



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA

”Sollecitazioni statiche autoindotte sugli arti del robot Spot”

RELATORE
PROF. PIERO PAVAN

LAUREANDO
RICCARDO BRUN

Anno Accademico 2022/2023

Data di laurea 28/09/2023

Abstract

Determinare lo stato meccanico a cui sono sottoposti i corpi che impieghiamo nella progettazione dei robot moderni, si dimostra cruciale per avere certezze strutturali nella costruzione di un prototipo. Ciò può essere realizzato tramite il metodo degli elementi finiti o FEM (Finite Element Method), con il quale riusciamo a studiare problemi relativamente complessi grazie all'ausilio del calcolatore e dei rispettivi algoritmi. Usufruento di questo metodo, la seguente tesi mira a studiare le sollecitazioni a cui sono sottoposti i quattro arti del robot Spot, prodotto dell'azienda americana Boston dynamics, in posizioni comuni; queste sono principalmente dovute alla massa del corpo principale, sede di quasi tutta l'elettronica necessaria al suo funzionamento. I risultati ottenuti indicano che nella condizione geometrica più svantaggiosa si raggiungono tensioni massime del 76,4% rispetto al valore di snervamento del materiale utilizzato. Tensioni che possono solo aumentare andando anche a considerare casi in cui, durante un impatto, il contatto dei quattro arti con il suolo non sia simultaneo, sollecitando ulteriormente il sistema.

Indice

1	Metodo degli elementi finiti	1
1.1	Applicazioni	1
1.2	Definizione del problema e discretizzazione	1
1.3	Matrice di rigidezza	2
1.3.1	Metodo diretto	3
1.3.2	Principio di stazionarietà dell'energia potenziale	3
1.3.3	Metodo di Galerkin	3
1.4	Matrice di rigidezza globale	4
1.5	Risoluzione del modello	4
2	Definizione del problema	5
2.1	Presentazione del robot	5
2.2	Dimensioni dei componenti	6
2.3	Assunzioni di progetto	7
2.3.1	Materiali utilizzati	7
2.3.2	Vincoli	8
2.4	Configurazioni analizzate	8
2.4.1	Posizione standard	8
2.4.2	Posizione inclinata in avanti	9
2.4.3	Posizione abbassata	9
2.5	Modello Strand7	10
3	Risultati delle simulazioni e fattore di impatto	11
3.1	Analisi statica	11
3.1.1	Condizione di carico	11
3.1.2	Posizione standard	11
3.1.3	Posizione inclinata in avanti	12
3.1.4	Posizione abbassata	13
3.2	Analisi statica equivalente	14
3.2.1	Fattore di impatto	14
3.2.2	Condizione di carico	15

3.2.3	Posizione standard	16
3.2.4	Posizione inclinata in avanti	17
3.2.5	Posizione abbassata	17
3.2.6	Considerazioni sulle simulazioni	18
4	Soluzione analitica	19
4.1	Disegno e semplificazioni	19
4.2	Incognita iperstatica e tensioni	23
4.2.1	Deformazione del corpo 1	24
4.2.2	Deformazione del corpo 2	25
4.2.3	Tensioni massime e minime	26
	Conclusioni	29
	Bibliografia	30

Capitolo 1

Metodo degli elementi finiti

Questo primo capitolo mira ad introdurre il metodo con un approccio discorsivo, con l'obiettivo di illustrare i concetti base al fine del corretto utilizzo dei software che consentono questo tipo di analisi.

1.1 Applicazioni

Sono presenti molti metodi analitici per la risoluzione dei problemi meccanici strutturali. Spesso però, se ne incontrano di complessità elevata, dovuta alla geometria, ai carichi o ai materiali coinvolti. Per questi motivi può essere implementata l'analisi computazionale al fine di ottenere approssimazioni adeguate al problema in questione. Nella maggior parte dei casi si basa sul metodo degli elementi finiti. Nello studio della meccanica dei solidi se ne trova applicazione in analisi statica, dinamica, instabilità euleriana e analisi modale o delle vibrazioni. Inoltre, può essere applicato anche in altri ambiti, come l'analisi fluidodinamica, trasferimenti di calore e problemi elettromagnetici.

1.2 Definizione del problema e discretizzazione

Il primo passo consiste nella definizione del problema, ossia, i carichi, i vincoli, la geometria e i materiali coinvolti. Per ottenere un modello efficiente è spesso opportuno considerare eventuali simmetrie per diminuirne la dimensione, oppure rimuovere i dettagli geometrici superflui. Successivamente si procede con la divisione del corpo di interesse in piccoli elementi connessi tra loro tramite nodi, processo detto discretizzazione, che porta alla definizione di una mesh. Quest'ultima va opportunamente costruita in modo da descrivere con molti elementi le regioni di interesse, aumentando il livello di dettaglio solo dove necessario, inoltre è possibile stimare quanto questa sia accurata considerando la convergenza ad un valore, per esempio la tensione massima in un punto, aumentando progressivamente il numero di elementi in cui il corpo viene diviso.

Grazie a questa discretizzazione, per soddisfare l'equilibrio del sistema, invece di considerare il corpo nella sua continuità, sarà sufficiente che i singoli elementi siano in equilibrio. La forma di questi sarà dipendente dalla geometria dell'oggetto e il grado di approssimazione richiesto. Le principali tipologie sono:

- **elementi monodimensionali**, come i travi, in grado di portare momenti, carichi assiali, torsionali e di taglio, oppure aste, che trasferiscono solo carichi assiali.
- **elementi bidimensionali**, come piastra, lastra e membrana.
- **elementi tridimensionali**, come tetraedri, pentaedri e esaedri.

1.3 Matrice di rigidezza

La variabile fondamentale da calcolare, nella risoluzione del problema, è lo spostamento dei vari nodi. una volta calcolato, sarà possibile determinare tensioni e deformazioni. Per questo motivo possiamo definire un vettore \vec{u} contenente tutti i possibili spostamenti, detti anche gradi di libertà, dei nodi dell'elemento. Applicando ciò ad alcuni casi delle tipologie elencate in precedenza si ottiene:

- nel caso di **elementi monodimensionali nello spazio 3D a due nodi**, un vettore di dimensione 12, data la presenza di due nodi con tre gradi di libertà traslazionali e tre rotazionali.
- nel caso di **elementi solidi esaedrici a otto nodi**, un vettore di dimensione 24, dati i tre gradi di libertà traslazionali per ogni nodo.

Sugli stessi nodi saranno applicate delle forze nodali rappresentabili con il vettore \vec{f} di dimensioni pari a quelle di \vec{u} . La relazione tra i due vettori $\vec{f} = [k] \vec{u}$ è rappresentata da una matrice quadrata $[k]$ detta matrice di rigidezza dell'elemento. Oltre alla relazione tra gli spostamenti ai nodi e le forze nodali applicate è importante stabilire gli spostamenti all'interno dell'elemento stesso, per questo motivo viene interpolato lo spostamento ai nodi solitamente tramite funzioni razionali, dette funzioni di forma. Per la definizione della matrice possono essere impiegati principalmente tre metodi, i quali si basano fondamentalmente sul concetto di equilibrio.

1.3.1 Metodo diretto

Questo primo metodo fa parte della formulazione detta forma forte che consiste nella soluzione diretta delle equazioni differenziali governanti l'elemento con le rispettive condizioni al contorno per la determinazione della matrice, questo tipo di approccio è però applicabile solo nei casi che coinvolgono elementi semplici.

1.3.2 Principio di stazionarietà dell'energia potenziale

Nei casi più generali un altro tipo di formulazione viene impiegata, detta forma debole, che consiste nella trattazione delle equazioni in forma integrale, ottenendo soluzioni approssimate. Questo primo metodo in forma debole è basato sul principio di stazionarietà dell'energia potenziale, il quale dice che: *“La configurazione spostata che soddisfa le condizioni di equilibrio è quella che minimizza o massimizza l'energia potenziale totale”*, l'equilibrio si dice stabile in caso di energia minima e instabile in caso di energia massima. Con energia potenziale totale $\Pi = U_e + V$ si intende la somma dell'energia di deformazione elastica U_e e l'energia potenziale dei carichi esterni V . Applicando una tecnica matematica chiamata calcolo variazionale è possibile ottenere una soluzione approssimata alle equazioni di equilibrio.

1.3.3 Metodo di Galerkin

In questo metodo, in forma debole, per soddisfare un'equazione differenziale $D(y)$ la soluzione approssimata

$$y^* = \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad (1.1)$$

viene calcolata come somma di un numero n di funzioni ipotizzate f_i moltiplicate per dei coefficienti incogniti c_i . Sostituendo y^* nell'equazione differenziale otteniamo un errore chiamato residuo $R = D(y^*)$. I coefficienti c_i vanno calcolati al fine di minimizzare il residuo R , perciò si procede a risolvere la seguente equazione integrale per tutte le n funzioni ipotizzate calcolando i coefficienti.

$$\int_E f_i R dE = 0 \quad (1.2)$$

Una volta ottenuti i c_i la funzione approssimata y^* viene facilmente calcolata. Questo metodo a differenza del principio di stazionarietà dell'energia potenziale vede più generalità nella sua applicazione.

