{U}$ è anche $\mathcal{B} = \{\hat{U} : U \in \mathcal{F}(0)\}$, dove $\hat{U} = \{(x,y) \in X \times X : x - y \in U\}$ e $\mathcal{F}(0)$ è il filtro degli intorni dell'origine in X. $\mathcal{B}$, e quindi ogni suo elemento $\hat{U}$, è invariante per traslazioni.
Resta da verificare l'unicità, ovvero che se esiste $\mathcal{U}_1$ uniformità su X compatibile con $\mathcal{T}$ che ha una base $\mathcal{B}_1$ invariante per traslazioni, allora $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$.
Infatti, essendo che $\mathcal{U}_1$ è compatibile con $\mathcal{T}$, per ogni $B \in \mathcal{B}_1$, definisco $B(0) = \{y \in X : (y,0) \in B\}$. Di conseguenza $(B(0))_{B\in\mathcal{B}_1}$ è base di $\mathcal{F}(0)$ ed essendo $\mathcal{B}_1$ invariante per traslazioni, si ha
$B(0) = \{x - y : x, y \in X, (x-y, 0) \in B\} = \{x - y : (x,y) \in B\}$.
Si può allora concludere che $\{\hat{B}(0) : B \in \mathcal{B}_1\}$ è una base di $\mathcal{U}$, con $\hat{B}(0) = \{(x,y) \in E \times E : x - y \in B(0)\} = B$, quindi $\mathcal{B}_1$ è base anche di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$. $\square$

Osservazione 3.8. *Dicendo che uno spazio vettoriale topologico X è completo si intende che lo spazio uniforme $(X, \mathcal{U}_X)$ è completo, con $\mathcal{U}_X$ l'uniformità canonica di X.*

Dichiarare che un filtro su X, o che una rete in X, è di Cauchy si intende che è di Cauchy rispetto all'uniformità canonica $\mathcal{U}_X$.

Proposizione 3.9. *Siano X uno SVT e M un sottospazio vettoriale di X. Se X è pseudometrizzabile, tale è lo spazio quoziente X/M; se la topologia di X è definita dalla pseudo-seminorma $x \to |x|$, allora*

$$\hat{x} \to |\hat{x}| = \inf_{x \in \hat{X}} |x|, \quad \hat{x} = x + M \tag{3.2.1}$$

è pseudo-seminorma su X/M definente la topologia di X/M. Se X è pseudometrizzabile e completo, tale è lo spazio quoziente X/M.

Dimostrazione. Sia X pseudometrizzabile e $x \to |x|$ una pseudo-seminorma che definisce la topologia di X. E' necessario verificare che $\hat{x} \to |\hat{x}| = \inf_{x \in \hat{X}} |x|$ soddisfa le tre condizioni della definizione 3.5.

1. Se $|\lambda| \leqslant 1$, allora $|\lambda \hat{x}| \leqslant |\lambda||\hat{x}| = |\lambda|| \inf_{x \in \hat{X}} |x|| \leqslant |\hat{x}|$.

2. Dati $\hat{x}, \hat{y} \in X/M$, $\forall \epsilon > 0$ esistono $x \in \hat{x}, y \in \hat{y}$ tali che $|x| < |\hat{x}| + \epsilon, |y| < |\hat{y}| + \epsilon$, quindi $|\hat{x} + \hat{y}| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y| \leqslant |\hat{x}| + |\hat{y}| + 2\epsilon$.

3. Ovviamente $|0| = \inf_{x \in \hat{X}} |x| = 0$.

Ora, $\forall n \in \mathbb{N}$, siano $V_n = \{x \in X : |x| < \frac{1}{n}\}$ e $\hat{V_n} = \{\hat{x} \in X/M : |\hat{x}| < \frac{1}{n}\}$. Allora $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una base degli intorni dell'origine in X. Detta π la proiezione canonica di X su X/M, $(\pi(V_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è una base di intorni dell'origine di X/M.
Se $\pi(V_n) = \hat{V_n}$, $x \to |\hat{x}|$ definisce la topologia di X/M, quindi X/M è pseudometrizzabile. Dimostriamolo: se $x \in V_n$, cioè $|x| < \frac{1}{n}$, allora $|\hat{x}| < \frac{1}{n}$, ovvero $\hat{x} \in \hat{V}$, dove $\pi(V_n) \subseteq \hat{V_n}$ perchè $\hat{x} = \pi(x)$. Se invece $\hat{x} \in \hat{V_n}$, cioè se $|\hat{x}| < \frac{1}{n}$, allora esiste $x \in \hat{x}$ tale che $|x| < \frac{1}{n}$. Quindi $x \in V_n$ e $\hat{V_n} \subseteq \pi(V_n)$.
Resta da verificare che se X è pseudometrizzabile e completo, allora X/M è completo. Sia $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di Cauchy in X/M, esiste una sottosuccessione $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $|\hat{x}_{n_{k+1}} - \hat{x}_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$. $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è definita per induzione nel seguente modo: n_1 è il più piccolo numero naturale tale che $n, m \geqslant n_1 \implies |\hat{x}_n - \hat{x}_m| < \frac{1}{2}$, n_{k+1} è il più piccolo numero naturale maggiore di n_k tale che $n, m \geqslant n_{k+1} \implies |\hat{x}_n - \hat{x}_m| < \frac{1}{2^{k+1}}$. Allora $\forall k \in \mathbb{N}$, esiste $y_k \in \hat{x}_{n_{k+1}} - \hat{x}_{n_k}$ tale che $|y_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$. Sia $x_{n_1} \in \hat{x}_{n_1}$ arbitrario e $x_{n_k} = x_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} y_i \quad \forall k \geqslant 2$. Allora $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in X (quindi converge a qualche $x \in X$) perchè $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1$. Per la continuità di π, $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge in X/M. Ma $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in X/M, implica che anche $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in X/M. Quindi X/M è completo. □

Definizione 3.10. Se X è uno spazio topologico, ogni coppia (i, X^*), dove X^* è uno spazio vettoriale topologico completo e i un isomorfismo di X in X^* tale che $i(X)$ è denso in X^* dicesi un completamento di X.

