



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Tunneling atomico in tripla buca amplificato
dal campo di cavità**

Candidato:

Filippo Stelin

Matricola 1061500

Relatore:

Ch.mo Prof. Luca Salasnich

Correlatore:

Dott. Giovanni Mazzarella

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
2	ATOMI BOSONICI IN CAMPO DI CAVITÀ	5
2.1	La cavità ottica aperta	5
2.1.1	Il ruolo della diffrazione	6
2.1.2	Le onde gaussiane	6
2.1.3	Modelli di cavità aperte	7
2.2	Il modello di Jaynes-Cummings	7
2.2.1	L'Hamiltoniano del campo elettromagnetico di cavità	8
2.2.1.1	L'equazione di Helmholtz	8
2.2.1.2	La funzione di modo di cavità	11
2.2.1.3	La quantizzazione del campo elettromagnetico	13
2.2.1.4	L'Hamiltoniano di singolo modo	17
2.2.2	L'Hamiltoniano di materia	17
2.3	L'interazione di contatto	26
2.4	Il laser di pompa	29
2.5	Il potenziale di confinamento	30
2.6	L'Hamiltoniano efficace	32
2.6.1	L'Hamiltoniano efficace in approssimazione a tre modi	38
3	DINAMICA DEL SISTEMA IN APPROSSIMAZIONE SEMICLASSICA	47
3.1	Le equazioni di Heisenberg in approssimazione di campo medio	47
4	CONCLUSIONI	53
i	APPENDICE	55
A	APPENDICE A	57
A.1	Determinazione del potenziale di confinamento	57
	BIBLIOGRAFIA	63

ELENCO DELLE FIGURE

- Figura 1 La distribuzione della velocità di atomi di ^{87}Rb nell'esperimento condotto da M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman e E. A. Cornell nel 1995: a sinistra si osserva il gas di bosoni a temperatura appena superiore a T_C , al centro, il condensato poco oltre la soglia e, a destra, la sola frazione di condensato ottenuta in seguito all'evaporazione forzata. [2](#)
- Figura 2 Diagramma di stabilità per le cavità ottiche con specchi piani e sferici. Si osservi che le configurazioni stabili, incluse nell'area a tratti obliqui, comprendono anche sistemi ove uno degli specchi ha raggio di curvatura negativo. L'iperbole tratteggiata, di equazione $g_1 + g_2 = 2g_1g_2$, rappresenta tutti i risonatori confocali, ovvero con $L = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, di cui solo i casi particolari con $g_1 = g_2 = 0$ (planare) e $g_1 = g_2 = 1$ (sferico concavo) risultano stabili [\[30\]](#). [8](#)
- Figura 3 Le due ampiezze interferenti $f_k(\theta)$ e $f_k(\pi - \theta)$ in una collisione fra particelle identiche. [28](#)
- Figura 4 Il potenziale gaussiano a tripla buca unidimensionale $U_{TW}(X)$, riprodotto con $l = \frac{5}{3}w_{TW}$. Nel seguito, le grandezze correlate al minimo di potenziale posto in $X = -l$ saranno denotate con i pedici L , quelle legate al minimo situato in $X = 0$ con i pedici C , e quelle connesse al minimo presente in $X = +l$ con i pedici R . A causa della simmetria per riflessioni di tale potenziale, gli avvallamenti laterali L e R saranno indicati collettivamente con S . [33](#)
- Figura 5 Nel disegno è ritratta in forma schematica la cavità ottica di Fabry-Pérot al cui interno è confinato il gas diluito di atomi bosonici. In **magenta** è riprodotto l'andamento lungo l'asse X della funzione di modo TEM_{01q} di oscillazione del campo elettromagnetico nel risonatore, e in **verde** il potenziale di confinamento a tripla buca unidimensionale con $l = 2\sigma$. [39](#)

INTRODUZIONE

Lo studio di sistemi di atomi ultrafreddi ha ricevuto forte impulso a partire dalla conferma sperimentale della condensazione di Bose-Einstein, transizione di fase di natura quantistica, che ha luogo nel momento in cui, una pluralità di particelle popola lo stato quantico a energia più bassa. Quando ciò si verifica, la temperatura del sistema è inferiore al valore critico T_C^1 , e il gas di atomi è detto *degenere*, in ragione del fatto che le funzioni d'onda associate alle particelle si sovrappongono, dando origine a fenomeni di interferenza quantistica. Equivalentemente, in tali condizioni, la lunghezza d'onda termica di De Broglie

$$\lambda_{db} := \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{Mk_B T}}, \quad (1)$$

che quantifica il raggio della sfera efficace su cui si estende ciascuna particella, deve essere superiore alla distanza media fra gli atomi $d \sim n^{-\frac{1}{3}}$, dove n indica la densità numerica del gas. L'occupazione macroscopica del medesimo stato quantico è possibile soltanto se tali atomi, costituiti da fermioni, presentano spin intero (in unità di \hbar) e, dunque, seguono una particolare statistica, quella di Bose-Einstein. Quest'ultima trae la sua origine dalle ricerche di S. N. Bose che, nel 1924, propose una formulazione alternativa della legge di Planck, basata sull'indistinguibilità di particelle quantistiche identiche, introducendo il concetto di fotone, ovvero di quanto della radiazione elettromagnetica. Tali risultati destarono l'interesse di A. Einstein che estese la descrizione statistica di Bose alle particelle massive, pervenendo, nel 1925, alla predizione teorica della transizione di fase sopracitata in gas ideali [9] nei quali l'interazione fra le particelle può essere trascurata.

Considerate inizialmente astrazioni teoriche, queste conclusioni ebbero un seguito quando, nel 1938, P. L. Kapitza [36] e, indipendentemente, J. F. Allen e A.D. Misener [6], scoprirono che il ^4He , al di sotto della temperatura corrispondente al punto λ , pari a circa 2.18 K [31], diviene un liquido privo di viscosità e dotato di conducibilità termica infinita. Questo nuovo stato della materia, definito da Kapitza *superfluido*, fu ritenuto da F. London una manifestazione della condensazione quantistica, ipotizzando che la differenza fra la temperatura alla quale tale fenomeno iniziava ad emergere, e la temperatura T_C calcolata da Einstein, pari a circa 3.14 K [31], fosse riconducibile alla presenza di rilevanti interazioni tra gli atomi, forze che, come si dimostrò in seguito, impediscono la formazione di un condensato puro. La prima teoria fenomenologica della superfluidità si ebbe nel 1941, quando L. D. Landau propose il modello a due fluidi per la descrizione dello spettro delle eccitazioni del ^4He liquido [39], verificata sperimentalmente negli anni successivi e arricchita dai contributi di R.P. Feynman [25].

Nel 1947, nella sua teoria microscopica dei gas di Bose debolmente interagenti, N. N. Bogoljubov mostrò che, in presenza di interazioni lievemente repulsive, al di sotto della temperatura critica T_C , le eccitazioni a energia più bassa sono rappresentate da modi collettivi caratterizzati da velocità non nulla [14], e giustificò l'assunzione di Landau secondo la quale a bassa energia non vi sono eccitazioni di singola particella. Nel 1957, J. Bardeen, L. Cooper e R. Schrieffer elaborarono una teoria, oggi nota come *teoria BCS*, ricercando l'origine del fenomeno della superconduttività, scoperto da H. K. Onnes nel 1911 [48], nella

1 Per un sistema di particelle libere, la temperatura critica di condensazione è data da $T_C = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{Mk_B}\right) \left[\frac{n}{\zeta(\frac{3}{2})}\right]^{\frac{2}{3}}$ [31], dove M è la massa di un atomo, n la densità numerica del gas, e $\zeta(\frac{3}{2}) := \sum_{l=1}^{+\infty} l^{-\frac{3}{2}} \approx 2,612$.

2 In sistemi di particelle non interagenti, la condizione per la degenerazione è $n\lambda_{db} > \zeta(\frac{3}{2})$.

condensazione di Bose-Einstein di coppie di fermioni debolmente legati, dette *coppie di Cooper* [11]. Descrivendo gli elettroni nei metalli come un gas di fermioni, la formazione di tali coppie è il risultato della deformazione del reticolo ionico positivamente carico del superconduttore [59].

Essendo estremamente bassa la temperatura alla quale la condensazione di Bose-Einstein si realizza, la verifica sperimentale del fenomeno richiede lo sviluppo di sofisticati meccanismi di raffreddamento e confinamento degli atomi neutri, processo che permise di osservare nel 1995 i primi condensati (*BEC*) di atomi di metalli alcalini come ^{87}Rb , ^{23}Na e ^7Li [7]. In quell'esperimento gli atomi vennero inizialmente preraffreddati con tecniche ottiche, poi, in seguito, inseriti all'interno di una trappola magnetica e ivi raffreddati ulteriormente tramite *evaporazione forzata*, tecnica che consiste nell'abbassamento complessivo dell'intensità del potenziale della trappola, al fine di favorire la fuoriuscita degli atomi più energetici dalla stessa e, nel contempo, la ritermalizzazione di quelli rimanenti.

Tale verifica sperimentale valse il premio Nobel nel 1997 a S. Chu, C. Cohen-Tannoudji e W. D. Phillips, *per lo sviluppo di metodi per raffreddare gli atomi con luce laser*, e nel 2001 a E. A. Cornell, W. Ketterle e C. E. Wieman *per la realizzazione della condensazione di Bose-Einstein in gas diluiti di atomi alcalini, e per i primi fondamentali studi sulle proprietà dei condensati*.

Date la varietà e la modellabilità dei potenziali generati dall'interazione con fasci di luce laser, in seguito la condensazione fu realizzata all'interno di reticoli ottici, giungendo ad ottenere *BEC* di altri metalli alcalini come ^{39}K , ^{41}K , ^{85}Rb , ^{133}Cs , in metalli alcalino-terrosi come ^{40}Ca , ^{84}Sr e ^{86}Sr , in metalli di transizione come il ^{52}Cr [28], e in lantanidi come ^{164}Dy [44], ^{168}Er [2], ^{170}Yb , ^{174}Yb e ^{176}Yb , a temperature comprese fra poche decine di nK e $50\ \mu\text{K}$, e densità atomiche racchiuse tra $10^{17}\ \text{m}^{-3}$ e $5 \cdot 10^{21}\ \text{m}^{-3}$. Tra gli elementi appena elencati, gli isotopi di cromo, disprosio ed erbio posseggono elevato momento di dipolo magnetico, pari a, rispettivamente, 6, 10 e 7 magnetoni di Bohr μ_B [62], e dunque presentano interazioni dipolo-dipolo a lungo raggio, di carattere anisotropo [40].

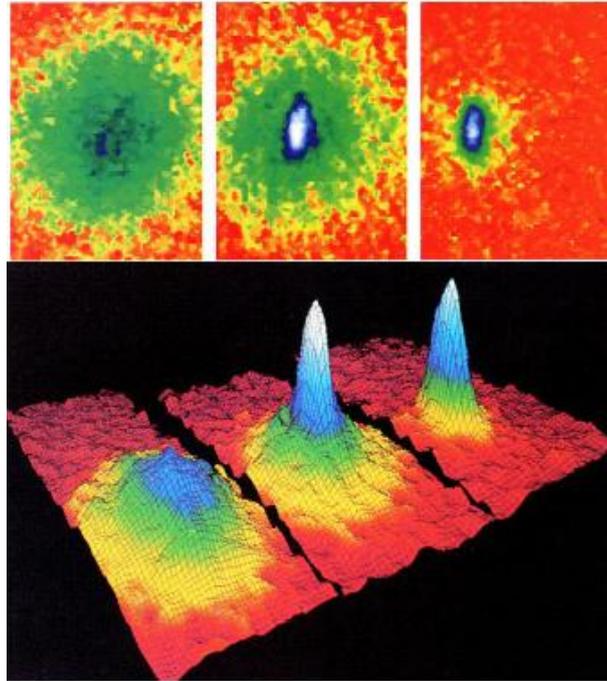


Figura 1: La distribuzione della velocità di atomi di ^{87}Rb nell'esperimento condotto da M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman e E. A. Cornell nel 1995: a sinistra si osserva il gas di bosoni a temperatura appena superiore a T_C , al centro, il condensato poco oltre la soglia e, a destra, la sola frazione di condensato ottenuta in seguito all'evaporazione forzata.

Con i condensati di Bose-Einstein è possibile anche studiare un fenomeno caratteristico della fisica quantistica come l'*effetto tunnel*, consistente nell'attraversamento di una barriera di potenziale da parte

di particelle che, secondo la descrizione classica, non avrebbero energia sufficiente per poterlo compiere. Nella fisica dello stato solido, il *tunneling* può manifestarsi all'interno di una giunzione Josephson, formata da due isole superconduttive separate da un sottile strato di materiale isolante: in tale sistema le coppie di Cooper presenti nei superconduttori sono in grado di superare la barriera di potenziale, come teorizzato da B.D. Josephson nel 1962 [35], insignito del premio Nobel nel 1973. Tale fenomeno, osservato sperimentalmente da P. Anderson nel 1963 [8], può essere riprodotto anche nel contesto dei condensati di bosoni, mediante l'utilizzo di un potenziale a doppia buca, come dimostrato nel 2005 nell'esperimento di M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani e M. K. Oberthaler [4]. In quel contesto venne ravvisato un valore di soglia dello scostamento fra la popolazione bosonica nelle due buche, che permise di riconoscere due regimi nella dinamica: uno contraddistinto da oscillazioni anarmoniche di Josephson, e l'altro da auto-intrappolamento macroscopico, favorito dall'inibizione delle oscillazioni di Josephson ad ampiezza elevata. Un'estensione del sistema appena descritto è quella fornita dal potenziale a tripla buca [1][42], che schematizza la giunzione *source-gate-drain* [15] e rappresenta una sorta di ponte fra la giunzione di Josephson bosonica (BJJ) e i reticoli ottici, coinvolgendo il *tunneling* tra siti secondi vicini: ciò consente un approccio *bottom-up* nella comprensione dei meccanismi che operano nei reticoli ottici infinitamente estesi.

Nella presente dissertazione si analizzerà l'accoppiamento fra gli atomi bosonici in tripla buca di potenziale e un campo di cavità, analogo a quello descritto da B. Wang e Y. Chen [13], focalizzando l'attenzione sui fenomeni di tunneling assistito dal campo elettromagnetico nel risonatore e sull'effetto dello stesso sull'energia di una particella localizzata in uno dei tre siti. Nel secondo capitolo verrà presentato il modello di Jaynes-Cummings, adottato per costruire l'Hamiltoniana di interazione tra un singolo atomo bosonico, schematizzato come un sistema a due livelli, e il campo di cavità. La trattazione si articolerà nella determinazione dell'operatore Hamiltoniano del campo elettromagnetico nel formalismo della seconda quantizzazione, e nella scrittura dell'Hamiltoniano di interazione con la radiazione, illustrando l'equivalenza tra la descrizione di accoppiamento minimale e quella di dipolo-campo elettrico. L'Hamiltoniano di Jaynes-Cummings, ricavato in approssimazione di *onda rotante*, verrà in seguito modificato con l'inserimento di un termine di natura fenomenologica riconducibile alla presenza di un laser forzante, e dello pseudopotenziale di contatto, con il quale si intende approssimare l'effetto delle forze di Van der Waals. In questo contesto verrà introdotta la lunghezza di diffusione in onda s , indicata con a_s , che rappresenta la distanza efficace alla quale una coppia di atomi interagisce a bassa temperatura in un gas diluito, ovvero caratterizzato da una densità numerica n tale per cui $n|a_s|^3 \ll 1$ [16]. Inoltre verrà introdotto il potenziale di confinamento, generato da una trappola a dipolo ottico ed esprimibile come la sovrapposizione di un potenziale armonico bidimensionale e di un potenziale a tripla buca, la cui determinazione sarà illustrata in dettaglio in appendice. L'Hamiltoniano complessivo a molti corpi del sistema sarà poi trascritto esprimendo gli operatori di campo in approssimazione a tre modi, ovvero avvalendosi di funzioni d'onda localizzate nei minimi del potenziale a tripla buca lineare e degli operatori di creazione e annichilazione ad esse associati. Al termine del capitolo verranno ricavate le equazioni di Heisenberg relative agli operatori di seconda quantizzazione degli atomi e del campo di cavità. Nel terzo capitolo tali equazioni saranno scritte supponendo che il sistema si trovi in uno stato coerente e, definendo variabili di squilibrio frazionario e di fase relativa si otterranno le equazioni differenziali ordinarie che governano la dinamica del sistema.

 ATOMI BOSONICI IN CAMPO DI CAVITÀ

Prima di analizzare la dinamica del sistema di atomi ultrafreddi presentato nell'*Introduzione*, ci si soffermerà, dapprima, sul comportamento del campo elettromagnetico all'interno di cavità ottiche aperte di Fabry-Perot, avvalendosi dei risultati delle investigazioni teoriche di G. Fox e T. Li [57] sul ruolo della diffrazione. In seguito, il criterio di G. Boyd e H. Kogelnik [57] consentirà di riconoscere fra tutti i possibili risonatori aperti con specchi sferici o piani i sistemi che permettono l'esistenza di funzioni di modo quasi-stazionarie, in seguito approssimate con le onde di Gauss-Hermite.

Successivamente, si determinerà l'operatore Hamiltoniano appropriato, servendosi del formalismo della seconda quantizzazione. A tale scopo, nel § 2.2 verrà introdotto il modello di Jaynes-Cummings, tramite il quale verrà delineata l'interazione tra il singolo atomo bosonico e il campo di cavità. Si procederà, quindi, con l'illustrazione della quantizzazione del campo elettromagnetico all'interno di una cavità di forma arbitraria, partendo dall'Hamiltoniana classica, enfatizzando il ruolo delle condizioni al contorno. All'Hamiltoniano così ottenuto andrà a sommarsi quello che descrive la struttura interna dell'atomo e quello che schematizza l'interazione tra lo stesso e il campo di cavità. Una volta ricavata l'Hamiltoniana di Jaynes-Cummings, si focalizzerà l'attenzione sull'interazione fra gli atomi bosonici a basse temperature, modellizzata da uno pseudopotenziale di contatto che, attraverso la *lunghezza di diffusione in onda* $s a_s$, ricalca le caratteristiche essenziali del potenziale reale.

Al campo prodotto dalla cavità ottica si affiancherà quello di un laser di pompa esterno in grado di immettere luce coerente attraverso uno degli specchi: tale presenza si tradurrà in un contributo di natura fenomenologica e dipendente dal tempo all'Hamiltoniano del campo elettromagnetico \hat{H}_F , ricavato nel paragrafo 2.2.1.

Inoltre verrà mostrata la forma analitica del potenziale di confinamento adottato, generato dall'interazione tra il campo elettrico oscillante di fasci laser opportunamente disposti e focalizzati, e il momento di dipolo elettrico indotto di ciascun atomo. Come si illustrerà in *Appendice A*, in questo modo è possibile riprodurre un potenziale costituito da un termine armonico bidimensionale, a elevata pulsazione ω_H , e un potenziale a tripla buca lineare e spazialmente simmetrico.

A quel punto vi saranno tutti gli elementi per costruire l'Hamiltoniano complessivo del sistema, in cui la dipendenza esplicita dal tempo sarà rimossa con un'opportuna trasformazione unitaria. Supponendo che la frequenza con cui si verificano fenomeni di emissione spontanea sia molto più bassa rispetto alla desintonizzazione atomica Δ_A , si approssimerà il valore dell'operatore di campo di annichilazione relativo al livello energetico elettronico eccitato $\hat{\Psi}_e(\vec{R})$ al suo valore di equilibrio, ottenendo un Hamiltoniano efficace \hat{H}_{eff} a partire dalle equazioni del moto dell'operatore di campo di annichilazione corrispondente allo stato elettronico fondamentale $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$ e dell'operatore di annichilazione di un fotone di pulsazione ω_C . Il capitolo si conclude con la scrittura degli operatori di campo degli atomi bosonici in approssimazione a tre modi, un accorgimento che consentirà di esprimere l'Hamiltoniana \hat{H}_{eff} in una forma conveniente per l'analisi del fenomeno del *tunneling* atomico tra i minimi del potenziale, in seguito alla determinazione delle equazioni di Heisenberg relative agli operatori di annichilazione di atomi e fotoni.

2.1 LA CAVITÀ OTTICA APERTA

Prima di addentrarsi nella descrizione del sistema fisico completo, attraverso il modello di Jaynes-Cummings, è utile soffermarsi sulle caratteristiche salienti delle cavità ottiche aperte e sul comportamento delle onde

elettromagnetiche all'interno di esse. Tale classe di cavità ottiche comprende tutti i sistemi costituiti, essenzialmente, da due specchi perfettamente riflettenti disposti a una distanza L lungo l'asse ottico e sprovvisti di pareti laterali.

E' proprio quest'ultima restrizione a permettere di ridurre il numero di modi di oscillazione del campo elettromagnetico all'interno della cavità ¹ [56] e di migliorarne la coerenza rispetto al caso di un parallelo-otopo chiuso, con la conseguente maggiore perdita di energia del campo elettromagnetico di cavità verso l'esterno attraverso processi diffrattivi, il cui rilievo può essere contenuto aumentando la separazione fra le due superfici riflettenti. Le pareti degli specchi, d'altro canto, possono avere una superficie piana, sferica concava o convessa tipicamente compresa fra 10^{-2} cm^2 a 10^2 cm^2 [60] e una sezione lungo l'asse ottico cui sono allinati, che si fa coincidere, d'ora in avanti, con l'asse y , di tipo circolare o, più raramente, rettangolare [60].

2.1.1 *Il ruolo della diffrazione*

La moderna comprensione dei fenomeni che si verificano all'interno di risonatori ottici aperti si deve a Gardner Fox e Tingye Li [57], che nel 1961 investigarono gli effetti della diffrazione delle onde elettromagnetiche all'interno di interferometri di Fabry-Pérot impiegati nei maser come risonatori ottici [57].

In seguito ad ogni riflessione sulle pareti finite degli specchi, un fascio di luce immesso nella cavità rilascia, infatti, una parte della sua energia a causa della diffrazione, i cui effetti, secondo il *principio di Babinet*, sono assimilabili a quelli di un diaframma della stessa sezione praticato su un piano infinitamente esteso [45].

In particolare essi osservarono che, dopo ripetute riflessioni l'ampiezza trasversa dei campi non variava più significativamente da una riflessione ad un'altra, mentre il diametro del fascio raggiungeva un minimo in prossimità del punto medio fra i due specchi (il cosiddetto *beam waist*) e un massimo agli estremi: questa configurazione quasi-stazionaria delle ampiezze dei campi fu associata a una sovrapposizione di modi normali. Nonostante la loro stazionarietà sia solo approssimata, questi particolari modi di oscillazione del campo elettromagnetico si distinguono per un fattore di qualità Q ² più elevato rispetto a quello delle onde piane, indice di una minore dissipazione dell'energia attraverso la diffrazione rispetto alle prime. Pertanto, per risonatori siffatti, le funzioni di modo non sono definite in maniera rigorosa, dal momento che non esistono configurazioni stazionarie [60] come quelle ravvisabili nelle cavità chiuse, di cui quella a forma di parallelepipedo costituisce l'esempio più noto.

2.1.2 *Le onde gaussiane*

Poco più tardi, Gary Boyd e James P. Gordon dimostrarono che questi modi di oscillazione quasi-stazionari potevano ridursi a modi di Gauss-Hermite nel limite di perdite diffrattionali molto piccole o di grandi specchi ed estesero questo risultato a tutte le cavità aperte dotate di pareti sferiche concave perfettamente riflettenti separate da una distanza fino a due volte il loro raggio di curvatura [57]. Questo insieme discreto di modi normali rappresenta la forma confinata di onde gaussiane, ovvero funzioni d'onda parassiali caratterizzate da una direzione di propagazione lungo l'asse del fascio e da una piccola divergenza che permette di riprodurre l'andamento dei modi quasi-stazionari osservati da Fox e Li. Essendo, inoltre, il campo elettrico e magnetico, la cui ampiezza segue la distribuzione gaussiana, quasi ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda, tali funzioni d'onda vengono indicate come TEM_{mn} , ove l'indice m (risp. n) è il numero di nodi dell'ampiezza lungo la direzione x (risp. z), secondo la nomenclatura in-

1 Si consideri, ad esempio, la radiazione prodotta da un laser He-Ne, di lunghezza d'onda $\lambda = 633 \text{ nm}$ e con una larghezza di riga $\Delta\nu = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Hz}$, all'interno di un risonatore di lunghezza $L = 50 \text{ cm}$. In una cavità aperta, il numero di modi longitudinali è dato da $N_o = \frac{2L\Delta\nu}{c} \approx 6$, mentre in una cavità delimitata da pareti cilindriche di raggio $a = 1.5 \text{ mm}$, il numero di modi diviene $N_c = \frac{8\pi\nu^2 V \Delta\nu}{c^3} = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 N_o \approx 1.2 \cdot 10^9$ [60], dove $V = \pi a^2 L$ indica il volume della cavità.

2 Il fattore di qualità, indicato frequentemente con Q , è definito come il rapporto fra l'energia immagazzinata in una cavità, moltiplicata per 2π , e l'energia dissipata in seguito a un ciclo [60], ossia dopo due riflessioni, nel caso di una cavità a due specchi [60].

trodotta proprio da Boyd e Gordon [57]. All'interno di un risonatore, le funzioni d'onda quasi-stazionarie possono essere decomposte in due onde gaussiane che si propagano in direzioni opposte, e alla loro denominazione si aggiunge un terzo indice, detto q , che discende dalle condizioni di annullamento del campo elettromagnetico sulla superficie degli specchi, come si avrà modo di provare in § 2.2.1.2.

A loro volta, questi modi di oscillazione possono essere ulteriormente classificati in *modi longitudinali* o gaussiani in senso stretto, TEM_{00q} , la cui ampiezza del campo raggiunge il suo valore massimo lungo l'asse del risonatore e decresce fino a zero nel piano perpendicolare all'asse ottico e in *modi trasversali* (TEM_{nmq} con $n, m \neq 0$), ove l'ampiezza del campo è zero lungo l'asse del risonatore e cambia segno lungo le direzioni ad esso ortogonali, e possono essere convenientemente espressi in termini dei polinomi ortogonali di Hermite o di Laguerre, a seconda della geometria della cavità. Queste funzioni d'onda danno luogo a insiemi completi ed ortonormali, differentemente dalle funzioni di modo esatte del risonatore che risultano, invece, biortogonali rispetto all'insieme dei modi aggiunti, corrispondenti a funzioni d'onda che si propagano nella direzione opposta lungo l'asse ottico [58]. Essendo un'ottima approssimazione delle funzioni di modo effettive della cavità aperta in analisi [52], si impiegheranno comunque le TEM_{nmq} (cfr. $\vec{u}(\vec{R})$ in (126)) in luogo delle prime, trascurando così, la perdita di energia per diffrazione e la non stazionarietà dei modi reali.

2.1.3 Modelli di cavità aperte

Tuttavia, l'esistenza di configurazioni quasi-stazionarie per le funzioni d'onda di campo elettromagnetico all'interno delle cavità aperte non è garantita ma dipende, come osservato già da Fox e Lie, dalla superficie degli specchi e dalla loro distanza reciproca L lungo l'asse ottico. Più avanti, Gary Boyd e Herwig Kogelnik, avvalendosi della *ray transfer matrix analysis* [57], derivarono un criterio di stabilità per cavità aperte dotate di specchi sferici: se r_1 e r_2 sono i loro raggi di curvatura, tutti i risonatori stabili soddisfano la disuguaglianza

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{r_1}\right) \left(1 - \frac{L}{r_2}\right) \leq 1, \quad (2)$$

pena la crescita illimitata del diametro del fascio e la sua totale dispersione. Introducendo il parametro di stabilità $g_i = 1 - L/r_i$ per ciascuno dei due specchi ($i = 1, 2$), la regione della stabilità appena definita può essere associata alla regione compresa fra i due rami dell'iperbole equilatera $g_2 = 1/g_1$ e i due assi cartesiani definiti dai parametri g_1 e g_2 : come si osserva in Fig. 2, le cavità con specchi sferici confocali si trovano al limite della stabilità, mentre il risonatore concentrico o *sferico* risulta instabile. Inoltre, dal diagramma della stabilità, si può evincere come anche cavità aperte asimmetriche, come quelle dotate di uno specchio piano ed uno sferico ($r_i \equiv r_{\mp}$ con $r_+ \rightarrow \infty$), ricadano all'interno della regione della stabilità: si tratta, per esempio, del risonatore semiconfocale (con $L = r_-/2$) e del risonatore semiconcentrico o *emisferico* (con $L = r_-/4$) [52].

Infine, mettendo in relazione il numero di Fresnel con l'energia dissipata per ciclo di alcuni risonatori stabili, si trova che quelli con pareti riflettenti sferiche confocali quando $F \geq 0,5$ possiedono una minore dissipazione rispetto alle cavità di Fabry-Perot propriamente dette ($g_i = 1$), mentre il risonatore prescelto, ovvero quello quasi planare o *superconfocale*, costituito da due specchi con raggio di curvatura più grande della distanza fra di essi, presenta caratteristiche intermedie [52].

2.2 IL MODELLO DI JAYNES-CUMMINGS

Il modello adottato per descrivere l'interazione tra un atomo ultrafreddo e la radiazione all'interno di una cavità risonante è quello proposto da da Edwin T. Jaynes e Frederick W. Cummings nel 1963 [33] e, indipendentemente, da Harry Paul nello stesso anno [54]. Secondo tale modello, introdotto per studiare la relazione tra la teoria quantistica della radiazione e quella semiclassica nella descrizione del fenomeno dell'emissione spontanea [55], un atomo può essere assimilato a un sistema a due livelli, in grado di scambiare energia con un modo di oscillazione del campo elettromagnetico in un risonatore.

Dal punto di vista sperimentale, la riproduzione di un sistema siffatto è stata effettuata dapprima nella

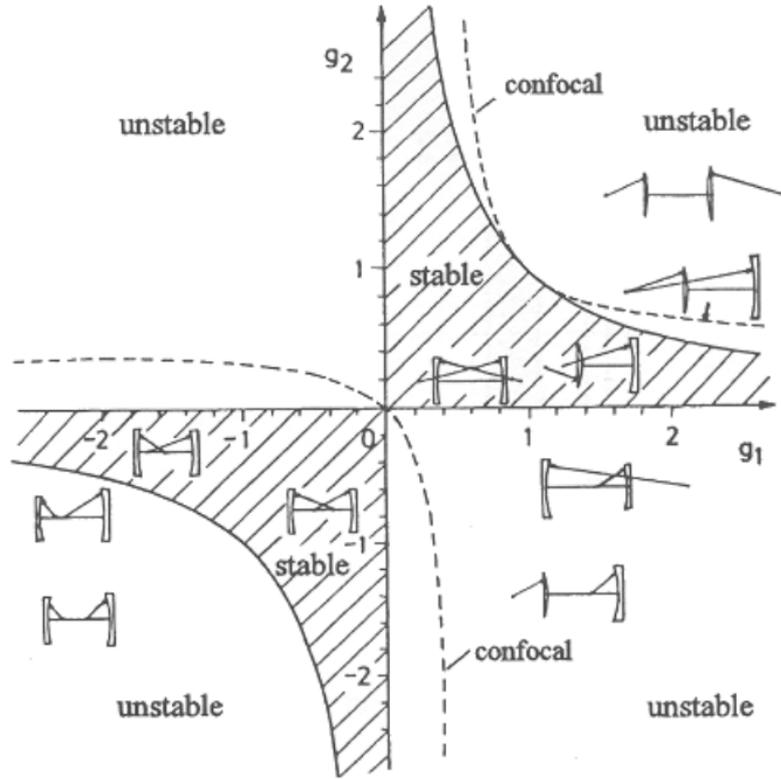


Figura 2: Diagramma di stabilità per le cavità ottiche con specchi piani e sferici. Si osservi che le configurazioni stabili, incluse nell'area a tratti obliqui, comprendono anche sistemi ove uno degli specchi ha raggio di curvatura negativo. L'iperbole tratteggiata, di equazione $g_1 + g_2 = 2g_1g_2$, rappresenta tutti i risonatori confocali, ovvero con $L = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, di cui solo i casi particolari con $g_1 = g_2 = 0$ (planare) e $g_1 = g_2 = 1$ (sferico concavo) risultano stabili [30].

regione delle microonde, grazie all'utilizzo di *maser* a un atomo, nei quali un fascio di atomi di Rydberg, dotati di elevati momenti di dipolo elettrico e magnetico, viene convogliato all'interno di una cavità con pareti conduttrici, mantenute alla temperatura di punto λ del ^4He [51]. In seguito, il progresso nella costruzione di cavità ottiche ad alto fattore di qualità Q [55] ha consentito di osservare fenomeni predetti dal modello di Jaynes-Cummings anche nella regione ottica [46], selezionando un singolo modo di oscillazione del campo elettromagnetico o anche più modi ampiamente spazati in frequenza [24]. Ciò è stato possibile anche servendosi di atomi non eccitati, a differenza di quelli di Rydberg, e a basso momento di dipolo elettrico, aumentando l'intensità del campo elettrico nel risonatore [54].