1.4 Matrice di rigidità globale

Considerando la mesh nella sua interezza è possibile definire una matrice globale in grado di descrivere lo spostamento in risposta ai carichi applicati al sistema tramite la relazione $\vec{F} = [K] \vec{U}$, questa è determinabile accoppiando le matrici di rigidità dei singoli elementi tramite le relazioni dovute ai nodi in comune presenti tra questi. Questa matrice così ottenuta nei casi lineari sarà simmetrica e in generale, sarà sparsa, quindi ricca di zeri.

1.5 Risoluzione del modello

Il calcolo degli spostamenti può essere affrontato in due modi:

- invertendo la matrice e calcolando il vettore $\vec{U} = [K]^{-1} \vec{F}$;
- approssimando iterativamente il vettore degli spostamenti impiegando per esempio il metodo del gradiente coniugato.

Infine, determinato il vettore degli spostamenti, sarà possibile calcolare le tensioni di interesse.

Capitolo 2

Definizione del problema

In questo capitolo viene brevemente introdotto il robot in questione, spiegato il processo con il quale sono state definite le dimensioni del modello e le assunzioni effettuate, dovute ad una comprensibile mancanza di dati specifici.

2.1 Presentazione del robot

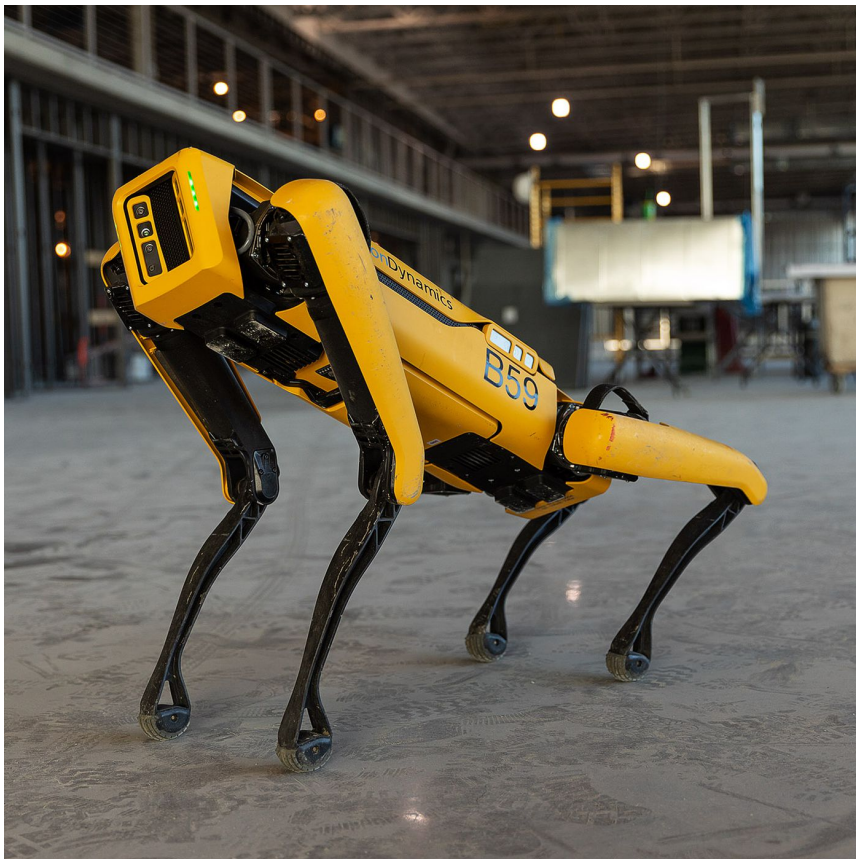


Figura 2.1: Robot Spot

Il robot *Spot* in *Figura 2.1* viene prodotto dall'azienda americana *Boston Dynamics*, con sede in Massachusetts. Dispone di quattro arti, mossi da attuatori lineari e motori stepper, controllati dal sistema AI che sfrutta cinque videocamere ad alta risoluzione per orientarsi nell'ambiente circostante.

2.2 Dimensioni dei componenti

Le dimensioni dei tre parallelepipedi, semplificazioni dei corpi reali, utilizzati nelle simulazioni sono state stabilite grazie al modello CAD 3D [3] del robot.

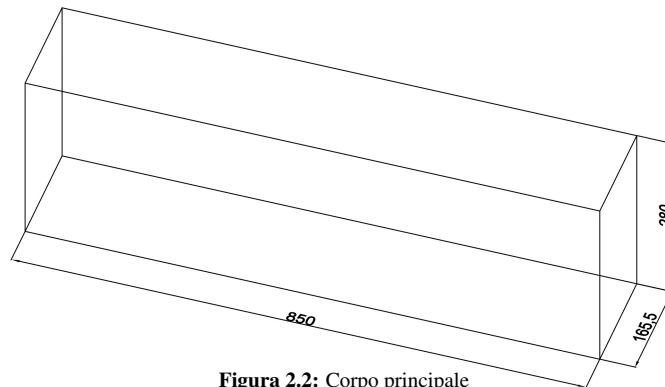
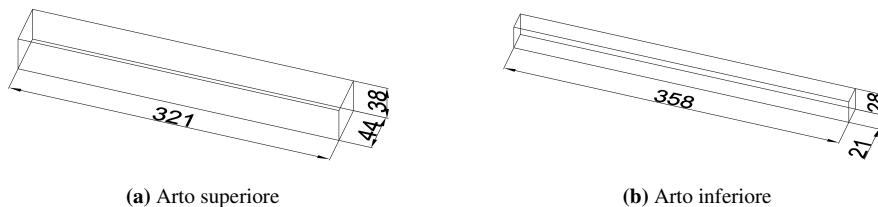


Figura 2.2: Corpo principale

In *Figura 2.2* è rappresentato il corpo principale, sede di tutta l'elettronica necessaria al robot, ma soprattutto della maggior parte della massa del modello.



(a) Arto superiore

(b) Arto inferiore

Figura 2.3: Arti

In *Figura 2.3* sono presenti rispettivamente l'arto superiore e inferiore dimensionati approssimando, per semplicità di calcolo, le lunghezze per eccesso, altezze e profondità per difetto.

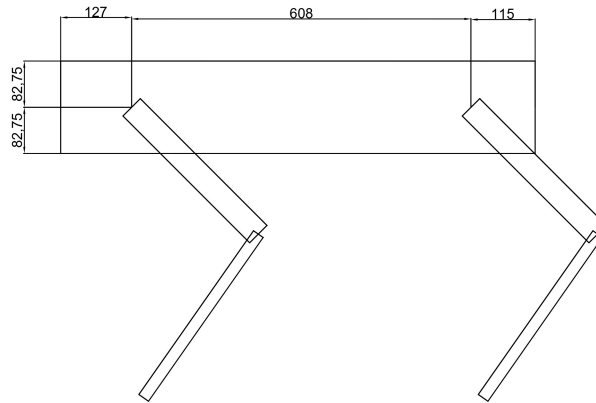


Figura 2.4: Posizione degli arti

Infine in *Figura 2.4* sono rappresentate le distanze che definiscono la posizione in cui i quattro arti sono innestati al corpo principale.

2.3 Assunzioni di progetto

All'interno del sito della *Boston Dynamics* [2], considerando il modello *Spot Enterprise*, è riportata la massa totale del sistema, compresa la batteria, pari a $m_{tot} = 32,7$ kg.

2.3.1 Materiali utilizzati

Sia l'arto superiore che quello inferiore sono stati ipotizzati composti da *alluminio 7075 - T6* [4], una lega con le seguenti caratteristiche:

$$\text{Densità } \rho = 2,81 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$$

$$\text{Modulo di Young } E = 71,7 \text{ GPa}$$

$$\text{Tensione di snervamento } \sigma_s = 503 \text{ MPa}$$

Di seguito sono riportati i calcoli per ottenere la densità del corpo principale, ipotizzata uniformemente distribuita.

$$\text{Volume arto superiore } V_{sup} = 321 \cdot 44 \cdot 38 = 5,367 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\text{Volume arto inferiore } V_{inf} = 358 \cdot 21 \cdot 28 = 2,105 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\text{Volume corpo principale } V_{body} = 850 \cdot 165,5 \cdot 280 = 3,939 \times 10^7 \text{ mm}^3$$

$$\text{Massa arto superiore } m_{sup} = \rho V_{sup} = 1,508 \text{ kg}$$

$$\text{Massa arto inferiore } m_{inf} = \rho V_{inf} = 0,592 \text{ kg}$$

$$\text{Massa corpo principale } m_{body} = m_{tot} - 4(m_{sup} + m_{inf}) = 24,3 \text{ kg}$$

$$\text{Densità corpo principale } \rho_{body} = \frac{m_{body}}{V_{body}} = 6,169 \times 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$$

Le altre caratteristiche legate al materiale del corpo principale, per gli scopi di questo studio, sono irrilevanti.