Ricordando il teorema 2.20, si può enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.11. *Ogni spazio vettoriale topologico ammette un completamento.*
Uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff X ha un unico completamento (i, X^*) *con* X^* *di Hausdorff a meno di isomorfismo. Ovvero se* $(i_1, X_1^*), (i_2, X_2^*)$ *sono completamenti di X, con* X_1^* *e* X_2^* *spazi di Hausdorff, esiste un isomorfismo g di* X_1^* *su* X_2^* *tale che* $i_2 = g \circ i_1$.

Teorema 3.12. *Ogni SVT di Hausdorff X di dimensione finita n è isomorfo a* $\mathbb{C}^n$. *Quindi se* $(a_1, ..., a_n)$ *è una base dello spazio vettoriale X, l'isomorfismo algebrico* $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 a_1 + ... + x_n a_n$ *di* C^n *su X è anche un omeomorfismo e quindi è un isomorfismo di spazio vettoriale topologico.*
Ogni applicazione definita in uno SVT di Housdorff di dimensione finita a valori in uno SVT è continua.

3.3 Spazi seminormati e normati e loro completamenti. Spazi di Banach.

Definizione 3.13. Uno spazio vettoriale X su cui è assegnata una seminorma p è detto uno spazio seminormato ed è indicato con (X, p).

Osservazione 3.14. *Dato (X,p), consideriamo lo spazio vettoriale quoziente* $\bar{X} = X/\ker p$, *con* $\ker p = \{x \in X : p(x) = 0\}$. *Fissato* $x \in X$, *p ha lo stesso valore in ogni punto di* $\pi(x) = x + \ker p$. *Infatti se* $y \in \ker p$, *si ha* $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) = p(x)$ *e* $p(x) = p(x+y-y) \leqslant p(x+y)+p(y) = p(x+y)$. *Allora* $\forall x \in X$, $\bar{p}(\pi(x)) = p(x)$. *Di conseguenza* $\bar{x}$ *è una norma su* $\bar{X}$. *Infatti* $\bar{p}(\pi(x)) = 0 \iff p(x) = 0 \iff x = 0$.
Lo spazio normato $(\bar{X}, \bar{p})$ *è canonicamente associato allo spazio seminormato (X,p).*

Definizione 3.15. Come già sappiamo, ad ogni seminorma p su uno spazio vettoriale X resta associata una pseudometrica d_p su X ponendo $d_p(x, y) = p(x - y)$.
Questa pseudometrica definise l'uniformità e la topologia definita dalla seminorma p su X.

Definizione 3.16. Indichiamo la topologia $\mathcal{T}(p)$ definita su X dalla seminorma p come topologia vettoriale (quindi uno spazio seminormato ha una struttura di spazio vettoriale topologico).

Definizione 3.17. Uno spazio normato (X, p), completo rispetto all'uniformità $\mathcal{U}(p)$ definita da p, è detto spazio di Banach.

Il seguente teorema mostra che il completamento di uno spazio seminormato è seminormato.

Teorema 3.18. *1. Se (X,p) è uno spazio seminormato, esiste un isomorfismo i di (X,p) in uno spazio seminormato completo* (X^*, p^*) *tale che i(X) è denso in* X^* *con la topologia* $\mathcal{T}(p^*)$*. Per ogni applicazione lineare continua f di (X,p) in uno spazio normato completo* (F, p_F) *esiste una e una sola applicazione lineare continua* f^* *di* (X^*, p^*) *in* (Y, p_y) *tale che* $f = f^* \circ i$*.*

2. Se $(\hat{X}, \hat{p})$ *è lo spazio normato canonicamente associato allo spazio seminormato* (X^*, p^*) *e* π *è l'isometria canonica di* (X^*, p^*) *su* $(\hat{X}, \hat{p})$*, allora* $(\hat{X}, \hat{p})$ *è completo e* $j = \pi \circ i$ *è un'isometria di (X,p) in* $(\hat{X}, \hat{p})$ *tale che j(X) è denso in* $\hat{X}$ *con la topologia* $\mathcal{T}(\hat{p})$*.*

3. Se (X,p) è uno spazio normato, allora l'isometria lineare j è iniettiva, cioè j è un isomorfismo isometrico e la coppia $(j, (\hat{X}, \hat{p}))$ *con le proprietà sopra dette è unica a meno di un monomorfismo isometrico. Ovvero se* j_s*, s=1,2, è un monomorfismo di* (X, p) *nello spazio normato completo* $(\hat{X}_s, \hat{p_s})$ *tale che* $j_s(X)$ *è denso in* $\hat{X}_s$ *con la topologia* $\mathcal{T}(\hat{p_s})$ *tale che* $j_s(X)$ *è denso in* $\hat{X}_s$ *con la topologia* $\mathcal{T}(\hat{p_s})$*, allora esiste un isomorfismo g di* $(\hat{X}_1, \hat{p_1})$ *su* $(\hat{X}_2, \hat{p_2})$ *tale che* $j_2 = g \circ j_1$*.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del toerema 2.20 □

Definizione 3.19. Se (X, p) è uno spazio seminormato, ogni coppia $(i, (X^*, p^*))$, con (X^*, p^*) spazio semiormato completo e i isomorfismo isometrico di (X,p) in (X^*, p^*) tale che $i(X)$ sia denso in (x^*) con la topologia $\mathcal{T}(p^*)$ dicesi un completamento di (X, p).

Osservazione 3.20. *Dal teorema precedente, segue che ogni spazio seminormato* (X, p) *ha completamenti e se* (X, p) *è spazio normato, esiste unico a meno di isomorfismo isometrico, un completamento* $(j, (\hat{X}, \hat{p}))$ *con* $(\hat{X}, \hat{p})$ *spazio normato.*

Definizione 3.21. Uno spazio vettoriale topologico è detto seminormabile se la sua topologia può essere definita da una seminorma.

Ad esempio $\mathbb{C}$ spazio vettoriale su se stesso dotato della topologia usuale è normabile: la topologia usuale di $\mathbb{C}$ è definita dalla norma $x \to |x| =$ modulo di x.

Proposizione 3.22. *Siano X uno SVT e M un sottospazio vettoriale di X. Se X è seminormabile, tale è lo spazio quoziente X/M; se la topologia di X è definita dalla seminorma p, allora*

$$\hat{x} \to \hat{p}(\hat{x}) = \inf_{x \in \hat{X}} p(x), \quad \hat{x} = x + M \tag{3.3.1}$$

è una norma su X/M definente la topologia su X/M. Se X è seminormabile e completo, tale è lo spazio quoziente X/M.