L'operatore Hamiltoniano atto a descrivere il sistema appena delineato può essere suddiviso in una componente di radiazione \hat{H}_F contenente i contributi del campo elettromagnetico, una di materia \hat{H}_A , e uno di interazione \hat{H}_I :

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_I . \quad (3)$$

Nel seguito, l'analisi dell'Hamiltoniana si articolerà in due fasi: la costruzione del termine di campo, e quella dei termini che coinvolgono l'atomo e la sua interazione con il campo nel risonatore.

2.2.1 L'Hamiltoniano del campo elettromagnetico di cavità

2.2.1.1 L'equazione di Helmholtz

Al fine di determinare la forma dell'Hamiltoniano di radiazione \hat{H}_F , occorrerà spiegare la scelta della gauge e richiamare la procedura di quantizzazione dei campi, ovvero la scrittura dei campi elettrico e

magnetico in termini di operatori di creazione e annichilazione relativi a ciascun modo di oscillazione. L'Hamiltoniana classica H_F può essere espressa come l'integrale della densità di energia associata al campo elettromagnetico di cavità esteso al volume V in cui esso è definito:

$$H_F = \int_V d^3\vec{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \right). \quad (4)$$

Prima di procedere all'integrazione presente nell'espressione relativa all'Hamiltoniana H_F , si deriveranno le equazioni d'onda relative al potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e a quello scalare $\Phi(\vec{r}, t)$, partendo dalle equazioni di Maxwell. Fra queste ultime, le equazioni differenziali omogenee nei campi elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sono

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (5)$$

mentre quelle non omogenee sono

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (6)$$

dove è stata utilizzata la relazione tra permittività elettrica ε_0 , permeabilità magnetica μ_0 e la velocità della luce c nel vuoto:

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}. \quad (7)$$

I campi elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t)$ possono essere riscritti in termini del potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e del potenziale scalare $\Phi(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (8)$$

Facendo uso della relazione vettoriale $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t)$ e inserendo le relazioni (8) nella seconda equazione inomogenea (6), si ottiene l'equazione d'onda per il potenziale vettore:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right] - \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t). \quad (9)$$

Sostituendo, invece, la seconda relazione delle (8), si ottiene l'equazione d'onda per il potenziale scalare Φ :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t)) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}. \quad (10)$$

Le equazioni differenziali (9) e (10) per il potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e per il potenziale scalare $\Phi(\vec{r}, t)$ così ottenute possono essere disaccoppiate con un'opportuna scelta della *gauge*. Sapendo che i campi $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sono lasciati invarianti da potenziali vettori che differiscono per il gradiente di una funzione scalare,

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t), \quad (11)$$

e da potenziali scalari che differiscono per la derivata temporale della stessa funzione,

$$\Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (12)$$

si può affermare che una scelta qualsiasi della $\nabla \Lambda(\vec{r}, t)$ lascia inalterata la componente solenoidale del potenziale vettore, $\vec{A}_T(\vec{r}, t)$, detta *campo trasverso*, che risulta, pertanto, un grado di libertà ineliminabile del sistema [12]. La parte rimanente del potenziale vettore, che, per il teorema di decomposizione di Helmholtz, coincide con la componente irrotazionale di $\vec{A}(\vec{r}, t)$, detta *campo longitudinale* [17], $\vec{A}_L(\vec{r}, t)$, può essere eliminata, infatti, con l'aggiunta del gradiente di una funzione scalare, che costituisce un termine puramente irrotazionale. Lo stesso potenziale scalare, inoltre, può essere cancellato da una particolare scelta della $\Lambda(\vec{r}, t)$, la cosiddetta *gauge temporale*.

Con l'intento di studiare le soluzioni delle eq. (9) e (10) in assenza di cariche, $\rho(\vec{r}, t) = 0$, e di correnti, $\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$, si orienterà la scelta della gauge verso quella in grado di annullare sia il potenziale scalare che la componente longitudinale del potenziale vettore ³,

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 , \quad (14)$$

ovvero la *gauge di radiazione* ⁴ [12]. Grazie alla condizione (14), le equazioni (8) per il campo elettrico e il campo magnetico diventano

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t} , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_T(\vec{r}, t) , \quad (16)$$

l'equazione differenziale (9) si tramuta in una banale identità, mentre la (10) si riduce a

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_T(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 . \quad (17)$$

Nell'ipotesi che all'interno della cavità si possano ottenere onde stazionarie, alla soluzione dell'equazione d'onda trovata (17) si può imporre come *ansatz* la separazione delle variabili posizione e tempo:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \equiv \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \mathcal{A}q(t)\vec{u}(\vec{r}) , \quad (18)$$

dove \mathcal{A} è una costante dimensionale che verrà specificata nel seguito. Sostituendo l'espressione a secondo membro della (18) nell'equazione (17) si ottiene:

$$q(t)\vec{\nabla}^2\vec{u}(\vec{r}) - \frac{1}{c^2}\ddot{q}(t)\vec{u}(\vec{r}) = 0 . \quad (19)$$

Considerando ciascuna componente $j = x, y, z$ del vettore \vec{u} dipendente dalle sole posizioni, si giunge alla relazione:

$$\frac{\vec{\nabla}^2 u_j(\vec{r})}{u_j(\vec{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} . \quad (20)$$

Poiché a primo membro della (20) vi sono soltanto funzioni della posizione all'interno cavità, e a secondo membro soltanto funzioni del tempo, allora le espressioni presenti a ciascun membro possono essere poste uguali a una costante, avente le dimensioni fisiche dell'inverso del quadrato di una lunghezza. Tale costante viene posta uguale all'opposto del quadrato del numero d'onda k , quantità il cui segno discende dal fatto che gli autovalori del laplaciano sono negativi [54]. Grazie all'accorgimento appena adottato, si ottengono due equazioni indipendenti per $\vec{u}(\vec{r})$ e $q(t)$, ovvero l'*equazione di Helmholtz* per la parte spaziale

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u}(\vec{r}) + k^2 \vec{u}(\vec{r}) = 0 , \quad (21)$$

e quella di oscillazione per la parte temporale

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 , \quad (22)$$

dove $\omega := ck$ indica la pulsazione con cui oscilla $q(t)$.

Ora si focalizzerà l'attenzione sulle soluzioni dell'equazione di Helmholtz, imponendo condizioni al contorno discendenti dalle caratteristiche della cavità ottica entro la quale oscilla il campo elettromagnetico.

³ In assenza di cariche e correnti, una funzione $\Lambda(\vec{r}, t)$ che consente di ottenere l'annullamento del potenziale scalare e della componente longitudinale del potenziale vettore a partire da $\Phi(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}(\vec{r}, t)$ qualsiasi è [12]:

$$\Lambda(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \left(\frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^t dt' \int d^3\vec{r}' \left(\frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'}^2 \Phi(\vec{r}', t')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) + \int_{t_0}^t dt' \Phi(\vec{r}, t') , \quad (13)$$

dove t_0 è un istante temporale.

⁴ Si osservi che tale scelta della gauge, a differenza di quella di Lorentz,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 , \quad (15)$$

con $A^\mu \equiv (\frac{\Phi}{c}, A_x, A_y, A_z)$ e $\partial_\mu \equiv (\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, non è relativisticamente invariante.

2.2.1.2 La funzione di modo di cavità

Tra i modi di oscillazione si considereranno onde stazionarie generate dalla sovrapposizione di onde propagantisi quasi parallelamente all'asse ottico, coincidente con l'asse y , e a breve distanza dallo stesso, in quanto rappresentano i modi più stabili e meno soggetti a perdite. Indicando il vettore di polarizzazione con $\hat{e}_{k,s}$, dove s denota lo stato di polarizzazione, la funzione $\vec{u}(\vec{r})$, ora ridenominata $\vec{u}_s(\vec{r})$, può essere, pertanto, scritta separando i fattori di propagazione primaria $e^{\pm ik_y y}$ dalle ampiezze $U(\vec{r})$ e $U^*(\vec{r})$, nel modo seguente:

$$\vec{u}_s(\vec{r}) = \left(\frac{U(\vec{r})e^{ik_y y} + U^*(\vec{r})e^{-ik_y y}}{2} \right) \hat{e}_{k,s} , \quad (23)$$

dove $U(\vec{r})$ e $U^*(\vec{r})$ sono funzioni complesse caratterizzate dall'essere quasi costanti lungo l'asse y e, quindi, tali per cui $\left| \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \right| \ll |kU(\vec{r})|$, $\left| \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial y^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial z^2} \right|$ e $\left| \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial y^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial x^2} \right|$. Sostituendo l'espressione relativa a $\vec{u}_s(\vec{r})$ nell'equazione di Helmholtz (21) e tenendo conto di quanto appena osservato, si ottengono due equazioni di Helmholtz parassiali: una associata all'onda propagantesi nella direzione positiva dell'asse y ,

$$\vec{\nabla}_{\perp}^2 U(\vec{r}) + 2ik \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} = 0 , \quad (24)$$

l'altra associata all'onda propagantesi nella direzione negativa dello stesso asse,

$$\vec{\nabla}_{\perp}^2 U^*(\vec{r}) - 2ik \frac{\partial U^*(\vec{r})}{\partial y} = 0 , \quad (25)$$

dove $\vec{\nabla}_{\perp}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ simboleggia la parte trasversale del laplaciano $\vec{\nabla}^2$. Le soluzioni delle equazioni (24) e (25) possono essere ricavate in ottima approssimazione [56] calcolando l'integrale di Huygens in approssimazione di Fresnel [60], ovvero avvalendosi di onde sferiche parassiali. In questo modo, con un'opportuna ulteriore separazione delle variabili, è possibile ottenere per le equazioni sopracitate due famiglie di soluzioni, contraddistinte dagli indici m e n che denotano il grado dei polinomi di Hermite nei quali sono fattorizzate. Indicando con $H_l(\xi) = (-1)^l e^{\xi^2} \frac{d^l}{d\xi^l} e^{-\xi^2}$ [21] l' l -esimo polinomio nella variabile ξ , si ottengono le soluzioni [60]:

$$U_{mn}(\vec{r}) = \frac{C_{mn}}{w(y)\sqrt{\pi}2^{m+n-1}m!n!} H_m \left(\frac{\sqrt{2}z}{w(y)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(y)} \right) \cdot \exp \left\{ -(x^2 + z^2) \left(\frac{1}{w(y)^2} - \frac{ik_{mn}}{2R(y)} \right) - i(1+m+n)\psi(y) \right\} , \quad (26)$$

e

$$U_{mn}^*(\vec{r}) = \frac{C_{mn}}{w(y)\sqrt{\pi}2^{m+n-1}m!n!} H_m \left(\frac{\sqrt{2}z}{w(y)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(y)} \right) \cdot \exp \left\{ -(x^2 + z^2) \left(\frac{1}{w(y)^2} + \frac{ik_{mn}}{2R(y)} \right) + i(1+m+n)\psi(y) \right\} , \quad (27)$$

dove k_{mn} rappresenta il numero d'onda associato al modo di oscillazione caratterizzato dai numeri quantici m e n , C_{mn} una costante reale e dimensionale il cui significato apparirà chiaro in seguito. Inoltre, nelle (26) e (27) compaiono tre parametri che caratterizzano il fascio: il raggio di curvatura del fronte d'onda $R(y)$ indica il raggio di curvatura del fronte d'onda, la larghezza radiale del fascio $w(y)$, e la *fase di Gouy* $\psi(y)$. Tali parametri sono espressi in termini della *lunghezza di Rayleigh* y_R ⁵, ossia la distanza oltre la quale l'allargamento del fascio dovuto alla diffrazione diviene significativo:

$$w(y) = w_{0,mn} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{y_R} \right)^2} , \quad R(y) = y + \frac{y_R^2}{y} , \quad \psi(y) = \arctan \left(\frac{y}{y_R} \right) , \quad (29)$$

⁵ La *lunghezza di Rayleigh* per una cavità costituita da specchi aventi lo stesso raggio di curvatura R_M è data da:

$$y_R = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{1+g}{1-g}} , \quad (28)$$

dove $g = 1 - \frac{L}{R_M}$.

dove $w_{0,mn}$ la larghezza radiale minima del fascio, la cosiddetta *beam waist* introdotta da Boyd e Gordon [?], legata alla lunghezza di Rayleigh dalla relazione $y_R = \frac{k_{mn}w_{0,mn}^2}{2}$ [56]. Inserendo le espressioni a secondo membro delle (26) ed (27) nella (25), la funzione di modo $\vec{u}_s(\vec{r})$, ora ridenominata $\vec{u}_{mn,s}(\vec{r})$ assume la forma:

$$\vec{u}_{mn,s}(\vec{r}) = \frac{C_{mn}}{w(y)\sqrt{\pi}2^{m+n-1}m!n!} H_m\left(\frac{\sqrt{2}z}{w(y)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(y)}\right) e^{-\frac{x^2+z^2}{w^2(y)}} \cdot \cos\left(k_{mn}y - (1+m+n)\psi(y) + \frac{k_{mn}(x^2+z^2)}{2R(y)}\right) \hat{e}_{k_{mn},s} . \quad (30)$$

Alla funzione di modo $\vec{u}_{mn,s}(\vec{r})$ appena ricavata si impongono delle condizioni al contorno che riflettano la richiesta di soppressione dei moti delle particelle cariche lungo le pareti cilindriche della cavità in analisi. La prima di queste corrisponde alla richiesta di annullamento della componente del campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ tangente alla superficie di frontiera del risonatore ∂V . Considerando i campi generati dal singolo modo $\vec{u}_{mn,s}(\vec{r})$ e richiamando la relazione di *gauge* di Coulomb, quanto postulato si traduce in [54]:

$$\hat{e}_{\parallel}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)|_{\partial V} = -\hat{e}_{\parallel}(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_{\partial V} = -\mathcal{A}q_{mn}(t)\hat{e}_{\parallel}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{mn,s}(\vec{r})|_{\partial V} = 0 , \quad (31)$$

ossia

$$\hat{e}_{\parallel}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{mn,s}(\vec{r})|_{\partial V} = 0 , \quad (32)$$

ove $\hat{e}_{\parallel}(\vec{r})$ è un versore appartenente al piano tangente alla superficie di frontiera della cavità nel punto \vec{r} , mentre $q_{mn}(t)$ è la funzione dipendente dal tempo associata al modo, che soddisfa l'equazione $\ddot{q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 q_{mn}(t) = 0$, in cui $\omega_{mn} := ck_{mn}$. Nella seconda condizione si richiede, invece, l'annullamento della componente normale a ∂V del campo magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t)$, quindi, si ha

$$\hat{e}_{\perp}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)|_{\partial V} = \hat{e}_{\perp}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}]|_{\partial V} = \mathcal{A}q_{mn}(t)\hat{e}_{\perp}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mn,s}(\vec{r})]|_{\partial V} = 0 , \quad (33)$$

ossia

$$\hat{e}_{\perp}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mn,s}(\vec{r})]|_{\partial V} = 0 , \quad (34)$$

dove $\hat{e}_{\perp}(\vec{r})$ nel punto \vec{r} rappresenta il versore ortogonale al piano tangente alla superficie di bordo nel punto \vec{r} . Le condizioni (32) e (34) appena illustrate non sono indipendenti e in particolare, la soddisfazione della (34) implica quella della (32) [54]. Inserendo nelle (32) e (34) l'espressione relativa alla funzione di modo $\vec{u}_{mn,s}(\vec{r})$ (30), e considerando una cavità di Fabry-Pérot costituita da specchi posti in prossimità dei piani $y = \pm \frac{L}{2}$, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \cdot \vec{u}_{mn,s}(\vec{r})|_{y=\pm \frac{L}{2}} &= 0 , \\ \hat{e}_y \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mn,s}(\vec{r})]|_{y=\pm \frac{L}{2}} &= 0 , \\ \hat{e}_z \cdot \vec{u}_{mn,s}(\vec{r})|_{y=\pm \frac{L}{2}} &= 0 . \end{aligned} \quad (35)$$

Dalla prima e dalla terza delle equazioni trovate si ottiene la seguente condizione sui numeri d'onda, che porta all'emergere di un nuovo indice di modo q :

$$k_{mnq} \approx \frac{\pi}{L} \left[(2q+1) + \frac{(1+m+n)}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{L}{R_M}\right) \right] , \quad (36)$$

dove R_M è il raggio di curvatura degli specchi [56] che, in una cavità ottica stabile, coincide con il raggio di curvatura del fronte d'onda calcolato sulla superficie degli specchi [60]. Il numero quantico appena introdotto identifica i modi *assiali* o *longitudinali* e assume valori tipicamente molto elevati [56], mentre i numeri interi non negativi m e n , generalmente nulli o pari a poche unità, contrassegnano i diversi modi *trasversali* associati a ciascun modo longitudinale e sono denotati come modi TEM_{mn} , dall'inglese

Transverse Electro-Magnetic [52]. La funzione di modo $\vec{u}_{mn,s}(\vec{r})$ ora dipenderà, quindi, anche dal numero intero non negativo q , così come $w_{0,mn}$ e la costante C_{mn} , che riveste il ruolo di costante di normalizzazione di $\vec{u}_{mn,s}(\vec{r})$, dal momento che quest'ultima deve soddisfare la relazione:

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{u}_{mnq}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{mnq}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \vec{u}_{mnq}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{mnq}(\vec{r}) = 1 . \quad (37)$$

Poiché in una cavità di Fabry-Pérot la lunghezza di Rayleigh è molto maggiore della distanza tra i due specchi L , il raggio di curvatura del fronte d'onda diverge $R(y) \rightarrow +\infty$, la fase di Gouy tende ad annullarsi $\psi(y) \rightarrow 0$, il numero d'onda k_{mnq} (36) diventa dipendente dalle sole q , mentre la larghezza del fascio diviene costante lungo l'asse ottico $w(y) \rightarrow w_{0,q}$ [5] e indipendente da m e n , quindi la (30) assume la forma seguente:

$$\vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2^{m+n} n! m!}} \right) \left(\frac{2}{w_{0,q} \sqrt{\pi L}} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_{0,q}} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_{0,q}} \right) e^{-\frac{x^2+z^2}{w_{0,q}^2}} \cos(k_q y) \hat{e}_{k_q,s} , \quad (38)$$

nella quale è stato esplicitato il fattore di normalizzazione $C_{mnq} := \left(\frac{1}{\sqrt{2^{m+n} n! m!}} \right) \left(\frac{2}{w_{0,q} \sqrt{\pi L}} \right)$, laddove ora il numero d'onda assume la forma semplice $k_{mnq} \approx k_q := \frac{\pi(2q+1)}{L}$. Le funzioni di modo $\{\vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})\}$ soddisfano le relazioni di ortonormalità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{m'n',s'}(\vec{r}) = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{qq'} \delta_{ss'} , \quad (39)$$

e formano una base ortonormale.

2.2.1.3 La quantizzazione del campo elettromagnetico

Il potenziale vettore può essere ora espanso in termini della base ortonormale di funzioni di modo $\{\vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})\}$ appena ricavata, sostituendo la costante \mathcal{A} introdotta nella (18) con il fattore $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ dipendente dalla permittività dielettrica del vuoto, ottenendo:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{m,n,q,s} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q_q(t) \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) , \quad (40)$$

dove ciascuna $q_{mnq}(t)$, in seguito all'approssimazione effettuata nella (38), dipende dal solo numero quantico q . Servendosi della nuova espressione per il potenziale vettore, il vincolo fornito dalla *gauge di Coulomb*, presente nella seconda delle (14), valido per ciascun modo di oscillazione contrassegnato dal pedice mnq, s , può essere riscritto come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) = 0 . \quad (41)$$

Sostituendo la (40) nella prima delle (16), è possibile esprimere il campo elettrico in termini delle funzioni di modo $\{\vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})\}$ come

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = - \sum_{m,n,q,s} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \dot{q}_q(t) \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) , \quad (42)$$

mentre, inserendo il termine a secondo membro della (40) nella seconda delle (16), si riesprime il campo magnetico come

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{m,n,q,s} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q_q(t) \vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) . \quad (43)$$

Sostituendo le espressioni trovate per i campi elettrico e magnetico nell'Hamiltoniana di radiazione introdotta nella (4), si trova:

$$H_F = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n,q,s \\ m',n',q',s'}} \dot{q}_q(t) \dot{q}_{q'}(t) \int_V d^3\vec{r} \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) + \\ + \frac{c^2}{2} \sum_{\substack{m,n,q,s \\ m',n',q',s'}} q_q(t) q_{q'}(t) \int_V d^3\vec{r} (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r})) . \quad (44)$$

Al fine di riscrivere l'Hamiltoniana in una forma più semplice e intellegibile, si può esprimere il prodotto fra i due rotori nel modo seguente⁶:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u}_{kmq,s}(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] + \\ + \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] . \quad (45)$$

Servendosi della relazione di ortonormalità fra le funzioni di modo si semplifica notevolmente il primo termine della (44) riducendolo a una somma singola:

$$H_F = \frac{1}{2} \sum_{mnq,s} \dot{q}_q^2(t) + \frac{c^2}{2} \sum_{\substack{m,n,q,s \\ m',n',q',s'}} q_q(t) q_{q'}(t) \left[\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot [\vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] + \right. \\ \left. + \int_V d^3\vec{r} \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] \right] . \quad (46)$$

Il primo dei due integrali sul volume del risonatore può essere riscritto come un integrale di superficie grazie al teorema della divergenza di Gauss-Ostrogradskij:

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot [\vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] = \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot [\vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] , \quad (47)$$

dove $d\vec{S}(\vec{r})$ indica un vettore ortogonale alla superficie della cavità nel punto \vec{r} , mentre ∂V la superficie di frontiera associata alla regione di volume V nella quale sono definite le due funzioni di modo. Dal momento che il campo elettrico è parallelo alla somma dei vettori $\vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r})$, mentre il campo magnetico è parallelo alla somma dei vettori $\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})$, allora il prodotto vettoriale fra di essi è ortogonale ai suddetti campi. Secondo le condizioni al contorno (32) e (34), la componente non nulla del campo elettrico è quella ortogonale alla superficie della cavità, mentre la componente non nulla del campo magnetico è quella parallela. Ne consegue che il vettore ottenuto dal prodotto vettoriale è ortogonale sulla superficie del risonatore, dunque il secondo termine a secondo membro della (46) è nullo. Il rimanente integrale può essere calcolato avvalendosi della condizione di gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) = 0$ (41), e dell'equazione di Helmholtz per la componente spaziale del potenziale vettore (41):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})) - \vec{\nabla}^2 \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) = \\ = k_q^2 \vec{u}_{kmnq,s}(\vec{r}) = \left(\frac{\omega_q}{c}\right)^2 \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}) , \quad (48)$$

dove ω_q è la pulsazione dei modi contrassegnati dallo stesso indice q . Utilizzando la relazione di ortonormalità tra le funzioni di modo, l'Hamiltoniana della radiazione assume una forma più compatta e familiare:

$$H_F = \sum_{mnq,s} H_{mnq,s} := \sum_{mnq,s} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_q^2(t) + \frac{1}{2} \omega_q^2 q_q^2(t) \right) , \quad (49)$$

⁶ Usando la relazione vettoriale $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$, ponendo $\vec{F} \equiv \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r})$ e $\vec{G} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})$, si trova: $\vec{\nabla} \cdot [\vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] = \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}))] - (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{m'n'q',s'}(\vec{r})) .$

dunque l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico in una cavità di forma arbitraria è esprimibile come la somma delle Hamiltoniane di oscillatore armonico $H_{mnq,s}$ associate a ciascun modo denotato con il pedice mnq, s . Poiché queste ultime sono indipendenti dagli indici m, n e s , le sommatorie su tali indici presenti nell (49) danno luogo a una costante, che in seguito verrà trascurata. L'energia di ciascun modo di oscillazione, ora contraddistinto dal solo indice q , è, pertanto, quella di un oscillatore armonico di massa unitaria e coordinata generalizzata $q_n(t)$, caratterizzato dall'Hamiltoniana:

$$H_q = \frac{1}{2}\dot{q}_q^2(t) + \frac{1}{2}\omega_q^2 q_q^2(t) . \quad (50)$$

Definendo come $p_q := \dot{q}_q$ la variabile di momento, coniugata alla coordinata q_q , si possono scrivere le equazioni di hamilton per il sistema classico descritto dalla (50):

$$\dot{q}_q = \frac{\partial H_q}{\partial p_q} , \quad \dot{p}_q = -\frac{\partial H_q}{\partial q_q} = -\omega_q^2 q_q , \quad (51)$$

che, combinate insieme, danno luogo all'equazione del moto: $\ddot{q}_q + \omega_q^2 q_q = 0$. Poiché il campo elettrico è proporzionale a p_q , mentre il campo magnetico è proporzionale a $q_q(t)$, allora i due campi si comportano come le due variabili coniugate posizione e momento di un oscillatore armonico meccanico. La quantizzazione degli oscillatori armonici rappresentanti ciascun modo, avviene definendo innanzitutto delle ampiezze dai valori complessi a_q e a_q^* , e, in seguito, convertendole in operatori di annichilazione \hat{a}_q e di creazione \hat{a}_q^\dagger del modo contrassegnato da q . Si introducono dunque le ampiezze:

$$a_q := \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_q}}(\omega_q q_q + ip_q) , \quad a_q^* := \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_q}}(\omega_q q_q - ip_q) . \quad (52)$$

In termini di tali ampiezze, le variabili coniugate q_q e p_q diventano:

$$q_q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_q}}(a_q + a_q^*) , \quad p_q = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega_q}{2}}(a_q - a_q^*) . \quad (53)$$

Sostituendo tali rappresentazioni di $q_q(t)$ e $p_q(t)$ nell'Hamiltoniana del modo q (50), si trova:

$$H_q = \frac{1}{2}\hbar\omega_q(a_q^* a_q + a_q a_q^*) , \quad (54)$$

dove è stato mantenuto l'ordine in cui compaiono le ampiezze complesse a_q e a_q^* nell'Hamiltoniana: tale accorgimento si rivelerà utile quando verranno sostituite tali ampiezze con gli operatori di seconda quantizzazione relativi al modo di oscillazione corrispondente. Si procede, dunque, postulando la relazione di commutazione fra l'operatore $\hat{q}_q(t)$ di coordinata generalizzata del modo q e l'operatore $\hat{p}_q(t)$ di momento generalizzato del modo q'

$$[\hat{q}_q, \hat{p}_{q'}] = i\hbar\delta_{q,q'} , \quad (55)$$

osservando che gli operatori relativi a modi diversi di oscillazione commutano. In termini degli operatori posizione e momento si definiscono in analogia alle ampiezze a_q e a_q^* , gli operatori di annichilazione e creazione \hat{a}_q e \hat{a}_q^\dagger corrispondenti al modo contrassegnato da q :

$$\hat{a}_q := \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_q}}(\omega_q \hat{q}_q + i\hat{p}_q) , \quad \hat{a}_q^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_q}}(\omega_q \hat{q}_q - i\hat{p}_q) . \quad (56)$$

Allora, gli operatori di coordinata e momento \hat{q}_q e \hat{p}_q assumono la forma seguente:

$$\hat{q}_q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_q}}(\hat{a}_q + \hat{a}_q^\dagger) , \quad \hat{p}_q = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega_q}{2}}(\hat{a}_q - \hat{a}_q^\dagger) . \quad (57)$$

Inserendo le equazioni (57) all'interno della (55) si ottiene la relazione di commutazione:

$$[\hat{a}_q, \hat{a}_{q'}^\dagger] = \delta_{q,q'} , \quad (58)$$

dove sono state usate le relazioni di commutazione:

$$[\hat{a}_q, \hat{a}_{q'}] = 0, \quad [\hat{a}_q^\dagger, \hat{a}_{q'}^\dagger] = 0. \quad (59)$$

L'Hamiltoniana (54) relativa al modo q di oscillazione può essere scritta in forma operatoriale come:

$$\hat{H}_q = \frac{1}{2} \hbar \omega_q (\hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \hat{a}_q \hat{a}_q^\dagger) = \hbar \omega_q \left(\hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \frac{1}{2} \right), \quad (60)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata usata la relazione di commutazione (58). Si ottiene, quindi, al termine della procedura di quantizzazione del campo elettromagnetico nella *gauge* di Coulomb, l'Hamiltoniana della radiazione nella cavità ottica in forma operatoriale:

$$\hat{H}_F = \sum_q \hbar \omega_q \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \hat{H}_0 = \sum_q \hbar \omega_q \left(\hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \frac{1}{2} \right), \quad (61)$$

dove $\hat{H}_0 \equiv \sum_q \frac{1}{2} \hbar \omega_q$ rappresenta la somma delle energie di punto zero dei singoli oscillatori armonici. Poiché esiste un numero infinito di modi di oscillazione, la somma precedente fornisce un contributo infinito all'Hamiltoniana, che può essere sottratto rinormalizzando l'energia.