2.3.2 Vincoli

Considerando il contatto tra l'arto inferiore ed il terreno sottostante con sufficiente attrito statico, tale da impedire la traslazione, il vincolo è stato ipotizzato a cerniera sferica, quindi permettendo le rotazioni ed impedendo le traslazioni in tutte le direzioni. Riguardo i vincoli tra gli arti inferiori e superiori e tra gli arti superiori e il corpo principale, ipotizzando un blocco totale dei motori, questi sono stati scelti ad incastro, impedendo quindi tutte le rotazioni e le traslazioni.

2.4 Configurazioni analizzate

Per quanto riguarda le posizioni del robot, simulate successivamente nel *Capitolo 3*, sono di seguito riportati i tre casi analizzati.

2.4.1 Posizione standard

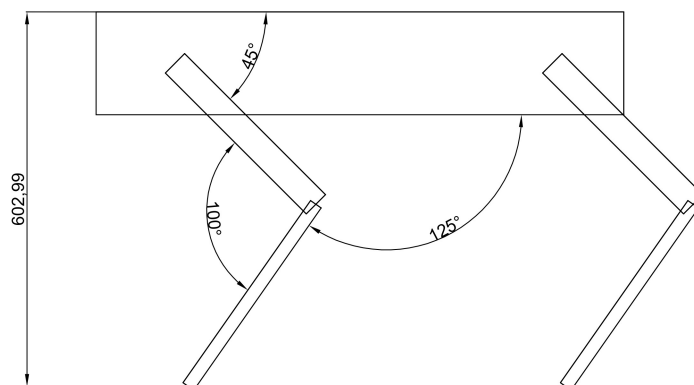


Figura 2.5: Posizione standard

In *Figura 2.5* è rappresentata la posizione più comune in cui lo si può trovare, solitamente anche in fasi di *idle*, quindi privo di azioni da eseguire.

2.4.2 Posizione inclinata in avanti

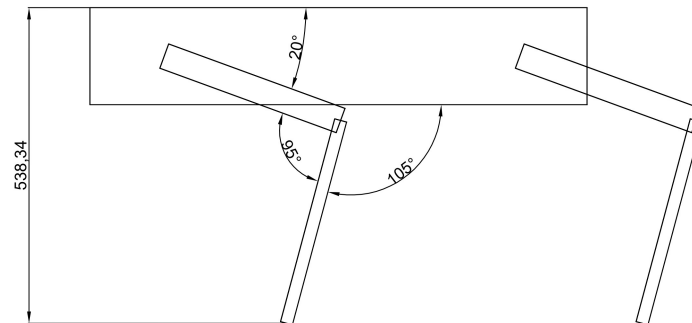


Figura 2.6: Posizione inclinata in avanti

In *Figura 2.6* è rappresentata la posizione in cui il robot si sporge in avanti, spostando il baricentro del corpo principale quasi sopra al punto in cui gli arti anteriori appoggiano sul terreno, giungendo vicino al limite della stabilità.

2.4.3 Posizione abbassata

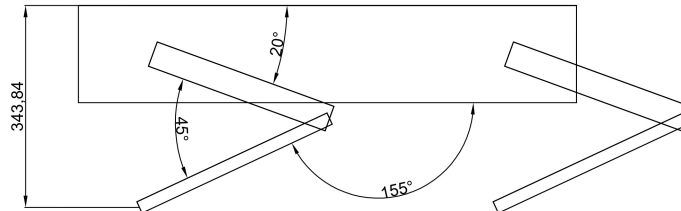


Figura 2.7: Posizione abbassata

In *Figura 2.7* è rappresentata la posizione che potrebbe essere associata alla fase finale di un impatto, dovuto, per esempio, all'esecuzione di un salto.

2.5 Modello Strand7

Nel seguente capitolo, per la risoluzione del problema, si ricorre al software Strand7 o Straus7, che implementa il metodo degli elementi finiti presentato al *Capitolo 1*. Di seguito, in *Figura 2.8*, viene riportato il modello.

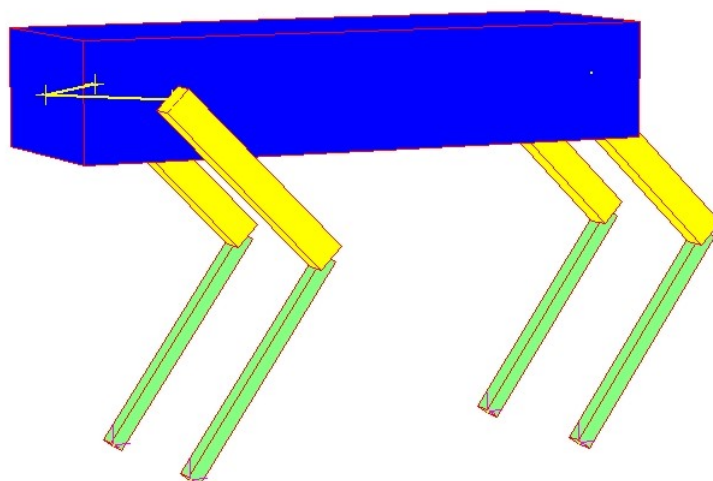


Figura 2.8: Modello Strand7

Tramite gli elementi trave di colore verde e giallo sono rappresentati rispettivamente gli arti inferiori e superiori. L'estremità inferiore degli elementi verdi è stata vincolata impedendo le traslazioni, mentre, l'estremità superiore degli elementi gialli è stata vincolata al corpo principale di colore blu, anch'esso un elemento trave, tramite link multipoint.

Capitolo 3

Risultati delle simulazioni e fattore di impatto

In questo capitolo vengono presentati i risultati delle simulazioni statiche applicando al modello l'accelerazione gravitazionale e il fattore di impatto con le relative applicazioni al caso di studio.

3.1 Analisi statica

3.1.1 Condizione di carico

Nelle seguenti sottosezioni vengono riportati i risultati delle simulazioni dei tre casi presentati nel *Capitolo 2*. In queste viene considerato come carico la massa del robot.

3.1.2 Posizione standard

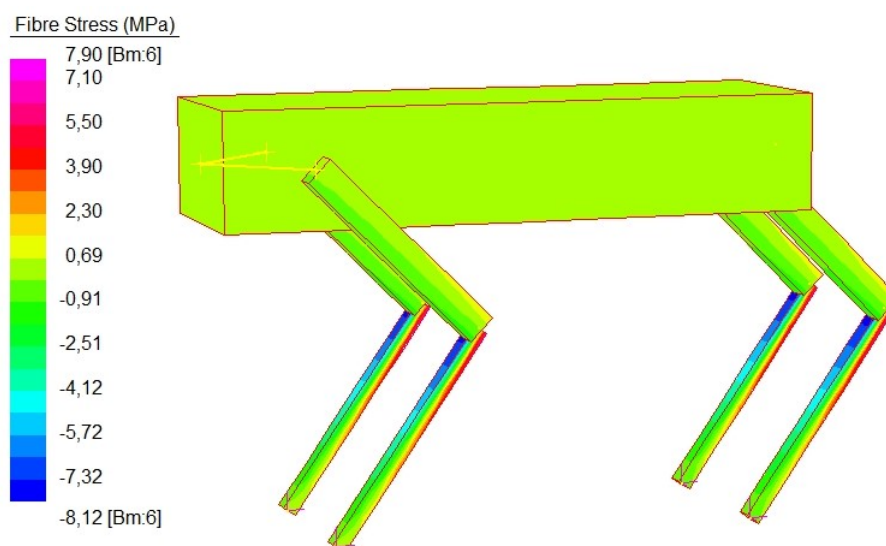


Figura 3.1: Posizione standard

In *Figura 3.1* sono rappresentate le seguenti tensioni, con il rispettivo fattore di sicurezza.

$$\text{Tensione massima } \sigma_{max} = 7,90 \text{ MPa}$$

$$\text{Tensione minima } \sigma_{min} = -8,12 \text{ MPa}$$

$$\text{Fattore di sicurezza } FS = \frac{\sigma_s}{|\sigma_{min}|} = \frac{503}{8,12} = 61,95$$

Inoltre, tramite lo spostamento verticale ricavato dalla simulazione, è possibile calcolare la rigidezza verticale.

$$\text{Spostamento verticale } \delta_{st} = 0,28 \text{ mm}$$

$$\text{Rigidezza verticale } k = \frac{m_{tot} g}{\delta_{st}} = \frac{0,0327 \cdot 9810}{0,28} = 1145,67 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