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del teorema 3.9. □

3.4 Esempi di spazi di Banach

Esempio 3.23. Spazi normati di dimensione finita.
Questi spazi sono completi perchè per il teorema 3.12, ogni SVT di Hausdorff di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Allora sono spazi di Banach.
Sono anche localmente compatti se li guardiamo come spazi topologici. Però ogni SVT localmente compatto è di dimensione finita, quindi è compatto in ogni sottoinsieme limitato.

Esempio 3.24. Spazio delle funzioni continue su un compatto.
Sia K spazio topologico compatto e $C(K)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue di K in $\mathbb{C}$ dotato della norma $f \mapsto \|f\|_0 = sup_{x\in K}|f(x)|$ con $\|f\|_0 \in \mathbb{R}$.
Una sucessione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f in $C(K) \iff \forall\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n \geqslant n_0 \implies sup_{x\in K}|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$. Ovvero la sucessione converge uniformemente a K. La topologia definita dalla norma $\|\cdot\|_0$ è la topologia della convergenza uniforme su K.
$C(K)$ è completo. Infatti sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $C(K)$. Allora per $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n, m \geqslant n_0 \implies sup_{x\in K}|f_n(x)-f_m(x)| \leqslant \epsilon$. Quindi $\forall x \in K, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi converge in $\mathbb{C}$ perchè $\mathbb{C}$ è completo. Cioè esiste $f(x) \in \mathbb{C}$ tale che $lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| = 0$.
Ma $|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|$, quindi $n \geqslant n_o \implies \sup_{x\in K}|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$, ovvero la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla funzione $f : x \mapsto f(x)$ uniformemente su K.
Resta allora solo da dimostrare che se X è uno spazio topologico e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni di X in $\mathbb{C}$ che converge uniformemente alla funzione $f : X \mapsto \mathbb{C}$, allora le funzioni f_n e f sono continue.
Infatti fissato $x_0 \in X$, f è continua in x_0 perchè $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in X$ si ha $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$. Sia poi $\epsilon > 0$, essendo che f_n converge a f uniformemente in X, si può porre n tale che $|f(y) - f_n(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$. Per la continuità di f_n in x_0 esiste un intorno V di x_0 tale che $x \in V \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$. Dunque $x \in V \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$. Ovvero f è continua in x_0.

3.5 Topologia definita da una famiglia di seminorme

Definizione 3.25. Sia X spazio vettoriale. Una topologia localmente convessa su X è una topologia vettoriale su X tale che, per essa, l'origine ha una base di intorni convessi.
Uno spazio vettoriale topologico X è localmente convesso (SLC) se è di Hausdorff e la sua topologia è localmente convessa.

Proposizione 3.26. *Una base $\mathcal{B}$ per un filtro su uno spazio vettoriale X costituita da insiemi convessi, equilibrati, assorbenti è una base del filtro degli* *intorni dell'origine per una topologia vettoriale su* X *se e solo se* $\forall U \in \mathcal{B}$ *e* $\forall \lambda > 0$ *esiste* $V \in \mathcal{B}$ *tale che* $V \subseteq \lambda U$.

Definizione 3.27. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di seminorme su uno spazio vettoriale X. La topologia e l'uniformità su X definita dalla famiglia $\{d_p : p \in \mathcal{P}\}$ di pseudometriche, dove $d_p(x, y) = p(x - y)$, si dicono rispettivamente la topologia e l'uniformità definite dalla famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme.

Teorema 3.28. *Una topologia su uno spazio vettoriale è localmente convessa se e solo se è definita da una famiglia di seminorme.*

Dimostrazione. Una prebase di intorni dell'origine in X per la topologia definita dalla famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme è l'insieme delle p-sfere aperte $\{x \in X : p(x) < r\}$, $p \in \mathcal{P}$, $r > 0$, oppure l'insieme delle p-sfere chiuse $\{x \in X : p(x) \leqslant r\}$, $p \in \mathcal{P}, r > 0$ e che una prebase di tale uniformità è l'insieme delle parti di $X \times X$ rispettivamente $\{(x, y) \in X \times X : p(x - y) < r\}$ e $\{(x, y) \in X \times X : p(x - y) \leqslant r\}$. (Queste prebasi sono basi se la famiglia di seminorme è filtrante rispetto alla relazione d'ordine $p_1 \leqslant p_2 \iff p_1(x) \leqslant p_2(x) \quad \forall x \in X$).
Per la proposizione 3.26, la topologia definita da una famiglia di seminorme è una topologia localmente convessa (è la più piccola topologia vettoriale per cui è continua ogni seminorma $p \in \mathcal{P}$).
Viceversa se X è spazio localmente convesso, e $\mathcal{B}$ la base di intorni dell'origine di X costituita da tutti gli intorni dell'origine di X convessi ed equilibrati, allora a ogni $U \in B$ è associata una semi-norma p_U su X tale che $\{x \in X : p_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x \in X : p_U(x) \leqslant 1\}$. Essendo che $\mathcal{B}$ è base di un filtro, se $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, esiste $B_3 \in \mathcal{B}$ tale che $U_1 \cap U_2 \supseteq U_3$, con $p_{U_1} \leqslant p_{U_3}, p_{U_2} \leqslant p_{U_3}$, quindi la famiglia $\{p_U : U \in \mathcal{B}\}$ di seminorme è filtrante.
Se $U \in \mathcal{B}$ e ϵ un numero reale positivo, allora $\{x \in X : p_U(x) < \epsilon\} = \{x \in X : p_U(x) < 1\} \subseteq \epsilon U \subseteq \epsilon\{x \in X : p_U(x) \leqslant 1\} \subseteq \{x \in X : p_U(x) \leqslant X\}$. Quindi la topologia su X definita dalla famiglia $\{p_U : U \in \mathcal{B}\}$ di seminorme coincide con la topologia di X. $\square$

Proposizione 3.29. *Siano* X *uno SVT e* M *un sottospazio vettoriale di* X. *Se la topologia di* X *è localmente convessa, tale è la topologia quoziente su* X/M*; se la topologia di* X *è definita dalla famiglia di seminorme* $\mathcal{P}$*, allora posto per ogni* $p \in \mathcal{P}$

$$\hat{p}(\hat{x}) = \inf_{x \in \hat{X}} p(x), \quad \hat{x} = x + M, \tag{3.5.1}$$