A questo punto si possono esprimere gli operatori associati ai campi elettrico $\hat{\vec{E}}$ e magnetico $\hat{\vec{B}}$ in termini degli operatori di seconda quantizzazione definiti nella (56). Scrivendo la (42) in forma operatoriale e sostituendovi la prima relazione delle (57), l'operatore campo elettrico $\hat{\vec{E}}$ assume la forma:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = - \sum_{mnq,s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_q}} (\hat{a}_q + \hat{a}_q^\dagger) \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}). \quad (62)$$

Dalla (62) si osserva che la dipendenza temporale dell'operatore di campo elettrico è riconducibile alla presenza delle derivate prime degli operatori di seconda quantizzazione \hat{a}_q e \hat{a}_q^\dagger . Utilizzando le equazioni di Heisenberg per i suddetti operatori e le relazioni di commutazione (58) e (59), si possono esprimere \hat{a}_q e \hat{a}_q^\dagger in funzione degli operatori di annichilazione e creazione \hat{a}_q e \hat{a}_q^\dagger :

$$\begin{aligned} \hat{a}_q &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_F, \hat{a}_q] = \frac{i}{\hbar} \left[\sum_{q'} \hbar \omega_{q'} \left(\hat{a}_{q'}^\dagger \hat{a}_{q'} + \frac{1}{2} \right), \hat{a}_q \right] = \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{q'} \hbar \omega_{q'} [\hat{a}_{q'}^\dagger \hat{a}_{q'}, \hat{a}_q] = \frac{i}{\hbar} \sum_{q'} \hbar \omega_{q'} [\hat{a}_{q'}^\dagger, \hat{a}_q] \hat{a}_{q'} = -i \omega_q \hat{a}_q, \end{aligned} \quad (63)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{a}_q^\dagger &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_F, \hat{a}_q^\dagger] = \frac{i}{\hbar} \left[\sum_{q'} \hbar \omega_{q'} \left(\hat{a}_{q'}^\dagger \hat{a}_{q'} + \frac{1}{2} \right), \hat{a}_q^\dagger \right] = \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{q'} \hbar \omega_{q'} [\hat{a}_{q'}^\dagger \hat{a}_{q'}, \hat{a}_q^\dagger] = \frac{i}{\hbar} \sum_{q'} \hbar \omega_{q'} \hat{a}_{q'}^\dagger [\hat{a}_{q'}, \hat{a}_q^\dagger] = i \omega_q \hat{a}_q^\dagger. \end{aligned} \quad (64)$$

A partire dai risultati (63) e (64), l'operatore campo elettrico introdotto $\hat{\vec{E}}$ nella (62) può essere espresso come:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \sum_{m,n,q,s} i \sqrt{\frac{\hbar \omega_q}{2\epsilon_0}} (\hat{a}_q - \hat{a}_q^\dagger) \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}). \quad (65)$$

L'operatore associato al campo magnetico $\hat{\vec{B}}$ può essere ottenuto inserendo la (57) nella (44) riscritta in forma operatoriale:

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \sum_{m,n,q,s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_q}} (\hat{a}_q + \hat{a}_q^\dagger) \vec{\nabla} \times \vec{u}_{mnq,s}(\vec{r}). \quad (66)$$

2.2.1.4 L'Hamiltoniano di singolo modo

Ora si considererà un singolo modo di oscillazione del campo elettromagnetico, scegliendo fra i quelli descritti dalla (38), quello contrassegnato dai numeri quantici trasversali $m = 0$ e $n = 1$: tale modo, noto come TEM_{01} , ha ampiezza $|\vec{u}_{01q,s}(\vec{r})|^2$ massima in corrispondenza delle barriere di potenziale presenti nel potenziale a tripla buca e pressoché nulla in prossimità dei minimi dello stesso, la cui forma funzionale, già mostrata in Fig. [cit. figura], verrà introdotta nel paragrafo § 2.5. La funzione di modo $\vec{u}_{01q,s}(\vec{r})$ appena menzionata presenta, dunque, la forma:

$$\vec{u}_{01q}(\vec{r}) = \frac{4x}{w_{0,q}^2 \sqrt{\pi L}} e^{-\frac{x^2+z^2}{w_{0,q}^2}} \cos(k_{010}y) \hat{e}_{k_q,s} , \quad (67)$$

dove $k_{010} = \frac{\pi}{L}$ rappresenta il numero d'onda del modo di cavità. Indicando con $\omega_C := \frac{\pi(2q+1)c}{L}$ la pulsazione del modo di cavità e con $\hat{e}_{k_{01q,s}}$ il versore di polarizzazione, gli operatori campo elettrico $\hat{E}(\vec{r}, t)$ (65) e $\hat{B}(\vec{r}, t)$ (66) possono essere espressi rispettivamente come

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_C}{2\epsilon_0}} (\hat{a}_{k_q} - \hat{a}_{k_q}^\dagger) \vec{u}_{01q,s}(\vec{r}) , \quad (68)$$

e

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_C}} (\hat{a}_{k_q} + \hat{a}_{k_q}^\dagger) \vec{\nabla} \times \vec{u}_{01q,s}(\vec{r}) . \quad (69)$$

Nel seguito verranno omissi gli indici del modo di oscillazione scelto che compaiono negli operatori di seconda quantizzazione \hat{a} e \hat{a}^\dagger , nella funzione di modo $\vec{u}(\vec{r})$ e nel versore di polarizzazione \hat{e} . Trascurando l'energia di punto zero presente nella (61), l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico, secondo il modello di Jaynes-Cummings, assume una forma particolarmente semplice:

$$\hat{H}_F = \hbar \omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} , \quad (70)$$

dove \hat{a}^\dagger e \hat{a} indicano rispettivamente l'operatore di creazione e quello di annichilazione di un fotone di pulsazione ω_C all'interno della cavità ottica.

2.2.2 L'Hamiltoniano di materia

Dopo aver introdotto il termine che rappresenta l'energia del campo elettromagnetico quantizzato presente all'interno della cavità ottica, si proseguirà l'analisi con la costruzione dell'Hamiltoniana che descrive l'accoppiamento fra un modo di oscillazione della radiazione e un sistema atomico a due livelli energetici. A tale scopo, è possibile seguire due descrizioni che si dimostreranno essere equivalenti: quella di *accoppiamento minimale*, che fa uso del potenziale vettore, e quella di *interazione campo elettrico-dipolo*. Il prototipo di un sistema a due livelli è un atomo neutro del primo gruppo della Tavola Periodica, che può essere trattato in *approssimazione a un elettrone* [41], ossia contemplando fra i suoi componenti soltanto l'elettrone di valenza di massa m_e e carica $-e \equiv -|e|$ e il *core* di massa m_c e carica $+e$, costituito dal nucleo propriamente detto e dai gusci elettronici completi. Inoltre, il potenziale di interazione tra elettrone e *core*, di natura coulombiana, può essere tratteggiato come un potenziale centrale efficace $V_{ec}(|\vec{r}_e - \vec{r}_c|)$ che a brevi distanze fra le due particelle presenta andamento $-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_e - \vec{r}_c|}$ mentre a grandi distanze si comporta come $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_e - \vec{r}_c|}$.

Indicando con \vec{r}_e la posizione dell'elettrone di valenza e con \vec{p}_e il suo momento lineare, e con \vec{r}_c e \vec{p}_c le medesime quantità ora riferite al *core*, l'Hamiltoniana classica H_{mc} di accoppiamento minimale del sistema presenta la seguente forma:

$$H_{mc} := \frac{(\vec{p}_e + e\vec{A}(\vec{r}_e, t))^2}{2m_e} + \frac{(\vec{p}_c - e\vec{A}(\vec{r}_c, t))^2}{2m_c} + V_{ec}(|\vec{r}_e - \vec{r}_c|) . \quad (71)$$

Nel calcolo dei quadrati presenti nell'Hamiltoniana H_{mc} appena introdotta è necessario mantenere l'ordine dei vettori nei prodotti scalari, distinguendo $\vec{A} \cdot \vec{p}_i$ da $\vec{p}_i \cdot \vec{A}$, dove $i = e, c$: ciò si rivelerà utile nella transizione dalla meccanica classica a quella quantistica, cioè quando i momenti verranno sostituiti con gli operatori corrispondenti, nella rappresentazione delle coordinate: $\hat{p}_i = -i\hbar\vec{\nabla}_i$ con $i=e, c$.

L'Hamiltoniana precedente può essere riscritta come la somma di tre termini, corrispondenti all'Hamiltoniana dell'elettrone H_e , a quella del core H_c e all'energia di interazione elettrostatica fra le due particelle $V_{ec}(|\vec{r}_e - \vec{r}_c|)$:

$$H_{mc} := H_e + H_c + V_{ec}(|\vec{r}_e - \vec{r}_c|) . \quad (72)$$

Applicando la condizione di gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}_i, t) = 0$ con $i=e, c$, le Hamiltoniane H_e e H_c possono essere riscritte rispettivamente come:

$$H_e := \frac{\vec{p}_e^2}{2m_e} + \frac{e}{m_e} \vec{A}(\vec{r}_e, t) \cdot \vec{p}_e + \frac{e^2}{2m_e} \vec{A}^2(\vec{r}_e, t) , \quad (73)$$

e

$$H_c := \frac{\vec{p}_c^2}{2m_c} - \frac{e}{m_c} \vec{A}(\vec{r}_c, t) \cdot \vec{p}_c + \frac{e^2}{2m_c} \vec{A}^2(\vec{r}_c, t) . \quad (74)$$

A questo punto, indicando con $M = m_e + m_c$ la massa totale dell'atomo di idrogeno o di un metallo alcalino, e con $\mu = \frac{m_e m_c}{m_e + m_c}$ la massa ridotta, si possono introdurre le coordinate del centro di massa \vec{R} e quelle relative \vec{r} , definite nel modo seguente:

$$\vec{R} := \frac{m_e \vec{r}_e + m_c \vec{r}_c}{m_e + m_c} = \frac{m_e}{M} \vec{r}_e + \frac{m_c}{M} \vec{r}_c , \quad (75)$$

e

$$\vec{r} := \vec{r}_e - \vec{r}_c . \quad (76)$$

Le relazioni precedenti possono essere riscritte, servendosi delle definizioni di M e μ , ottenendo per la posizione dell'elettrone

$$\vec{r}_e = \vec{R} + \frac{m_c}{M} \vec{r} \approx \left(\vec{R} - \frac{m_e}{m_c} \vec{r} \right) + \vec{r} , \quad (77)$$

e per quella del core

$$\vec{r}_c = \vec{R} - \frac{m_e}{M} \vec{r} \approx \vec{R} - \frac{m_e}{m_c} \vec{r} . \quad (78)$$

Nell'espressione a secondo membro della (78) si nota che, causa del termine $\frac{m_e}{m_c} \lesssim \frac{1}{1836}$, la posizione del core non coincide esattamente con quella del centro di massa dell'atomo. Analogamente a quanto appena svolto per le coordinate, si introduce il momento totale \vec{P} associato al moto del sistema di massa M , definito come

$$\vec{P} := \vec{p}_e + \vec{p}_c , \quad (79)$$

e il momento \vec{p} associato al moto relativo della particella di massa ridotta μ che si ricondurrà all'elettrone:

$$\vec{p} := \frac{m_e m_c}{m_e + m_c} \left(\frac{\vec{p}_e}{m_e} - \frac{\vec{p}_c}{m_c} \right) = \frac{m_c}{M} \vec{p}_e - \frac{m_e}{M} \vec{p}_c . \quad (80)$$

Usando le definizioni (80) e (81), è possibile esprimere il momento \vec{p}_e dell'elettrone come

$$\vec{p}_e = \frac{m_e}{M} \vec{P} + \vec{p} , \quad (81)$$

e quello del core \vec{p}_c come

$$\vec{p}_c = \frac{m_c}{M} \vec{P} - \vec{p} . \quad (82)$$

A questo punto, è possibile esprimere l'Hamiltoniana (71) in termini di coordinate spaziali e momenti canonici del centro di massa e relativi, utilizzando le relazioni (75), (76), (79) e (80) e quelle inverse (77),

(78), (81) e (82). Osservando che la somma delle energie cinetiche di elettrone e core si tramuta nella somma dell'energia cinetica del centro di massa e di quella del moto relativo⁷, l'hamiltoniana (72) diviene:

$$\begin{aligned}
H_{mc} = & \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) + \frac{e}{\mu} \left\{ \frac{\mu}{m_e} \vec{A} \left[\vec{R} + \frac{m_c}{M} \vec{r}, t \right] + \frac{\mu}{m_c} \vec{A} \left[\vec{R} - \frac{m_e}{M} \vec{r}, t \right] \right\} \cdot \vec{p} + \\
& + \frac{e}{M} \left\{ \vec{A} \left[\vec{R} + \frac{m_c}{M} \vec{r}, t \right] - \vec{A} \left[\vec{R} - \frac{m_e}{M} \vec{r}, t \right] \right\} \cdot \vec{P} + \\
& + \frac{e^2}{2m_e} \vec{A}^2 \left[\vec{R} + \frac{m_c}{M} \vec{r}, t \right] + \frac{e^2}{2m_c} \vec{A}^2 \left[\vec{R} - \frac{m_e}{M} \vec{r}, t \right] ,
\end{aligned} \tag{83}$$

dove sono stati esplicitati gli argomenti dei potenziali vettori \vec{A} . I primi tre termini dell'Hamiltoniana così ottenuta comprendono le energie cinetiche del centro di massa e della particella di massa μ , e l'energia coulombiana di interazione tra elettrone e core. L'accoppiamento fra l'atomo e il potenziale vettore, invece, si esplica in due termini: uno costituito dal prodotto scalare fra il momento relativo \vec{p} e la somma dei potenziali vettori calcolati nelle posizioni di elettrone e core, e l'altro dal prodotto scalare fra il momento del centro di massa \vec{P} e la differenza tra i suddetti potenziali vettori. I due termini contenenti quadrati di potenziali vettori non dipendono dai momenti canonici, ma soltanto dalle coordinate del centro di massa \vec{R} e da quelle relative \vec{r} , che descrivono i gradi di libertà interni al sistema.

La forma funzionale dell'Hamiltoniana H_{mc} si semplifica notevolmente se viene applicata al potenziale vettore l'approssimazione di dipolo [54], valida a bassa distanza dal centro di massa. Indicando con $\delta\vec{r}$ le espressioni $-\frac{m_e}{M}\vec{r}$ oppure $\frac{m_c}{M}\vec{r}$ che compaiono nella (83), il potenziale vettore può essere approssimato espandendolo in serie di Taylor intorno a \vec{R} :

$$\vec{A}(\vec{R} + \delta\vec{r}) \approx \vec{A}(\vec{R}) + (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{A}(\vec{R}) + \frac{1}{2!} (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}})^2 \vec{A}(\vec{R}) + \dots \tag{84}$$

Giacché il potenziale vettore \vec{A} varia apprezzabilmente con una lunghezza caratteristica dipendente dall'inverso del numero d'onda $|\vec{k}|$, rammentando che $\frac{m_e}{m_c} \ll 1$ e che $|\vec{r}|$ è delle dimensioni di un atomo, il valore della correzione lineare $(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{A}(\vec{R})$ presente nella (84) può essere stimato nel modo seguente:

$$\frac{|(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{A}(\vec{R})|}{|\vec{A}(\vec{R})|} \sim \delta\vec{r} \cdot \vec{k} \lesssim \vec{r} \cdot \vec{k} \ll 1 , \tag{85}$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, il prodotto scalare $\vec{r} \cdot \vec{k}$ è stato approssimato al rapporto fra le dimensioni dell'atomo (dell'ordine di 10^{-10} m) e la lunghezza d'onda della radiazione (dell'ordine di 10^{-6} m). Ne consegue che il potenziale vettore non varia in maniera significativa all'interno di un atomo, dunque elettrone e core risentono approssimativamente dello stesso potenziale vettore, cioè di quello calcolato nelle coordinate del centro di massa $\vec{A}(\vec{R})$:

$$\vec{A}(\vec{r}_e) \approx \vec{A}(\vec{r}_c) \approx \vec{A}(\vec{R}) . \tag{86}$$

Inserendo nella (83) i potenziali vettori in approssimazione di dipolo all'ordine zero, si ottiene come anticipato un'Hamiltoniana dalla forma decisamente più compatta $H_{mc}^{(0)}$:

$$H_{mc}^{(0)} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) + \frac{e}{\mu} \vec{A}(\vec{R}, t) \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{2\mu} \vec{A}^2(\vec{R}, t) . \tag{87}$$

L'Hamiltoniana così ricavata può essere decomposta in due termini, di cui uno costituito essenzialmente dall'energia cinetica del centro di massa $H_{K,CM}$, e uno che descrive il moto di una particella di massa di massa ridotta μ e carica $-e$ che risente di un potenziale Coulombiano in una regione in cui il potenziale vettore è $\vec{A}(\vec{R}, t)$:

$$H_{mc}^{(0)} = H_{K,CM} + H_{rel} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2\mu} \left[\vec{p} + e\vec{A}(\vec{R}, t) \right]^2 + V_{ec}(|\vec{r}|) , \tag{88}$$

⁷ In formule: $\frac{\vec{p}_e^2}{2m_e} + \frac{\vec{p}_c^2}{2m_c} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu}$.

dove si nota che nell'Hamiltoniana nella forma proposta viene enfatizzato il ruolo dell'elettrone di valenza all'interno di un atomo del I Gruppo della Tavola Periodica.

Oltre alla descrizione dell'interazione tra materia e radiazione basata sull'accoppiamento minimale, esiste un approccio che si basa sull'accoppiamento fra dipolo e campo elettrico. Un atomo di idrogeno o di un metallo alcalino può essere, infatti, visto come un dipolo elettrico costituito dall'elettrone e dal core, avente momento $\vec{d} := -e\vec{r}$, che interagisce con un campo elettrico esterno \vec{E} non variabile in maniera significativa all'interno dell'atomo. Per questo motivo è possibile estendere al campo elettrico l'approssimazione di dipolo (84) all'ordine zero, ottenendo:

$$\vec{E}(\vec{r}_e, t) \approx \vec{E}(\vec{r}_c, t) \approx \vec{E}(\vec{R}, t) . \quad (89)$$

L'energia di interazione di un atomo in un campo elettrico \vec{E} può essere, quindi, espressa come:

$$H_{Int}^{(0)} := -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) = +e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) , \quad (90)$$

dove il momento di dipolo dell'atomo è dato da $\vec{d} := e(\vec{r}_c - \vec{r}_e) = -e\vec{r}$, usando la definizione (71). Nella nuova descrizione, l'Hamiltoniana complessiva dell'atomo in campo elettromagnetico in approssimazione di dipolo è:

$$H_{\vec{r}, \vec{E}}^{(0)} := \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) + e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) . \quad (91)$$

Nel seguito verrà dimostrata l'equivalenza fra l'Hamiltoniana di accoppiamento minimale (88) detta anche Hamiltoniana nella *gauge di velocità* [41], l'Hamiltoniana con interazione dipolo-campo elettrico (91) nota anche come Hamiltoniana nella *gauge di lunghezza* [41], in approssimazione di dipolo all'ordine zero e trascurando il moto del centro di massa, in accordo con il modello di Jaynes-Cummings-Paul [54]. Questo fatto fu dimostrato da Marie Göppert-Mayer nella sua tesi di dottorato riguardante le transizioni atomiche a due fotoni, presentata con Max Born a Gottinga nel 1931 [54]. Per dimostrare tale corrispondenza in presenza del moto del centro di massa, è necessario invece migliorare l'approssimazione (84), considerando anche il termine al primo ordine, ovvero quello contenente derivate prime del potenziale vettore rispetto alle coordinate del centro di massa, e poi effettuare un procedimento analogo a quello che verrà illustrato. A partire dalle Hamiltoniane (88) e (91), tramite trasformazioni di Legendre inverse, si otterranno le due rispettive Lagrangiane, che si riveleranno essere equivalenti ossia differenti per la derivata totale di una funzione delle coordinate spaziali e del tempo. A tale scopo si isolerà il termine quadratico nel momento del centro di massa \vec{P} presente nelle equazioni (88) e (91), assumendo che \vec{R} sia indipendente dal tempo e limitandosi pertanto a considerare soltanto le Hamiltoniane che descrivono il moto della particella di massa ridotta μ corrispondente all'elettrone di valenza:

$$H_{mc, rel}^{(0)} := \frac{1}{2\mu} \left[\vec{p} + e\vec{A}(\vec{R}, t) \right]^2 + V_{ec}(|\vec{r}|) , \quad (92)$$

e

$$H_{\vec{r}, \vec{E}, rel} := \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) + e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) . \quad (93)$$

Le rispettive Lagrangiane vengono calcolate utilizzando la trasformazione di Legendre:

$$L_{j, rel}^{(0)}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) - H_{j, rel}^{(0)}(\vec{r}, \vec{p}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), t) , \quad (94)$$

dove $j = mc, \vec{r} \cdot \vec{E}$. Ricavando l'equazione di Hamilton per la posizione relativa \vec{r} a partire dall'Hamiltoniana di accoppiamento minimale (92), si ottiene:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} H_{j, rel}^{(0)} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{p} + e\vec{A}(\vec{R}, t) \right] . \quad (95)$$

Invertendo la relazione appena trovata si perviene all'uguaglianza $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}} - e\vec{A}(\vec{R}, t)$, la cui espressione a secondo membro può essere inserita nella Lagrangiana (94) caratterizzata da $j = mc$ in luogo del momento lineare $\vec{p}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. In questo modo si giunge a ottenere la Lagrangiana corrispondente all'Hamiltoniana (92):

$$L_{mc, rel}^{(0)} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V_{ec}(|\vec{r}|) - e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t) . \quad (96)$$

Aggiungendo alla Lagrangiana appena ricavata il termine $e \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{A})$ dipendente dalla derivata totale rispetto al tempo, si ricava una Lagrangiana equivalente, ovvero una Lagrangiana che dà luogo alle stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

Tale Lagrangiana presenta la forma:

$$\tilde{L} = L_{mc,rel}^{(0)} + e \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{A}) = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V_{ec}(|\vec{r}|) + e \vec{r} \cdot \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{R}, t) . \quad (97)$$

Dal momento che il moto del centro di massa viene trascurato, l'argomento \vec{R} del potenziale vettore $\vec{A}(\vec{R}, t)$ può essere considerato indipendente dal tempo, e dunque è possibile sostituire la derivata totale presente nella (97) con una derivata parziale. Usando la (8) con $\Phi = 0$ ossia $\vec{E}(\vec{R}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{R}, t)$ e applicando la condizione di *gauge* di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{R}, t) = -\vec{E}(\vec{R}, t) . \quad (98)$$

La Lagrangiana (97) giunge dunque a coincidere con quella corrispondente all'Hamiltoniana $H_{\vec{r}, \vec{E}}^{(0)}$ di interazione:

$$\tilde{L} \equiv L_{\vec{r}, \vec{E}}^{(0)} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V_{ec}(|\vec{r}|) - e \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) . \quad (99)$$

Ciò porta a concludere che la descrizione dell'interazione atomo-radiazione effettuata per mezzo dell'Hamiltoniana di accoppiamento minimale $H_{mc}^{(0)}$ è equivalente a quella condotta con l'Hamiltoniana di interazione dipolo-campo elettrico $H_{\vec{r}, \vec{E}}^{(0)}$, se si assume che la posizione del centro di massa dell'atomo non vari nel tempo. L'equivalenza fra le due Hamiltoniane $H_{mc}^{(0)}$ e $H_{\vec{r}, \vec{E}}^{(0)}$ può essere dimostrata anche nel contesto quanto-meccanico, limitandosi, come in precedenza, ad analizzare il problema relativo alla particella di massa μ , trascurando il moto del centro di massa. Indicando la funzione d'onda della particella di massa ridotta μ e carica $-e$ con $\tilde{\psi}(\vec{r}, t)$, l'equazione di Schrödinger relativa all'Hamiltoniana $H_{mc}^{(0)}$ è:

$$i \hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2\mu} [\vec{p} + e \vec{A}(\vec{R}, t)]^2 + V_{ec}(|\vec{r}|) \right\} \tilde{\psi}(\vec{r}, t) , \quad (100)$$

dove $\vec{p} = -i \hbar \nabla_{\vec{r}}$ è l'operatore momento nella rappresentazione delle coordinate, e \vec{r} è l'operatore posizione. Ora si applica alla funzione d'onda $\tilde{\psi}(\vec{r}, t)$ la seguente trasformazione di fase locale:

$$\tilde{\psi}(\vec{r}, t) := e^{-i \frac{e}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t)} \psi(\vec{r}, t) , \quad (101)$$

che non è altro che una trasformazione di *gauge* in cui la funzione $\Lambda(\vec{r}, t)$ è posta uguale a $-\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t)$. Sostituendo la (101) nell'equazione di Schrödinger (100) si ottiene l'equazione:

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) - e \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{R}, t) \right\} \psi(\vec{r}, t) . \quad (102)$$

Poiché nella condizione di *gauge di Coulomb* $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, allora a partire dall'equazione precedente (102) si ricava l'equazione di Schrödinger relativa all'Hamiltoniana di interazione dipolo-campo elettrico $H_{\vec{r}, \vec{E}}^{(0)}$:

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) + e \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) \right\} \psi(\vec{r}, t) , \quad (103)$$

perciò la $\psi(\vec{r}, t)$ definita nella (101) è la funzione d'onda che soddisfa l'equazione di Schrödinger avente il termine di interazione dipendente dal prodotto scalare $\vec{r} \cdot \vec{E}$. L'equivalenza tra le due Hamiltoniane così dimostrata è basata sulla trasformazione di *gauge* locale (101) nella quale il potenziale vettore non dipende dalle coordinate relative \vec{r} , ma dalle coordinate del centro di massa \vec{R} che si suppongono essere invarianti nel tempo.

Ora nell'Hamiltoniana presentata nella *gauge di lunghezza* (91) è possibile distinguere due termini: uno,

denotato con H_A , riguardante il solo atomo, e l'altro, indicato con H_I , che descrive l'interazione tra l'atomo e il campo elettromagnetico di cavità. Tali componenti sono definiti come:

$$H_A := \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) , \quad (104)$$

e

$$H_I := e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) . \quad (105)$$

Nella trattazione che segue, verrà trascurato il moto del centro di massa, supponendo che l'atomo sia in quiete nell'origine ovvero che $\vec{R} \equiv \vec{0}$, condizione realizzabile a temperature estremamente basse. Inoltre si assumerà che soltanto due livelli energetici elettronici siano popolati in maniera significativa, essendo la frequenza di transizione elettronica quasi in risonanza con quella del campo elettromagnetico di cavità, indicata con ω_C . Denotando con \hat{H}_A l'operatore Hamiltoniano atomico, con $E_g = \hbar\omega_g$ e $\langle \vec{r} | g \rangle$ rispettivamente autovalore e autofunzione di \hat{H}_A relativi al livello energetico fondamentale dell'elettrone di valenza, e con $E_e = \hbar\omega_e$ e $\langle \vec{r} | e \rangle$ le medesime quantità riferite ora al primo livello eccitato, si ha la seguente equazione di Schrödinger stazionaria:

$$\hat{H}_A \langle \vec{r} | j \rangle = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} + V_{ec}(|\vec{r}|) \right) \langle \vec{r} | j \rangle = E_j \langle \vec{r} | j \rangle , \quad (106)$$

dove $j = g, e$, e \hat{H}_A è l'operatore associato all'Hamiltoniana atomica H_A (104) nella quale è stata posta la condizione $\vec{P} \equiv \vec{0}$. Usando la relazione di completezza $\sum_{j=g,e} |j\rangle \langle j| = \mathbb{1}$, si può esprimere un operatore atomico \hat{O} in termini degli autostati dell'Hamiltoniana atomica:

$$\hat{O} = \mathbb{1} \cdot \hat{O} \cdot \mathbb{1} = \sum_{j,j'=g,e} |j\rangle \langle j| \hat{O} |j'\rangle \langle j'| . \quad (107)$$

In questo modo l'operatore Hamiltoniano \hat{H}_A può essere espresso come:

$$\hat{H}_A = E_g |g\rangle \langle g| + E_e |e\rangle \langle e| . \quad (108)$$

Adottando la rappresentazione vettoriale [54] per gli autovettori di \hat{H}_A , $|g\rangle$ e $|e\rangle$ possono essere riscritti come:

$$|g\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \langle g| := (0, 1) , \quad (109)$$

e

$$|e\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \langle e| := (1, 0) . \quad (110)$$

Nella rappresentazione dell'energia, appena introdotta, l'Hamiltoniano atomico assume la forma di una matrice diagonale:

$$\hat{H}_A := \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_g + E_e) + \frac{1}{2}(E_e - E_g) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(E_g + E_e) - \frac{1}{2}(E_e - E_g) \end{pmatrix} . \quad (111)$$

Essendo un sistema a due livelli matematicamente equivalente a quello di una particella di *spin* $\frac{1}{2}$, è possibile utilizzare le matrici di Pauli come operatori atomici fondamentali [55]. Definendo, dunque, la matrice di *spin* $\hat{\sigma}_z$, nota in questo contesto anche come operatore di inversione [24], come

$$\hat{\sigma}_z := |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (112)$$

l'operatore Hamiltoniano atomico \hat{H}_A (111) può essere riespresso nel modo seguente:

$$\hat{H}_A = \bar{E}_A \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{2} \hbar\omega_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \bar{E}_A \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{2} \hbar\omega_A \hat{\sigma}_z , \quad (113)$$

dove $\bar{E}_A := \frac{1}{2}(E_g + E_e)$ rappresenta l'energia media del doppietto, e $\omega_A := \omega_e - \omega_g$ la frequenza di transizione atomica. Nella (113), il termine $\bar{E}_A \cdot \mathbb{1}$, che rappresenta una costante moltiplicata per la matrice identità in due dimensioni, può essere tralasciato, analogamente a quanto effettuato nel caso dell'energia del vuoto, nel passaggio dall'equazione (61) alla (70). Ora si analizza l'operatore \hat{H}_I relativo all'Hamiltoniana (105), contenente il momento di dipolo elettrico atomico, e si esprimerà l'operatore posizione \hat{r} ivi presente in termini degli autostati dell'Hamiltoniana \hat{H}_A . Nel modello di Jaynes-Cummings, infatti, l'Hamiltoniana di interazione H_I viene trattato come una perturbazione rispetto a H_A , e gli autostati dell'operatore \hat{H}_A nella rappresentazione della posizione vengono indicati con $\psi_j(\vec{r}, t)$, dove $j = g, e$. Inoltre, coerentemente con il fatto che nella (106) è stato tralasciato il termine cinetico che descrive il moto del centro di massa, nel termine di interazione si porrà $\vec{R} \equiv \vec{0}$, prendendo l'origine nella posizione dell'atomo, in quiete. Il campo elettrico che compare in H_I (105) viene quindi calcolato nell'origine, e il corrispondente operatore sarà indicato con $\hat{\vec{E}}(\vec{0}, t)$.