3.1.3 Posizione inclinata in avanti

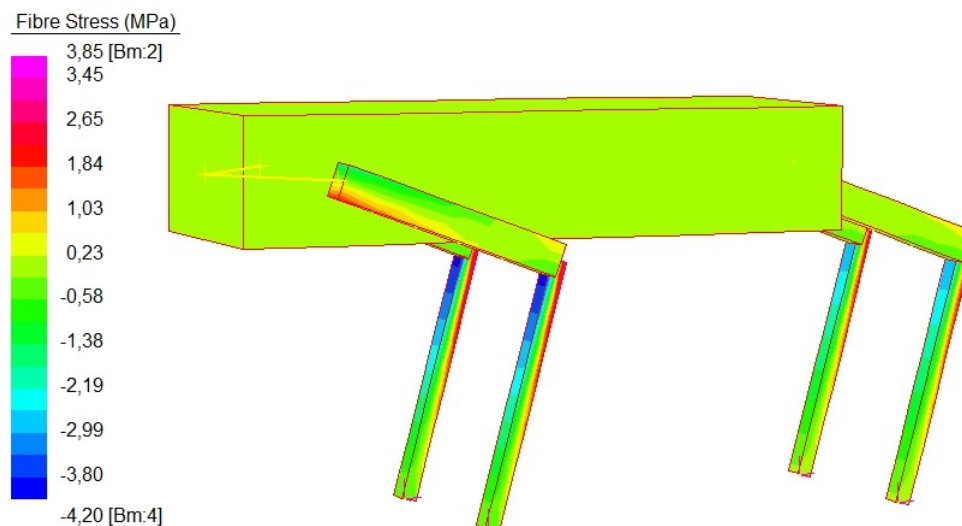


Figura 3.2: Posizione inclinata in avanti

In *Figura 3.2* sono rappresentate le seguenti tensioni, con il rispettivo fattore di sicurezza.

$$\text{Tensione massima } \sigma_{max} = 3,85 \text{ MPa}$$

$$\text{Tensione minima } \sigma_{min} = -4,20 \text{ MPa}$$

$$\text{Fattore di sicurezza } FS = \frac{\sigma_s}{|\sigma_{min}|} = \frac{503}{4,20} = 119,76$$

Inoltre, tramite lo spostamento verticale ricavato dalla simulazione, è possibile calcolare la rigidità verticale.

$$\text{Spostamento verticale } \delta_{st} = 0,09 \text{ mm}$$

$$\text{Rigidità verticale } k = \frac{m_{tot} g}{\delta_{st}} = \frac{0,0327 \cdot 9810}{0,09} = 3564,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

3.1.4 Posizione abbassata

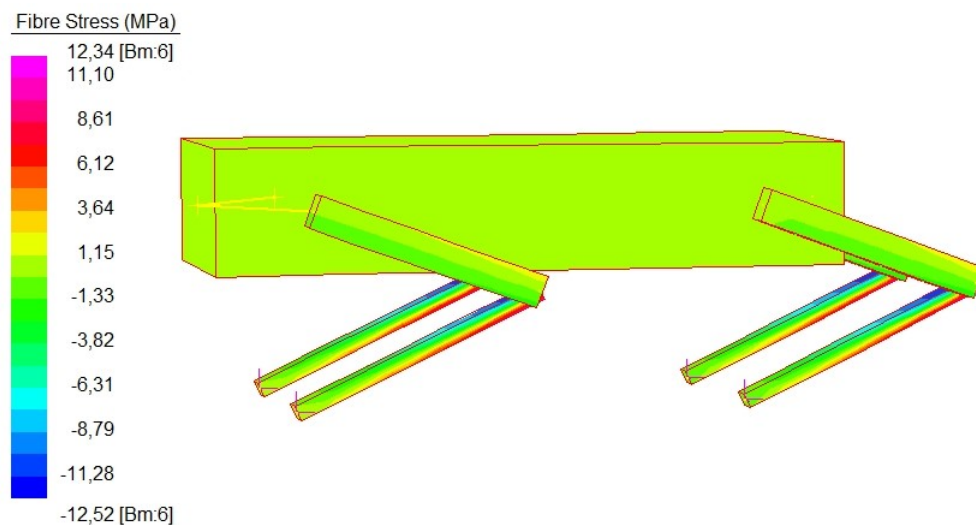


Figura 3.3: Posizione abbassata

In Figura 3.3 sono rappresentate le seguenti tensioni, con il rispettivo fattore di sicurezza.

$$\text{Tensione massima } \sigma_{max} = 12,34 \text{ MPa}$$

$$\text{Tensione minima } \sigma_{min} = -12,52 \text{ MPa}$$

$$\text{Fattore di sicurezza } FS = \frac{\sigma_s}{|\sigma_{min}|} = \frac{503}{12,52} = 40,18$$

Inoltre, tramite lo spostamento verticale ricavato dalla simulazione, è possibile calcolare la rigidità verticale.

$$\text{Spostamento verticale } \delta_{st} = 0,72 \text{ mm}$$

$$\text{Rigidità verticale } k = \frac{m_{tot} g}{\delta_{st}} = \frac{0,0327 \cdot 9810}{0,72} = 445,54 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Nei tre casi discussi le maggiori tensioni vengono riscontrate nell'arto inferiore in prossimità dell'incastro con il superiore. È inoltre possibile notare che la configurazione maggiormente sollecitata è la posizione abbassata, questo perché il momento flettente è maggiore rispetto a quello presente nelle altre due posizioni, risultando in tensioni superiori.

3.2 Analisi statica equivalente

3.2.1 Fattore di impatto

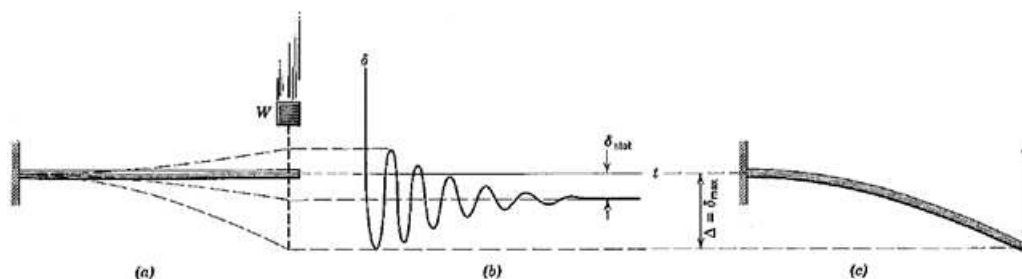


Figura 3.4: Dinamica di un impatto

Nei casi in cui sia coinvolta una massa che urta un corpo, del quale vorremmo conoscere gli sforzi a cui è sottoposto, non è sempre necessario procedere con uno studio dinamico. Talvolta, con le dovute ipotesi, è possibile studiare staticamente il sistema aumentando la forza applicata, di un fattore di impatto, al fine di indurre la massima deformazione raggiunta durante il caso dinamico.

Dalla fisica sappiamo che un corpo di massa m sottoposto ad un'accelerazione gravitazionale g ad una determinata altezza h possiede un'energia potenziale $E_p = mgh$. Questo cadendo, se ipotizziamo di poter trascurare qualsiasi forma di dissipazione di energia, raggiungerà una determinata velocità v e tutta l'energia potenziale verrà convertita in energia cinetica $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Infine, se l'energia cinetica viene assorbita da una struttura di rigidità k e si deforma di uno spostamento δ lungo direzione del moto, sempre con l'ipotesi di trascurare le dissipazioni, questo immagazzinerà l'energia cinetica in energia elastica $E_e = \frac{1}{2}k\delta^2$.

Essendo interessati alla conversione di energia potenziale in energia elastica immagazzinata è quindi possibile considerare solamente E_p ed E_e , prestando però attenzione all'altezza totale in cui l'energia potenziale agisce pari ad $h + \delta$.

$$E_p = E_e$$

$$mg(h + \delta) = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (3.1)$$

Risolviendo l'equazione 3.1 per δ e osservando che $k = \frac{mg}{\delta_{st}}$, con δ_{st} la deformazione causata dalla massa in analisi statica.

$$\begin{aligned}\frac{mg}{2\delta_{st}}\delta^2 - mg\delta - mgh &= 0 \\ \frac{1}{2\delta_{st}}\delta^2 - \delta - h &= 0 \\ \delta &= \delta_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \right)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Infine dividendo l'equazione 3.2 per δ_{st} si ottiene il fattore di impatto n .

$$n = \frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\quad (3.3)$$

Di questo risultato è interessante notare che anche ponendo $h = 0$ il fattore è pari ad $n = 2$, questo perché la forza viene considerata con applicazione istantanea.

3.2.2 Condizione di carico

Nelle seguenti sottosezioni vengono riportati i risultati delle simulazioni dei casi precedenti amplificando il carico di un fattore di impatto, dovuto alla caduta del robot da un'altezza pari a $h = 300$ mm. Di seguito vengono calcolati i tre fattori.