$\hat{\mathcal{P}} = \{\hat{p} : p \in \mathcal{P}\}$ *è una famiglia di seminorme su* X/M *definente la topologia quoziente.*

Dimostrazione. X/M è localmente convessa se lo è anche X. Infatti: se $\mathcal{B}$ è una base di intorni convessi dell'origine in X e π è la proiezione canonica di

X su X/M, allora $\{\pi\{V\} : V \in \mathcal{B}\}$ è base di intorni convessi dell'origine in X/M. Per la proposizione 3.22, $\hat{p}$ è una seminorma su X/M se p è seminorma su X. Una prebase di intorni dell'origine in X per la topologia definita da una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme è $\{S_{p,n} : p \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}\}$, con $S_{p,n} = \{x \in X : p(x) < \frac{1}{n}\}$. Analogamente una base di intorni dell'origine in X/M per la topologia definita dalla famiglia $\hat{\mathcal{P}} = \{\hat{p} : p \in \mathcal{P}\}$ di seminorme è $\{\hat{S}_{\hat{p},n} : \hat{p} \in \hat{\mathcal{P}}, n \in \mathbb{N}\}$, con $\hat{S}_{\hat{p},n} = \{\hat{x} \in X/M : \hat{p}(\hat{x}) < \frac{1}{n}\}$. Essendo che $\pi(S_{p,n}) = \hat{S}_{\hat{p},n}$, allora la topologia definita su X/M da $\hat{\mathcal{P}}$ è la topologia quoziente perchè $\{\pi(S_{p,n}) : p \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}\}$ è una prebase di intorni dell'origine in X/M per la topologia quoziente. $\square$

Proposizione 3.30. *Siano X, Y spazi topologici con topologie localmente convesse, $\mathcal{P}$ una famiglia di seminorme definente la topologia di X e $\mathcal{Q}$ una famiglia di seminorme definente la topologia di Y. Un'applicazione lineare $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $q \in \mathcal{Q}$ esistono un numero reale $c > 0$ e una parte finita $\{p_1, ..., p_n\}$ di $\mathcal{P}$ tali che*

$$q(f(x)) \leqslant c\ sup\{p_1(x), ..., p_n(x)\} \quad \forall x \in X. \tag{3.5.2}$$

Dunque se $\mathcal{P}$ è filtrante, allora $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $q \in \mathcal{Q}$ esistono un numero reale $c > 0$ e una seminorma $p \in \mathcal{P}$ tali che

$$q(f(x)) \leqslant c\, p(x) \quad \forall x \in X. \tag{3.5.3}$$

Dimostrazione. L'applicazione lineare f è continua se e solo se è continua nell'origine. Se $p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}$ e se δ, ϵ sono numeri reali positivi, siano $V_{p,\delta} = \{x \in X : p(x) < \delta\}$ e $U_{q,\epsilon} = \{y \in Y : q(y) < \epsilon\}$.
Una prebase di intorni dell'origine in X è $\{V_{\beta,\delta} : p \in \mathcal{P}, \delta \in \mathbb{R}^+\ \{0\}\}$ e una prebase di intorni dell'origine in Y è $\{U_{q,\epsilon} : q \in \mathcal{Q}, \epsilon \in \mathbb{R}^+\ \{0\}\}$. Tali prebasi sono basi se $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono filtranti.
Sia f continua nell'origine, allora $\forall q \in \mathcal{Q}$ esistono una parte finita $\{p_1, ...p_n\}$ di $\mathcal{P}$ e $\delta_1, ..., \delta_n$ reali positivi tali che $f(V_{p_1,\delta_1} \cap ... \cap V_{p_n,\delta_n}) \subseteq U_{q,1}$. Ovvero tali che $p_i(x) \leqslant \delta_i$ con $i = 1, ..., n \implies q(f(x)) \leqslant 1$, dove se si pone $\delta = inf\{\delta_1, ...\delta_n\}$, si ottiene $p_i(x) \leqslant \delta$ con $i = 1, ..., n \implies q(f(x)) \leqslant 1$.
Allora l'equazione 3.5.2 è verificata con $c = \frac{1}{\delta}$. Infatti:
Se $x \in X$ è tale che $sup\{p_1(x), ..., p_n(x)\} > 0$, allora $p_i(\delta \frac{x}{sup\{p_1(x),...,p_n(x)\}}) = \delta \frac{p_i(x)}{sup\{p_1(x),...,p_n(x)\}} \leqslant \delta$, con $q(f(\delta \frac{x}{sup\{p_1(x),...p_n(x)\}})) \leqslant 1$. Si è ottenuto dunque che $q(f(x)) \leqslant \frac{1}{\delta} sup\{p_1(x), ..., p_n(x)\}$. Se invece $sup\{p_1(x), ..., p_n(x)\} = 0$, allora l'equazione 3.5.2 è comunque verificata con $c = \frac{1}{\delta}$ perchè $sup\{p_1(x), ..., p_n(x)\} = 0$ fa sì che $q(f(\lambda x)) \leqslant 1\ \forall \lambda > 0$, con $\lambda q(f(x)) \leqslant 1\ \forall \lambda > 0$ e $q(f(x)) = 0$.
Viceversa supponiamo che per ogni $q \in \mathcal{Q}$ esistono $c > 0$ e $p_1, ..., p_n \in \mathcal{P}$ tali che valga l'equazione 3.5.2. Allora l'equazione f è continua nell'origine perchè, se ϵ è un numero reale positivo, si ha $sup\{p_1(x), ...p_n(x)\} \leqslant \frac{\epsilon}{c} \implies q(f(x)) \leqslant \epsilon$, dove $f(V_{p_1,\frac{\epsilon}{c}} \cap ... \cap V_{p_n,\frac{\epsilon}{c}}) \subseteq U_{q,\epsilon}$

$\square$

Capitolo 4

Teorema di Hahn-Banach

Definizione 4.1. Se X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, sia X_0 lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ soggiacente, ovvero che si ottiene da X restringenndo su $\mathbb{R} \times X$ la moltiplicazione per uno scalare. Una forma lineare reale su X è una forma lineare su X_0; un iperpiano reale di X è un iperiano di X_0; un sottospazio reale di X è un sottospazio di X_0.