Poichè le funzioni d'onda $\psi_j(\vec{r})$ che descrivono la struttura interna dell'atomo hanno parità ben definita⁸, allora:

$$\langle j | \hat{H}_I | j \rangle = \langle j | e \hat{r} \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{0}, t) | j \rangle = e \langle j | \hat{r} | j \rangle \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{0}, t) = \int d^3\vec{r} e |\psi_j(\vec{r})|^2 \vec{r} \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{0}, t) = 0, \quad (114)$$

dove $j = g, e$. Giacché $|\psi_j|^2$ è una funzione simmetrica e \vec{r} è una funzione antisimmetrica, l'integrando nella (114) è antisimmetrico, e perciò, se l'intervallo di integrazione simmetrico rispetto all'origine, tali elementi di matrice si annullano. Gli elementi di matrice fuori-diagonale danno luogo a

$$e \langle e | \hat{r} | g \rangle \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{0}, t) = \int d^3\vec{r} e \psi_e^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_g(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{0}, t) := -\vec{d} \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{0}, t), \quad (115)$$

e

$$e \langle g | \hat{r} | e \rangle \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{0}, t) = \int d^3\vec{r} e \psi_g^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_e(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{0}, t) := -\vec{d}^* \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{0}, t). \quad (116)$$

L'operatore di dipolo, definito come $\hat{d} := -e\hat{r}$, nella rappresentazione dell'energia prende la forma:

$$\hat{d} = \vec{d} |e\rangle \langle g| + \vec{d}^* |g\rangle \langle e|. \quad (117)$$

Tale operatore descrive transizioni dallo stato fondamentale $|g\rangle$ allo stato eccitato $|e\rangle$ e viceversa, come si può osservare applicandolo ai suddetti autostati di \hat{H}_A :

$$\hat{d} |g\rangle = \vec{d} |e\rangle \langle g|g\rangle + \vec{d}^* |g\rangle \langle e|g\rangle = \vec{d} |e\rangle, \quad (118)$$

e

$$\hat{d} |e\rangle = \vec{d} |e\rangle \langle g|e\rangle + \vec{d}^* |g\rangle \langle e|e\rangle = \vec{d}^* |g\rangle. \quad (119)$$

Si può, dunque, introdurre l'operatore matriciale

$$\hat{\sigma}^\dagger := |e\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (120)$$

che promuove un elettrone dallo stato fondamentale a quello eccitato o annichila un atomo nello stato eccitato, agendo nel modo seguente:

$$\hat{\sigma}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Analogamente, si definisce l'operatore

$$\hat{\sigma} := |g\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (122)$$

⁸ L'operatore di parità \mathcal{P} commuta con l'operatore \hat{H}_A , infatti $\mathcal{P}\hat{H}_A = \mathcal{P} \left(-\frac{\hbar^2 \hat{\nabla}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} \right) = -\frac{\hbar^2 \hat{\nabla}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = +\hat{H}_A$ nella rappresentazione delle coordinate.

che annichila un atomo nello stato fondamentale o porta un elettrone dallo stato eccitato a quello fondamentale, agendo nel modo seguente:

$$\hat{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (123)$$

Osservando che gli operatori di transizione atomica [24], definiti nelle (120) e (122), sono legati alle matrici di Pauli $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{\sigma}_y$ dalle relazioni $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ e $\hat{\sigma}_y = i(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger)$, e ricordando l'algebra delle matrici di *spin*, si conclude che gli operatori $\hat{\sigma}^\dagger$ (120), $\hat{\sigma}$ (122) e $\hat{\sigma}_z$ (112) devono soddisfare le relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}] &= \hat{\sigma}_z , \\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}^\dagger] &= 2\hat{\sigma}^\dagger , \\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}] &= 2\hat{\sigma} . \end{aligned} \quad (124)$$

Utilizzando le matrici di *pseudo-spin* $\hat{\sigma}^\dagger$ (120) e $\hat{\sigma}$ (122), si può riscrivere l'operatore di dipolo elettrico \hat{d} come:

$$\hat{d} := -e\hat{r} = \vec{d}\hat{\sigma}^\dagger + \vec{d}^*\hat{\sigma} . \quad (125)$$

Considerando un solo modo di oscillazione della radiazione nella cavità, caratterizzato dalla pulsazione ω_C , l'operatore campo elettrico \hat{E} introdotto nella (65) può essere scritto come:

$$\hat{E}(\vec{0}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_C}{2\epsilon_0}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\vec{u}(\vec{0}) , \quad (126)$$

dove sono state utilizzate le coordinate del centro di massa \vec{R} (75). L'Hamiltoniana di interazione \hat{H}_I può essere, quindi, scritta come:

$$\hat{H}_I = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_C}{2\epsilon_0}} \left[\vec{d} \cdot \vec{u}(\vec{0})\hat{\sigma}^\dagger + \vec{d}^* \cdot \vec{u}(\vec{0})\hat{\sigma} \right] (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) , \quad (127)$$

dove il prodotto scalare $\vec{d} \cdot \vec{u}(\vec{0})$ può essere espresso come

$$\vec{d} \cdot \vec{u}(\vec{0}) = |\vec{d} \cdot \vec{u}(\vec{0})| e^{i\phi} . \quad (128)$$

Definendo la costante di accoppiamento fra l'atomo e il campo elettromagnetico come

$$g(\vec{0}) := \sqrt{\frac{\omega_C}{2\epsilon_0\hbar}} |\vec{d} \cdot \vec{u}(\vec{0})| , \quad (129)$$

calcolata nella posizione del centro di massa dell'atomo $\vec{R} \equiv \vec{0}$, e scegliendo la fase $\phi := -\frac{\pi}{2}$, si può riscrivere l'Hamiltoniana di interazione fra l'atomo del I Gruppo della Tavola Periodica e il campo elettromagnetico di cavità come:

$$\hat{H}_I = \hbar g(\vec{0})(\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) . \quad (130)$$

L'Hamiltoniana complessiva del sistema, ottenuta sommando i contributi \hat{H}_F (52), \hat{H}_A (94) e \hat{H}_I (108), diviene quindi:

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_I = \hbar\omega_C\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_A\hat{\sigma}_z + \hbar g(\vec{0})(\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) , \quad (131)$$

dove l'energia del centro di massa $\frac{\vec{p}^2}{2M}$ è stata posta uguale a zero nell'ipotesi che l'atomo sia in quiete, e il termine costante contenente l'energia media del doppietto \bar{E}_A è stato trascurato. L'Hamiltoniana così ottenuta contiene due termini, $-\hbar g(\vec{0})\hat{\sigma}\hat{a}$ e $-\hbar g(\vec{0})\hat{\sigma}^\dagger\hat{a}^\dagger$, che violano la conservazione dell'energia [23]: il primo rappresenta l'annichilazione di un atomo nello stato eccitato contestuale alla distruzione di un fotone, l'ultimo raffigura la creazione di un atomo nello stato eccitato e la contemporanea creazione di

un fotone di pulsazione ω_A . L'operazione di cancellazione di tali termini è nota come *approssimazione di onda rotante*, ed è applicabile quando la frequenza di transizione atomica ω_A è maggiore di qualunque altra scala di frequenza del sistema [41]. Tale approssimazione può essere spiegata scrivendo l'operatore Hamiltoniano (131) in visuale di interazione.

L'operatore Hamiltoniano (131) può essere espresso come la somma di due operatori:

$$\hat{H}_0 := \hbar\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_A \hat{\sigma}_z, \quad (132)$$

che descrive l'energia dell'atomo e del campo elettromagnetico non interagenti, e

$$\hat{H}_I := \hbar g(\vec{0})(\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (133)$$

che rappresenta l'energia d'interazione tra materia e radiazione \hat{H}_I . Indicando lo stato del sistema costituito dall'atomo e dal campo di cavità $|\Psi(t)\rangle$, che soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) |\Psi(t)\rangle, \quad (134)$$

è possibile definire lo stato $|\Psi^{(I)}(t)\rangle$ effettuando la trasformazione:

$$|\Psi(t)\rangle := e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} |\Psi^{(I)}(t)\rangle, \quad (135)$$

dove $|\Psi^{(I)}(t)\rangle$ denota il vettore in visuale di interazione. L'equazione (134) espressa in tale visuale, assume una forma molto compatta:

$$i\hbar \frac{d|\Psi^{(I)}(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_I^{(I)} |\Psi^{(I)}(t)\rangle, \quad (136)$$

dove $\hat{H}_I^{(I)}$ rappresenta l'operatore Hamiltoniano di accoppiamento atomo-campo elettromagnetico in visuale di interazione. Tale operatore è definito come:

$$\hat{H}_I^{(I)} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}. \quad (137)$$

L'operatore \hat{H}_0 , che non compare nella (136) è invariante sotto la trasformazione evidenziata nella (137), poiché commuta con gli operatori unitari $e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}$ e $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}$. A questo punto, si inserisce l'espressione (132), per esplicitare il contenuto della (137):

$$\hat{H}_I^{(I)} = \hbar g(\vec{r}) e^{\frac{i}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z t} (\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}) e^{-\frac{i}{2} \omega_C \sigma_z t} e^{i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) e^{-i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t}. \quad (138)$$

Dal momento che la matrice di Pauli σ_z introdotta nella (112) è diagonale, le matrici $e^{\frac{i}{2} \omega_A \sigma_z t}$ e $e^{-\frac{i}{2} \omega_C \sigma_z t}$ sono anch'esse diagonali:

$$e^{\frac{i}{2} \omega_A \sigma_z t} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2} \omega_C} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2} \omega_C} \end{pmatrix}, \quad e^{-\frac{i}{2} \omega_C \sigma_z t} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2} \omega_C} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2} \omega_C} \end{pmatrix}. \quad (139)$$

Avvalendosi delle relazioni appena trovate (139), il prodotto matriciale $e^{\frac{i}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma} e^{-\frac{i}{2} \omega_C \sigma_z t}$, presente nella (138), diviene:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma} e^{-\frac{i}{2} \omega_C \sigma_z t} &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2} \omega_C} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2} \omega_C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2} \omega_C} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2} \omega_C} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\omega_A t} & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma} e^{-i\omega_C t}. \end{aligned} \quad (140)$$

Con un procedimento analogo si calcola il prodotto matriciale $e^{\frac{i}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}^\dagger e^{-\frac{i}{2} \omega_C \sigma_z t} = \hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_A t}$, pertanto la parte atomica della (137) diviene:

$$e^{\frac{i}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z t} (\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}) e^{-\frac{i}{2} \omega_C \sigma_z t} = \hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_A t} - \hat{\sigma} e^{-i\omega_C t}. \quad (141)$$

Ora si analizza la parte della (138), dipendente dagli operatori di seconda quantizzazione del campo elettromagnetico, per i quali la trasformazione illustrata nella (137) porge $e^{i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega_C t}$ se applicata all'operatore di annichilazione \hat{a} , e $e^{i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a}^\dagger e^{i\omega_C t}$ se applicata a quello di creazione \hat{a}^\dagger di un fotone di pulsazione ω_C . La differenza tra detti termini dà luogo a:

$$e^{i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) e^{-i\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega_C t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega_C t} . \quad (142)$$

Allora l'Hamiltoniano $\hat{H}_I^{(I)}$ in visuale di interazione assume la forma:

$$\hat{H}_I^{(I)} = \hbar g(\vec{0}) (\hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_A t} - \hat{\sigma} e^{-i\omega_A t}) (\hat{a} e^{-i\omega_C t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega_C t}) , \quad (143)$$

ovvero

$$\hat{H}_I^{(I)} = \hbar g(\vec{0}) (\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_C - \omega_A)t} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} e^{-i(\omega_C - \omega_A)t} - \hat{\sigma} \hat{a} e^{-i(\omega_C + \omega_A)t} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_C + \omega_A)t}) . \quad (144)$$

I termini che non conservano l'energia sono moltiplicati per termini oscillatori che coinvolgono la somma delle frequenze di cavità e di transizione atomica. Al contrario, i termini corrispondenti a processi che conservano l'energia, $\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger$ e $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}$, sono moltiplicati per un'esponenziale contenente la desintonizzazione $\Delta = \omega_C - \omega_A$. Pertanto, i primi variano rapidamente nel tempo (con una frequenza approssimativamente doppia rispetto a quella di cavità), mentre i secondi variano molto lentamente. Dal momento che l'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale del primo ordine nel tempo, la sua risoluzione richiede l'integrazione nel tempo, procedimento che porta a ottenere al denominatore di ciascuno dei primi termini le somme di frequenze e al denominatore di ciascuno dei secondi differenze fra le stesse [54]. Poiché gli addendi dominanti si rivelano essere i secondi, l'Hamiltoniano $\hat{H}_I^{(I)}$ in visuale di interazione può essere approssimato come:

$$\hat{H}_I^{(I)} \approx \hbar g(\vec{0}) (\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} e^{-i\Delta t}) . \quad (145)$$

L'Hamiltoniano appena ottenuto può essere riscritto in visuale di Schrödinger, divenendo:

$$\hat{H}_I := \hbar g(\vec{0}) (\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}) . \quad (146)$$

In conclusione, si è mostrato che, in approssimazione di onda rotante, il modello di Jaynes-Cummings per un atomo a due livelli che interagisce con un singolo modo della radiazione è descritto dall'Hamiltoniano [24]:

$$\hat{H} := \hbar \omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar \omega_A \hat{\sigma}_z + \hbar g(\vec{0}) (\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}) . \quad (147)$$

2.3 L'INTERAZIONE DI CONTATTO

Nel precedente paragrafo si è focalizzato l'attenzione sulla costruzione dell'Hamiltoniana atta a descrivere l'interazione di un sistema di atomi ultrafreddi con la radiazione di cavità, trascurando il moto del centro di massa di ciascun atomo. Ora, invece, si prenderanno in esame gli effetti delle interazioni interatomiche più significative, quali quelle di van der Waals, derivate dall'interazione fra i momenti di dipolo elettrico di due atomi. A tale scopo si considera un semplice sistema composto da due atomi bosonici identici a *spin* nullo e di massa M , che interagiscono tramite un potenziale centrale $V(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = V(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|)$, ove \vec{R}_1 e \vec{R}_2 rappresentano i rispettivi vettori posizione in un determinato sistema di riferimento inerziale. L'operatore Hamiltoniano in prima quantizzazione che descrive tale sistema è della forma:

$$\hat{H}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}_1}^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}_2}^2 + \hat{V}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) , \quad (148)$$

dove sono stati omissi i circonflessi sugli operatori posizione. L'Hamiltoniano precedente può essere riscritto in termini della coordinata del centro di massa $\vec{R}_{CM} := \frac{\vec{R}_1 + \vec{R}_2}{2}$ e di quella relativa $\vec{r} := \vec{R}_1 - \vec{R}_2$.

In seguito a tale trasformazione è possibile separare l'Hamiltoniano dipendente dalle sole coordinate del centro di massa $\hat{H}_{CM}(\vec{R})$ da quello che descrive il moto relativo $\hat{H}_{rel}(\vec{r})$:

$$\hat{H}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = \hat{H}_{CM}(\vec{R}) + \hat{H}_{rel}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M_{CM}} \vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu_{rel}} \vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 + \hat{V}(r) , \quad (149)$$

dove $\mu_{rel} := \frac{M}{2}$ indica la massa ridotta del sistema, $M_{CM} := 2M$ la massa totale e $r := |\vec{R}_1 - \vec{R}_2| = |\vec{r}|$. Dal momento che il potenziale d'interazione è indipendente dal tempo, la soluzione dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo corrispondente alla (149), denotata con $\Psi(\vec{R}, \vec{r}, t)$ può essere scritta come il prodotto delle soluzioni delle equazioni di Schrödinger associate alle Hamiltoniane $\hat{H}_{rel}(\vec{r})$ e $\hat{H}_{CM}(\vec{R})$:

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}, t) = \Phi(\vec{R})\psi(\vec{r})e^{-\frac{i(E_{CM}+E_{rel})t}{\hbar}} , \quad (150)$$

dove E_{CM} è l'energia del centro di massa, mentre E_{rel} è l'energia legata al moto relativo dei due atomi. Il problema iniziale è stato quindi disaccoppiato, in due problemi a un corpo, dei quali il primo porge come soluzioni onde piane, mentre il secondo verrà analizzato con l'ausilio dalla teoria quantistica dello scattering. Considerando l'Hamiltoniano del moto relativo $H_{rel}(\vec{r})$, definendo il potenziale ridotto come $\hat{U}(r) := \frac{2\mu_{rel}}{\hbar^2} \hat{V}(r)$ e indicando l'autofunzione associata all'autovalore dell'energia $E_{rel,k} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_{rel}}$ con $\psi_k(\vec{r})$, si ottiene la seguente equazione di Schrödinger stazionaria:

$$(\vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 + k^2 - \hat{U}(r))\psi_k(\vec{r}) = 0 . \quad (151)$$

A elevate distanze dalla regione in cui si è verificato l'urto, la soluzione del problema agli autovalori riguardante il moto relativo, può essere scritta come la somma della funzione d'onda incidente $\psi_{inc}(\vec{r})$ e della funzione d'onda diffusa $\psi_{sc}(\vec{r})$. La prima, che descrive lo stato antecedente al contatto, è un'onda piana di particella libera, mentre la seconda è un'onda che rappresenta il flusso di particelle provenienti da un centro diffusore [20]. Denotando con \vec{k} il vettore d'onda associato all'onda piana incidente e ponendo $\vec{k} \parallel \hat{z}$, la funzione d'onda $\psi_k(\vec{r})$ assume la forma:

$$\psi_k(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \psi_{inc}(\vec{r}) + \psi_{sc}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} A \left[e^{ikz} + f_k(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] , \quad (152)$$

dove $r = |\vec{r}|$, A è la costante di normalizzazione, mentre $f_k(\theta)$ è l'ampiezza di diffusione, dipendente dall'angolo fra il momento relativo iniziale e quello finale, ma non dall'angolo azimutale ϕ giacché il potenziale d'interazione è centrale e il sistema è simmetrico per rotazioni intorno all'asse \hat{z} , lungo il quale si propaga il fascio incidente. La natura bosonica degli atomi interagenti impone che la funzione d'onda del sistema sia simmetrica per lo scambio delle coordinate delle due particelle, ovvero per la trasformazione $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$. Tale condizione non risulta soddisfatta dalla (152), dunque è necessario costruire a partire dalla stessa una funzione d'onda appropriata per atomi che seguono la statistica di Bose-Einstein. Esprimendo la coordinata z in coordinate sferiche, e denotando con C la nuova costante di normalizzazione, si ottiene una funzione d'onda con il seguente andamento asintotico:

$$\psi_k(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} C \left[e^{ikr \cos \theta} + e^{-ikr \cos \theta} + (f_k(\theta) + f_k(\pi - \theta)) \frac{e^{ikr}}{r} \right] . \quad (153)$$

L'ampiezza di diffusione diviene, quindi, la somma delle ampiezze di diffusione relative ai cammini *a*) e *b*) illustrati in Figura 3, che, in presenza di particelle identiche, appaiono indistinguibili dal punto di vista quantistico [34]. Inoltre la natura centrale del potenziale d'interazione si riflette nella conservazione del momento angolare della particella di massa ridotta μ : esistono dunque stati stazionari con momento angolare ben definito, comuni a $H_{rel}(\vec{r})$, \vec{L}^2 e L_z . La funzione d'onda $\psi_k(\vec{r})$ può essere, quindi, sviluppata

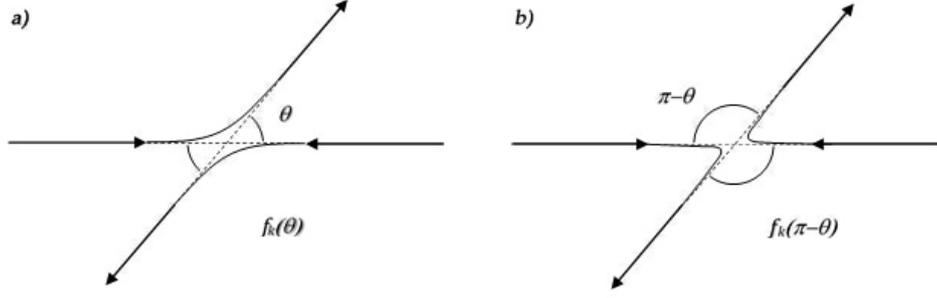


Figura 3: Le due ampiezze interferenti $f_k(\theta)$ e $f_k(\pi - \theta)$ in una collisione fra particelle identiche.

in serie di *onde parziali*, nelle quali la dipendenza angolare è determinata dalle armoniche sferiche con $m = 0$, indicate con $Y_l^0(\theta)$:

$$\psi_k(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} C \left[\sum_{l=0}^{+\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_l^0(\theta) (1 + (-1)^l) \cdot \frac{e^{i\delta_l(k)} (e^{i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k))} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k))})}{2ikr} \right], \quad (154)$$

dove l indica il numero quantico angolare e $\delta_l(k)$ lo sfasamento della diffusione. Le armoniche sferiche, richiamate nella (154), sono legate ai polinomi di Legendre dalla relazione $Y_l^0(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$, in cui $P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d \cos^l \theta} [(\cos^2 \theta - 1)^l]$. Isolando nella (154) i termini riconducibili alle onde piane

$$e^{\pm ikr \cos \theta} = \sum_{i=0}^{+\infty} (\pm i)^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} Y_l^0(\theta), \quad (155)$$

si ottiene la seguente espressione per l'ampiezza di diffusione del processo d'urto:

$$f_k(\theta) + f_k(\pi - \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{+\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} (1 + (-1)^l) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) Y_l^0(\theta). \quad (156)$$

A temperature inferiori a quella di condensazione T_C , i numeri d'onda k assumono valori molto bassi, dunque gli sfasamenti $\delta_l(k)$ per un potenziale centrale con andamento asintotico dato da $V(\vec{r})_{r \rightarrow +\infty} \approx \frac{1}{r^n}$, scalano come k^{2l+1} se $l < \frac{n-3}{2}$, o come k^{n-2} altrimenti. Ciò significa che per un potenziale di van der Waals, per il quale $n = 6$, si ha che $\delta_0(k) \propto k$, $\delta_1(k) \propto k^3$, mentre $\delta_l(k) \propto k^4$ se $l \geq 2$. Ne consegue che lo sviluppo al secondo membro della (156) a temperature particolarmente ridotte è dominato dal termine $\delta_0(k)$ detto di *onda s*:

$$f_k(\theta) + f_k(\pi - \theta) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{2}{k} e^{i\delta_0(k)} \sin \delta_0(k) \approx \frac{2}{k} \delta_0(k). \quad (157)$$

L'ampiezza di diffusione è legata alla sezione d'urto σ del processo dalla relazione differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta) + f_k(\pi - \theta)|^2. \quad (158)$$

La sezione d'urto complessiva è ottenuta integrando sulle coordinate angolari ambo i membri dell'equazione (158). Essendo lo stato caratterizzato dagli angoli θ e ϕ coincidente con quello identificato da $\pi - \theta$ e $\phi + \phi$, per evitare il doppio conteggio, è necessario limitarsi ad integrare su metà dell'angolo solido

totale 4π [22]. A tale scopo si può scegliere di integrare nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$: La sezione d'urto totale σ è, quindi, pari a:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{+1} d(\cos \theta) |f_k(\theta) + f_k(\pi - \theta)|^2 = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)(1+(-1)^l) \sin^2(\delta_l(k)) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{8\pi\delta_0^2(k)}{k^2} := 8\pi a_s^2, \end{aligned} \quad (159)$$

dove sono state utilizzate le proprietà delle armoniche sferiche $Y_l^0(\cos \theta)$, ed è stata introdotta la lunghezza di diffusione in onda s a_s . Tale grandezza, definita come

$$a_s := -\frac{\delta_l(k)}{k} = -f_k(\theta), \quad (160)$$

rappresenta il raggio d'azione caratteristico del potenziale d'interazione. Anche non conoscendone esattamente la forma funzionale, è possibile costruire un potenziale di interazione efficace che presenti sfasamento e lunghezza di diffusione identici a quelli del potenziale reale, e che dia luogo ad autofunzioni dotate del corretto comportamento asintotico a elevate distanze dalla regione di collisione. Nei gas ultrafreddi diluiti, dove la quantità di moto degli atomi è particolarmente limitata, la distanza media fra gli atomi, tipicamente dell'ordine di $10^{-7}m$, è di almeno tre ordini di grandezza superiore al raggio d'azione effettivo del potenziale [18], ovvero $a_s \ll \bar{n}^{-\frac{1}{3}}$, dove \bar{n} rappresenta la densità numerica media del gas di bosoni. Sotto le medesime ipotesi, se la distanza media tra le particelle è molto minore della lunghezza di De Broglie ad esse associata, la probabilità che si verifichi un urto ternario o di ordine maggiore è molto inferiore a quella di osservarne uno binario. In tali circostanze, per schematizzare le interazioni si ricorre a un pseudopotenziale a delta di Dirac [31]:

$$V(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M} \delta^{(3)}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) := g\delta^{(3)}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2), \quad (161)$$

dove \vec{R}_1 e \vec{R}_2 indicano le posizioni di due atomi bosonici, e M la massa di ciascuno di essi. Tale potenziale di contatto è descritto da due soli parametri, la massa della specie atomica considerata e la lunghezza di scattering, e presenta raggio d'azione estremamente corto: assume valori non nulli soltanto quando due funzioni d'onda si sovrappongono spazialmente. I gas di ^{87}Rb , ^{23}Na e ^1H presentano potenziale interatomico repulsivo, caratterizzato da lunghezza di diffusione in onda s pari a rispettivamente 5.77 nm , 2.75 nm e 0.065 nm , mentre nel caso del ^7Li l'interazione è repulsiva e contraddistinta da $a_s = -1.45 \text{ nm}$ [18]. Nel seguito si considererà la lunghezza di diffusione come un parametro dipendente dal livello energetico elettronico dell'elettrone più esterno di ciascun atomo interagente, e dunque nello studio di un sistema a due livelli si denoterà con a_{gg} la a_s relativa a due atomi nello stato fondamentale, con a_{ee} quella relativa a due atomi nello stato eccitato, e con $a_{eg} \equiv a_{ge}$ la lunghezza di diffusione associata all'interazione fra un atomo nello stato eccitato e uno nello stato fondamentale.

2.4 IL LASER DI POMPA

Al campo di cavità di pulsazione ω_C e funzione di modo TEM_{01q} , ora si affianca una sorgente laser, in grado di immettere, attraverso uno degli specchi posti alle estremità del risonatore, luce coerente di pulsazione ω_L , quasi in risonanza con quella del modo di cavità, in quanto si discosta da quest'ultima di una quantità tipicamente pari alla piena larghezza di riga a metà altezza ($FWHM$) $2\Delta\omega_C$ [47]. Il contributo del laser di pompa si traduce nella comparsa di un'espressione di natura fenomenologica all'interno dell'Hamiltoniano di radiazione \hat{H}_F (70), che così acquisisce una dipendenza esplicita dal tempo [3] [53]:

$$\hat{H}_F = \hbar\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar\eta (\hat{a} e^{i\omega_L t} - \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_L t}), \quad (162)$$

dove $\eta > 0$ s^{-1} è un parametro correlato al tasso di decadimento del modo di cavità κ e all'ampiezza del campo elettrico oscillante generato dal laser \mathcal{E}_L [3]. L'Hamiltoniano così ottenuto mostra analogie

con quello di un oscillatore armonico soggetto a una forza sinusoidalmente dipendente dal tempo, con pulsazione ω_L . Allo scopo di eviscerare tale affinità, ci si avvarrà delle equazioni (56), che esprimono la relazione fra gli operatori di seconda quantizzazione fotonici \hat{a} e \hat{a}^\dagger e gli operatori di posizione \hat{q} e momento \hat{p} di un oscillatore armonico:

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{\omega_C}{2\hbar m}} \left(m\hat{q} + \frac{i}{\omega_C}\hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{\omega_C}{2\hbar m}} \left(m\hat{q} - \frac{i}{\omega_C}\hat{p} \right), \quad (163)$$

nelle quali è stata esplicitata la dipendenza dalla massa m . Inserendo nell'Hamiltoniano (162) le equazioni appena richiamate, si ottiene:

$$\hat{H}_F = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_C^2\hat{q}^2}{2} + \eta\sqrt{2\hbar m\omega_C}\hat{q}\sin(\omega_L t) + \eta\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_C}}\hat{p}\cos(\omega_L t). \quad (164)$$

Rimpiazzando ora gli operatori presenti nella (164) con le corrispondenti variabili classiche, si ottiene l'Hamiltoniana di un corpo puntiforme di massa m , che oscilla con una pulsazione ω_C , e sul quale agisce una forza variabile con pulsazione ω_L . A partire dall'Hamiltoniana si ricavano le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + \eta\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_C}}\cos(\omega_L t) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_C^2 q - \eta\sqrt{2\hbar m\omega_C}\sin(\omega_L t) \end{cases}. \quad (165)$$

Derivando rispetto al tempo la prima delle due equazioni, e sostituendo \dot{p} con l'espressione contenuta al secondo membro della seconda equazione, si ottiene la seguente equazione differenziale di secondo ordine:

$$\ddot{q} + \omega_C^2 q + \eta\sqrt{\frac{2\hbar\omega_C}{m}} \left(1 + \frac{\omega_L}{\omega_C} \right) \sin(\omega_L t) = 0, \quad (166)$$

dalla quale si osserva che l'ampiezza della forzante è $F = -\eta\sqrt{2\hbar m\omega_C}(1 + \frac{\omega_L}{\omega_C})$, mentre l'ampiezza dell'oscillazione è pari a $A = \frac{F}{\omega_C^2 - \omega_L^2} = \sqrt{\frac{2\hbar m}{\omega_C}} \left(\frac{1}{\omega_L - \omega_C} \right)$.

2.5 IL POTENZIALE DI CONFINAMENTO

Il confinamento di gas bosonici neutri a basse temperature richiede l'utilizzo di tecniche basate su interazioni più deboli di quella coulombiana, sfruttata per l'intrappolamento di gas ionizzati. A tale scopo, gli apparati sperimentali di più largo utilizzo sono le *trappole magnetiche*, basate sull'uso dell'interazione di dipolo magnetico, quelle *ottiche*, che si avvalgono dell'interazione tra campo elettrico esterno e momento di dipolo indotto, e quelle *magneto-ottiche*, che rappresentano una combinazione delle due precedenti [50]. Altri sistemi di confinamento, ancora in fase di perfezionamento, sono le trappole *gravito-ottiche* e quelle *gravito-magnetiche*, basate rispettivamente sull'utilizzo di specchi atomici e ottici [10].

Prima di essere inseriti in trappole meno profonde come quelle *magnetiche* e *ottiche*, gli atomi bosonici vengono pre-raffreddati in trappole *magneto-ottiche* (note anche con l'acronimo *MOT*), che sono composte da tre coppie di fasci laser contropropaganti lungo direzioni ortogonali, e da due bobine di Helmholtz coassiali e percorse da corrente in sensi opposti, in grado di generare un campo magnetico non uniforme nello spazio. L'asse delle bobine coincide con la direzione di propagazione di due fasci laser contropropaganti, caratterizzati dall'aver polarizzazione circolare, elicità opposta [50] e frequenza leggermente inferiore a quella di transizione atomica ω_A . All'interno della regione di campo magnetico, gli atomi tendono ad assorbire la radiazione che si propaga nel verso opposto rispetto al loro moto, dal momento che, per effetto Doppler, essa apparirà di frequenza più vicina a ω_A . Tale processo consente loro di ridurre la quantità di moto in una data direzione, giacché la successiva emissione spontanea del fotone avviene in direzione casuale, e dunque il momento lineare delle particelle in media non varia. Inoltre, il campo magnetico esterno, interagendo con il momento di dipolo magnetico di ciascun atomo, dà origine a un potenziale di interazione dipendente dalla posizione, e allo *spostamento Zeeman* delle righe spettrali,

favorendo l'assorbimento di fotoni nelle aree a campo più intenso.

A brevi distanze dal punto di intersezione tra i fasci laser contropropaganti, e a velocità di deriva sufficientemente bassa ma comunque superiore a $\frac{\hbar}{M\lambda_A}$, la forza agente su ciascun atomo dipende linearmente dallo spostamento dalla posizione di equilibrio e dalla velocità: gli atomi bosonici tendono quindi a rallentare come se si trovassero immersi in un fluido viscoso, motivo per cui il sistema prende il nome di *melassa ottica*. La temperatura minima ottenibile in questa configurazione, è data dalla *temperatura Doppler* $T_D := \frac{\hbar\Delta\omega_A}{2k_B}$, che, per atomi di metalli alcalini, è dell'ordine di $100 \mu K$ [10], dove $\Delta\omega_A$ è la larghezza totale a metà altezza della riga di transizione atomica, in assenza di campo magnetico.