Posizione standard con spostamento verticale $\delta_{st} = 0,28$.

$$n_1 = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 300}{0,28}} = 47,3$$

Posizione inclinata in avanti con spostamento verticale $\delta_{st} = 0,09$.

$$n_2 = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 300}{0,09}} = 82,66$$

Posizione abbassata con spostamento verticale $\delta_{st} = 0,72$.

$$n_3 = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 300}{0,72}} = 29,88$$

Per le simulazioni è sufficiente amplificare l'accelerazione gravitazionale del fattore di impatto di interesse e procedere con la risoluzione del modello. Di seguito vengono quindi calcolate le tre accelerazioni.

$$a_1 = n_1 g = 47,3 \cdot 9810 = 4,64 \times 10^5 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$a_2 = n_2 g = 82,66 \cdot 9810 = 8,11 \times 10^5 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$a_3 = n_3 g = 29,88 \cdot 9810 = 2,93 \times 10^5 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

3.2.3 Posizione standard

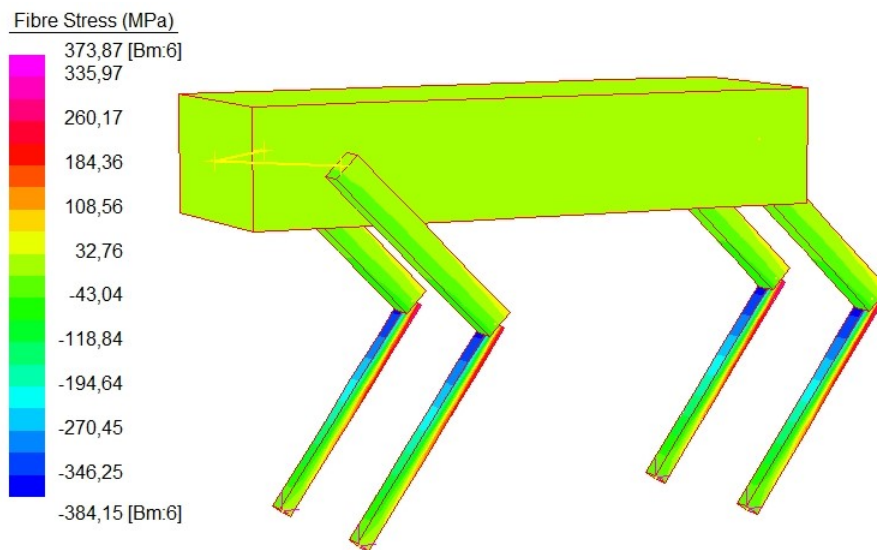


Figura 3.5: Posizione standard con fattore di impatto n_1

In *Figura 3.5* sono rappresentate le seguenti tensioni, con il rispettivo fattore di sicurezza.

Tensione massima $\sigma_{max} = 373,87 \text{ MPa}$

Tensione minima $\sigma_{min} = -384,15 \text{ MPa}$

Fattore di sicurezza $FS = \frac{\sigma_s}{|\sigma_{min}|} = \frac{503}{384,15} = 1,31$

3.2.4 Posizione inclinata in avanti

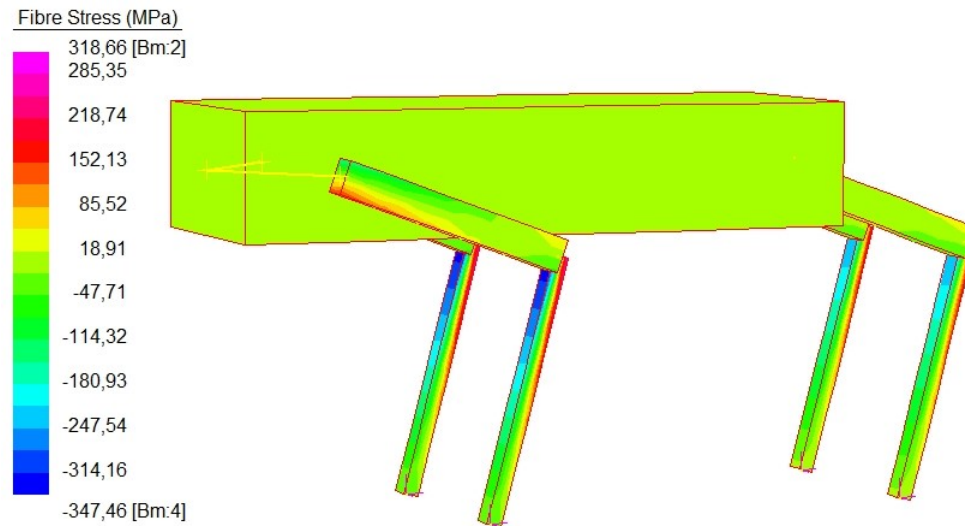


Figura 3.6: Posizione inclinata in avanti con fattore di impatto n_2

In Figura 3.6 sono rappresentate le seguenti tensioni, con il rispettivo fattore di sicurezza.

Tensione massima $\sigma_{max} = 318,66 \text{ MPa}$

Tensione minima $\sigma_{min} = -347,46 \text{ MPa}$

Fattore di sicurezza $FS = \frac{\sigma_s}{|\sigma_{min}|} = \frac{503}{347,46} = 1,45$

3.2.5 Posizione abbassata

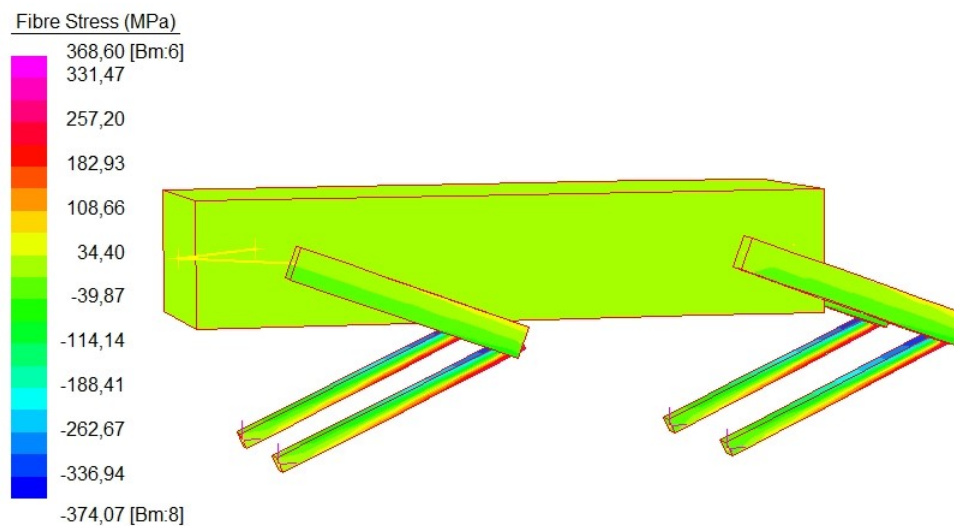


Figura 3.7: Posizione abbassata con fattore di impatto n_3

In *Figura 3.7* sono rappresentate le seguenti tensioni, con il rispettivo fattore di sicurezza.

Tensione massima $\sigma_{max} = 368,60 \text{ MPa}$

Tensione minima $\sigma_{min} = -374,07 \text{ MPa}$

Fattore di sicurezza $FS = \frac{\sigma_s}{|\sigma_{min}|} = \frac{503}{374,07} = 1,34$

3.2.6 Considerazioni sulle simulazioni

Osservando i risultati ottenuti, la posizione standard risulta essere la configurazione con fattore di sicurezza più basso tra i tre casi.

Considerando di trattare casi lineari i valori delle tensioni nelle simulazioni sopraelencate sono facilmente calcolabili semplicemente moltiplicando le tensioni statiche per il fattore di impatto di interesse. Per questo motivo è possibile calcolare quale sia l'altezza massima h_{max} che gli arti possono attuare prima di raggiungere lo snervamento.

Dalle considerazioni appena espresse, ponendo $\sigma_{st} = |\sigma_{min}|$, essendo la tensione minima in modulo massima, è possibile ottenere la seguente equazione.

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h_{max}}{\delta_{st}}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{st}}$$

Risolvendo per h_{max} e sostituendo i valori della posizione standard si ottiene l'altezza massima di caduta che il modello può attuare.

$$h_{max} = \frac{\delta_{st}}{2} \left[\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{st}} - 1 \right)^2 - 1 \right] = \frac{0,28}{2} \left[\left(\frac{503}{8,12} - 1 \right)^2 - 1 \right] = 520 \text{ mm}$$

Considerando la completa assenza di contributo da parte dei motori nell'attuare l'impatto, un'altezza massima circa pari a 0,5 m è sicuramente vantaggiosa, soprattutto in caso di malfunzionamenti che potrebbero portare al blocco totale di questi.

Infine ipotizzando invece che i motori siano operativi, risolvendo un problema di ottimizzazione, è possibile determinare un lavoro di frenamento W_m dipendente dall'accelerazione frenante e la distanza sulla quale questi agiscono, risolvendo il bilancio di energia iniziale con questa quantità aggiuntiva si ottiene:

$$E_p = E_e + W_m$$

$$mg(h + \delta) = \frac{1}{2}k\delta^2 + W_m$$

$$\frac{1}{2\delta_{st}}\delta^2 - \delta - h + \frac{W_m}{mg} = 0$$

$$\text{Fattore di impatto attenuato } n_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\delta_{st}} \left(h - \frac{W_m}{mg} \right)}$$

Capitolo 4

Soluzione analitica

In questo capitolo viene presentata la soluzione analitica di una delle tre configurazioni analizzate, al fine di confrontare i risultati ottenuti con il modello al calcolatore.

4.1 Disegno e semplificazioni

Per il confronto con il modello al calcolatore è stata scelta la posizione abbassata del robot, presentata nella *Sottosezione 2.4.3*, viene di seguito riportata con il rispettivo sistema di riferimento.