Proposizione 4.2. *Sia X uno spazio vettoriale topologico e sia $f \in X^*$. f è continua se e solo se* $\ker f$ *è chiuso in X. Di conseguenza l'iperpiano affine $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ è chiuso se e solo se f è continua.*

Dimostrazione. Se f è continua, allora $\ker f$ è chiuso in X perchè $\ker f = f^{-1}(\{0\})$.
Viceversa se $kerf$ è chiuso in X, allora $X/kerf$ è uno SVT di Hausdorff di dimensione 1 (proposizione 3.4). Sia $f = \overline{f} \circ \pi$ la fattorizzazione usuale di f, allora $\overline{f} : X/\ker f \to \mathbb{C}$ è continua per il teorema 3.12. Quindi anche f è continua. Infine poiché $H = x_0 + \ker f$, con $x_0 \in H$, si ha che H è chiuso se e solo se $\ker f$ è chiuso, da cui segue la tesi del teorema. □

Definizione 4.3. Se X è uno spazio vettoriale topologico, lo spazio vettoriale delle forme lineari e continue su X è il duale di X ed è indicato con X'.

Teorema 4.4. TEOREMA DI HAHN-BANACH. *Se X è uno spazio vettoriale topologico, N un sottospazio affine di X e A un aperto convesso non vuoto di X disgiunto da N. Esiste un iperpiano reale (affine) chiuso H_0 di X che separa N e A, cioè tale che $N \subseteq H_0, H_0 \cap A = \emptyset$.*
Di conseguenza esiste un iperpiano (affine) chiuso H di X tale che $N \subseteq H, H \cap A = \emptyset$.

Dimostrazione. Per ipotesi sia N sottospazio affine, $N = x_0 + N'$, $N' \leqslant_{\mathbb{R}} X$. Posso sempre ricondurni a N' sottospazio vettoriale con una traslazione. Inoltre A è aperto convesso, $A \neq \emptyset$, $N \cap A = \emptyset$.

Allora $N < X$. Infatti: $0 \in N' \leqslant_{\mathbb{R}} X$, $A' := A - x_0 = \{a - x_0 : \text{a} \in A\} \neq \emptyset$ e $A' \cap N' = \emptyset$ perchè se per assurdo $a - x_0 = n'$, allora $a = x_0 + n' \in N$ che contraddice quanto detto.
Sia allora $\mathcal{M} := \{M \leqslant_{\mathbb{R}} X : M = \overline{M},\ N' \subseteq M,\ M \subseteq A' = \emptyset\}$. $M' := \overline{N'}$ è chiuso, $M \leqslant_{\mathbb{R}} X$, $N' \leqslant \overline{N'}$ e $\overline{N'} \cap A' = \emptyset$. Dunque per il lemma di Zorn esiste H_0 elemento massimale di $\mathcal{M}$. Concludo dimostrando che tale H_0 è iperpiano di X_0, ovvero che X/H_0 ha dimensione 1.
Suppongo per assurdo $dim(X/H_0) \geqslant 2$, allora esiste una funzione

$$\begin{array}{rccc} \pi : & X & \longrightarrow & X/H_0 \\ & A' & \longmapsto & \pi(A') = \{[a] : a \in A'\} \end{array}$$

Allora su E/H_0 è definita la topologia quoziente ed è un aperto convesso. Infatti: $0 \in N'$, $A' \cap N' = \emptyset$ (quindi $0 \notin A'$) e $H_0 \cap A' = \emptyset$ perchè H_0 è massimale in $\mathcal{M}$ (quindi $0 \notin \pi(A')$).
Il teorema di Hahn-Banach in dimensione 2 afferma che se A è un aperto convesso non vuoto di $\mathbb{R}^2$ non contenente l'origine, esiste una retta di $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine e disgiunta da A. Quindi se X è uno SVT di Hausdorff su $\mathbb{R}$ di dimensione $\geqslant 2$ e B è un aperto convesso di X non contenente l'origine, esiste un sottospazio vettoriale di X di dimensione 1 disgiunto da B.
Nel nostro caso dunque esiste L, $dimL = 1$ tale che $\pi(A') \cap L = \emptyset$. Infatti sia $T \leqslant X/H_0$ con $dimT = 2$. Si ha che o $T \cap \pi(A') = \emptyset$, L$\leqslant T, dimL = 1, L \cap \pi(A') = \emptyset$, oppure $T \cap \pi(A') \neq \emptyset$, quindi $T \cap \pi(A')$ è aperto convesso in T con la topologia indotta, ma $0 \notin \pi(A')$ per quanto detto sul teorema in dimensione 2. Si conclude che esiste L con le proprietà cercate. Per il teorema 3.12, L è chiuso, dunque anche $\pi^{-1}(L)$ è chiuso, $\pi^{-1}(L) \leqslant X$.

$$\begin{array}{rccc} \pi : & X_0 & \longrightarrow & X_0/H_0 \\ & W_0 & \longmapsto & L = W_0/H_0 \end{array}$$

è tale che $W_0 = \pi^{-1}(L)$, $H_0 \subset W_0 \subseteq X_0$ e $\pi^{-1}(L) \geqslant H_0$.
Ma $\pi^{-1}(L) \cap A' = \emptyset$ è assurdo perchè $\pi^{-1}(L) \in \mathcal{M}$ e $H_0 \subset \pi^{-1}(L)$. Ma H_0 è massimale. Posso concludere quindi che $dimX_0/H_0 = 1$.
Se X è $\mathbb{C}$ spazio vettoriale, $dim_{\mathbb{C}}X = d$, quindi $dim_{\mathbb{R}}X = 2d$. Se $W \leqslant_{\mathbb{C}} X$ iperpiano, $dim_{\mathbb{C}}W = d-1$, quindi $dim_{\mathbb{R}}W = 2d-2$. Se $W' \leqslant_{\mathbb{R}} X$ iperpiano, allora $dim_{\mathbb{R}}W = 2d-1$. $H = H_0 \cap iH_0$ è chiuso ed è $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale. Infatti $(a + ib)v = av + ibv, a, b \in \mathbb{R}$ e $iw = aiw - bw$.
Sia $f_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $H_0 = \ker(f_0)$ e sia g_0 tale che $g_0(v) = f_0(iv)$. Dunque:

$$\begin{array}{rcccl} g_0 : & X & \longrightarrow & X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & iv & \\ & \alpha & \longmapsto & i(\alpha v) & \end{array}$$