Nel sistema preso in esame, si considerano atomi opportunamente pre-raffreddati, posti all'interno di una trappola ottica di dipolo [29], che sfrutta l'interazione dispersiva fra radiazione fortemente desintonizzata rispetto alla frequenza di transizione atomica e il momento di dipolo elettrico indotto. Tale congegno consente un confinamento per tempi più lunghi rispetto a quelli permessi dalle trappole a pressione di radiazione e rende possibile la costruzione di geometrie di potenziale più complesse di quelle ottenibili tramite trappole a dipolo magnetico. Per illustrare tale meccanismo di confinamento, è possibile considerare l'atomo come un oscillatore armonico semplice e il campo elettrico come un campo classico, indicandolo con $\vec{E}(\vec{R}, t) = (\mathcal{E}(\vec{R}, t)e^{-i\omega t} + \mathcal{E}^*(\vec{R})e^{i\omega t})\hat{e}$, dove $\mathcal{E}(\vec{R})$ rappresenta l'ampiezza complessa del campo elettrico, mentre \hat{e} il vettore di polarizzazione. Il momento di dipolo elettrico indotto, denotato con $\vec{p}_i(\vec{R}, t) = (\varphi_i(\vec{R}, t)e^{-i\omega t} + \varphi_i^*(\vec{R})e^{i\omega t})\hat{e}$, è legato al campo elettrico oscillante nel tempo con frequenza ω , tramite la seguente relazione tra le rispettive ampiezze:

$$\varphi_i(\vec{R}) := \alpha\mathcal{E}(\vec{R}) . \quad (167)$$

Nell'uguaglianza appena esposta, α simboleggia la polarizzabilità complessa, che dipende dalla frequenza ω ed assume valori tanto più significativi quanto maggiore è il numero atomico [20]. In un approccio semiclassico, il valore di tale grandezza può essere stimato, schematizzando l'atomo come un sistema a due livelli, che interagisce con il campo di radiazione classico e, trascurando effetti dovuti alla saturazione, si ottiene un risultato analogo a quello ricavabile a partire dal modello di Lorentz classico:

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\frac{\Gamma}{\omega_A^2}}{\omega_A^2 - \omega^2 - i\left(\frac{\omega^3}{\omega_A^2}\right)\Gamma} , \quad (168)$$

dove

$$\Gamma = \frac{\omega_A^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} | \langle e | (-e\vec{r} \cdot \hat{e}) | e \rangle |^2 \quad (169)$$

rappresenta lo smorzamento, che comprende il tasso di decadimento dello stato eccitato. Il risultato classico, ricavato a partire dalla formula di Larmor, $\Gamma = \frac{e^2\omega_A^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3}$ è in buon accordo con quello contenuto nella precedente formula (168), nel caso di atomi di metalli alcalini come Na, K, Rb e Cs [29]. Se, nella trappola a dipolo, la radiazione è sufficientemente desintonizzata rispetto alla frequenza di transizione, lo stato eccitato rimane scarsamente popolato e l'espressione di α enunciata nella (168) resta valida. Il potenziale di interazione del momento di dipolo indotto \vec{p}_i con il campo elettrico \vec{E} è dato da:

$$U(\vec{R}) = -\frac{1}{2} \langle \vec{p}_i(\vec{R}, t) \cdot \vec{E}_p(\vec{R}, t) \rangle , \quad (170)$$

dove le parentesi angolari denotano la media temporale sui termini rapidamente oscillanti. Inoltre, il fattore $\frac{1}{2}$ deriva dal fatto che il dipolo elettrico è indotto e il potenziale $U(\vec{R})$ è ottenuto dalla somma dell'energia necessaria la realizzazione del dipolo, pari a $\frac{1}{2} \langle \vec{p}_i(\vec{R}, t) \cdot \vec{E}_p(\vec{R}, t) \rangle$ [32], e di quella d'interazione con il campo esterno, data dall'espressione $-\langle \vec{p}_i(\vec{R}, t) \cdot \vec{E}_p(\vec{R}, t) \rangle$, del tutto analoga a quella presenta-

9 A partire da tale velocità minima è possibile calcolare la *temperatura di rinculo* [10] $T_{rec} := \frac{2\pi^2\hbar^2}{M_A\lambda_A k_B} = \frac{\hbar^2 k_A^2}{2M_A k_B}$, che per atomi di metalli alcalini è dell'ordine di $0,5 \mu K$, dove k_A è il numero d'onda corrispondente alla frequenza di transizione ω_A .

ta nella (90). Avvalendosi della definizione della *polarizzabilità* fornita nell'equazione (167), l'energia d'interazione $U(\vec{R})$ può essere riscritta introducendo l'intensità del campo $I = 2\epsilon_0 c |\mathcal{E}(\vec{R})|^2$:

$$U(\vec{R}) = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I(\vec{R}) = -\frac{3\pi c^2 (\omega_A^2 - \omega^2) \left(\frac{\Gamma}{\omega_A^2}\right)}{(\omega_A^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega^6}{\omega_A^4}\right) \Gamma^2} I(\vec{R}) . \quad (171)$$

Considerando desintonizzazioni $\Delta := \omega - \omega_A$ tali per cui $|\Delta| \ll \omega_A, \omega$, e smorzamento Γ ridotto, e applicando l'approssimazione di *onda rotante*, la (171) può essere riscritta come

$$U(\vec{R}) \approx -\frac{3\pi c^2 \Gamma}{\omega_A^2 (\omega_A^2 - \omega^2)} I(\vec{R}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_A^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_A + \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_A - \omega} \right) I(\vec{R}) \approx \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_A^3 \Delta} I(\vec{R}) . \quad (172)$$

Dall'equazione così ottenuta, si osserva che, per frequenze di oscillazione inferiori a quella di risonanza, tali per cui $\Delta < 0$, il potenziale di dipolo assume segno negativo e perciò l'interazione attrae gli atomi verso le regioni di massima intensità $I(\vec{R})$, in corrispondenza delle quali il potenziale presenta i valori minimi. Quest'ultimo ha dipendenza spaziale determinata dall'intensità $I(\vec{R})$, la quale a sua volta è proporzionale al quadrato del modulo del campo elettrico generato dalla radiazione coerente. Come si dimostrerà in *Appendice A*, con un'opportuna disposizione di fasci laser è possibile realizzare un potenziale di intrappolamento esprimibile come la somma di un potenziale a tripla buca unidimensionale $U_{TW}(X)$, di interesse per lo studio dell'*effetto tunnel*, e di uno armonico bidimensionale $U_H(Y, Z)$ ¹⁰:

$$U(\vec{R}) = U_{TW}(X) + U_H(Y, Z) = -V_{TW} \left[\sum_{s=-1,0,1} \exp\left(-\frac{2(X-s \cdot l)^2}{w_{TW}^2}\right) \right] + \frac{1}{2} M \omega_H^2 (Y^2 + Z^2) \quad (173)$$

dove M rappresenta la massa di un atomo bosonico, e ω_H la pulsazione del potenziale armonico, di valore sufficientemente elevato da permettere di considerare il sistema come pressoché unidimensionale. Per quanto concerne il termine di tripla buca, ritratto in Figura 4 a pagina seguente, il parametro V_{TW} definisce la profondità della buca di potenziale, l la distanza fra i tre minimi dello stesso, e w_{TW} la larghezza di ciascun avvallamento.

Dal momento che l'equazione agli autovalori associata a un potenziale gaussiano non è risolubile analiticamente, allora potenziali come $U_{TW}(X)$ vengono spesso approssimati a potenziali con forme funzionali diverse, come il potenziale armonico o quello di Pöschl-Teller [49]. Nel primo caso, il potenziale $U_{TW}(X)$, avente la forma

$$U_{TW,H}(X) = -V_{TW} \left\{ \sum_{s=-1,0,1} \left[1 - \frac{2(X-s \cdot l)^2}{w_{TW}^2} \right] \right\} , \quad (174)$$

consente di ottenere autostati e autovalori che risultano in buon accordo [43] con quelli del potenziale $U_{TW}(X)$ soltanto ai livelli di eccitazione più bassi, giacché quest'ultimo ha profondità finita e ammette un numero finito di autostati legati. Nel secondo caso, lo spettro, composto da livelli energetici non equispaziati, si rivela un'approssimazione migliore [43] di quello di $U_{TW}(X)$, e il potenziale presenta il seguente aspetto:

$$U_{TW,PT}(X) = -V_{TW} \left\{ \sum_{s=-1,0,1} \cosh^2 \left[\frac{\sqrt{2}(X-s \cdot l)}{w_{TW}} \right] \right\} . \quad (175)$$

2.6 L'HAMILTONIANO EFFICACE

L'Hamiltoniana di Jaynes-Cummings, presentata nel paragrafo § 2.2.2, si riferiva a un sistema costituito da un solo atomo del I Gruppo della Tavola Periodica, interagente con un singolo modo di oscillazione

¹⁰ Il potenziale di confinamento degli atomi bosonici ha il medesimo andamento di quello mostrato da T. Lahaye, T. Pfau e L. Santos [38]. In quello proposto da L. Dell'Anna, G. Mazzarella, V. Penna e L. Salasnich [19], invece, il potenziale a tripla buca è bidimensionale e presenta minimi disposti in corrispondenza dei vertici di un triangolo equilatero, mentre quello armonico è unidimensionale.

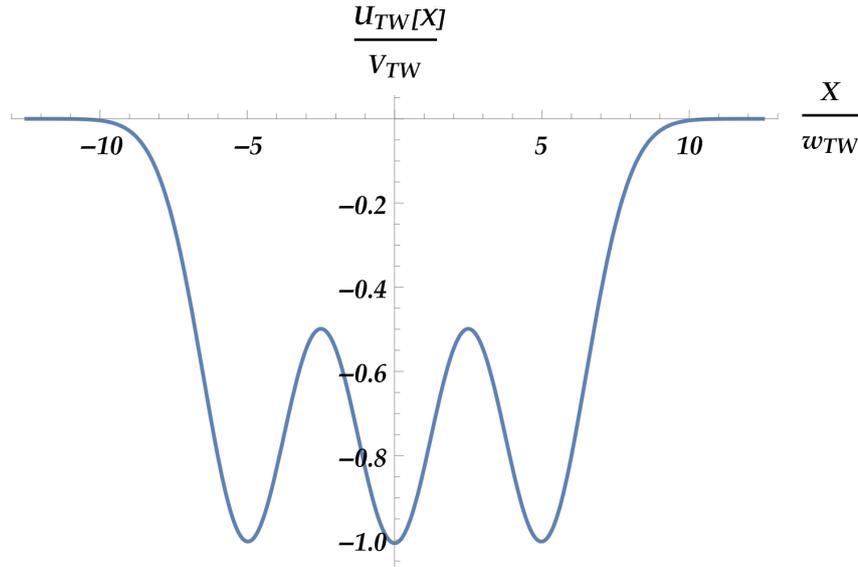


Figura 4: Il potenziale gaussiano a tripla buca unidimensionale $U_{TW}(X)$, riprodotto con $l = \frac{5}{3}w_{TW}$. Nel seguito, le grandezze correlate al minimo di potenziale posto in $X = -l$ saranno denotate con i pedici L , quelle legate al minimo situato in $X = 0$ con i pedici C , e quelle connesse al minimo presente in $X = +l$ con i pedici R . A causa della simmetria per riflessioni di tale potenziale, gli avvallamenti laterali L e R saranno indicati collettivamente con S .

del campo elettromagnetico, di frequenza ω_C . In quel contesto, era stato tralasciato il moto del centro di massa dell'atomo, focalizzandosi sulla sua struttura interna e schematizzando quest'ultimo come un sistema a due soli livelli energetici accessibili, separati da un'energia pari a $\hbar\omega_A$, molto vicina a ω_C . Ora, tale Hamiltoniana riveste un ruolo fondamentale per la costruzione dell'Hamiltoniana complessiva del gas diluito di N_A atomi bosonici, debolmente interagenti, posto all'interno di una cavità ottica, e soggetto a un potenziale di confinamento $U(\vec{R})$ (175) generato da una trappola ottica a dipolo di opportuna geometria. Nella definizione dell'Hamiltoniano complessivo, occorre estendere gli Hamiltoniani di singolo atomo H_A (113) e H_I (146) a un sistema a N_A atomi, tenendo conto dell'energia cinetica del centro di massa di ciascun bosone, del potenziale d'intrappolamento (175) e dello pseudopotenziale di contatto $V(\vec{R}, \vec{R}')$ (161). Utilizzando il formalismo della teoria quantistica dei campi, si ottiene l'hamiltoniano atomico \hat{H}_A a molte particelle:

$$\begin{aligned} \hat{H}_A = & \sum_{j=1}^{N_A} \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}_j}^2 + U(\vec{R}_j) + \bar{E} \mathbb{1}_2^{(j)} + \frac{1}{2} \hbar\omega_A \hat{\sigma}_z^{(j)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{N_A} \sum_{\xi, \xi'=g,e} g_{\xi, \xi'} \delta^{(3)}(\vec{R}_j - \vec{R}_k) |\xi\rangle_j \langle \xi'\rangle_k \langle \xi'\rangle_k \langle \xi\rangle_j, \end{aligned} \quad (176)$$

dove compaiono le matrici di *pseudo-spin* generalizzate per un sistema di N_A atomi bosonici, indicate con $\hat{\sigma}^{\dagger(j)} := |e\rangle_j \langle g|_j$, $\hat{\sigma}^{(j)} := |g\rangle_j \langle e|_j$ e $\hat{\sigma}_z^{(j)} := |e\rangle_j \langle e|_j - |g\rangle_j \langle g|_j$ con $j = 1, 2, \dots, N_A$, in analogia a quelle definite nelle (120), (122) e (112) rispettivamente. Inoltre, nella (176), è presente anche un termine dipendente dall'energia media \bar{E} del doppietto di livelli energetici elettronici, discendente da quello che compariva nella (113), ed è stata esplicitata la dipendenza della costante di accoppiamento g , definita nella (161), dall'autostato dell'Hamiltoniano elettronico (108) associato a ciascun atomo interagente. Alle costanti $g_{\xi\xi'}$ corrispondono, dunque, le lunghezze di diffusione in onda $s_{\xi\xi'}$, legate alle prime dalle relazioni:

$$g_{\xi\xi'} = \frac{4\pi \hbar^2 a_{s, \xi\xi'}}{M}, \quad (177)$$

dove $\xi, \xi' = g, e$.

Prima di estendere l'Hamiltoniano \hat{H}_I (146) a un sistema a molti atomi, si definisce la funzione di modo adimensionale $f(\vec{R})$ nel modo seguente:

$$f(\vec{R}) := \sqrt{V_{eff}} u(\vec{R}) = \frac{\sqrt{2X}}{\sigma} \cos(kY) e^{-\frac{X^2+Z^2}{2\sigma^2}}, \quad (178)$$

dove $V_{eff} := \frac{\pi\omega_0^2 L}{4}$ indica il volume efficace del modo di oscillazione TEM_{01q} [37], $k := \frac{\pi(2q+1)}{L} \equiv \frac{\omega_C}{c}$ il numero d'onda del modo di cavità, e $\sigma := \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ la larghezza del profilo gaussiano nel piano (X, Z) .

Avvalendosi della definizione di $f(\vec{R})$ appena fornita, la costante di accoppiamento $g(\vec{R})$, calcolata nella (129) per un atomo in quiete nell'origine, può essere scritta come:

$$g(\vec{R}) = \sqrt{\frac{\omega_C}{2\varepsilon_0 \hbar}} |\vec{d} \cdot \vec{u}(\vec{R})| = \sqrt{\frac{\omega_C}{2\varepsilon_0 \hbar}} |\vec{d} \cdot \hat{\epsilon}| u(\vec{R}) =: \Omega_R f(\vec{R}), \quad (179)$$

dove

$$\Omega_R := |\vec{d} \cdot \hat{\epsilon}| \sqrt{\frac{\omega_C}{2\varepsilon_0 \hbar V_{eff}}} \quad (180)$$

rappresenta la *frequenza di Rabi*, che regola lo scambio di eccitazioni fra gli atomi e il campo elettromagnetico di cavità [24]. Servendosi della (179) è possibile esprimere l'Hamiltoniano \hat{H}_I , che descrive l'interazione fra gli atomi bosonici e il campo di cavità, nel modo seguente:

$$\hat{H}_I = -i\hbar\Omega_R \sum_{j=1}^{N_A} (f(\vec{R}_j) (\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger(j) - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}(j))), \quad (181)$$

ove il fattore $-i$ discende dal fatto che si è scelto di porre la fase ϕ , introdotta nella (128), uguale a π , anziché a $\frac{\pi}{2}$, come effettuato invece nel § 2.2.2.

Sommando l'Hamiltoniano del campo elettromagnetico \hat{H}_F (162), comprensivo del termine dovuto alla presenza del laser di pompa introdotto nel § [cit. Paragrafo], agli Hamiltoniani \hat{H}_A (176) e \hat{H}_I (181) appena ricavati, si perviene, quindi, all'Hamiltoniano complessivo \hat{H} :

$$\begin{aligned} \hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_I + \hat{H}_F = & \hbar\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar\eta (e^{i\omega_L t} \hat{a} - e^{-i\omega_C t} \hat{a}^\dagger) + \\ & + \sum_{j=1}^{N_A} \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}_j}^2 + U(\vec{R}_j) + \bar{E} \mathbb{1}_2^{(j)} + \frac{1}{2} \hbar\omega_A \hat{\sigma}_z^{(j)} \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{N_A} \left(-i\hbar\Omega_R f(\vec{R}_j) (\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger(j) - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}(j)) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{N_A} \sum_{\xi, \xi' = g, e} g_{\xi\xi'} \delta^{(3)}(\vec{R}_j - \vec{R}_k) |\xi\rangle_j |\xi'\rangle_k \langle \xi'|_k \langle \xi|_j . \end{aligned} \quad (182)$$

L'Hamiltoniano \hat{H} (182) può essere scritto nel formalismo della seconda quantizzazione calcolando i valori di aspettazione degli operatori di singola e doppia particella presenti nelle espressioni a secondo membro delle (179) e (180), rispetto agli operatori di campo degli atomi bosonici $\hat{\Psi}(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{R})$ [41]. Il primo di questi rappresenta l'operatore di annichilazione di un atomo nella posizione \vec{R} , mentre il secondo l'annichilazione di un atomo nella medesima posizione. Gli operatori appena introdotti soddisfano le relazioni di commutazione bosoniche:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(\vec{R}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{R}')] &= \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}'), \\ [\hat{\Psi}^\dagger(\vec{R}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{R}')] &= 0, \\ [\hat{\Psi}(\vec{R}), \hat{\Psi}(\vec{R}')] &= 0. \end{aligned} \quad (183)$$

Avvalendosi della relazione di completezza per la base di autostati dell'Hamiltoniano elettronico (106), $|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e| = \mathbb{1}$, è possibile scrivere gli operatori di campo atomici $\hat{\Psi}(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{R})$ nel modo seguente:

$$\hat{\Psi}(\vec{R}) = |g\rangle\hat{\Psi}_g(\vec{R}) + |e\rangle\hat{\Psi}_e(\vec{R}) , \quad \hat{\Psi}^\dagger(\vec{R}) = \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})\langle g| + \hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})\langle e| , \quad (184)$$

dove $|g\rangle$ e $|e\rangle$ sono gli *autoket* relativi all'Hamiltoniano elettronico di un singolo atomo (106) [41], i cui gradi di libertà di *spin* sono stati ignorati. Inoltre $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$ (risp. $\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})$) indica l'operatore di annichilazione (risp. creazione) di un atomo con elettrone di valenza nello stato fondamentale, mentre $\hat{\Psi}_e(\vec{R})$ (risp. $\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})$) simboleggia l'operatore di annichilazione (risp. creazione) di un atomo avente elettrone più esterno nello stato eccitato. Tali operatori bosonici, introdotti nelle (184), soddisfano a relazioni di commutazione analoghe alle (183):

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}_\xi(\vec{R}), \hat{\Psi}_{\xi'}^\dagger(\vec{R}')] &= \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}')\delta_{\xi\xi'} , \\ [\hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}), \hat{\Psi}_{\xi'}^\dagger(\vec{R}')] &= 0 , \\ [\hat{\Psi}_\xi(\vec{R}), \hat{\Psi}_{\xi'}(\vec{R}')] &= 0 , \end{aligned} \quad (185)$$

dove $\xi, \xi' = g, e$. Con l'ausilio degli operatori di seconda quantizzazione definiti nelle (184), l'Hamiltoniano atomico \hat{H}_A e quello di interazione \hat{H}_I , relativi al gas di N_A atomi bosonici, possono essere riespressi come segue:

$$\begin{aligned} \hat{H}_A := \sum_{\xi=g,e} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + E_e\delta_{\xi,e} + E_g\delta_{\xi,g} \right] \hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\xi,\xi'=g,e} g_{\xi\xi'} \int d^3\vec{R} \int d^3\vec{R}' \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_{\xi'}^\dagger(\vec{R}') \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}') \hat{\Psi}_{\xi'}(\vec{R}') \hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) , \end{aligned} \quad (186)$$

e

$$\hat{H}_I := -i\hbar\Omega_R \int d^3\vec{R} f(\vec{R}) [\hat{a}\hat{\Psi}_e^\dagger\hat{\Psi}_g(\vec{R}) - \hat{a}^\dagger\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_e(\vec{R})] . \quad (187)$$

L'Hamiltoniano atomico \hat{H}_A (186) può essere riscritto, ponendo $E_g \equiv 0$ ed $E_e \equiv \hbar\omega_A$, e integrando sulle coordinate \vec{R}' , ottenendo:

$$\begin{aligned} \hat{H}_A := \sum_{\xi=g,e} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \hbar\omega_A\delta_{\xi,e} \right] \hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\xi,\xi'=g,e} g_{\xi\xi'} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_{\xi'}^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_{\xi'}(\vec{R}) \hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) . \end{aligned} \quad (188)$$

L'Hamiltoniano complessivo \hat{H} diviene quindi:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \hbar\omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar\eta (e^{i\omega_L t} \hat{a} - e^{-i\omega_C t} \hat{a}^\dagger) + \\ + \sum_{\xi=g,e} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \hbar\omega_A\delta_{\xi,e} \right] \hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\xi,\xi'=g,e} g_{\xi\xi'} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_{\xi'}^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_{\xi'}(\vec{R}) \hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) + \\ - i\hbar\Omega_R \int d^3\vec{R} f(\vec{R}) [\hat{a}\hat{\Psi}_e^\dagger\hat{\Psi}_g(\vec{R}) - \hat{a}^\dagger\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_e(\vec{R})] . \end{aligned} \quad (189)$$

Per rimuovere la dipendenza temporale dall'operatore Hamiltoniano di cavità \hat{H}_F , si può applicare una trasformazione unitaria con l'ausilio dell'operatore \hat{U} , che trasformi ogni operatore \hat{O} in un operatore $\hat{\tilde{O}} := \hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger$ e ogni stato $|\psi\rangle$ nello stato $|\tilde{\psi}\rangle := \hat{U}|\psi\rangle$. Esplicitando la dipendenza dal tempo dell'operatore

$\hat{U}(t)$, se l'equazione di Schrödinger originaria è $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$, l'equazione trasformata dovrà preservare la forma di quella precedente:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad (190)$$

dove l'Hamiltoniano \tilde{H} è indipendente dal tempo. La relazione che sussiste fra detto operatore e quello originale può essere ricavata inserendo l'identità $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = \mathbb{1}$ all'interno dell'equazione di Schrödinger originaria e moltiplicando a sinistra ambo i membri per $\hat{U}(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t)\hat{H}(t)\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\psi(t)\rangle &= i\hbar\hat{U}(t)\frac{d}{dt}(\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\psi(t)\rangle) \\ \hat{U}(t)\hat{H}(t)\hat{U}^\dagger(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle &= i\hbar\hat{U}(t)\hat{U}^\dagger(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle + i\hbar\frac{d}{dt}(|\tilde{\psi}(t)\rangle), \end{aligned} \quad (191)$$

dove, nel secondo passaggio, è stata sfruttata la relazione tra $|\psi(t)\rangle$ e $|\hat{\psi}(t)\rangle$. Tenendo conto che $\frac{d}{dt}(\hat{U}(t)\hat{U}^\dagger(t)) = 0$, ovvero che $\hat{U}(t)\hat{U}^\dagger(t) = -\dot{\hat{U}}(t)\hat{U}^\dagger(t)$, l'equazione (191) può essere riscritta come:

$$i\hbar\frac{d}{dt}(|\tilde{\psi}(t)\rangle) = (\hat{U}(t)\hat{H}(t)\hat{U}^\dagger(t) + i\hbar\dot{\hat{U}}(t)\hat{U}^\dagger(t))|\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (192)$$

Dal confronto fra la (192) e la (190), si ottiene la relazione fra l'Hamiltoniano trasformato \tilde{H} e quello originario $\hat{H}(t)$:

$$\tilde{H} := \hat{U}(t)\hat{H}(t)\hat{U}^\dagger(t) + i\hbar\frac{\partial\hat{U}(t)}{\partial t}\hat{U}^\dagger(t). \quad (193)$$

L'operatore $\hat{U}(t)$ associato alla trasformazione unitaria che consente di ricavare un Hamiltoniano \tilde{H} indipendente dal tempo è [61]:

$$\hat{U}(t) = \exp\left\{i\omega_L t \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_e(\vec{R}) \right]\right\}. \quad (194)$$

Agendo su spazi di Hilbert diversi, gli operatori di seconda quantizzazione della radiazione \hat{a} e \hat{a}^\dagger commutano con gli operatori di campo bosonici $\hat{\Psi}_e(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})$, quindi è possibile riscrivere l'operatore unitario $\hat{U}(t)$ (194) come il prodotto di due operatori $\hat{U}_F(t)$ e $\hat{U}_A(t)$, anch'essi unitari:

$$\hat{U}(t) = \exp\left\{i\omega_L t \hat{a}^\dagger \hat{a}\right\} \exp\left\{i\omega_L t \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_e(\vec{R})\right\} =: \hat{U}_F(t)\hat{U}_A(t), \quad (195)$$

dove $\hat{U}_F(t) := \exp\{i\omega_L t \hat{a}^\dagger \hat{a}\}$ commuta con gli operatori di campo degli atomi bosonici, mentre $\hat{U}_A(t) := \exp\{i\omega_L t \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_e(\vec{R})\}$ commuta con gli operatori di creazione e annichilazione del campo elettromagnetico. Per calcolare l'Hamiltoniano trasformato \tilde{H} , è necessario utilizzare la seguente formula, discendente da quella di Baker-Campbell-Hausdorff [21]:

$$e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-i\lambda\hat{A}} = e^{i\lambda\gamma}, \quad (196)$$

dove \hat{A} e \hat{B} sono due operatori che soddisfano la relazione di commutazione $[\hat{A}, \hat{B}] = \gamma\hat{B}$, con $\gamma \in \mathbf{R}$. Avvalendosi della (196) e ponendo $\lambda = \omega_L t$, gli operatori trasformati \tilde{a} e \tilde{a}^\dagger , relativi al campo di cavità, assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &:= \hat{U}(t)\hat{a}\hat{U}^\dagger(t) = \hat{a}e^{-i\omega_L t}, \\ \tilde{a}^\dagger &:= \hat{U}(t)\hat{a}^\dagger\hat{U}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\omega_L t}, \end{aligned} \quad (197)$$

grazie alle relazioni di commutazione (58) e (59). Analogamente, gli operatori di campo bosonici di annichilazione $\hat{\Psi}_\xi(\vec{R})$ e di creazione $\hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R})$ con $\xi = e, g$ trasformano sotto la (194) come:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_e(\vec{R}) &:= \hat{U}(t)\hat{\Psi}_e(\vec{R})\hat{U}^\dagger(t) = \hat{\Psi}_e(\vec{R})e^{-i\omega_L t}, \\ \tilde{\Psi}_e^\dagger(\vec{R}) &:= \hat{U}(t)\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})\hat{U}^\dagger(t) = \hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})e^{i\omega_L t}, \\ \tilde{\Psi}_g(\vec{R}) &:= \hat{U}(t)\hat{\Psi}_g(\vec{R})\hat{U}^\dagger(t) = \hat{\Psi}_g(\vec{R}), \\ \tilde{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) &:= \hat{U}(t)\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})\hat{U}^\dagger(t) = \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}), \end{aligned} \quad (198)$$

dove nel calcolo sono state utilizzate le relazioni di commutazione (185) fra gli operatori atomici di seconda quantizzazione, oltre che l'identità (196). Osservando che l'operatore a un corpo $E_\xi(\vec{R}) := -\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \hbar\omega_A\delta_{\xi,e}$ e la funzione di modo $f(\vec{R})$ commutano con l'operatore $\hat{U}(t)$, servendosi dei risultati delle (197) e (198), a partire dalla definizione (193), si ottiene l'Hamiltoniano complessivo trasformato \tilde{H} :

$$\begin{aligned} \tilde{H} := & -\hbar\Delta_C\hat{a}^\dagger\hat{a} - i\hbar\eta(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \\ & + \sum_{\xi=g,e} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) - \hbar\Delta_A\delta_{\xi,e} \right] \hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\xi,\xi'=g,e} g_{\xi\xi'} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_{\xi'}^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_{\xi'}(\vec{R})\hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) + \\ & + -i\hbar\Omega_R \int d^3\vec{R} f(\vec{R}) [\hat{a}\hat{\Psi}_e^\dagger\hat{\Psi}_g(\vec{R}) - \hat{a}^\dagger\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_e(\vec{R})] , \end{aligned} \quad (199)$$

dove sono state definite la desintonizzazione atomica $\Delta_A := \omega_L - \omega_A$, e la desintonizzazione del campo di cavità $\Delta_C := \omega_L - \omega_C$ rispetto alla frequenza del laser di pompa ω_L . A partire dall'Hamiltoniano trasformato \tilde{H} , che verrà d'ora innanzi denotato con il simbolo di quello originale \hat{H} per semplicità di notazione, possono essere determinate le seguenti equazioni di Heisenberg relative agli operatori di seconda quantizzazione della radiazione \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$i\hbar\frac{\partial\hat{a}}{\partial t} = [\hat{a}, \hat{H}] = -\hbar\Delta_C\hat{a} + i\hbar\eta + i\hbar\Omega_R \int d^3\vec{R} f(\vec{R})\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_e(\vec{R}) , \quad (200)$$

e

$$i\hbar\frac{\partial\hat{a}^\dagger}{\partial t} = [\hat{a}^\dagger, \hat{H}] = +\hbar\Delta_C\hat{a}^\dagger + i\hbar\eta + i\hbar\Omega_R \int d^3\vec{R} f(\vec{R})\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_g(\vec{R}) . \quad (201)$$

Analogamente, le equazioni di Heisenberg relative agli operatori di campo degli atomi bosonici $\hat{\Psi}_\xi(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R})$, con $\xi = g, e$ sono:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}_g(\vec{R})}{\partial t} = [\hat{\Psi}_g(\vec{R}), \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \sum_{\xi=g,e} g_{g\xi}\hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) \right] \hat{\Psi}_g(\vec{R}) + i\hbar\Omega_R f(\vec{R})\hat{a}^\dagger\hat{\Psi}_e(\vec{R}) , \quad (202)$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})}{\partial t} = [\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}), \hat{H}] = -\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \sum_{\xi=g,e} g_{g\xi}\hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) \right] + i\hbar\Omega_R f(\vec{R})\hat{a}\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R}) , \quad (203)$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}_e(\vec{R})}{\partial t} = [\hat{\Psi}_e(\vec{R}), \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) - \hbar\Delta_A + \sum_{\xi=g,e} g_{g\xi}\hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) \right] \hat{\Psi}_e(\vec{R}) - i\hbar\Omega_R f(\vec{R})\hat{a}\hat{\Psi}_g(\vec{R}) , \quad (204)$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})}{\partial t} = [\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R}), \hat{H}] = -\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) - \hbar\Delta_A + \sum_{\xi=g,e} g_{g\xi}\hat{\Psi}_\xi^\dagger(\vec{R})\hat{\Psi}_\xi(\vec{R}) \right] - i\hbar\Omega_R f(\vec{R})\hat{a}^\dagger\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) . \quad (205)$$

Nel limite in cui la desintonizzazione atomica è molto maggiore delle altre scale di frequenza caratteristiche del sistema, allora la popolazione nello stato eccitato diviene esigua e pressoché costante nel tempo. Ciò significa che $\Delta_A \gg \sqrt{N_A}\Omega_R$, $\hbar^{-1}V_{TW}$, $\hbar^{-1}N_A g_{\xi,\xi'}$, dove $\sqrt{N_A}\Omega_R$ rappresenta la frequenza di interazione tra gli atomi e il campo elettromagnetico, mentre $\hbar^{-1}V_{TW}$ è la frequenza legata alla profondità del potenziale di confinamento a tripla buca, e $\hbar^{-1}N_A g_{\xi,\xi'}$ indica la frequenza d'interazione di contatto fra gli atomi bosonici [61]. Sotto tali condizioni, dall'equazione (200) si ottiene che l'operatore di campo atomico relativo allo stato eccitato raggiunge adiabaticamente il suo valore di equilibrio:

$$\hat{\Psi}_e(\vec{R}) \simeq -i \frac{\Omega_R f(\vec{R})}{\Delta_A} \hat{a} \hat{\Psi}_g(\vec{R}) . \quad (206)$$

A questo punto, le equazioni del moto degli operatori di seconda quantizzazione \hat{a} fotonico e $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$ atomico prendono la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{a}}{\partial t} = -\hbar \Delta_C \bar{a} + i\hbar \eta + \hbar \frac{\Omega_R}{\Delta_A} \hat{a} \int d^3\vec{R} f^2(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) , \quad (207)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}_g(\vec{R})}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \hbar \frac{\Omega_R^2}{\Delta_A} f^2(\vec{R}) \hat{a}^\dagger \hat{a} + g_{gg} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) \right] \hat{\Psi}_g(\vec{R}) , \quad (208)$$

dove è stato trascurato il termine di interazione fra gli atomi nello stato fondamentale e quelli nello stato eccitato caratterizzato dalla costante g_{ge} , giacché la popolazione dei secondi è molto inferiore a quella dei primi. Partendo da tali equazioni, è possibile ricavare l'Hamiltoniano efficace che le genera:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{eff} := & -\hbar \Delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar \eta (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \\ & + \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \hbar U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} f^2(\vec{R}) + \frac{1}{2} g_{gg} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) \right] \hat{\Psi}_g(\vec{R}) , \end{aligned} \quad (209)$$

dove è stata introdotta la costante $U_0 := \frac{\Omega_R^2}{\Delta_A}$ relativa all'accoppiamento tra gli atomi bosonici e il campo di cavità.