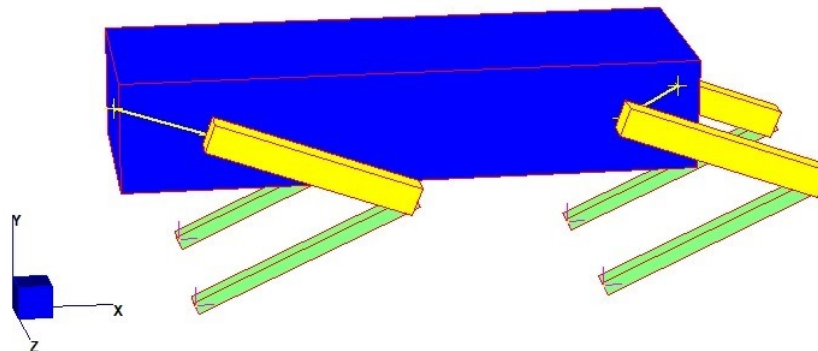


Figura 4.1: Posizione abbassata con il sistema di riferimento

Per la trattazione, al fine di lavorare in due dimensioni, sono state considerate le seguenti semplificazioni, con riferimento alla *Figura 4.1*:

- I momenti x e y e le forze agenti lungo z sono trascurabili.
- La forza peso viene dimezzata esaminando solo due arti al posto di quattro.
- La forza peso viene approssimata come un carico distribuito applicato al corpo principale in direzione $-y$.
- Le cerniere sferiche si riducono ad essere cerniere semplici, essendo la componente lungo z non più necessaria.

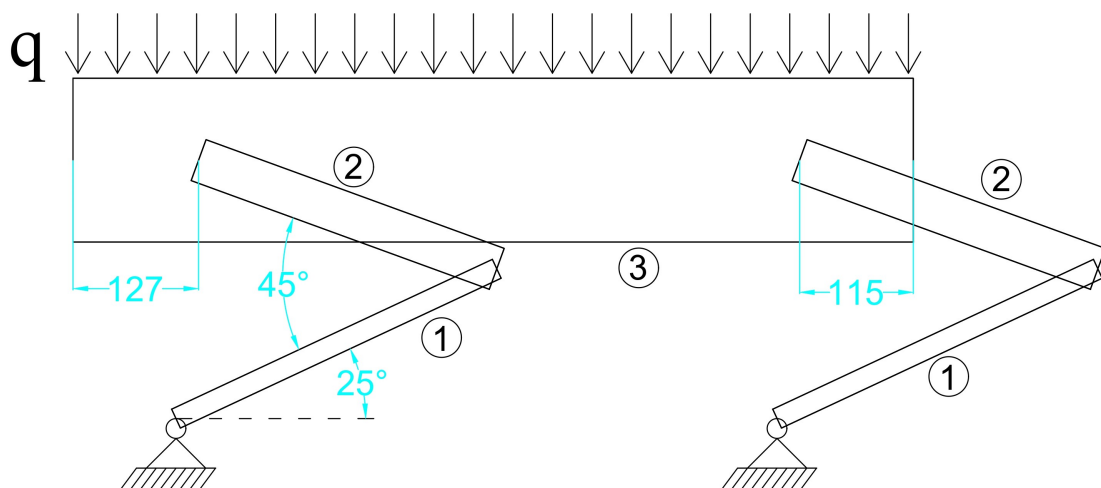


Figura 4.2: Disegno 2D del robot

In *Figura 4.2* è rappresentato il robot in posizione abbassata dopo aver applicato le precedenti semplificazioni.

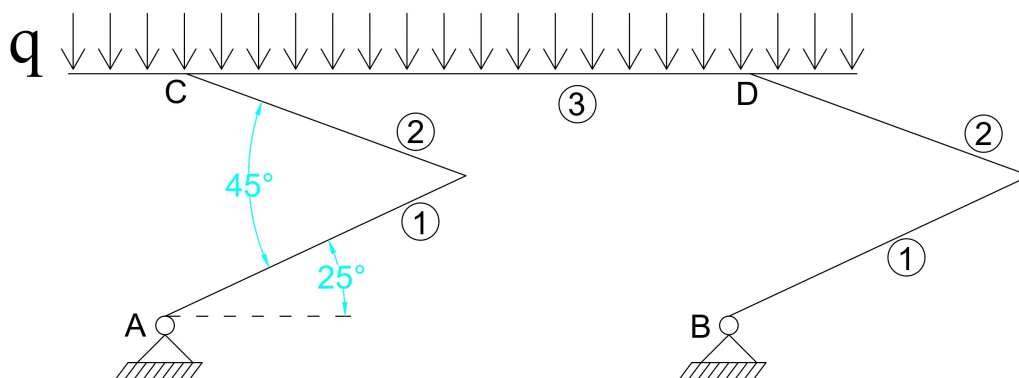


Figura 4.3: Disegno 2D del robot semplificato

In *Figura 4.3* viene presentata la semplificazione del disegno in *Figura 4.2* per una trattazione più chiara. Vengono ora elencati i dati necessari alla trattazione di questa sezione.

Lunghezza corpo numero 1 $L_1 = 358 \text{ mm}$

Lunghezza corpo numero 2 $L_2 = 321 \text{ mm}$

Lunghezza corpo numero 3 $L_3 = 850 \text{ mm}$

Carico distribuito $q = \frac{m_{tot} g}{2 L_3} = \frac{32,7 \cdot 9,81}{2 \cdot 850} = 0,1887 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

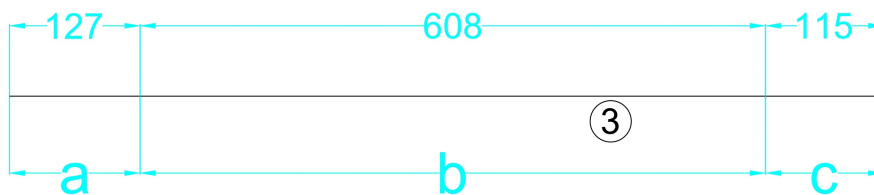


Figura 4.4: Sezioni di L_3

In *Figura 4.4* sono rappresentate le suddivisioni di L_3 definite dal punto di innesto tra gli arti e il corpo principale, riportate anche di seguito.

Sezione a $a = 127 \text{ mm}$

Sezione b $b = 608 \text{ mm}$

Sezione c $c = 115 \text{ mm}$

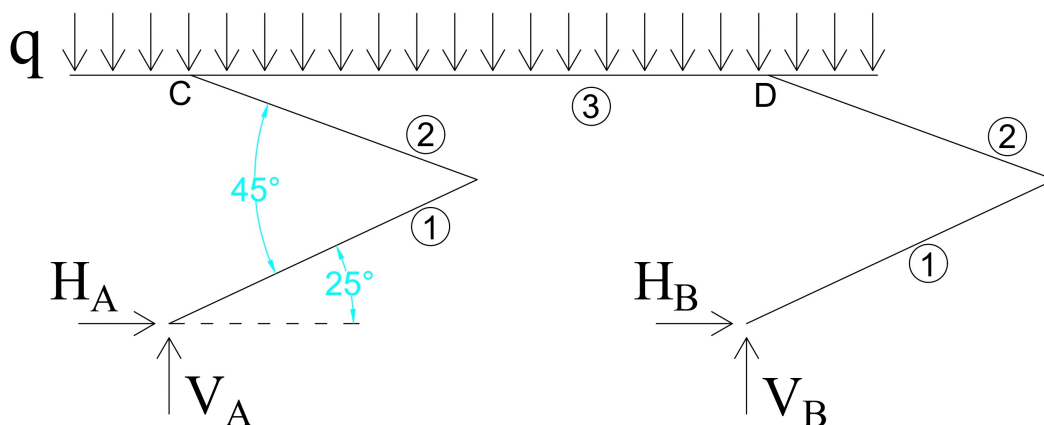


Figura 4.5: Schema principale

In *Figura 4.5*, esplicitando le reazioni vincolari, è riportato lo schema principale. Considerando il numero dei corpi presenti si giunge alla conclusione che il numero dei **gradi di libertà** gdl del sistema è pari a $gdl = 5 \cdot 3 = 15$. I vincoli presenti sono pari a due cerniere e quattro incastri ottenendo un numero di **condizioni di vincolo** cdv del sistema pari a $cdv = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16$. Osservando che il problema raffigurato è chiaramente una **struttura fissa** e che $cdv > gdl$ il caso in questione è una **struttura iperstatica** con un grado di iperstaticità. Infine dalla *Figura 4.5* vengono derivate le seguenti equazioni al fine di stabilire le reazioni vincolari e quale di queste sia l'**incognita iperstatica**.

$$\begin{array}{l} \text{Equilibrio orizzontale} \\ \text{Equilibrio verticale} \\ \text{Equilibrio dei momenti rispetto ad A} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B = q L_3 \\ V_B b - \frac{q L_3}{2} (L_3 - 2a + 2 \Delta L) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.1) \\ (4.2) \\ (4.3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Distanza orizzontale tra i punti A e C} \\ \Delta L = L_1 \cos(25^\circ) - L_2 \cos(20^\circ) = \\ = 22,82 \text{ mm} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Distanza verticale tra i punti A e C} \\ h = L_1 \sin(25^\circ) + L_2 \sin(20^\circ) = \\ = 261,09 \text{ mm} \end{array}$$

Dall'*equazione 4.3* è possibile ricavare V_B .