è $\mathbb{R}$-lineare e $ker(g_0) = iX_0$. Ovvero $H = \{x \in X : f_0(x) - if_0(ix) = 0\}$, dove sia $f_0(x)$, che $if_0(x)$ appartengono a $\mathbb{R}$. Inoltre $N' \leqslant H_0$ e $N' \leqslant iH_0$, dunque $N' \subseteq_{\mathbb{C}} H$, ma $N' \leqslant_{\mathbb{C}} X$, quindi $iN' = N' \leqslant iX$. Inoltre H_0 è disgiunto da A. Quindi come richiesto: H contiene N ed è disgiunto da A. $\square$

Per completezza, enunciamo anche la forma analitica del teorema:

Teorema 4.5. *Siano p una seminorma su uno spazio vettoriale X e M un sottospazio vettoriale di X. Se f è una forma lineare su M tale che $|f(x)| \leqslant p(x)\ \forall x \in M$, allora esiste una forma lineare $\overline{f}$ su X contenente f, cioè tale che $\overline{f}(x) = f(x)\ \forall x \in M$, e tale che $|\overline{f}(x)| \leqslant p(x)\ \forall x \in X$.*

4.1 Conseguenze del teorema di Hahn-Banach

Corollario 4.6. *Se la topologia di uno SVT X è localmente convessa e M è un sottospazio di X, per ogni forma lineare e continua f su M esiste una forma lineare e continua $\overline{f}$ su X tale che $\overline{f}(x) = f(x)\ \forall x \in X$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia filtrante di seminorme in X che definisce la topologia di X. Poichè $f : M \to \mathbb{C}$ è continua, per la proposizione 3.30 si ha che esistono $p \in \mathcal{P}$ e $c > 0$ tali che $|f(x)| \leqslant cp(x) \quad \forall x \in M$. Essendo cp una norma su X, per il Teorema di Banach in forma analitica, si ha l'esistenza di una $\overline{f} \in X^*$ tale che $\overline{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in M$ e che $|\overline{f}(x)| \leqslant cp(x) \quad \forall x \in X$. Allora, sempre per la proposizione 3.30, si ha la continuità di $\overline{f}$. □

Corollario 4.7. *Il duale di uno spazio vettoriale topologico X è non banale (cioè non si riduce all'origine) se e solo se X contiene un sottinsieme non vuoto, aperto, convesso e diverso da X.*

Dimostrazione. Se $f \in X'$, $f \neq 0$, allora $= \{x \in X : |f(x)| < 1\}$ è sottinsieme aperto, convesso e non vuoto di X diverso da X. Viceversa se A è un sottinsieme non vuoto, aperto e diverso da X, con $x_0 \notin A$, allora per il teorema di Banach esiste un iperpiano chiuso di X che contiene x_0 e disgiunto da A. Dunque per la proposizione 4.2 esiste una forma lineare e continua su X non nulla. □

Corollario 4.8. *Se X è uno spazio localmente convesso, per ogni $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, esiste $f \in X'$ tale che $f(x_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. Per la proposizione 3.3, per ipotesi X di Hausdorff e $x_0 \neq 0$, quindi esiste un intorno dell'origine A in X che non contiene x_0. Essendo la topologia di X localmente convessa, si può supporre A aperto e conveso , quindi per il teorema di Banach esiste un iperpiano chiuso di X contenente x_0 e disgiunto da A. Ma $0 \in A$, quindi tale iperpiano non contiene l'origine e ha equazione $f(x) = \alpha$, $\alpha \neq 0$ e $f \in X'$. Quindi $f(x_0) = \alpha \neq 0$. □

Corollario 4.9. *Se X è uno spazio localmente convesso e $x_1, ..., x_n$ sono elementi linearmente indipendenti di X, esistono $f_1 ... f_n \in X'$ tali che $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, con $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$.*

Dimostrazione. Sia M il sottospazio di X generato da $x_1, ..., x_n$ e siano $g_1, ...g_n$ le forme lineari su M tali che $g_i(x_j) = \delta_{ij}$. Per il teorema 3.12, le forme lineari $g_1, ...g_n$ sono continue, quindi hanno un'estensione continua a X grazie al corollario 4.6. Se $f_1, ..., f_n$ sono estensoni continue a X di $g_1, ..., g_n$, allora si ha $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. $\square$

Corollario 4.10. *Sia X uno SVT con topologia localmente convessa. Un sottospazio vettoriale M di X è denso in X se e solo se $f \in X'$, $f(x)\big|_M = 0 \implies f = 0$.*

Dimostrazione. Se M è denso in X e $f \in X'$, allora $f\big|_M = 0 \implies f = 0$ in X.
Ora M sia non denso: esiste $x_0 \in X$ tale che $x_0 \notin \overline{M}$. Sia π la proiezione canonica di X sullo spazio localmente convesso $X/\bar{M}$: per quanto visto nella dimostrazione del corollario 4.8 e 3.29, allora $\pi(x_0) \neq 0$ ed esiste $\tilde{f} \in (X/M)'$ tale che $\tilde{f}(\pi(x_0)) \neq 0$.
Posto $f = \tilde{f} \circ \pi$, si ha che f è una forma lineare e continua su X che si annulla su M senza essere la funzione costate uguale a 0. $\square$

Il teorema di Hahn-Banach è un teorema di separazione di insiemi convessi in uno SVT. Infatti afferma che se N e A sono due convessi non vuoti e disgiunti di uno SVT, di cui il primo è sottospazio affine e il secondo è aperto, esiste un iperpiano reale che li separa.
Per completezza, enunciamo due teoremi che si ricavano dal teorema di Hahn-Banach.