Grazie all'eliminazione adiabatica della popolazione nello stato eccitato, l'interazione tra atomo e fotone è data essenzialmente dal fotone dispersivo diffuso dagli atomi. Di conseguenza compare un nuovo potenziale di origine ottica, proporzionale al numero di fotoni e avente ampiezza efficace $U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$ e dipendenza dalla posizione regolata da $f^2(\vec{R})$, funzione che, per opportuni valori di L e σ , presenta valori massimi in corrispondenza delle barriere di potenziale fra le buche. Quando la frequenza di transizione atomica è desintonizzata verso il rosso rispetto alla frequenza del laser di pompa ω_L , ossia quando Δ_A e U_0 assumono valori negativi, il potenziale appena descritto è in grado di abbassare le barriere presenti nel potenziale di tripla buca $U_{TW}(X)$, definito nella (173), agevolando il tunneling atomico fra i minimi del potenziale, come si può osservare in Figura 5 a pagina seguente. In queste condizioni, gli atomi bosonici tendono a posizionarsi in prossimità dei massimi di intensità del quadrato del modulo della funzione di modo della cavità $f^2(\vec{R})$ (178) [29]. Viceversa, quando la desintonizzazione è verso il blu, ovvero quando Δ_A e U_0 assumono valori positivi, il potenziale ottico risulta repulsivo, e quindi il fenomeno del tunneling appare inibito.

2.6.1 L'Hamiltoniano efficace in approssimazione a tre modi

Al fine di ottenere espressioni esplicite per gli operatori di campo atomici (184), si consideri l'Hamiltoniano atomico imperturbato $H_{A,0}(\vec{R})$, espresso nel formalismo della prima quantizzazione:

$$H_{A,0}(\vec{R}) := -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) . \quad (210)$$

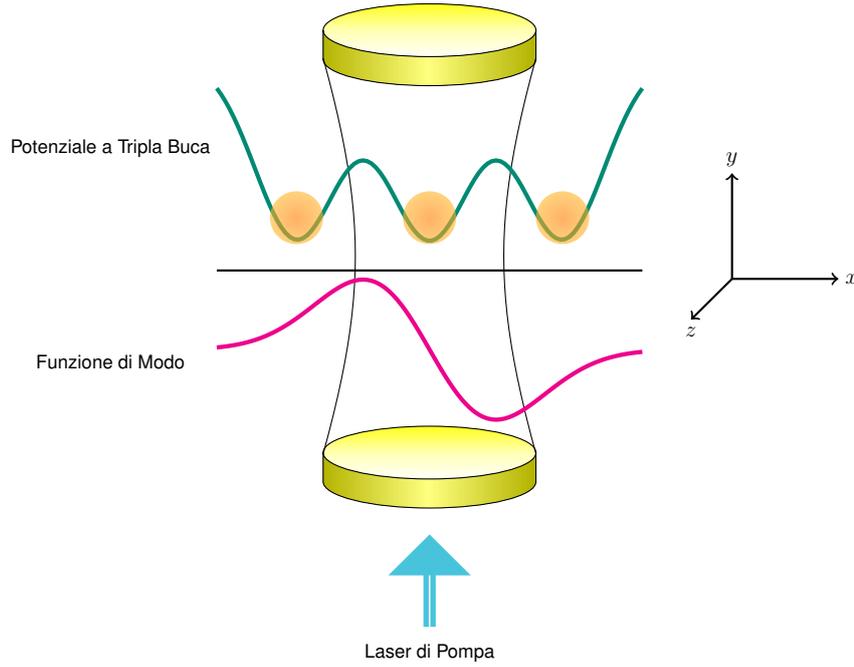


Figura 5: Nel disegno è ritratta in forma schematica la cavità ottica di Fabry-Pérot al cui interno è confinato il gas diluito di atomi bosonici. In magenta è riprodotto l'andamento lungo l'asse X della funzione di modo TEM_{01q} di oscillazione del campo elettromagnetico nel risonatore, e in verde il potenziale di confinamento a tripla buca unidimensionale con $l = 2\sigma$.

Poiché il potenziale $U(\vec{R})$ (173) è scrivibile come la somma di un potenziale dipendente dalla sola coordinata X , $U_{TW}(x)$, e di uno dipendente dalle coordinate Y e Z , $U_H(Y, Z)$, è possibile esprimere $H_{A,0}(\vec{R})$ come la somma di due Hamiltoniani indipendenti,

$$H_{TW}(X) := -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + U_{TW}(X) , \quad (211)$$

e

$$H_H(Y, Z) := -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) + U_H(Y, Z) . \quad (212)$$

Un autostato dell'Hamiltoniano $H_{A,0}(\vec{R})$ è, quindi, esprimibile, come il prodotto fra un autostato dell'Hamiltoniano di oscillatore armonico bidimensionale $H_H(Y, Z)$, e di uno dell'Hamiltoniano caratterizzato dal potenziale a tripla buca lineare $H_{TW}(X)$. Dal momento che il confinamento armonico bidimensionale è molto intenso, a temperature inferiori alla T_C di condensazione di Bose-Einstein, si osserva che solo il livello energetico fondamentale $E_{0,H} := \hbar\omega_H$ di $H_H(Y, Z)$ è popolato. Ne consegue che la dipendenza dalle coordinate (Y, Z) di un operatore di campo bosonico è regolata dall'autostato corrispondente all'energia $E_{0,H}$, indicato con $\varphi_{00}(Y, Z)$ e definito come:

$$\varphi_{00}(Y, Z) := \left(\frac{M\omega_H}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{M\omega_H(Y^2+Z^2)}{2\hbar}} . \quad (213)$$

Nell'analisi del problema unidimensionale, invece, la dipendenza dalla coordinata X degli operatori di campo atomici è determinata dai tre autostati a energia più bassa $\phi_i(X)$, con $i = 0, 1, 2$, associati alle rispettive autoenergie $E_{i,TW}$ dell'Hamiltoniano $H_{TW}(X)$. Inoltre, si suppone che l'energia media \bar{E}_{TW} di tale tripletto di stati sia ben distanziata dall'energia $E_{3,TW}$ corrispondente al terzo stato eccitato $\phi_3(X)$, e che l'accensione adiabatica del campo elettromagnetico di cavità lasci gli autostati e lo spettro dell'Hamiltoniano di singolo atomo pressoché invariati. Denotando con ΔE_{TW} la differenza di energia $E_{4,TW} - \bar{E}_{TW}$, l'assunzione precedente appare sensata se $\Delta E_{TW} \gg -U_0 \xi^2 \langle f^2(\vec{R}) \rangle$ [61], dove ξ^2 è il numero di fotoni nella cavità, e $\langle f^2(\vec{R}) \rangle$ rappresenta il valor medio del quadrato del modulo della funzione

di modo (178), calcolato rispetto alla funzione d'onda del condensato. Giacché il potenziale $U_{TW}(X)$ è simmetrico rispetto all'origine, e dunque invariante per riflessioni, gli autostati di $H_H(X)$ presentano simmetria definita, dunque sono anche autostati dell'operatore di parità unidimensionale \mathcal{P}_X . E' possibile dimostrare che gli autostati a indice pari sono simmetrici, e che il numero di nodi cresce all'aumentare dell'energia degli stessi. Tramite combinazioni lineari delle autofunzioni $\phi_0(X)$, $\phi_1(X)$ e $\phi_2(X)$, possono essere costruite tre funzioni d'onda simili a quelle di Wannier, $w_i(X)$, con $i = L, C, R$, caratterizzate dall'aver ampiezza soltanto in corrispondenza dell' i -esimo avvallamento del potenziale $U_{TW}(X)$. Indicando con \hat{b}_i l'operatore di annichilazione bosonico associato alla funzione d'onda $w_i(X)$ localizzata nel sito i del potenziale, dove $i = L, C, R$, e con \hat{b}_i^\dagger il rispettivo operatore di creazione, che soddisfano le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] &= \delta_{ij} , \\ [\hat{b}_i, \hat{b}_j] &= 0 , \\ [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] &= 0 , \end{aligned} \quad (214)$$

valide per $i, j = L, C, R$, l'espressione degli operatori di campo atomici $\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$ in termini di dette funzioni prende il nome di *approssimazione a tre modi*. Gli operatori di creazione $\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})$ e di annichilazione $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$ possono, pertanto, essere scritti rispettivamente come

$$\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) = (w_L^*(X)\hat{b}_L^\dagger + w_C^*(X)\hat{b}_C^\dagger + w_R^*(X)\hat{b}_R^\dagger) e^{-\frac{Y^2+Z^2}{2l_H^2}} / \sqrt{\pi l_H} , \quad (215)$$

e

$$\hat{\Psi}_g(\vec{R}) = (w_L(X)\hat{b}_L + w_C(X)\hat{b}_C + w_R(X)\hat{b}_R) e^{-\frac{Y^2+Z^2}{2l_H^2}} / \sqrt{\pi l_H} , \quad (216)$$

dove $l_H = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_H}}$ rappresenta la lunghezza caratteristica del confinamento armonico intenso lungo il piano (Y, Z) , che si suppone essere molto maggiore rispetto alla larghezza di ciascun minimo w_{TW} di $U_{TW}(X)$ (175). Per ottenere l'Hamiltoniano in approssimazione a due modi si sostituiscono le espressioni relative agli operatori di campo atomici all'interno della parte dell'Hamiltoniano efficace complessivo (209) contenente detti operatori:

$$\int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) + \hbar U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} f^2(\vec{R}) + \frac{1}{2} g_{gg} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) \right] \hat{\Psi}_g(\vec{R}) . \quad (217)$$

Nell'espressione precedente si possono distinguere l'Hamiltoniano atomico imperturbato efficace $\hat{H}_{A,0}^{eff}$, quello di interazione interatomica $\hat{H}_{A,1}^{eff}$, e quello d'interazione con il campo di cavità \hat{H}_I^{eff} , definiti rispettivamente come segue:

$$\hat{H}_{A,0}^{eff} := \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_{\vec{R}}^2 + U(\vec{R}) \right] \hat{\Psi}_g(\vec{R}) , \quad (218)$$

$$\hat{H}_{A,1}^{eff} := \frac{1}{2} g_{gg} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) , \quad (219)$$

e

$$\hat{H}_I^{eff} := \hbar U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \int d^3\vec{R} \hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) f^2(\vec{R}) \hat{\Psi}_g(\vec{R}) , \quad (220)$$

dove, nella terza definizione, si è tenuto conto del fatto che gli operatori di seconda quantizzazione della radiazione \hat{a}^\dagger e \hat{a} commutano con gli operatori di campo atomici $\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$. Fattorizzando l'operatore atomico di annichilazione come

$$\hat{\Psi}_g(\vec{R}) := \hat{\phi}(X) \varphi(Y, Z) , \quad (221)$$

e quello di creazione come

$$\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R}) := \varphi^*(Y, Z) \hat{\phi}^\dagger(X) , \quad (222)$$

e ricordando le definizioni precedenti di $H_{TW}(X)$ (211) e $H_H(Y, Z)$ (212), l'Hamiltoniano efficace $\hat{H}_{A,0}^{eff}$ può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{A,0}^{eff} &= \int dX \int dY \int dZ \left[\varphi^*(Y, Z) \hat{\phi}^\dagger(X) (H_{TW}(X) + H_H(Y, Z)) \hat{\phi}(X) \varphi(Y, Z) \right] \\ &= \int dX \left[\hat{\phi}^\dagger(X) H_{TW}(X) \hat{\phi}(X) \right] \int dY \int dZ \left[\varphi^*(Y, Z) \varphi(Y, Z) \right] + \\ &+ \int dX \left[\hat{\phi}(X)^\dagger \hat{\phi}(X) \right] \int dY dZ \left[\varphi^*(Y, Z) H_H(Y, Z) \varphi(Y, Z) \right] = \\ &= \int dX \left[\hat{\phi}^\dagger(X) H_{TW}(X) \hat{\phi}(X) \right] + \\ &+ \int dX \left[\hat{\phi}^\dagger(X) \hat{\phi}(X) \right] \int dY \int dZ \left[\varphi^*(Y, Z) H_H(Y, Z) \varphi(Y, Z) \right] , \end{aligned} \quad (223)$$

dove, nell'ultimo passaggio, è stata utilizzata la relazione di normalizzazione di $\varphi(Y, Z)$, ovvero quella dell'autostato dell'oscillatore armonico bidimensionale relativo al livello energetico fondamentale $\varphi_{00}(Y, Z)$ (213), $\int dY \int dZ \varphi^*(Y, Z) \varphi(Y, Z) = \int dY \int dZ \varphi_{00}^*(Y, Z) \varphi_{00}(Y, Z) = 1$. Poiché $\varphi(Y, Z) := \varphi_{00}(Y, Z)$ è autostato di $H_H(Y, Z)$, il secondo integrale dell'ultimo addendo presente nella (223) può essere calcolato esplicitamente:

$$\int dY \int dZ \left[\varphi^*(Y, Z) H_H(Y, Z) \varphi(Y, Z) \right] = \hbar \omega_H . \quad (224)$$

L'integrale nella coordinata X presente nell'ultimo addendo della (223) può, invece, essere calcolato avvalendosi della definizione dell'operatore $\hat{\phi}(X) := \sum_{i=L,C,R} w_i(X) \hat{b}_i$:

$$\int dX \hat{\phi}^\dagger(X) \hat{\phi}(X) = \sum_{i,j=L,C,R} \left[\left(\int dX w_i^*(X) w_j(X) \right) \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \right] . \quad (225)$$

Considerando il fatto che le funzioni d'onda localizzate $w_i(X)$, con $i = L, C, R$, soddisfano le relazioni di ortonormalità $\int dX w_i^*(X) w_j(X) = \delta_{ij}$, il termine a secondo membro della (225) diventa:

$$\sum_{i=L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i = \sum_{i,j=L,C,R} \hat{n}_i = \hat{N}_A , \quad (226)$$

in cui $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ indica l'operatore numero di atomi presenti nel sito i del potenziale, mentre \hat{N}_A simboleggia l'operatore numero totale degli atomi nella cavità ottica.

Il primo integrale a secondo membro della (223) può, invece, essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int dX \left[\hat{\phi}^\dagger(X) H_{TW}(X) \hat{\phi}(X) \right] &= \sum_{i,j=L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \left[\int dX w_i^*(X) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dX^2} + U_{TW}(X) \right) w_j(X) \right] \\ &= \sum_{i=L,C,R} \hat{n}_i \left[\int dX w_i^*(X) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dX^2} + U_{TW}(X) \right) w_i(X) \right] + \\ &+ \sum_{\substack{i,j=L,C,R \\ i \neq j}} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \left[\int dX w_i^*(X) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dX^2} + U_{TW}(X) \right) w_j(X) \right] . \end{aligned} \quad (227)$$

Ora gli integrali presenti nel primo termine a secondo membro dell'equazione (227) rappresentano le energie ε'_i associate a ciascuno stato localizzato descritto dalla funzione di simil-Wannier $w_i(X)$, con $i = L, C, R$,

$$\varepsilon'_i := \int dX w_i^*(X) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dX^2} + U_{TW}(X) \right) w_i(X) , \quad (228)$$

mentre gli integrali presenti nel secondo termine rappresentano l'opposto delle ampiezze di tunneling J_{ji} fra i siti j e i del potenziale:

$$J_{ji} := - \int dX w_i^*(X) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d}{d^2} + U_{TW}(X) \right) w_j(X) . \quad (229)$$

Giacché il potenziale a tripla buca è simmetrico per riflessioni, l'ampiezza di *tunneling* dalla buca centrale C a quella sinistra L , indicata con J_{CL} , è uguale a quella dalla buca centrale C a quella destra R , denotata con J_{CR} , mentre, essendo l'ampiezza J_{ji} , con $j, i = L, C, R$, reale, essa sarà simmetrica per scambio di indici j e i . Grazie alle proprietà appena illustrate, è possibile definire un'ampiezza di *tunneling* fra siti contigui $J_1 := J_{CL} = J_{LC} = J_{RC} = J_{CR}$, e un'ampiezza di *tunneling* tra siti secondi vicini $J_2 := J_{LR} = J_{RL}$, che assume valori tipicamente di uno o due ordini di grandezza inferiori rispetto a J_1 , a causa della localizzazione delle funzioni di simil-Wannier. Denotando con $\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \hbar\omega_H$ l'energia associata alla funzione d'onda *complessiva* di un atomo localizzato nell'avvallamento i del potenziale, la simmetria per riflessione di U_{TW} permette di concludere che $\varepsilon_L = \varepsilon_R$, e definendo tale quantità ε_S , l'operatore Hamiltoniano $\hat{H}_{A,0}^{eff}$ (223) diviene:

$$\hat{H}_{A,0}^{eff} = \varepsilon_C \hat{n}_C + \varepsilon_S (\hat{n}_L + \hat{n}_R) - J_1 \left(\sum_{\langle i,j \rangle = L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \right) - J_2 (\hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_L) , \quad (230)$$

dove la sommatoria con indici $\langle i, j \rangle$ è fra siti primi vicini e consta, quindi, di quattro termini. Sostituendo le espressioni corrispondenti agli operatori di creazione e annichilazione atomici $\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})$ (222) e $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$ (221), l'Hamiltoniano di interazione interatomica $\hat{H}_{A,1}^{eff}$ (219) assume la forma seguente:

$$\hat{H}_{A,1}^{eff} = \frac{1}{2} g_{gg} \int dY \int dZ |\phi^*(Y, Z)|^4 \int dX \hat{\phi}^\dagger(X) \hat{\phi}^\dagger(X) \hat{\phi}(X) \hat{\phi}(X) . \quad (231)$$

Ricordando l'espressione di $\phi(Y, Z) \equiv \phi_{00}(Y, Z)$ (213), si calcola l'integrale sulle coordinate Y e Z presente nella relazione precedente, ottenendo:

$$\int dY \int dZ |\phi^*(Y, Z)|^4 = \frac{1}{2\pi l_H^2} . \quad (232)$$

A questo punto, tenendo conto dell'integrazione appena effettuata ed esplicitando gli operatori $\hat{\phi}^\dagger(X)$ e $\hat{\phi}(X)$, si perviene alla seguente espressione per $\hat{H}_{A,1}^{eff}$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{A,1}^{eff} &= \frac{g_{gg}}{4\pi l_H^2} \sum_{i,j,k,l=L,C,R} \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_k \hat{b}_l \int dX w_i^*(X) w_j^*(X) w_k(X) w_l(X) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=L,C,R} U_{ijkl} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_k \hat{b}_l , \end{aligned} \quad (233)$$

nella quale è stata introdotta l'energia di interazione di contatto U_{ijkl} , dove $i, j, k, l = L, C, R$. Dal momento che le funzioni di simil-Wannier sono decisamente localizzate, soltanto i termini U_{iii} con $i = L, C, R$ assumono valori significativi, mentre quelli i cui indici non sono tutti uguali sono tipicamente inferiori di almeno due ordini di grandezza rispetto ai precedenti: fra questi ultimi i più rilevanti sono i termini U_{iiij} e U_{iijj} con $j = L, C, R$ indicante un sito contiguo a i , invece quelli che presentano soltanto indici L e R , relativi a buche seconde vicine, possono raggiungere valori di tre o quattro ordini di grandezza inferiori rispetto a quelli dei termini U_{iii} . Grazie alla simmetria per riflessione del potenziale di confinamento e alla profondità pressoché identica di ciascuna buca, è possibile dimostrare che, con ottima approssimazione, i termini U_{iii} , con $i = L, C, R$, si equivalgono, pertanto si definisce la comune energia d'interazione U fra una coppia di atomi presenti nello stesso sito come

$$U := \frac{g_{gg}}{2\pi l_H^2} \int dX |w_i(X)|^4 , \quad (234)$$

dove $i = L, C, R$. Ponendo $i = j$ nella prima delle tre relazioni di commutazione (214) si ottiene $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i = \hat{b}_i \hat{b}_i^\dagger - 1$, con $i = L, C, R$, relazione che può essere adoperata per riscrivere l'Hamiltoniano di interazione \hat{H}_I^{eff} nella forma seguente:

$$\hat{H}_{A,1}^{eff} = \frac{U}{2} \sum_{i=L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \hat{b}_i = \frac{U}{2} \sum_{i=L,C,R} \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) , \quad (235)$$

ove sono state utilizzate le definizioni $\hat{n}_i := \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$, valide per $i = L, C, R$. Ora si focalizza l'attenzione sull'operatore \hat{H}_I^{eff} (220), che rappresenta l'Hamiltoniano di interazione fra un atomo bosonico e il campo di cavità, avente funzione di modo adimensionale $f(\vec{R})$ data dalla (178). Inserendo l'espressione corrispondente a quest'ultima nell'uguaglianza (220), e le relazioni (221) e (222) riguardanti gli operatori di campo atomici, si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I^{eff} &= \hbar U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \int dX \int dY \int dZ \left[\varphi^*(Y, Z) \hat{\phi}^\dagger(X) \left(\frac{2X^2}{\sigma^2} \cos^2(kY) e^{-\frac{X^2+Z^2}{\sigma^2}} \right) \hat{\phi}(X) \varphi(Y, Z) \right] = \\ &= \hbar U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \int dX \hat{\phi}^\dagger(X) \left(\frac{2X^2}{\sigma^2} e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) \hat{\phi}(X) \int dY \int dZ \varphi^*(Y, Z) \left(\cos^2(kY) e^{-\frac{Z^2}{\sigma^2}} \right) \varphi(Y, Z) . \end{aligned} \quad (236)$$

Ricordando l'espressione per $\varphi(Y, Z) \equiv \varphi_{00}(Y, Z)$ (213), il secondo e il terzo integrale a secondo membro dell'equazione (236) possono essere calcolati esplicitamente, ricavando:

$$\int dY \int dZ \varphi^*(Y, Z) \left(\cos^2(kY) e^{-\frac{Z^2}{\sigma^2}} \right) \varphi(Y, Z) = \frac{\sigma(1 + e^{-k^2 l_H^2})}{2\sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} . \quad (237)$$

Sostituendo l'espressione appena trovata in (236), ed esplicitando gli operatori $\hat{\phi}^\dagger(X)$ e $\hat{\phi}(X)$, l'Hamiltoniano \hat{H}_I^{eff} diviene:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I^{eff} &= \frac{\hbar U_0 (1 + e^{-k^2 l_H^2})}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} \hat{a}^\dagger \hat{a} \sum_{i,j=L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \int dX \left[w_i^*(X) \left(X^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) w_j(X) \right] = \\ &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \left(\sum_{i=L,C,R} W_{ii} \hat{n}_i + \sum_{\substack{i,j=L,C,R \\ i \neq j}} W_{ij} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \right) , \end{aligned} \quad (238)$$

dove nel secondo passaggio compaiono i parametri W_{ii} , con $i = L, C, R$, che descrivono spostamento AC Stark, e i parametri W_{ij} , ove $i, j = L, C, R$ e $i \neq j$, che rappresentano le ampiezze di tunneling assistito dal campo di cavità. Poiché per le funzioni d'onda localizzate nei minimi laterali vale l'uguaglianza $w_L(X) = w_R(-X)$, proprietà conferita loro dalla simmetria del potenziale a tripla buca lineare, i coefficienti W_{LL} e W_{RR} sono identici. Indicando questi ultimi con W_{0S} , e denotando W_{CC} con W_{0C} , tali parametri presentano le forme seguenti:

$$\begin{aligned} W_{0S} &:= \frac{\hbar U_0 (1 + e^{-k^2 l_H^2})}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[w_L^*(X) \left(X^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) w_L(X) \right] \\ &= \frac{\hbar U_0 (1 + e^{-k^2 l_H^2})}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[w_R^*(X) \left(X^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) w_R(X) \right] , \end{aligned} \quad (239)$$

e

$$W_{0C} := \frac{\hbar U_0 (1 + e^{-k^2 l_H^2})}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[w_C^*(X) \left(X^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) w_C(X) \right] . \quad (240)$$

Inoltre, la caratteristica sopraccitata di $U_{TW}(X)$ permette di concludere che le ampiezze di tunneling tra siti contigui assistito dal campo di cavità W_{12} e W_{32} sono uguali, così come le ampiezze W_{21} e W_{31} . Definendo, quindi, la quantità $W_1 := W_{12} = W_{21} = W_{23} = W_{32}$, essa ha espressione:

$$W_1 := \frac{\hbar U_0(1 + e^{-k^2 l_H^2})}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[w_i^*(X) \left(X^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) w_j(X) \right], \quad (241)$$

dove $i, j = L, C, R$, $i \neq j$, e i, j rappresentano avvallamenti primi vicini. A causa della spiccata localizzazione delle funzioni d'onda di simil-Wannier $w_i(X)$, con $i = L, C, R$, l'ampiezza di tunneling tra siti secondi vicini W_2 , definita come $W_2 := W_{13} = W_{31}$, assume valori di circa uno o due ordini di grandezza inferiori rispetto a quelli di W_1 , e presenta la forma:

$$\begin{aligned} W_2 &:= \frac{\hbar U_0(1 + e^{-k^2 l_H^2})}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[w_1^*(X) \left(X^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) w_3(X) \right] \\ &= \frac{\hbar U_0(1 + e^{-k^2 l_H^2})}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + l_H^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[w_3^*(X) \left(X^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \right) w_1(X) \right]. \end{aligned} \quad (242)$$

L'operatore Hamiltoniano \hat{H}_I^{eff} (238) diviene, quindi:

$$\hat{H}_I^{eff} = W_{0C} \hat{n}_C + W_{0S} (\hat{n}_L + \hat{n}_R) + W_1 \left(\sum_{\langle i,j \rangle = L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \right) + W_2 (\hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_L), \quad (243)$$

dove la sommatoria con indici $\langle i, j \rangle$ è fra siti primi vicini, come quella che compare nell'espressione dell'operatore Hamiltoniano $\hat{H}_{A,0}^{eff}$ (230). Introducendo l'operatore numero di fotoni $\hat{N}_P := \hat{a}^\dagger \hat{a}$ del campo di cavità, l'Hamiltoniano efficace relativo al campo elettromagnetico, indicato con \hat{H}_F^{eff} , è esprimibile come:

$$\hat{H}_F^{eff} := -\hbar \Delta_C \hat{N}_P - i \hbar \eta (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (244)$$

Avvalendosi della definizione dell'operatore \hat{N}_P e sommando i termini \hat{H}_F^{eff} (244), $\hat{H}_{A,0}^{eff}$ (223), $\hat{H}_{A,1}^{eff}$ (231) e \hat{H}_I^{eff} (243) si ottiene l'Hamiltoniano efficace complessivo, in approssimazione a tre modi, \hat{H}^{eff} , che assume il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{eff} &:= -\hbar \Delta_C \hat{N}_P - i \hbar \eta (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + (\varepsilon_C + W_{0C} \hat{N}_P) \hat{n}_C + (\varepsilon_S + W_{0S} \hat{N}_P) (\hat{n}_L + \hat{n}_R) + \\ &\quad - (J_1 - W_1 \hat{N}_P) \left(\sum_{\langle i,j \rangle = L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \right) - (J_2 - W_2 \hat{N}_P) (\hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_L) + \\ &\quad + \frac{U}{2} \left[\sum_{i=L,C,R} \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \right]. \end{aligned} \quad (245)$$

In assenza di campo di cavità e laser di pompa, l'Hamiltoniano efficace conterrebbe soltanto i termini atomici $\hat{H}_{A,0}^{eff}$ (223) e $\hat{H}_{A,1}^{eff}$ (231), riducendosi a:

$$\begin{aligned} \hat{H}_A^{eff} &:= \varepsilon_C \hat{n}_C + \varepsilon_S (\hat{n}_L + \hat{n}_R) - J_1 \left(\sum_{\langle i,j \rangle = L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \right) - J_2 (\hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_L) + \\ &\quad + \frac{U}{2} \left[\sum_{i=L,C,R} \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \right]. \end{aligned} \quad (246)$$

L'effetto del campo di cavità può essere osservato confrontando l'Hamiltoniano atomico efficace \hat{H}_A^{eff} (246), con quello comprensivo dell'Hamiltoniano di interazione con la radiazione \hat{H}_I^{eff} (243), definito come $\hat{H}_A^{eff} := \hat{H}_A + \hat{H}_I^{eff}$:

$$\hat{H}_A^{eff} := \varepsilon_C \hat{n}_C + \varepsilon_S (\hat{n}_L + \hat{n}_R) - \tilde{J}_1 \left(\sum_{\langle i,j \rangle = L,C,R} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \right) - \tilde{J}_2 (\hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_L) + \frac{U}{2} \left[\sum_{i=L,C,R} \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \right], \quad (247)$$

dove i coefficienti ε_C , ε_S , J_1 e J_2 , presenti nella (246), compaiono ora nella veste di operatori. L'energia di un atomo bosonico localizzato nel minimo del potenziale i , ε_i , si tramuta, infatti, nell'operatore $\tilde{\varepsilon}_i := \varepsilon_i + W_{0i} \hat{N}_P$, dove $i = C, S$, acquisendo un addendo dipendente dallo spostamento Stark in presenza di campo elettrico variabile. Anche le ampiezze di tunneling tra siti contigui J_1 e tra minimi secondi vicini J_2 , si convertono nella (247) in operatori, definiti, in questo caso, rispettivamente come $\tilde{J}_1 = J_1 - W_1 \hat{N}_P$ e $\tilde{J}_2 = J_2 - W_2 \hat{N}_P$, incorporando un termine di tunneling assistito dal campo elettromagnetico, mentre l'energia d'interazione di contatto U resta invariata. Ricordando che $U_0 := \frac{\Omega_R^2}{\Delta_A}$, se la frequenza del laser di pompa ω_L è desintonizzata verso il rosso rispetto a quella di transizione atomica ω_A ovvero se $\Delta_A < 0 \text{ s}^{-1}$, allora i coefficienti W_{0C} , W_{0S} , W_1 e W_2 sono negativi, dunque i valori di aspettazione delle osservabili $\tilde{\varepsilon}_C$ e $\tilde{\varepsilon}_S$ risulteranno più bassi rispetto ai valori delle rispettive energie ε_C e ε_S . Al contrario, gli operatori ampiezza di tunneling efficace \tilde{J}_1 e \tilde{J}_2 presenteranno valori di aspettazione più elevati di quelli di, rispettivamente, J_1 e J_2 , dunque il tunneling di un atomo fra i minimi del potenziale a tripla buca sarà favorito rispetto a quello che si verifica in assenza di campo di cavità. Quando la desintonizzazione è positiva $\Delta_A > 0 \text{ s}^{-1}$, invece, i coefficienti W_{0C} , W_{0S} , W_1 e W_2 assumono valori positivi, dunque l'effetto tunnel apparirà inibito.