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{q L_3}{2b} (L_3 - 2a + 2 \Delta L) = \\ &= \frac{0,1887 \cdot 850}{2 \cdot 608} \cdot (850 - 2 \cdot 127 + 2 \cdot 22,82) = 84,63 \text{ N} \end{aligned}$$

Di conseguenza, dall'*equazione 4.2*, anche V_A .

$$V_A = q L_3 - V_B = 0,1887 \cdot 850 - 84,63 = 75,77 \text{ N}$$

Notando che l'*equazione 4.1* non è sufficiente a determinare le due componenti orizzontali, l'incognita iperstatica X viene posta pari a $X = H_A = -H_B$.

4.2 Incognita iperstatica e tensioni

Al fine di determinare l'incognita X è possibile scomporre il sistema in due sottosistemi rappresentati in *Figura 4.6*.

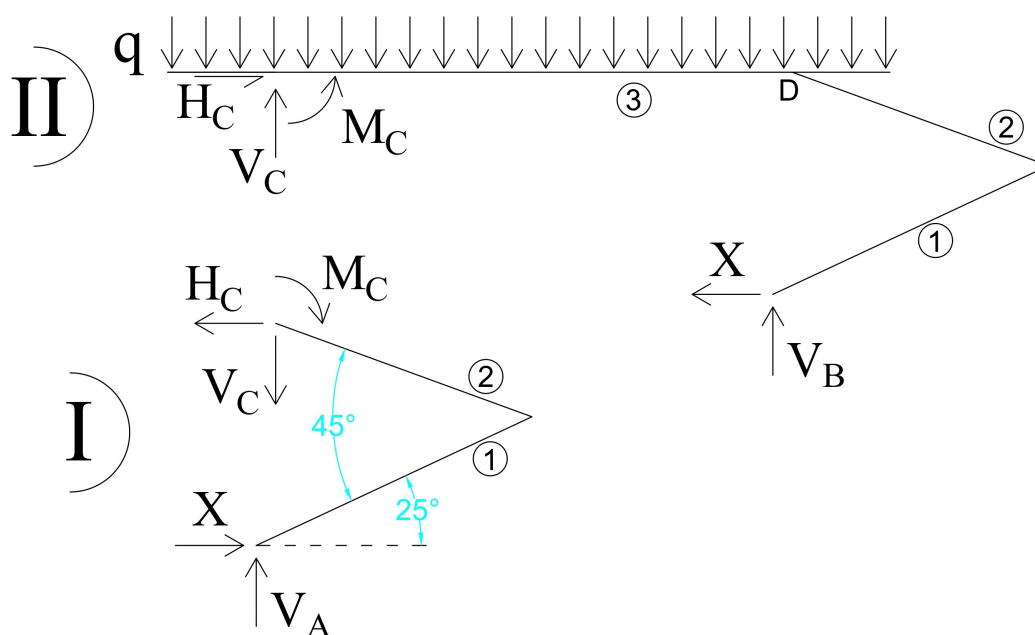


Figura 4.6: Sottosistemi

Viene inoltre imposta la seguente uguaglianza.

$$\text{Equazione di congruenza} \quad \eta_C^I = \eta_C^{II} \quad (4.4)$$

$$\text{Spostamento verticale sistema I} \quad \eta_C^I$$

$$\text{Spostamento verticale sistema II} \quad \eta_C^{II}$$

Si procede ora a derivare e risolvere le equazioni differenziali governanti i due corpi del sistema I, che potranno poi essere utilizzate anche per il sistema II con qualche accorgimento e a calcolare eventuali parametri importanti.

$$\text{Momento d'inerzia corpo 1} \quad J_1 = \frac{1}{12} \cdot 21^3 \cdot 28 = 2,161 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\text{Momento d'inerzia corpo 2} \quad J_2 = \frac{1}{12} \cdot 44^3 \cdot 38 = 2,697 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

4.2.1 Deformazione del corpo 1

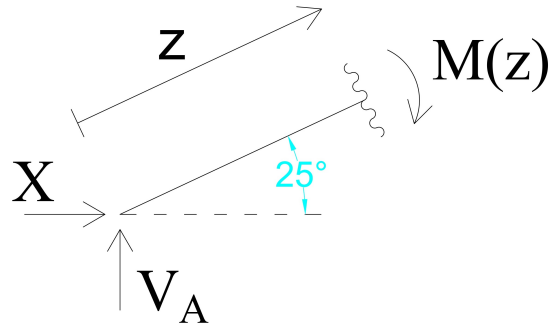


Figura 4.7

Dalla *Figura 4.7* imponendo l'equilibrio dei momenti si ottiene

$$M(z) + V_A z \cos(25^\circ) - X z \sin(25^\circ) = 0 \quad (4.5)$$

Con le rispettive condizioni al contorno

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 & (4.6a) \\ y_1(L_1) = 0 & (4.6b) \end{cases}$$

Sostituendo all'*equazione 4.5* $M(z) = -EJ y''(z)$

$$EJ_1 y_1''(z) = V_A z \cos(25^\circ) - X z \sin(25^\circ) \quad (4.7)$$

Integrando l'*equazione 4.7* si ricavano le seguenti

$$y_1'(z) = \frac{1}{EJ_1} \left(V_A \frac{z^2}{2} \cos(25^\circ) - X \frac{z^2}{2} \sin(25^\circ) \right) + c_1 \quad (4.8)$$

$$y_1(z) = \frac{1}{EJ_1} \left(V_A \frac{z^3}{6} \cos(25^\circ) - X \frac{z^3}{6} \sin(25^\circ) \right) + c_1 z + c_2 \quad (4.9)$$

Imponendo la *condizione 4.6a*

$$y_1(0) = c_2 = 0 \quad \implies \quad c_2 = 0$$

Imponendo la *condizione 4.6b* e sostituendo la costante appena calcolata

$$\begin{aligned} y_1(L_1) &= \frac{V_A L_1^3 \cos(25^\circ)}{6EJ_1} - \frac{X L_1^3 \sin(25^\circ)}{6EJ_1} + c_1 L_1 = 0 \\ \implies c_1 &= \frac{X L_1^2 \sin(25^\circ)}{6EJ_1} - \frac{V_A L_1^2 \cos(25^\circ)}{6EJ_1} \end{aligned}$$

Infine sostituendo c_1 e c_2 nelle equazioni 4.8 e 4.9 si giunge alle seguenti

$$y_1'(z) = \frac{X \sin(25^\circ)}{2EJ_1} \left(\frac{L_1^2}{3} - z^2 \right) + \frac{V_A \cos(25^\circ)}{2EJ_1} \left(z^2 - \frac{L_1^2}{3} \right) \quad (4.10)$$

$$y_1(z) = \frac{X z \sin(25^\circ)}{6EJ_1} (L_1^2 - z^2) + \frac{V_A z \cos(25^\circ)}{6EJ_1} (z^2 - L_1^2) \quad (4.11)$$

4.2.2 Deformazione del corpo 2

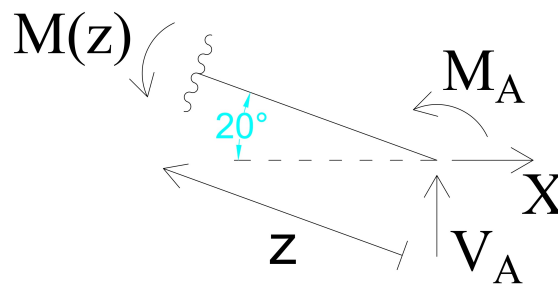


Figura 4.8

Con il momento di trasporto M_A pari a

$$M_A = X L_1 \sin(25^\circ) - V_A L_1 \cos(25^\circ)$$

Dalla *Figura 4.8* imponendo l'equilibrio dei momenti si ottiene

$$M(z) + V_A z \cos(20^\circ) + M_A - X z \sin(20^\circ) = 0 \quad (4.12)$$

Con le rispettive condizioni al contorno

$$\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.13a)$$

$$(4.13b)$$

Sostituendo all'equazione 4.12 $M(z) = -EJ y''(z)$

$$EJ_2 y_2''(z) = V_A z \cos(20^\circ) + M_A - X z \sin(20^\circ) \quad (4.14)$$

Integrando l'equazione 4.14 si ricavano le seguenti

$$y_2'(z) = \frac{1}{EJ_2} \left(V_A \frac{z^2}{2} \cos(20^\circ) - X \frac{z^2}{2} \sin(20^\circ) + M_A z \right) + c_1 \quad (4.15)$$

$$y_2(z) = \frac{1}{EJ_2} \left(V_A \frac{z^3}{6} \cos(20^\circ) - X \frac{z^3}{6} \sin(20^\circ) + M_A \frac{z^2}{2} \right) + c_1 z + c_2 \quad (4.16)$$