Teorema 4.11. *Siano A e B due sottinsiemi convessi di uno SVT. Se $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ e $\overset{\circ}{A} \cap B = \emptyset$, esiste un iperpiano reale chiuso H che separa A e B. Se A e B sono aperti, l'iperpiano H li separa strettamente.*

Teorema 4.12. *Siano A e B due sottinsiemi convessi non vuoti e disgiunti di uno SLC. Se A è chiuso e B è compatto, esiste un iperpiano reale chiuso che li separa strettamente.*

Corollario 4.13. *In uno SLC un sottinsieme convesso chiuso A coincide con l'intersezione di semispazi chiusi che lo contengono.*

Dimostrazione. Per il teorema di Hahn-Banach, essendo $\{x\}$ e A due convessi disgiunti, di cui il primo compatto e il secondo chiuso, si ha che se $x \notin A$, allora non appartiene all'intersezione di tutti i semispazi chiusi contenenti A. Quindi esiste un iperpiano reale chiuso che separa strettamente x e A. $\square$

4.2 Teoremi del grafico chiuso e della mappa aperta

Definizione 4.14. Uno spazio topologico X è detto spazio di Baire se ogni suo sottinsieme aperto non vuoto è di seconda categoria in X, cioè non è unione numerabile di insiemi con la chiusura che hanno interno vuoto.

Proposizione 4.15. *Un spazio vettoriale topologico X è uno spazio di Baire se e solo se X è di seconda categoria in sè.*

Dimostrazione. Se un aperto non vuoto A di X è di prima categoria in X, ovvero se è unione numerabile di insiemi con la chiusura priva di punti interni, a meno di traslazioni si ottiene un intorno U dell'origine di prima categoria in X. Allora X è di prima categoria in sè perchè, essendo U assorbente, si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU$. □

Teorema 4.16. TEOREMA DI BAIRE
Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Se esso è localmente compatto o se è pseudometrizzabile e completo rispetto a qualche uniformità pseudometrizzabile compatibile con $\mathcal{T}$, allora l'intersezione di ogni famiglia di aperti di X densi in X è densa in X.

Dimostrazione. Sia $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti di X densi in X. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ è denso in X: qualunque sia l'aperto $A \neq \emptyset$ di X, si ha $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n) \cap A \neq \emptyset$. Si consideri in modo arbitrario un insieme aperto non vuoto A di X, allora $\Omega_1 \cap A \neq \emptyset$, perchè Ω_1 è denso in X. Inoltre per ipotesi ogni punto di X ha una base di intorni chiusi, dunque esiste un aperto non vuoto A_1 di X tale che $\bar{A}_1 \subseteq \Omega_1 \cap A$. Analogamente esiste un aperto non vuoto A_2 di X tale che $\bar{A}_2 \subseteq \Omega_2 \cap A_1$ e così via. In modo induttivo è definita allora la seguente successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di aperti non vuoti di X:

$$\bar{A}_1 \subseteq \Omega_1 \cap A, \quad \bar{A}_n \subseteq \Omega_n \cap A_{n-1}, \quad n > 1 \tag{4.2.1}$$

Se $(X, \mathcal{T})$ è localmente compatto, si può scegliere A tale che $\bar{A}_1$ sia compatto. Allora $(\bar{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è successione di sottinsiemi chiusi non vuoti del compatto $\bar{A}_1$ tale che ogni sua sottofamiglia ha intersezione non vuota, quindi $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n \neq \emptyset$.
Se $(X, \mathcal{T})$ è pseudometrizzabile ed esiste una pseudometrica d su X che definisce $\mathcal{T}$ tale che (X, d) sia completo, si può concludere nella stessa maniera se si considera A_n come una d-sfera di raggio $\frac{1}{n}$, così la successione dei centri di queste sfere è di Cauchy in (X, d) e quindi, per la completezza di (X, d) converge e ogni suo limite necessariamente appartiene a ogni $\bar{A}_n$ e dunque anche a B. Per come è stata definita la successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allora segue che $\Omega_n \cap A \supseteq B$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n) \cap A \neq \emptyset$ perchè $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n) \cap A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\Omega_n \cap A) \supseteq B$. □

Da questo teorema allora si deduce che ogni spazio vettoriale topologico pseudometrizzabile e completo è di Baire.

Lemma 4.17. *Siano X, Y spazi vettoriali topologici, $f : X \to Y$ un'applicazione lineare, $\mathcal{F}_X(0)$ e $\mathcal{F}(0)$ il filtro degli intorni dell'origine rispettivamente in X e in Y. Allora se X è di Baire, $U \in \mathcal{F}_Y(0) \implies \overline{f^{-1}(U)} \in \mathcal{F}_X(0)$.*

Dimostrazione. Dato $U = \mathcal{F}_Y(0)$, sia $V \in \mathcal{F}_Y(0)$ tale che $V - V \subseteq U$. Si ha $\overline{f^{-1}(V)} - \overline{f^{-1}(V)} \subseteq \overline{f^{-1}(V) - f^{-1}(V)} \subseteq \overline{f^{-1}(V - V)} \subseteq \overline{f^{-1}(U)}$.
V è assorbente e f è lineare, quindi anche $f^{-1}(V)$ è assorbente. Dunque se X è di Baire, $\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(V)}} \neq \emptyset$. Se $x \in \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(V)}}$, allora $0 \in \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(V)}} - x$, quindi $\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(V)}} - x \in \mathcal{F}_X(0)$ perchè $\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(V)}} - x$ è un aperto contenente l'origine. Si può allora concludere che $\overline{f^{-1}(V)} - \overline{f^{-1}(V)} \in \mathcal{F}_X(0)$, con $\overline{f^{-1}(U)} \in \mathcal{F}_X(0)$.
□

Teorema 4.18. TEOREMA DEL GRAFICO CHIUSO
Siano X, Y spazi vettoriali topologici con Y metrizzabile e completo. Un'applicazione lineare $f : X \to Y$ è continua se e solo se sussistono le seguenti condizioni:

1. *il grafico di f è chiuso in $X \times Y$;*
2. *$U \in \mathcal{F}_Y(0) \implies \overline{f^{-1}(U)} \in \mathcal{F}_X(0)$.*