Dall'espressione trovata per l'Hamiltoniano efficace in approssimazione a tre modi \hat{H}^{eff} (245) si ricaveranno le equazioni del moto di Heisenberg per gli operatori di annichilazione atomici \hat{b}_i , con $i = L, C, R$, e del campo elettromagnetico \hat{a} . Al fine di semplificare questi calcoli, nel seguito si dimostrerà che l'operatore numero totale di atomi $\hat{N}_A := \sum_{i=L,C,R} \hat{n}_i$ commuta con l'Hamiltoniano completo, rivelandosi una costante del moto, al contrario del numero di fotoni di frequenza ω_C , rappresentato dall'operatore \hat{N}_P . Poiché l'operatore N_A commuta con gli operatori di seconda quantizzazione della radiazione \hat{a}^\dagger e \hat{a} , oltre che con \hat{n}_i e \hat{n}_i^2 , dove $i = L, C, R$, l'equazione di Heisenberg relativa all'operatore N_A assume la forma seguente:

$$i\hbar \frac{d\hat{N}_A}{dt} = [\hat{N}_A, \hat{H}^{eff}] = -(J_1 - W_1 \hat{N}_P) \left(\sum_{\langle i,j \rangle = L,C,R} [\hat{N}_A, \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j] \right) - (J_2 - W_2 \hat{N}_P) [\hat{N}_A, \hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_L]. \quad (248)$$

Servendosi delle relazioni di commutazione (308), si osserva che per $i = L, C, R$ si ha

$$\begin{aligned} [\hat{N}_A, \hat{b}_i] &= \sum_{j=L,C,R} [\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \hat{b}_i] = \sum_{j=L,C,R} [\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_i] \hat{b}_j = -\hat{b}_i, \\ [\hat{N}_A, \hat{b}_i^\dagger] &= \sum_{j=L,C,R} [\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \hat{b}_i^\dagger] = \sum_{j=L,C,R} \hat{b}_j^\dagger [\hat{b}_j, \hat{b}_i^\dagger] = \hat{b}_i^\dagger, \end{aligned} \quad (249)$$

Sfruttando questi risultati, si ottiene che il commutatore $[\hat{N}_A, \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j]$ vale:

$$[\hat{N}_A, \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j] = [\hat{N}_A, \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j] = \hat{b}_i^\dagger [\hat{N}_A, \hat{b}_j] + [\hat{N}_A, \hat{b}_i^\dagger] \hat{b}_j = \hat{b}_i^\dagger (-\hat{b}_j) + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j = 0. \quad (250)$$

Alla luce della relazione (250), i due commutatori presenti nell'equazione di Heisenberg (248) si rivelano nulli, pertanto

$$i\hbar \frac{d\hat{N}_A}{dt} = [\hat{N}_A, \hat{H}^{eff}] = 0, \quad (251)$$

pervenendo al risultato che si intendeva dimostrare. Avvalendosi di tale uguaglianza e notando che dalle relazioni di commutazione (249) si ricava che $[\hat{b}_i, \hat{N}_A] = [\hat{b}_i, \hat{n}_i] = \hat{b}_i$ e $[\hat{b}_i^\dagger, \hat{N}_A] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{n}_i] = -\hat{b}_i^\dagger$, dove $i = L, C, R$, si possono ora ottenere le equazioni di Heisenberg per gli operatori di annichilazione degli atomi $\hat{b}_L, \hat{b}_C, \hat{b}_R$, rispettivamente

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d\hat{b}_L}{dt} &= [\hat{b}_L, \hat{H}^{eff}] = (\varepsilon_S + W_{0S}\hat{N}_P)\hat{b}_L - (J_1 - W_1\hat{N}_P)\hat{b}_C - (\hat{J}_2 - W_2\hat{N}_P)\hat{b}_R + U\hat{n}_L\hat{b}_L, \\
i\hbar \frac{d\hat{b}_C}{dt} &= [\hat{b}_C, \hat{H}^{eff}] = (\varepsilon_C + W_{0C}\hat{N}_P)\hat{b}_C - (J_1 - W_1\hat{N}_P)(\hat{b}_L + \hat{b}_R) + U\hat{n}_C\hat{b}_C, \\
i\hbar \frac{d\hat{b}_R}{dt} &= [\hat{b}_R, \hat{H}^{eff}] = (\varepsilon_S + W_{0S}\hat{N}_P)\hat{b}_R - (J_1 - W_1\hat{N}_P)\hat{b}_C - (\hat{J}_2 - W_2\hat{N}_P)\hat{b}_L + U\hat{n}_R\hat{b}_R,
\end{aligned} \tag{252}$$

e dei fotoni \hat{a} ,

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d\hat{a}}{dt} &= [\hat{a}, \hat{H}^{eff}] = -\hbar\Delta_C\hat{a} + i\hbar\eta + W_{0C}\hat{a}\hat{n}_C + W_{0S}\hat{a}(\hat{n}_L + \hat{n}_R) + \\
&\quad + W_1\hat{a}(\hat{b}_L^\dagger\hat{b}_C + \hat{b}_C^\dagger\hat{b}_L + \hat{b}_R^\dagger\hat{b}_C + \hat{b}_C^\dagger\hat{b}_R) + W_2\hat{a}(\hat{b}_L^\dagger\hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger\hat{b}_L).
\end{aligned} \tag{253}$$

DINAMICA DEL SISTEMA IN APPROSSIMAZIONE SEMICLASSICA

Nel precedente capitolo, partendo dal modello di Jaynes-Cummings, è stato costruito l'Hamiltoniano efficace atto a descrivere il sistema di bosoni in analisi, dal quale sono state poi ricavate le equazioni di Heisenberg per gli operatori di annichilazione. Nel seguito, avvalendosi dell'approssimazione di campo medio, gli operatori di seconda quantizzazione verranno convertiti in c-numeri, consentendo di ottenere equazioni differenziali ordinarie in variabili nuove.

3.1 LE EQUAZIONI DI HEISENBERG IN APPROSSIMAZIONE DI CAMPO MEDIO

Le equazioni di Heisenberg per gli operatori di annichilazione \hat{b}_i , con $i = L, C, R$ (252), e \hat{a} (253), possono essere studiate applicando l'approssimazione di campo medio, secondo la quale si suppone che il sistema si trovi in uno stato puramente coerente [9]. All'interno di questa cornice semiclassica, l'insieme di atomi presenti nella buca i è rappresentato dallo stato coerente $|\beta_i\rangle_A$, dove $i = L, C, R$, e, analogamente, la radiazione di cavità è descritta dallo stato coerente $|\alpha\rangle_P$. Lo stato complessivo, noto anche con l'acronimo *FCS* dall'inglese *Fully Coherent State*, è, quindi, esprimibile come il prodotto tensore dei quattro stati sopraccitati:

$$|FCS\rangle = |\beta_L\rangle_A \otimes |\beta_C\rangle_A \otimes |\beta_R\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_P, \quad (254)$$

dove $\hat{b}_j|\beta_j\rangle_A = \beta_j|\beta_j\rangle_A$, con $j = L, C, R$, e $\hat{a}|\alpha\rangle_P = \alpha|\alpha\rangle_P$. Indicando con $N_j(t)$ il numero medio di atomi nella buca j al tempo t , poiché $N_j(t) := \langle FCS|\hat{n}_j|FCS\rangle = \langle FCS|\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_j|FCS\rangle = |\beta_j|^2$, l'autovalore β_j dell'operatore di annichilazione di un atomo \hat{b}_j può essere scritto come [61]:

$$\beta_j = \sqrt{N_j(t)}e^{i\theta_j(t)}, \quad (255)$$

dove $\theta_j(t)$ è la fase associata all'autovalore β_j , e $j = L, C, R$. Analogamente, denotando con $\xi(t)^2$ il numero medio di fotoni nella cavità all'istante t , e osservando che $\xi(t) := \langle FCS|\hat{N}_P|FCS\rangle = \langle FCS|\hat{a}^\dagger\hat{a}|FCS\rangle = |\alpha|^2$, l'autovalore α dell'operatore di annichilazione di un fotone \hat{a} può essere espresso come:

$$\alpha = \xi(t)e^{i\phi(t)}, \quad (256)$$

ove $\phi(t)$ è la fase dell'autovalore complesso α , valutata all'istante t . A questo punto è possibile determinare le equazioni di Heisenberg del sistema nello stato puramente coerente, sostituendo gli operatori presenti nelle equazioni (252) e (253) con gli autovalori degli stessi calcolati rispetto allo stato $|FCS\rangle$ puramente coerente. Sostituendo le espressioni relative a $\alpha(t)$ (256) e $\beta_j(t)$ (255), con $j = L, C, R$, nell'equazione di Heisenberg per l'operatore di annichilazione \hat{a} (253), si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d[\xi(t)e^{i\phi(t)}]}{dt} = & -\hbar\Delta_C\xi(t)e^{i\phi(t)} + i\hbar\eta + W_{0C}\xi(t)e^{i\phi(t)}N_C(t) + W_{0S}\xi(t)e^{i\phi(t)}N_L(t) + \\ & + W_{0S}\xi(t)e^{i\phi(t)}N_R(t) + W_1\xi(t)e^{i\phi(t)}\sqrt{N_L(t)N_C(t)}e^{i[\theta_C(t)-\theta_L(t)]} + \\ & + W_1\xi(t)e^{i\phi(t)}\sqrt{N_L(t)N_C(t)}e^{i[\theta_L(t)-\theta_C(t)]} + \\ & + W_1\xi(t)e^{i\phi(t)}\sqrt{N_C(t)N_R(t)}[e^{i[\theta_C(t)-\theta_R(t)]} + e^{i[\theta_R(t)-\theta_C(t)}] + \\ & + W_2(t)\xi(t)e^{i\phi(t)}\sqrt{N_L(t)N_R(t)}[e^{i[\theta_R(t)-\theta_L(t)]} + e^{i[\theta_L(t)-\theta_R(t)}] . \end{aligned} \quad (257)$$

Derivando rispetto al tempo l'espressione a primo membro presente nell'equazione precedente e isolando la parte reale dalla parte immaginaria, si possono distinguere due equazioni differenziali interdipendenti:

$$\dot{\xi}(t) = \eta \cos[\phi(t)] , \quad (258)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) = & \Delta_C - \frac{\eta}{\xi(t)} \sin[\phi(t)] - \frac{W_{0C}N_C(t)}{\hbar} - \frac{W_{0S}[N_L(t) + N_R(t)]}{\hbar} + \\ & - \frac{2W_1\sqrt{N_L(t)N_C(t)}}{\hbar} \cos[\theta_C(t) - \theta_L(t)] - \frac{2W_1\sqrt{N_C(t)N_R(t)}}{\hbar} \cos[\theta_C(t) - \theta_R(t)] + \\ & - \frac{2W_2\sqrt{N_L(t)N_R(t)}}{\hbar} \cos[\theta_R(t) - \theta_L(t)] . \end{aligned} \quad (259)$$

Inserendo nell'equazione di Heisenberg per gli operatori di annichilazione atomici \hat{b}_j le espressioni relative a $\alpha(t)$ (256) e $\beta_j(t)$ (255), con $j = L, C, R$,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d[\sqrt{N_L(t)}e^{i\theta_L(t)}]}{dt} = & [\varepsilon_S + W_{0S}\xi^2(t)]\sqrt{N_L(t)}e^{i\theta_L(t)} - [J_1 - W_1\xi(t)^2]\sqrt{N_C(t)}e^{i\theta_C(t)} + \\ & - [J_2 - W_2\xi(t)^2]\sqrt{N_R(t)}e^{i\theta_R(t)} + U\sqrt{N_L(t)}^3e^{i\theta_L(t)} , \end{aligned} \quad (260)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d[\sqrt{N_C(t)}e^{i\theta_C(t)}]}{dt} = & [\varepsilon_C + W_{0C}\xi^2(t)]\sqrt{N_C(t)}e^{i\theta_C(t)} - [J_1 - W_1\xi(t)^2]\sqrt{N_L(t)}e^{i\theta_L(t)} + \\ & - [J_1 - W_1\xi(t)^2]\sqrt{N_R(t)}e^{i\theta_R(t)} + U\sqrt{N_C(t)}^3e^{i\theta_C(t)} , \end{aligned} \quad (261)$$

e

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d[\sqrt{N_R(t)}e^{i\theta_R(t)}]}{dt} = & [\varepsilon_S + W_{0S}\xi^2(t)]\sqrt{N_R(t)}e^{i\theta_R(t)} - [J_1 - W_1\xi(t)^2]\sqrt{N_C(t)}e^{i\theta_C(t)} + \\ & - [J_2 - W_2\xi(t)^2]\sqrt{N_L(t)}e^{i\theta_L(t)} + U\sqrt{N_R(t)}^3e^{i\theta_R(t)} . \end{aligned} \quad (262)$$

Derivando rispetto al tempo l'espressione a primo membro di ciascuna delle equazioni appena ricavate e isolando la parte reale dalla parte immaginaria, si possono distinguere sei equazioni differenziali interdipendenti:

$$\begin{aligned} \dot{N}_L(t) = & + \frac{2[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{N_L(t)N_C(t)} \sin[\theta_L(t) - \theta_C(t)] + \\ & + \frac{2[J_2 - W_2\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{N_L(t)N_R(t)} \sin[\theta_L(t) - \theta_R(t)] , \end{aligned} \quad (263)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_L(t) = & - \frac{[\varepsilon_S + W_{0S}\xi(t)^2]}{\hbar} + \frac{[J_1 - W_1\xi^2(t)]}{\hbar} \sqrt{\frac{N_C(t)}{N_L(t)}} \cos[\theta_L(t) - \theta_C(t)] + \\ & + \frac{[J_2 - W_2\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{N_R(t)}{N_L(t)}} \cos[\theta_L(t) - \theta_R(t)] - \frac{U}{\hbar} N_L(t) , \end{aligned} \quad (264)$$

$$\begin{aligned} \dot{N}_C(t) = & + \frac{2[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \left[\sqrt{N_C(t)N_L(t)} \sin[\theta_L(t) - \theta_C(t)] + \right. \\ & \left. + \sqrt{N_C(t)N_R(t)} \sin[\theta_C(t) - \theta_R(t)] \right] , \end{aligned} \quad (265)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_C(t) = & -\frac{[\varepsilon_C + W_{0C}\xi(t)^2]}{\hbar} + \frac{[J_1 - W_1\xi^2(t)]}{\hbar} \sqrt{\frac{N_L(t)}{N_C(t)}} \cos[\theta_C(t) - \theta_L(t)] + \\ & + \frac{[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{N_R(t)}{N_C(t)}} \cos[\theta_C(t) - \theta_R(t)] - \frac{U}{\hbar} N_C(t) , \end{aligned} \quad (266)$$

$$\begin{aligned} \dot{N}_R(t) = & -\frac{2[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{N_R(t)N_C(t)} \sin[\theta_C(t) - \theta_R(t)] + \\ & -\frac{2[J_2 - W_2\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{N_L(t)N_R(t)} \sin[\theta_L(t) - \theta_R(t)] , \end{aligned} \quad (267)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_R(t) = & -\frac{[\varepsilon_S + W_{0S}\xi(t)^2]}{\hbar} + \frac{[J_1 - W_1\xi^2(t)]}{\hbar} \sqrt{\frac{N_C(t)}{N_R(t)}} \cos[\theta_C(t) - \theta_R(t)] + \\ & + \frac{[J_2 - W_2\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{N_L(t)}{N_R(t)}} \cos[\theta_L(t) - \theta_R(t)] - \frac{U}{\hbar} N_R(t) . \end{aligned} \quad (268)$$

Poiché il numero totale degli atomi $N_A := N_L(t) + N_C(t) + N_R(t)$ è una quantità conservata del sistema, come dimostrato nel paragrafo § 2.6.1, le variabili $N_i(t)$, con $i = L, C, R$ non sono indipendenti tra di loro, dunque sommando le quantità a primo membro delle equazioni differenziali (261), (265) e (267) si deve ottenere $\dot{N}_L(t) + \dot{N}_C(t) + \dot{N}_R(t) = 0$. Per descrivere la dinamica della popolazione atomica nelle buche possono essere, quindi, sufficienti due variabili invece di tre, che possono essere definite in termini delle $N_i(t)$, con $i = L, C, R$, come:

$$z_1(t) := \frac{N_L(t) - N_C(t)}{N_A} , \quad (269)$$

e

$$z_2(t) := \frac{N_R(t) - N_C(t)}{N_A} , \quad (270)$$

dove $z_1(t)$ è lo squilibrio frazionario fra la popolazione atomica nella buca L e quella nella buca C , mentre $z_2(t)$ lo sbilanciamento fra la popolazione atomica nella buca R e quella nella buca C . A tali grandezze sono associate le fasi $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$, definite rispettivamente come:

$$\phi_1(t) := \theta_C(t) - \theta_L(t) , \quad (271)$$

e

$$\phi_2(t) := \theta_C(t) - \theta_R(t) . \quad (272)$$

Invertendo le equazioni (269) e (270), e avvalendosi della relazione di conservazione del numero totale di atomi bosonici $N_A := N_L(t) + N_C(t) + N_R(t)$, si ottengono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} N_L(t) &= \frac{N_A[1 + 2z_1(t) - z_2(t)]}{3} \\ N_C(t) &= \frac{N_A[1 - z_1(t) - z_2(t)]}{3} \\ N_R(t) &= \frac{N_A[1 - z_1(t) + 2z_2(t)]}{3} . \end{aligned} \quad (273)$$

Servendosi delle definizioni (271) e (272), e delle tre equazioni inverse appena ricavate (273), a partire dalle equazioni differenziali (265), (266), (267), (268), (269) ed (270), si ottengono le equazioni del moto per le nuove variabili di sbilanciamento $z_1(t)$, $z_2(t)$ e di fase $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & -\frac{4[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\ & -\frac{2[J_2 - W_2\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]} \sin[\phi_1(t) - \phi_2(t)] + \\ & -\frac{2[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] , \end{aligned} \quad (274)$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2(t) = & -\frac{2[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\
& -\frac{2[J_2 + W_2\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 - z_1(t) + 2z_2(t)][1 + 2z_1(t) - z_2(t)]} \sin[\phi_1(t) - \phi_2(t)] + \\
& -\frac{4[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] ,
\end{aligned} \tag{275}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1(t) = & \frac{(\varepsilon_S - \varepsilon_C) + (W_{0S} - W_{0C})\xi(t)^2}{\hbar} + \frac{3[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \frac{z_1(t) \cos[\phi_1(t)]}{\sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]}} + \\
& -\frac{[J_2 - W_2\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{1 - z_1(t) + 2z_2(t)}{1 + 2z_1(t) - z_2(t)}} \cos[\phi_1(t) - \phi_2(t)] + \\
& +\frac{[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{1 - z_1(t) + 2z_2(t)}{1 - z_1(t) - z_2(t)}} \cos[\phi_2(t)] + \frac{UN_A}{\hbar} z_1(t) ,
\end{aligned} \tag{276}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_2(t) = & \frac{(\varepsilon_S - \varepsilon_C) + (W_{0S} - W_{0C})\xi(t)^2}{\hbar} + \frac{[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{1 + 2z_1(t) - z_2(t)}{1 - z_1(t) - z_2(t)}} \cos[\phi_1(t)] + \\
& -\frac{[J_2 - W_2\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{1 + 2z_1(t) - z_2(t)}{1 - z_1(t) + 2z_2(t)}} \cos[\phi_1(t) - \phi_2(t)] + \\
& +\frac{3[J_1 - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \frac{z_2(t)}{\sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]}} \cos[\phi_2(t)] + \frac{UN_A}{\hbar} z_2(t)
\end{aligned} \tag{277}$$

L'equazione differenziale per $\xi(t)$, (258), e quella per $\phi(t)$, (259), possono essere parimenti riscritte facendo uso delle relazioni (271), (272) e (273):

$$\dot{\xi}(t) = \eta \cos[\phi(t)] , \tag{278}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) = & \Delta_C - \frac{\eta}{\xi(t)} \sin[\phi(t)] - \frac{W_{0C}N_A[1 - z_1(t) - z_2(t)]}{3\hbar} - \frac{W_{0S}N_A[2 + z_1(t) + z_2(t)]}{3\hbar} + \\
& -\frac{2W_1N_A\sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]}}{3\hbar} \cos[\phi_1(t)] + \\
& -\frac{2W_2N_A\sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]}}{3\hbar} \cos[\phi_1(t) - \phi_2(t)] + \\
& -\frac{2W_1N_A\sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]}}{3\hbar} \cos[\phi_2(t)] .
\end{aligned} \tag{279}$$

Considerando che le ampiezze di *tunneling* tra siti secondi vicini J_2 e W_2 sono generalmente di due o tre ordini di grandezza inferiori rispetto a quelle fra siti contigui J_1 e W_1 , essendo molto ridotta la sovrapposizione tra due funzioni di simil-Wannier localizzate in siti secondi vicini, l'ampiezza di *tunneling* in assenza di campo di cavità J_1 verrà indicata semplicemente con J . Similmente, l'esiguità della differenza tra le energie ε_C e ε_S , consente di indicare tali quantità collettivamente con ε con buona approssimazione. Avvalendosi di tali considerazioni, le equazioni differenziali per le variabili coniugate (z_1, ϕ_1) e (z_2, ϕ_2) , (272), (273), (274) e (275), e per le variabili associate ai fotoni (ξ, ϕ) , (258) e (259), nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) = & -\frac{4[J - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\
& -\frac{2[J - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] ,
\end{aligned} \tag{280}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & -\frac{2[J - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\ & -\frac{4[J - W_1\xi(t)^2]}{3\hbar} \sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] , \end{aligned} \quad (281)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1(t) = & \frac{(W_{0S} - W_{0C})\xi(t)^2}{\hbar} + \frac{3[J - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \frac{z_1(t) \cos[\phi_1(t)]}{\sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]}} + \\ & + \frac{[J - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{1 - z_1(t) + 2z_2(t)}{1 - z_1(t) - z_2(t)}} \cos[\phi_2(t)] + \frac{UN_A}{\hbar} z_1(t) , \end{aligned} \quad (282)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2(t) = & \frac{(W_{0S} - W_{0C})\xi(t)^2}{\hbar} + \frac{[J - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \sqrt{\frac{1 + 2z_1(t) - z_2(t)}{1 - z_1(t) - z_2(t)}} \cos[\phi_1(t)] + \\ & + \frac{3[J - W_1\xi(t)^2]}{\hbar} \frac{z_2(t) \cos[\phi_2(t)]}{\sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]}} + \frac{UN_A}{\hbar} z_2(t) , \end{aligned} \quad (283)$$

$$\dot{\xi}(t) = \eta \cos[\phi(t)] , \quad (284)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) = & \Delta_C - \frac{\eta}{\xi(t)} \sin[\phi(t)] - \frac{W_{0C}N_A[1 - z_1(t) - z_2(t)]}{3\hbar} - \frac{W_{0S}N_A[2 + z_1(t) + z_2(t)]}{3\hbar} + \\ & - \frac{2W_1N_A\sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]}}{3\hbar} \cos[\phi_1(t)] + \\ & - \frac{2W_1N_A\sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]}}{3\hbar} \cos[\phi_2(t)] . \end{aligned} \quad (285)$$

Al fine di confrontare tali equazioni con quelle ottenute in assenza di campo di cavità, è utile introdurre i seguenti parametri, aventi le dimensioni fisiche di una frequenza:

$$\tilde{g} := \frac{UN_A}{\hbar} , \quad \mu(t) := \frac{(W_{0S} - W_{0C})\xi(t)^2}{\hbar} , \quad \nu(t) := \frac{J - W_1\xi(t)^2}{\hbar} , \quad (286)$$

$$\begin{aligned} \delta_C(t) := & \Delta_C - \frac{W_{0C}N_A[1 - z_1(t) - z_2(t)]}{3\hbar} - \frac{W_{0S}N_A[2 + z_1(t) + z_2(t)]}{3\hbar} + \\ & - \frac{2W_1N_A\sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]}}{3\hbar} \cos[\phi_1(t)] + \\ & - \frac{2W_1N_A\sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]}}{3\hbar} \cos[\phi_2(t)] . \end{aligned} \quad (287)$$

Fra le quantità appena definite, la \tilde{g} rappresenta la variazione di frequenza dovuta alle collisioni atomiche, $\mu(t)$ quella generata dall'effetto AC Stark, $\nu(t)$ l'intensità efficace di *tunneling* modificata dal processo assistito dai fotoni, mentre $\delta_C(t)$ la desintonizzazione efficace della frequenza di cavità. Sostituendo le espressioni associate a tali grandezze nelle equazioni (280), (281), (282), (283), (284) e (285), si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & -\frac{4\nu(t)}{3} \sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\ & -\frac{2\nu(t)}{3} \sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] , \end{aligned} \quad (288)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & -\frac{2\nu(t)}{3} \sqrt{[1 + 2z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) - z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\ & -\frac{4\nu(t)}{3} \sqrt{[1 - z_1(t) - z_2(t)][1 - z_1(t) + 2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] , \end{aligned} \quad (289)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1(t) = & \mu(t) + \frac{3\nu(t)z_1(t) \cos[\phi_1(t)]}{\sqrt{[1+2z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)-z_2(t)]}} + \\ & + \nu(t) \sqrt{\frac{1-z_1(t)+2z_2(t)}{1-z_1(t)-z_2(t)}} \cos[\phi_2(t)] + \tilde{g}z_1(t) , \end{aligned} \quad (290)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2(t) = & \mu(t) + \nu(t) \sqrt{\frac{1+2z_1(t)-z_2(t)}{1-z_1(t)-z_2(t)}} \cos[\phi_1(t)] + \\ & + \frac{3\nu(t)z_2(t) \cos[\phi_2(t)]}{\sqrt{[1-z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)+2z_2(t)]}} + \tilde{g}z_2(t) , \end{aligned} \quad (291)$$

$$\dot{\xi}(t) = \eta \cos[\phi(t)] , \quad (292)$$

e

$$\dot{\phi}(t) = \delta_C(t) - \frac{\eta}{\xi(t)} \sin[\phi(t)] . \quad (293)$$

Le equazioni differenziali così ottenute, in condizioni di $\xi(t) \equiv 0$ e di $\phi(t) \equiv 0$, possono essere ricondotte a quelle ottenute in assenza di campo di cavità:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & -\frac{4J}{3\hbar} \sqrt{[1+2z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)-z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\ & -\frac{2J}{3\hbar} \sqrt{[1-z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)+2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] , \end{aligned} \quad (294)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & -\frac{2J}{3\hbar} \sqrt{[1+2z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)-z_2(t)]} \sin[\phi_1(t)] + \\ & -\frac{4J}{3\hbar} \sqrt{[1-z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)+2z_2(t)]} \sin[\phi_2(t)] , \end{aligned} \quad (295)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1(t) = & \frac{3J}{\hbar} \frac{z_1(t) \cos[\phi_1(t)]}{\sqrt{[1+2z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)-z_2(t)]}} + \\ & + \frac{J}{\hbar} \sqrt{\frac{1-z_1(t)+2z_2(t)}{1-z_1(t)-z_2(t)}} \cos[\phi_2(t)] + \tilde{g}z_1(t) , \end{aligned} \quad (296)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2(t) = & \frac{J}{\hbar} \sqrt{\frac{1+2z_1(t)-z_2(t)}{1-z_1(t)-z_2(t)}} \cos[\phi_1(t)] + \\ & + \frac{3J}{\hbar} \frac{z_2(t) \cos[\phi_2(t)]}{\sqrt{[1-z_1(t)-z_2(t)][1-z_1(t)+2z_2(t)]}} + \tilde{g}z_2(t) . \end{aligned} \quad (297)$$

 CONCLUSIONI

In questa dissertazione è stato ottenuto il sistema di equazioni differenziali ordinarie che governa la dinamica di un gas atomico diluito posto all'interno di una cavità ottica di Fabry-Perot. Gli atomi, che costituiscono un condensato di Bose-Einstein, sono confinati per mezzo di un potenziale a tripla buca in una dimensione e da un potenziale armonico in due dimensioni, generati da una trappola ottica di dipolo. Seguendo il modello proposto da Jaynes e Cummings nel 1963, la struttura interna degli atomi è stata semplificata riducendola a soli due livelli energetici elettronici accessibili, separati da un'energia di transizione pari a $\hbar\omega_A$. Il modo di oscillazione del campo di cavità presenta una frequenza ω_C , vicina a quella di transizione atomica ω_A , ed è pompato da un laser in grado di immettere luce coerente di frequenza ω_L attraverso uno degli specchi di cui il risonatore è composto. Dapprima, è stato ottenuto l'operatore Hamiltoniano del campo elettromagnetico di cavità, mostrando come base di funzioni di modo quella costituita da onde stazionarie di Gauss-Hermite, adatte alla descrizione di risonatori aperti come quello in analisi.

Si è, poi, introdotto l'Hamiltoniano d'interazione tra un atomo e la radiazione elettromagnetica partendo dall'hamiltoniana classica di *minimal coupling* e dimostrandone l'equivalenza con quella in cui l'interazione è resa da quella tra dipolo e campo elettrico. A quel punto, osservando l'equivalenza tra l'atomo a due livelli e una particella a spin $\frac{1}{2}$, sono stati definiti operatori di pseudo-spin, che hanno permesso di scrivere l'Hamiltoniano di Jaynes-Cummings-Paul servendosi dell'approssimazione di onda rotante. Tale operatore è stato, in seguito, modificato con l'apporto del termine che modella l'interazione interatomica a basse temperature in un gas diluito, dato da uno pseudo-potenziale a Delta di Dirac, e dal potenziale di confinamento, la cui origine è stata descritta in dettaglio in § 2.5 e in Appendice A. Oltre a ciò si è modificato l'Hamiltoniano di radiazione \hat{H}_F , valutando il contributo del laser di pompa, che funge da laser forzante, fornendo ad \hat{H}_F un termine esplicitamente dipendente dal tempo.

Una volta costruito l'Hamiltoniano a molti corpi del sistema, la dipendenza temporale del sistema è stata rimossa con un'opportuna trasformazione unitaria, mentre sostituendo gli operatori di campo relativi agli atomi nello stato elettronico eccitato $\hat{\Psi}_e(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}_e^\dagger(\vec{R})$ con il loro valore di equilibrio, si è calcolato l'Hamiltoniano efficace \hat{H}_{eff} . Tale operatore è stato scritto poi in maniera semplificata, applicando l'approssimazione a tre modi, utile a descrivere gli operatori di campo che descrivono atomi allo stato elettronico fondamentale $\hat{\Psi}_g(\vec{R})$ e $\hat{\Psi}_g^\dagger(\vec{R})$ con la somma dei contributi dei condensati localizzati in prossimità di ciascun minimo del potenziale a tripla buca, utilizzando funzioni d'onda simili a quelle di Wannier. Sono state, quindi, ricavate le equazioni di Heisenberg del moto degli operatori di seconda quantizzazione degli atomi e dei fotoni a partire dall'Hamiltoniana efficace ottenuta nell'approssimazione sopraccitata, supponendo che il gas atomico fosse rappresentato da stati di Fock tripartiti, della forma $|n_L, n_C, n_R\rangle$ a numero fissato $N_A = n_L + n_C + n_R$ di particelle. Nella descrizione semiclassica del sistema, che ritrae il condensato nelle tre buche e il campo elettromagnetico con uno stato coerente, è stato ricavato un insieme di sei equazioni differenziali accoppiate che regola la dinamica del sistema, scrivendole in una forma direttamente confrontabile con quella delle equazioni che descrivono lo stesso sistema di bosoni in assenza di campo di cavità, composto da quattro equazioni analoghe a quelle trovate nell'articolo *The dynamics of triple-well trapped Bose-Einstein condensates with atoms feeding and loss effects* [1].