Imponendo la *condizione 4.13a*

$$y_2(0) = c_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = 0$$

Imponendo la *condizione 4.13b*

$$y_2'(0) = c_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0$$

Infine sostituendo M_A , c_1 e c_2 nelle equazioni 4.15 e 4.16 si ottengono le seguenti

$$y_2'(z) = \frac{Xz}{EJ_2} \left(L_1 \sin(25^\circ) - \frac{z \sin(20^\circ)}{2} \right) + \frac{V_A z}{EJ_2} \left(\frac{z \cos(20^\circ)}{2} - L_1 \cos(25^\circ) \right) \quad (4.17)$$

$$y_2(z) = \frac{Xz^2}{2EJ_2} \left(L_1 \sin(25^\circ) - \frac{z \sin(20^\circ)}{3} \right) + \frac{V_A z^2}{2EJ_2} \left(\frac{z \cos(20^\circ)}{3} - L_1 \cos(25^\circ) \right) \quad (4.18)$$

4.2.3 Tensioni massime e minime

Gli spostamenti verticali sono quindi descritti come:

$$\eta_C^I = y_{11}'(L_1)L_2 + y_{12}(L_2) \quad (4.19)$$

Angolo deformata nel sistema I del corpo 1 $y_{11}'(L_1)$

Spostamento deformata nel sistema I del corpo 2 $y_{12}(L_2)$

$$\eta_C^{II} = y_{21}'(L_1)L_2 + y_{22}(L_2) \quad (4.20)$$

Angolo deformata nel sistema II del corpo 1 $y_{21}'(L_1)$

Spostamento deformata nel sistema II del corpo 2 $y_{22}(L_2)$

Successivamente si procede a calcolare gli spostamenti e angoli sopraelencati definendo alcuni parametri.

$$1. \quad y'_{11}(L_1) = \alpha_1 X + \beta_1$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{L_1^2 \sin(25^\circ)}{2EJ_1} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{358^2 \cdot \sin(25^\circ)}{2 \cdot 71,7 \times 10^3 \cdot 2,161 \times 10^4} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \\ &= -1,16525 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{N}} \\ \beta_1 &= \frac{V_A L_1^2 \cos(25^\circ)}{2EJ_1} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{75,77 \cdot 358^2 \cdot \cos(25^\circ)}{2 \cdot 71,7 \times 10^3 \cdot 2,161 \times 10^4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \\ &= 1,89341 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$2. \quad y_{12}(L_2) = \alpha_2 X + \beta_2$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{L_2^2}{2EJ_2} \left(L_1 \sin(25^\circ) - \frac{L_2 \sin(20^\circ)}{3} \right) = \\ &= \frac{321^2}{2 \cdot 71,7 \times 10^3 \cdot 2,697 \times 10^5} \left(358 \cdot \sin(25^\circ) - \frac{321 \cdot \sin(20^\circ)}{3} \right) = 3,05596 \times 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{N}} \\ \beta_2 &= \frac{V_A L_2^2}{2EJ_2} \left(L_1 \cos(25^\circ) - \frac{L_2 \cos(20^\circ)}{3} \right) = \\ &= \frac{75,77 \cdot 321^2}{2 \cdot 71,7 \times 10^3 \cdot 2,697 \times 10^5} \left(358 \cdot \cos(25^\circ) - \frac{321 \cdot \cos(20^\circ)}{3} \right) = 4,52015 \times 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

$$3. \quad y'_{21}(L_1) = -\alpha_1 X + \gamma_1$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{V_B L_1^2 \cos(25^\circ)}{2EJ_1} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{84,63 \cdot 358^2 \cdot \cos(25^\circ)}{2 \cdot 71,7 \times 10^3 \cdot 2,161 \times 10^4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \\ &= 2,11481 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$4. \quad y_{22}(L_2) = -\alpha_2 + \gamma_2$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{V_B L_2^2}{2EJ_2} \left(L_1 \cos(25^\circ) - \frac{L_2 \cos(20^\circ)}{3} \right) = \\ &= \frac{84,63 \cdot 321^2}{2 \cdot 71,7 \times 10^3 \cdot 2,697 \times 10^5} \left(358 \cdot \cos(25^\circ) - \frac{321 \cdot \cos(20^\circ)}{3} \right) = 5,04870 \times 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'incognita iperstatica si procede con l'equazione 4.4 sostituendo i parametri appena calcolati.

$$\eta_C^I = \eta_C^{II}$$

$$X(\alpha_1 L_2 + \alpha_2) + \beta_1 L_2 + \beta_2 = -X(\alpha_1 L_2 + \alpha_2) + \gamma_1 L_2 + \gamma_2$$

Risolviendo per X

$$X = \frac{(\gamma_1 - \beta_1)L_2 + \gamma_2 - \beta_2}{2(\alpha_1 L_2 + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{(2,11481 - 1,89341) \times 10^{-3} \cdot 321 + (5,04870 - 4,52015) \times 10^{-2}}{2 \cdot (-1,16525 \times 10^{-5} \cdot 321 + 3,05596 \times 10^{-4})} = -11,12 \text{ N}$$

Infine è ora possibile calcolare le tensioni massime e minime agenti sull'arto posteriore, essendo il più sollecitato, notando di rientrare nelle ipotesi di trave in presso-flessione di Saint-Venant.

$$\text{Sforzo assiale } N = X \cos(25^\circ) - V_B \sin(25^\circ) =$$

$$= -11,12 \cdot \cos(25^\circ) - 84,63 \cdot \sin(25^\circ) = -45,84 \text{ N}$$

$$\text{Area trasversale } A = 21 \cdot 28 = 588 \text{ mm}^2$$

$$\text{Momento flettente } M = (V_B \sin(25^\circ) + X \cos(25^\circ))L_1 =$$

$$= (84,63 \cdot \sin(25^\circ) - 11,12 \cdot \cos(25^\circ)) \cdot 358 = 25776,47 \text{ N mm}$$

$$\text{Tensione minima } \sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{J_1} \cdot \frac{21}{2} =$$

$$= -\frac{45,84}{588} - \frac{25776,47}{2,161 \times 10^4} \cdot \frac{21}{2} = -12,6 \text{ MPa}$$

$$\text{Tensione massima } \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{J_1} \cdot \frac{21}{2} =$$

$$= -\frac{45,84}{588} + \frac{25776,47}{2,161 \times 10^4} \cdot \frac{21}{2} = 12,45 \text{ MPa}$$

Riprendendo i risultati ottenuti nella simulazione della stessa posizione, le tensioni riportate qui di seguito, se confrontate con la soluzione analitica, si discostano di circa $\pm 1\%$.

$$\text{Tensione minima } \sigma_{min} = -12,52 \text{ MPa}$$

$$\text{Tensione massima } \sigma_{max} = 12,34 \text{ MPa}$$

Conclusioni

Considerando i risultati ottenuti durante questo studio è possibile osservare che le ipotesi e i dati utilizzati sono veritieri e plausibili. Sfortunatamente è però possibile obiettare alle sezioni degli arti oggetto di studio, queste infatti sono, diversamente da quelle utilizzate, geometricamente molto complesse e non possono quindi essere studiate con l'assunzione di struttura a trave, osservazione che complicherebbe considerevolmente il problema. Inoltre l'arto superiore contiene al suo interno l'attuatore lineare responsabile per il movimento dell'arto inferiore, diminuendo quindi la sezione coinvolta strutturalmente. Tuttavia, essendo l'arto inferiore quello maggiormente sollecitato e le sezioni approssimate sono state ricavate prendendo in considerazione le dimensioni minori presenti nel modello 3D, è possibile concludere che la sezione dell'arto superiore è ragionevole.

Osservando nel dettaglio lo studio riguardante il fattore di impatto è possibile notare che i casi sono stati assunti con il contatto simultaneo tra i quattro arti ed il terreno, un evento poco frequente. Per questo motivo la trattazione del fattore attenuato dal frenamento dei motori è più ragionevole, data la possibilità di correzione della traiettoria distribuendo equamente il carico, dovuto alla velocità finale residua, sui quattro arti. Il precedente tema è però stato affrontato con la prima ipotesi, evitando lo studio con il frenamento dei motori, per la necessità di ulteriori simulazioni considerevolmente complesse e non inerenti agli argomenti trattati nello studio.

Bibliografia

- [1] MIT OpenCourseWare Klaus-Jürgen Bathe, *Finite Element Procedures For Solids And Structures - Linear Analysis*, 2010, https://ocw.mit.edu/courses/res-2-002-finite-element-procedures-for-solids-and-structures-spring-2010/dab1968e6c87110aeb83d0f4e17d75d5_MITRES2_002S10_linear.pdf.
- [2] Specifiche tecniche del robot Spot, <https://support.bostondynamics.com/s/article/Robot-specifications>
- [3] Modello CAD 3D del robot Spot, <https://grabcad.com/library/spot-bostondynamics-1>
- [4] Caratteristiche alluminio 7075 - T6, <https://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA7075T6>
- [5] J.E. Akin, Rice University, *Impact load factors for static analysis*, <https://www.clear.rice.edu/mech403/HelpFiles/ImpactLoadFactors.pdf>