Dunque se X è di Baire e Y è metrizzabile e completo, allora $f : X \to Y$ è continua se e solo se il suo grafico è chiuso in $X \times Y$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se f è continua, allora il grafico è chiuso in $X \times X$ grazie al principio di prolungamento dell'identità menzionato anche nella dimostrazione del teorema 2.19 e $U \in \mathcal{F}_Y(0) \implies \overline{f^{-1}(U)} \in \mathcal{F}_X(0)$ discende immediatamente dalla definizione di funzione continua.
($\Leftarrow$) Se valgono 1, 2, allora f è continua, cioè $U \in \mathcal{F}_Y(0) \in \mathcal{F}_X(0)$. Essendo che $\forall U \in \mathcal{F}_Y(0)$, $V \in \mathcal{F}_X(0)$ tale che $V + V \subseteq U$, basta mostrare che $\forall V \in \mathcal{F}_Y(0)$, si ha $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V + V)$.
Siano $V \in \mathcal{F}_U(0)$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base di intorni chiusi e equilibrati dell'origine in Y tali che $V_1 + V_1 \subseteq V$, $\quad V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$. Essendo che $\overline{f^{-1}(V_1)} \subseteq \mathcal{F}_X(0)$, si ha $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V) + \overline{f^{-1}(V_1)}$. Analogamente $\overline{f^{-1}(V_n)} \subseteq f^{-1}(V_n) + \overline{f^{-1}(V_{n+1})}$.
Quindi $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V) + f^{-1}(V_1) + ... + f^{-1}(V_n) + \overline{f^{-1}(V_{n+1})}$. Allora per induzione, sia $x \in \overline{f^{-1}(V)}$, esiste una successione $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ in Y tale che $f(x_0) \in V, f(x_n) \in V_n$, con $n \in \mathbb{N}$ e $x \in x_0 + x_1 + ... + x_n + \overline{f^{-1}(V_{n+1})}$. Definito $s_n = x_0 + x_1 + ... + s_n$, per $n, k \in \mathbb{N}$, si ha $f(s_{n+k}) - f(s_n) = [f(s_{n+k}) - f(s_{n+k-1})] + ... + [f(s_{n+1}) - f(s_n)] = f(x_{n+k}) + ... + f(x_{n+1}) \in V_{n+k} + ... + V_{n+1} \subseteq V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$, dove $f(s_{n+k}) \in f(s_n) + V_n \; \forall n, k \in \mathbb{N}$. Allora la successione $(f(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in Y. Essendo Y completo, esiste il limite della successione ed è $y \in Y$. Dunque per come è definita la successione e poiché V_n è chiuso, si ha che $y \in f(s_n) + V_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. In particolare $y \in f(x_0) + V \subseteq V + V$.
Per dimostrare $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V + V)$ bisogna provare che $f(x) = y$, così si ha $f(x) \in V + V$, con $x \in f^{-1}(V + V)$. Si noti che $f(x) = y$ è equivalente a chiedere $(x, y) \in \gamma(f)$, dove $\gamma(f)$ è il grafico di f. Dato che $\gamma(f) = \overline{\gamma(f)}$,

si può verificare che $(x, y) \in \overline{\gamma(f)}$, cioè che per ogni intorno W di x in X e ogni intorno U di y in Y si ha $(W \times U) \cap \gamma(f) \neq \emptyset$.
Per le considerazioni fatte, $x \in S_n + \overline{f^{-1}(V_{n+1})} = \overline{s_n + f^{-1}(V_{n+1})}$, dove $W \cap [s_n + f^{-1}(V_{n+1})] \neq \emptyset$. Inoltre $y \in f(s_n) + V_n$, dove $f(s_n) \in y + V_n$, quindi $f(s_n) + V_n \subseteq y + V_n + V_n$. Se n è sufficientemente grande, si ha $y + V_n + V_n \subseteq U$, quindi $f(s_n) + V_n \subseteq U$, dove $s_n + f^{-1}(V_n) \subseteq f^{-1}(U)$.
Allora $W \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, quindi $(W \times U) \cap \gamma(f) \neq \emptyset$ perchè se $x \in W \cap f^{-1}(U)$ si ha $z \in W$ e $f(z) \in U$. □

Da questi due teoremi si deducono i seguenti risultati:

Teorema 4.19. *Se X, Y sono SVT metrizzabili e completi, un'applicazione lineare $f : X \to Y$ è continua se e solo se il suo grafico è chiuso in $X \times Y$.*

Teorema 4.20. TEOREMA DELLA MAPPA APERTA
Siano X, Y spazi vettoriali topologici di Hausdorff. Se X è metrizzabile e completo, allora un'applicazione lineare e continua f di X su Y è aperta, cioè è un omomorfismo, se e solo se

$$U \in \mathcal{F}_X(0) \implies \overline{f(U)} \in \mathcal{F}_Y(0). \tag{4.2.2}$$

Dunque se X è metrizzabile e completo e Y è di Baire, allora ogni applicazione lineare e continua di X su Y è aperta.

Dimostrazione. $(\Rightarrow) U \in \mathcal{F}_X(0) \implies \overline{f(U)} \in \mathcal{F}_Y(0)$ è una condizione necessaria affinchè f sia aperta perchè f è aperta se e solo se $U \in \mathcal{F}_X(0) \implies f(U) \in \mathcal{F}_U(0)$.
$(\Leftarrow)$ Sia $\overline{f} : X/\ker f \to Y$ la biezione associata alla funzione f. Se f è continua, $\ker f$ è chiuso in X e quindi, essendo X metrizzabile e completo, anche $X/\ker f$ lo è per la proposizione 3.9. Inoltre $\overline{f}$ è continua perchè se A è un aperto di Y, $f^{-1}(A)$ è aperto di $X/\ker f$ (Basta pensare che $\overline{f}^{-1}(A) = \pi(f^{-1}(A))$ e $f^{-1}(A)$ è aperto in X perchè f è continua e π è aperta). Quindi $\gamma(\overline{f})$ è chiuso in $X/\ker f \times Y$. Allora $\gamma(f^{-1})$ è chiuso in $Y \times X/\ker f$.
Considerando il teorema del grafico chiuso applicato alla funzione f^{-1}, si ha che $\overline{f}^{-1}$ è continua, cioè f è aperta. □

Dai teoremi del grafico chiuso e della mappa aperta, si deduce il seguente

Corollario 4.21. *Se X, Y sono SVT metrizzabili e completi, allora ogni applicazione lineare e continua di X su Y è aperta; in particolare ogni biezione lineare e continua di X su Y è un isomorfismo.*

Bibliografia

[1] Tullio Valent *Appunti di istituzioni di analisi superiore*, a.a. 1991-1992