Parte I

APPENDICE

APPENDICE A

A.1 DETERMINAZIONE DEL POTENZIALE DI CONFINAMENTO

Per generare un potenziale di confinamento a tripla buca affiancato a un potenziale armonico bidimensionale molto intenso, è possibile sovrapporre tre fasci laser paralleli e allineati lungo un asse, con un fascio ad essi ortogonale, di diametro minimo maggiore. La distanza tra uno dei fasci laser paralleli e il suo primo vicino, indicata con l , deve essere confrontabile con la larghezza minima di ciascun fascio misurata lungo \hat{X} , denotata con w_{0x} , mentre la comune direzione di propagazione è parallela all'asse \hat{Z} . Il fascio laser ortogonale si propaga lungo l'asse \hat{X} , e presenta polarizzazione lineare lungo \hat{Z} , ortogonale a quella dei due fasci paralleli. Questi ultimi, inoltre, presentano polarizzazioni diversificate: il fascio centrale è polarizzato linearmente lungo l'asse \hat{X} , laddove i due fasci laterali sono polarizzati parallelamente all'asse \hat{Y} . Indicando con $\mathcal{E}_H(\vec{R})$ l'ampiezza complessa del campo elettrico associata al fascio propagantesi lungo \hat{X} , e con $\mathcal{E}_i(\vec{R})$, dove $i = L, C, R$, i fasci propagantisi parallelamente a \hat{Z} con assi passanti rispettivamente per i punti $(-l, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ e $(l, 0, 0)$, il potenziale d'interazione nella forma data dalla (172) può essere riespresso nel modo seguente:

$$U(\vec{R}) = \frac{3\pi\epsilon_0 c^3}{\omega_A^3} \frac{\Gamma}{\Delta} (|\mathcal{E}_H(\vec{R})|^2 + |\mathcal{E}_L(\vec{R}) + \mathcal{E}_R(\vec{R})|^2 + |\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2) , \quad (298)$$

dove è stata utilizzata la relazione $I(\vec{R}) = 2\epsilon_0 c |\mathcal{E}(\vec{R})|^2$, con $|\mathcal{E}(\vec{R})|^2 \equiv |\mathcal{E}_H(\vec{R})|^2 + |\mathcal{E}_L(\vec{R}) + \mathcal{E}_R(\vec{R})|^2 + |\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2$. Il potenziale appena introdotto può essere decomposto in due addendi: quello riconducibile al fascio laser meno focalizzato $U_\perp(\vec{R})$ e quello dovuto ai fasci paralleli $U_\parallel(\vec{R})$. Il primo, che può essere identificato anche con $U_H(\vec{R})$, dà origine al potenziale armonico e presenta l'espressione

$$U_\perp(\vec{R}) \equiv U_H(\vec{R}) := \frac{3\pi\epsilon_0 c^3}{\omega_A^3} \frac{\Gamma}{\Delta} |\mathcal{E}_H(\vec{R})|^2 , \quad (299)$$

mentre il secondo, $U_\parallel(\vec{R})$, identificabile anche con $U_{TW}(\vec{R})$, può essere scritto a sua volta come la somma dei contributi dei laser più esterni $U_{L,R}(\vec{R})$, e di quello del fascio centrale $U_C(\vec{R})$, definiti come segue:

$$U_{L,R}(\vec{R}) := \frac{3\pi\epsilon_0 c^3}{\omega_A^3} \frac{\Gamma}{\Delta} |\mathcal{E}_L(\vec{R}) + \mathcal{E}_R(\vec{R})|^2 =: \frac{3\pi\epsilon_0 c^3}{\omega_A^3} \frac{\Gamma}{\Delta} |\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})|^2 , \quad (300)$$

e

$$U_C(\vec{R}) := \frac{3\pi\epsilon_0 c^3}{\omega_A^3} \frac{\Gamma}{\Delta} |\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2 , \quad (301)$$

dove $\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})$ è l'espressione complessiva del campo elettrico generato dai due laser più esterni. Focalizzando l'attenzione sul fascio propagantesi lungo \hat{Z} , l'ampiezza $\mathcal{E}_H(\vec{R})$ del campo elettrico è proporzionale alla funzione di modo $u_H(\vec{R})$ definita nella (26), soluzione dell'equazione di Helmholtz in approssimazione

parassiale (24). Scegliendo il modo fondamentale TEM_{00} , caratterizzato da $m \equiv n \equiv 0$, e indicandone con k il numero d'onda, si ottiene la seguente espressione per $\mathcal{E}_H(\vec{R})$:

$$\mathcal{E}_H(\vec{R}) := \sqrt{V_{00}} E_{\perp} u_H(\vec{R}) = \sqrt{V_{cl,00}} E_{\perp} C_{cl,00} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} w_{\perp}(X)} \cdot \exp \left[-(Y^2 + Z^2) \left(\frac{1}{w_{\perp}(X)^2} - \frac{ik}{2R_{\perp}(X)} \right) \right] \exp \left[ikX + i \arctan \left(\frac{X}{X_R} \right) \right], \quad (302)$$

dove E_{\perp} rappresenta l'ampiezza reale del campo elettrico, $C_{cl,00}$ la costante dimensionale di normalizzazione della funzione di modo TEM_{00} relativa al fascio a sezione circolare, introdotta nella (26), e $V_{cl,00}$ il volume efficace del modo. Nell'ultima uguaglianza, analogamente a quanto esposto nel paragrafo § 2.2.1.2, sono state introdotti il raggio di curvatura del fronte d'onda $R_{\perp}(X)$ e la larghezza radiale del fascio $w_{\perp}(X)$, definiti in termini della *lunghezza di Rayleigh* $X_R := \frac{\pi w_{0\perp}^2}{\lambda} = \frac{k w_{0\perp}^2}{2}$:

$$R_{\perp}(X) := R_{0\perp} \left(1 + \left(\frac{X_R}{X} \right)^2 \right), \quad w_{\perp}(X) := w_{0\perp} \sqrt{1 + \left(\frac{X}{X_R} \right)^2}, \quad (303)$$

dove $w_{0\perp}$ denota la larghezza radiale minima del fascio. Il quadrato del modulo dell'ampiezza complessa del campo elettrico corrisponde, quindi, a:

$$|\mathcal{E}_H(\vec{R})|^2 = V_{cl,00} E_{\perp}^2 |C_{cl,00}|^2 \frac{2}{\pi w_{\perp}^2(X)} \exp \left(-\frac{Y^2 + Z^2}{w_{\perp}(X)^2} \right). \quad (304)$$

Se si considera una lunghezza di Rayleigh abbastanza elevata, allora $w_{\perp}(X) \approx w_{0\perp}$ e la precedente relazione (304) può essere riscritta nel modo seguente, approssimando al primo ordine l'esponenziale in essa presente:

$$|\mathcal{E}_H(\vec{R})|^2 \approx V_{cl,00} E_{\perp}^2 |C_{cl,00}|^2 \frac{2}{\pi w_{0\perp}^2} \exp \left(-\frac{2(Y^2 + Z^2)}{w_{0\perp}^2} \right) \approx E_{\perp}^2 \left(1 - \frac{2Y^2}{w_{0\perp}^2} - \frac{2Z^2}{w_{0\perp}^2} \right). \quad (305)$$

Sostituendo l'espressione trovata per $|\mathcal{E}_H(\vec{R})|^2$ nell'equazione (299), si ottiene il potenziale generato dal fascio laser che si propaga lungo \hat{X} :

$$U_{\perp}(\vec{R}) = \frac{6\epsilon_0 c^3 \Gamma V_{cl,00} E_{\perp}^2 |C_{cl,00}|^2}{\omega_A^3 w_{0\perp}^2 \Delta} \left(1 - \frac{2Y^2}{w_{0\perp}^2} - \frac{2Z^2}{w_{0\perp}^2} \right). \quad (306)$$

Introducendo l'intensità del potenziale nell'origine $V_{0\perp} := -\frac{6\epsilon_0 c^3 \Gamma V_{cl,00} E_{\perp}^2 |C_{cl,00}|^2}{\omega_A^3 w_{0\perp}^2 \Delta}$ e la pulsazione $\omega_H := \frac{2}{w_{0\perp}} \sqrt{\frac{V_{0\perp}}{M}}$, si ottiene un potenziale armonico bidimensionale della forma:

$$U_H(Y, Z) = -V_{0\perp} + \frac{1}{2} M \omega_H^2 (Y^2 + Z^2) \quad (307)$$

Per riprodurre un potenziale unidimensionale a tripla buca, un possibile metodo consiste nell'utilizzo di fasci laser a sezione radialmente asimmetrica, simili a quelli utilizzati dal gruppo di R. Gati nell'articolo *Realization of a single Josephson junction for Bose-Einstein condensates* per la realizzazione di un potenziale a doppia buca [26]. A tale scopo, considerando radiazione propagantesi parallelamente all'asse \hat{Z} , è possibile cercare soluzioni all'equazione di Helmholtz (24) in approssimazione parassiale, scrivibili come il prodotto di una funzione di X e Z , e di una funzione di Y e Z [27]. Ponendo $u_{\parallel}(\vec{R}) = U_X(Z) U_Y(Z) \exp \left(ikZ + \frac{ikX^2}{2q_X(Z)} + \frac{ikY^2}{2q_Y(Z)} \right)$ nell'equazione $\vec{\nabla}^2 u_{\parallel}(\vec{R}) + k^2 u_{\parallel}(\vec{R}) = 0$, in condizioni di parassialità si ottengono i seguenti vincoli indipendenti, sulle funzioni $q_X(Z)$, $q_Y(Y, Z)$, $U_X(Z)$ e $U_Y(Y, Z)$ appena introdotte, validi per ogni X e Y :

$$\frac{\partial q_X(Z)}{\partial Z} = 1, \quad \frac{\partial q_Y(Z)}{\partial Z} = 1 \quad (308)$$

e

$$\frac{\partial U_X(Z)}{\partial Z} = -\frac{1}{2} \frac{U_X(Z)}{q_X(Z)}, \quad \frac{\partial U_Y(Z)}{\partial Z} = -\frac{1}{2} \frac{U_Y(Z)}{q_Y(Z)}. \quad (309)$$

Selezionando la funzione di modo TEM_{00} a sezione ellittica come soluzione dell'equazione di Helmholtz in approssimazione parassiale, si ottiene la seguente funzione di modo normalizzata [27]:

$$u_{\parallel}(\vec{R}) = C_{el,00} \sqrt{\frac{2}{\pi w_X(Z) w_Y(Z)}} \exp \left[+ikZ - \frac{i}{2} \arctan \left(\frac{Z}{Z_{RX}} \right) - \frac{i}{2} \arctan \left(\frac{Z}{Z_{RY}} \right) \right] \cdot \exp \left[- \left(\frac{1}{w_X^2(Z)} + \frac{ik}{2R_X(Z)} \right) X^2 - \left(\frac{1}{w_Y^2(Z)} + \frac{ik}{2R_Y(Z)} \right) Y^2 \right], \quad (310)$$

dove $C_{el,00}$ rappresenta la costante dimensionale di normalizzazione del modo TEM_{00} a sezione ellittica. Nell'ultima relazione, state introdotte la larghezza del fascio lungo \hat{X} , indicata con $w_X(Z)$ e quella lungo \hat{Y} , $w_Y(Z)$, che presentano i valori minimi pari a, rispettivamente, w_{0X} e w_{0Y} , quando $Z \equiv 0$:

$$w_X(Z) = w_{0X} \sqrt{1 + \left(\frac{Z}{Z_{RX}} \right)^2}, \quad w_Y(Z) = w_{0Y} \sqrt{1 + \left(\frac{Z}{Z_{RY}} \right)^2}. \quad (311)$$

Inoltre, sono stati definiti i raggi di curvatura del fronte d'onda nelle due direzioni, $R_X(Z)$ e $R_Y(Z)$, che assumono i rispettivi valori minimi R_{0X} e R_{0Y} , quando $Z \rightarrow \pm\infty$:

$$R_X(Z) = R_{0X} \left[1 + \left(\frac{Z_{RX}}{Z} \right)^2 \right], \quad R_Y(Z) = R_{0Y} \left[1 + \left(\frac{Z_{RY}}{Z} \right)^2 \right]. \quad (312)$$

Le grandezze appena citate dipendono dalle lunghezze di Rayleigh lungo le due direzioni ortogonali Z_{RX} e Z_{RY} , definite in termini del numero d'onda k o della lunghezza d'onda λ del laser nel modo seguente:

$$Z_{RX} := \frac{\pi w_{0X}^2}{\lambda} = \frac{k w_{0X}^2}{2}, \quad Z_{RY} := \frac{\pi w_{0Y}^2}{\lambda} = \frac{k w_{0Y}^2}{2}. \quad (313)$$

Introducendo l'ampiezza reale del campo elettrico E_{\parallel} , comune ai tre fasci propagantisi parallelamente all'asse \hat{Z} , l'ampiezza complessa $\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R}) := \mathcal{E}_L(\vec{R}) + \mathcal{E}_R(\vec{R}) = E_{\perp}(u_L(\vec{R}) + u_R(\vec{R}))$, ottenuta sommando i contributi dei fasci laser più esterni caratterizzati dalle ampiezze complesse $\mathcal{E}_L(\vec{R})$ e $\mathcal{E}_R(\vec{R})$, è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{L,R}(\vec{R}) &:= \sqrt{V_{el,00}} E_{\parallel} (u_{\parallel}(X+l, Y, Z) + u_{\parallel}(X-l, Y, Z)) = \\ &= \sqrt{V_{el,00}} E_{\parallel} \sqrt{\frac{2}{\pi w_X(Z) w_Y(Z)}} \exp \left[+ikZ - \frac{i}{2} \arctan \left(\frac{Z}{Z_{RX}} \right) \right] \cdot \\ &\cdot \exp \left[-\frac{i}{2} \arctan \left(\frac{Z}{Z_{RY}} \right) \right] \exp \left[- \left(\frac{1}{w_Y^2(Z)} + \frac{ik}{2R_Y(Z)} \right) Y^2 \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ \exp \left[- \left(\frac{1}{w_X^2(Z)} + \frac{ik}{2R_X(Z)} \right) (X-l)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \exp \left[- \left(\frac{1}{w_X^2(Z)} + \frac{ik}{2R_X(Z)} \right) (X+l)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (314)$$

dove $V_{el,00}$ rappresenta il volume efficace del modo TEM_{00} relativo ai fasci a sezione ellittica. Il quadrato del modulo dell'ampiezza complessa $\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})$ è, quindi:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})|^2 &= V_{el,00} E_{\parallel}^2 \left(\frac{2}{\pi w_X(Z) w_Y(Z)} \right) \exp \left(-\frac{2Y^2}{w_Y^2(Z)} \right) \cdot \\ &\cdot \left[\exp \left(-\frac{2(X-l)^2}{w_X^2(Z)} \right) + \exp \left(-\frac{2(X+l)^2}{w_X^2(Z)} \right) + \right. \\ &\left. + 2 \cos \left(\frac{k(X-l)^2}{2R_X(Z)} - \frac{k(X+l)^2}{2R_X(Z)} \right) \exp \left(-\frac{(X-l)^2}{w_X^2(Z)} - \frac{(X+l)^2}{w_X^2(Z)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (315)$$

Ora, se le *lunghezze di Rayleigh* Z_{RX} e Z_{RY} sono sufficientemente grandi, le dimensioni radiali del fascio $w_X(Z)$ e $w_Y(Z)$ possono essere considerate indipendenti da Z , mentre $R_X(Z)$ tenderà ad assumere valori elevati, cosicché la (315) può essere riscritta nella seguente forma approssimata:

$$|\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})|^2 \approx \frac{2V_{el,00}E_{\parallel}^2}{\pi w_{0X}w_{0Y}} \exp\left(-\frac{2Y^2}{w_{0Y}^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{2(X-l)^2}{w_{0X}^2}\right) + \exp\left(-\frac{2(X+l)^2}{w_{0X}^2}\right) + 2 \exp\left(-\frac{(X-l)^2}{w_{0X}^2} - \frac{(X+l)^2}{w_{0X}^2}\right) \right]. \quad (316)$$

Inoltre, se la distanza $2l$ fra gli assi dei laser paralleli più esterni è paragonabile alla larghezza minima di ciascun fascio lungo X , w_{0X} , e quest'ultima è significativamente minore di w_{0Y} , allora l'espressione relativa a $|\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})|^2$ può essere ulteriormente semplificata:

$$|\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})|^2 \approx \frac{2V_{el,00}E_{\parallel}^2}{\pi w_{0X}w_{0Y}} \left[\exp\left(-\frac{2(X-l)^2}{w_{0X}^2}\right) + \exp\left(-\frac{2(X+l)^2}{w_{0X}^2}\right) \right]. \quad (317)$$

A partire dalla funzione di modo gaussiana ellittica $u_C(\vec{R})$, si ricava l'ampiezza complessa del campo elettrico generato dal fascio centrale, $\mathcal{E}_C(\vec{R}) := E_{\parallel}u_C(\vec{R})$, che è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(\vec{R}) &:= \sqrt{V_{el,00}}E_{\parallel}u_{\parallel}(X, Y, Z) = \\ &= \sqrt{V_{el,00}}E_{\parallel} \sqrt{\frac{2}{\pi w_X(Z)w_Y(Z)}} \exp\left[ikZ - \frac{i}{2} \arctan\left(\frac{Z}{Z_{RX}}\right) - \frac{i}{2} \arctan\left(\frac{Z}{Z_{RY}}\right) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left[-\left(\frac{1}{w_X^2(Z)} + \frac{ik}{2R_X(Z)}\right)X^2\right] \exp\left[-\left(\frac{1}{w_Y^2(Z)} + \frac{ik}{2R_Y(Z)}\right)Y^2\right], \end{aligned} \quad (318)$$

dove i parametri del fascio coincidono con quelli scelti per i laser più esterni. Il quadrato dell'ampiezza complessa del campo elettrico diviene, quindi:

$$|\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2 = \frac{2V_{el,00}E_{\parallel}^2}{\pi w_X(Z)w_Y(Z)} \exp\left[-\frac{2X^2}{w_X^2(Z)}\right] \exp\left[-\frac{2Y^2}{w_Y^2(Z)}\right]. \quad (319)$$

In analogia a quanto effettuato nel caso dei fasci laterali, si suppone che le *lunghezze di Rayleigh* Z_{RX} e Z_{RY} siano sufficientemente elevate da consentirci di ritenere le dimensioni radiali $w_X(Z)$ e $w_Y(Z)$ pressoché indipendenti da Z , ottenendo $w_X(Z) \approx w_{0X}$ e $w_Y(Z) \approx w_{0Y}$. L'equazione (319) diviene, quindi:

$$|\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2 \approx \frac{2V_{el,00}E_{\parallel}^2}{\pi w_{0X}w_{0Y}} \exp\left[-\frac{2X^2}{w_{0X}^2}\right] \exp\left[-\frac{2Y^2}{w_{0Y}^2}\right]. \quad (320)$$

Inoltre, se l'asimmetria nella sezione del fascio è molto significativa, allora si perviene a un quadrato del modulo dell'ampiezza complessa del campo elettrico generato dal laser centrale $|\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2$ dipendente dalle sole X :

$$|\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2 \approx \frac{2V_{el,00}E_{\parallel}^2}{\pi w_{0X}w_{0Y}} \exp\left(-\frac{2X^2}{w_{0X}^2}\right). \quad (321)$$

Sostituendo all'interno delle relazioni (300) e (301) i risultati ottenuti per $|\mathcal{E}_{L,R}(\vec{R})|^2$ (315) ed $|\mathcal{E}_C(\vec{R})|^2$ (321) rispettivamente, e sommando entrambi i contributi, si ricava il potenziale totale generato dai tre fasci laser propagantisi parallelamente all'asse \hat{Z} :

$$\begin{aligned} U_{\parallel}(\vec{R}) \equiv U_{TW}(X) &= \frac{6\epsilon_0 c^3 \Gamma V_{el,00} E_{\parallel}^2}{\omega_A^2 w_{0X}^2 w_{0Y}^2 \Delta} \left[\exp\left(-\frac{2(X+l)^2}{w_{0X}^2}\right) + \exp\left(-\frac{2X^2}{w_{0X}^2}\right) + \exp\left(-\frac{2(X-l)^2}{w_{0X}^2}\right) \right] \\ &:= -V_{0\parallel} \left[\sum_{s=-1,0,1} \exp\left(-\frac{2(X-s \cdot l)^2}{w_{0X}^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (322)$$

dove è stato introdotto il parametro $V_{0\parallel} := -\frac{6\epsilon_0 c^3 \Gamma V_{el,00} E_{\parallel}^2}{\omega_A^2 w_{0X}^2 w_{0Y}^2 \Delta}$, che definisce la profondità massima del potenziale a tripla buca. Sommando ora il potenziale a tripla buca così ottenuto $U_{\parallel}(\vec{R})$ (146) al potenziale armonico bidimensionale $U_{\perp}(\vec{R})$ (307), e trascurando nell'espressione di quest'ultimo il termine costante $-V_{0\perp}$, si determina il potenziale di confinamento complessivo $U(\vec{R})$:

$$U(\vec{R}) = U_{\perp}(\vec{R}) + U_{\parallel}(\vec{R}) = \frac{1}{2} M \omega_H^2 (Y^2 + Z^2) - V_{TW} \left[\sum_{s=-1,0,1} \exp\left(-\frac{2(X-s \cdot l)^2}{w_{TW}^2}\right) \right], \quad (323)$$

dove la "profondità" delle buche di potenziale $V_{0\parallel}$ è stata indicata con V_{TW} , mentre lo spessore dei fasci laser w_{0X} è stato ridenominato w_{TW} .

BIBLIOGRAFIA

- [1] Mu Ai-Xia, Zhou Xiao-Yan, and Xue Ju-Kui. The dynamics of triple-well trapped bose–einstein condensates with atoms feeding and loss effects. *Chinese Physics B*, 17(3):764, 2008. URL <http://stacks.iop.org/1674-1056/17/i=3/a=005>.
- [2] K. Aikawa, A. Frisch, M. Mark, S. Baier, A. Rietzler, R. Grimm, and F. Ferlaino. Bose-einstein condensation of erbium. *Phys. Rev. Lett.*, 108:210401, May 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.210401. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.210401>.
- [3] Hiroshi Ajiki. Parameters of a driven jaynes–cummings hamiltonian. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 7(1):29, Jan 2005. URL <http://stacks.iop.org/1464-4266/7/i=1/a=006>.
- [4] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic josephson junction. *Phys. Rev. Lett.*, 95:010402, Jun 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.95.010402. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.010402>.
- [5] S.A. Aljunid, B. Chng, M. Paesold, G. Maslennikov, and C. Kurtsiefer. Interaction of light with a single atom in the strong focusing regime. *J. Mod. Opt.*, 58:299–305, Oct 2010. doi: 10.1080/09500340.2010.522780.
- [6] J.F. Allen and A.D. Misener. Flow of liquid helium ii. *Nature*, 75, Jan 1938. doi: 10.1038/141075a0.
- [7] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. Observation of bose–einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198–201, 1995. doi: 10.1126/science.269.5221.198.
- [8] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, Mar 1963. doi: 10.1103/PhysRevLett.10.230. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.230>.
- [9] James F. Annett. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford University Press, 2004.
- [10] V. I. Balykin, V. G. Minogin, and V. S. Letokhov. Electromagnetic trapping of cold atoms. *Reports on Progress in Physics*, 63(9):1429, 2000. URL <http://stacks.iop.org/0034-4885/63/i=9/a=202>.
- [11] J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108, Dec 1957.
- [12] Vincenzo Barone. *Relatività*. Bollati-Boringhieri, 2004.
- [13] Wang Bin and Chen Yan. Band structure of bose-einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system. *Chinese Physics Letters*, 30(2):024211, 2013. URL <http://stacks.iop.org/0256-307X/30/i=2/a=024211>.
- [14] N. N. Bogoljubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys. USSR*, 23, 1947.
- [15] Lushuai Cao, Ioannis Brouzos, Sascha Zöllner, and Peter Schmelcher. Interaction-driven interband tunneling of bosons in the triple well. *New Journal of Physics*, 13(3):033032, 2011. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/13/i=3/a=033032>.

- [16] Yvan Castin. Bose-einstein condensates in atomic gases: simple theoretical results. In *Coherent atomic matter waves, Lecture Notes of Les Houches Summer School, edited by R. Kaiser, C. Westbrook and F. David*, pages 1–136. EDP Sciences and Springer Verlag, 2001.
- [17] Jacques Dupont-Roc e Gilbert Grynberg Claude Cohen-Tannpoudji. *Atom-Photons Interactions: Basic Processes and Applications*. Wiley-VCH, Weinheim, Deutschland, 1st edition, 2004.
- [18] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71:463–512, Apr 1999. doi: 10.1103/RevModPhys.71.463. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.71.463>.
- [19] L. Dell’Anna, G. Mazzarella, V. Penna, and L. Salasnich. Entanglement entropy and macroscopic quantum states with dipolar bosons in a triple-well potential. *Phys. Rev. A*, 87:053620, May 2013. doi: 10.1103/PhysRevA.87.053620. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.053620>.
- [20] B. H. Bransden e C. J. Joachain. *Physics of Atoms and Molecules*. Pearson Education, Harlow, UK, 2nd edition, 2003.
- [21] Kenichi Konishi e Giampiero Paffuti. *Meccanica Quantistica: Nuova Introduzione*. Plus - Pisa University Press, 2005.
- [22] Christopher J. Pethick e Henrik Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2004.
- [23] Marlan Orvil Scully e Muhammad Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1st edition, 1997.
- [24] Christopher Gerry e Peter Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1st edition, 2004.
- [25] R.P. Feynman. Atomic theory of the 2-fluid model of liquid helium. *Phys. Rev.*, 262, 1954.
- [26] R. Gati, M. Albiez, J. Fölling, B. Hemmerling, and M.K. Oberthaler. Realization of a single josephson junction for bose–einstein condensates. *Applied Physics B*, 82(2):207–210, 2006. ISSN 0946-2171. doi: 10.1007/s00340-005-2059-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-005-2059-z>.
- [27] Paul F. Goldsmith. *Quasioptical Systems: Gaussian Beam Quasioptical Propagation and Applications*. John Wiley & Sons - IEEE Press, 1997.
- [28] Axel Griesmaier, Jörg Werner, Sven Hensler, Jürgen Stuhler, and Tilman Pfau. Bose-einstein condensation of chromium. *Phys. Rev. Lett.*, 94:160401, Apr 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.94.160401. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.160401>.
- [29] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller, and Yurii B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. 42:95 – 170, 2000. ISSN 1049-250X. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S1049-250X\(08\)60186-X](http://dx.doi.org/10.1016/S1049-250X(08)60186-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1049250X0860186X>.
- [30] N. Hodgson and H. Weber. *Optical resonators: fundamentals, advanced concepts and applications*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1st edition, 1997.
- [31] Kerson Huang. *Meccanica Statistica*. Zanichelli Editore, 1997.
- [32] John D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [33] F.W. Jaynes, E.T. e Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, Jan 1963. ISSN 0018-9219. doi: 10.1109/PROC.1963.1664.
- [34] Charles J. Joachain. *Quantum Collision Theory*. North Holland, 1975.

-
- [35] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251 – 253, 1962. ISSN 0031-9163. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](http://dx.doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916362913690>.
- [36] P. Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, 74, 1938. ISSN 0028-0836.
- [37] Alicia J Kollár, Alexander T Papageorge, Kristian Baumann, Michael A Armen, and Benjamin L Lev. An adjustable-length cavity and bose–einstein condensate apparatus for multimode cavity qed. *New Journal of Physics*, 17(4):043012, 2015. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/17/i=4/a=043012>.
- [38] T. Lahaye, T. Pfau, and L. Santos. Mesoscopic ensembles of polar bosons in triple-well potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 104:170404, Apr 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.104.170404. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.170404>.
- [39] L.D. Landau. The theory of superfluidity of helium ii. *J. Phys. USSR*, 71, 1941.
- [40] M. Lewenstein, A. Sanpera, and V. Ahufinger. *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-Body Systems*. Oxford University Press, 2012.
- [41] Maciej Lewenstein, Li You, J. Cooper, and K. Burnett. Quantum field theory of atoms interacting with photons: Foundations. *Phys. Rev. A*, 50:2207–2231, Sep 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.50.2207. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.50.2207>.
- [42] Bin Liu, Li-Bin Fu, Shi-Ping Yang, and Jie Liu. Josephson oscillation and transition to self-trapping for bose-einstein condensates in a triple-well trap. *Phys. Rev. A*, 75:033601, Mar 2007. doi: 10.1103/PhysRevA.75.033601. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.033601>.
- [43] Yu. Loiko, V. Ahufinger, R. Corbalán, G. Birkl, and J. Mompart. Filtering of matter-wave vibrational states via spatial adiabatic passage. *Phys. Rev. A*, 83:033629, Mar 2011. doi: 10.1103/PhysRevA.83.033629. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.033629>.
- [44] Mingwu Lu, Nathaniel Q. Burdick, Seo Ho Youn, and Benjamin L. Lev. Strongly dipolar bose-einstein condensate of dysprosium. *Phys. Rev. Lett.*, 107:190401, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.190401. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.190401>.
- [45] P. Mazzoldi, N. Nigro, and C. Voci. *Fisica*, volume 2. EdiSES, Napoli, 2nd edition, 2007.
- [46] S.E. Morin, Q. Wu, and T.W. Mossberg. Cavity quantum electrodynamics at optical frequencies. *Optics and Photonics News*, 3(8):8–14, 1992. doi: doi:10.1364/OPN.3.8.000008.
- [47] Nagy, D., Szirmai, G., and Domokos, P. Self-organization of a bose-einstein condensate in an optical cavity. *Eur. Phys. J. D*, 48(1):127–137, 2008. doi: 10.1140/epjd/e2008-00074-6. URL <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00074-6>.
- [48] H.K. Onnes. *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden*, (119, 120, 122), 1911.
- [49] G. Pöschl and E. Teller. Bemerkungen zur quantenmechanik des anharmonischen oszillators. *Zeitschrift für Physik*, 83(3-4):143–151, 1933. ISSN 0044-3328. doi: 10.1007/BF01331132. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01331132>.
- [50] E. L. Raab, M. Prentiss, Alex Cable, Steven Chu, and D. E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2631–2634, Dec 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.59.2631. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2631>.
- [51] G Rempe and H Walther. The one-atom maser and the test of quantum electrodynamics. *Physica Scripta*, 36(1):135, Jan 1987. URL <http://stacks.iop.org/1402-4896/36/i=1/a=022>.
- [52] Karl F. Renk. *Basics of Laser Physics*. Springer-Verlag, Heidelberg, D, 1st edition, 2012.

- [53] Helmut Ritsch, Peter Domokos, Ferdinand Brennecke, and Tilman Esslinger. Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials. *Rev. Mod. Phys.*, 85:553–601, Apr 2013. doi: 10.1103/RevModPhys.85.553. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.85.553>.
- [54] Wolfgang Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. John Wiley & Sons, Darmstadt, Deutschland, 1st edition, 2001.
- [55] Bruce W. Shore and Peter L. Knight. The jaynes-cummings model. *Journal of Modern Optics*, 40(7):1195–1238, 1993. doi: 10.1080/09500349314551321. URL <http://dx.doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [56] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [57] A. E. Siegman. Laser beams and resonators: The 1960s. *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(6):1380–1388, 2000. URL <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=902192&pageNumber=2&searchWithin=%22First%20Name%22:Anthony&searchWithin=%22Last%20Name%22:Siegman&newsearch=true>.
- [58] A. E. Siegman. Laser beams and resonators: Beyond the 1960s. *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(6):1389–1399, 2000. URL <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=902193&searchWithin=%22First%20Name%22:Anthony&searchWithin=%22Last%20Name%22:Siegman&newsearch=true>.
- [59] H.T.C. Stoof, K.B. Gubbels, and D.B.M. Dickerscheid. *Ultracold Quantum Fields*. Springer, Dordrecht, NL, 1st edition, 2009.
- [60] Orazio Svelto. *Principles of Lasers*. Springer, 2010.
- [61] G. Szirmai, G. Mazzarella, and L. Salasnich. Tunneling dynamics of bosonic josephson junctions assisted by a cavity field. *Phys. Rev. A*, 91:023601, Feb 2015. doi: 10.1103/PhysRevA.91.023601. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.023601>.
- [62] X.-F. Zhang, W. Han, L. Wen, P. Zhang, R.-F. Dong, H. Chang, and S.-G. Zhang. Two-component dipolar bose-einstein condensate in concentrically coupled annular traps. *Scientific Reports*, 5:8684, Mar 2015. doi: 10.1038/srep08684. URL <http://doi.org/10.1038/srep08684>.