

Università degli studi di Padova



Facoltà di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Triennale in Statistica, Popolazione e Società

TESI DI LAUREA

**Anatomia di una distribuzione
di probabilità**

**Anatomy of a probability
distribution**

17 giugno 2008

Relatore: Ch.mo Prof. Guido Masarotto

Laureando: Enrico Tonini - 533524

ANNO ACCADEMICO 2007-08

All'Inventore

Indice

Prefazione	1
Di cosa parleremo?	1
Come nacque la distribuzione.	2
Una terribile scoperta. . . !	4
Il riscatto	4
Che si inizi a parlare di questa nuova variabile aleatoria!	5
1 La distribuzione di probabilità U-power	7
1.1 La distribuzione U-power standard (o B di Ruzza)	7
1.2 Una prima generalizzazione: il parametro μ (vertice)	9
1.3 Una seconda generalizzazione: il parametro δ (raggio)	10
1.3.1 La distribuzione U-quadrato	12
1.4 La terza (e definitiva) generalizzazione: il parametro α (potenza)	13
1.4.1 Principali caratteristiche della distribuzione U-power	15
2 Stime dei parametri di una distribuzione U-power	23
2.1 Verosimiglianza e log-verosimiglianza	23
2.2 Proposte di stimatori	24
2.2.1 Stimatori di massima verosimiglianza	24
2.2.2 Stimatori ottenuti con il metodo dei momenti	25
2.2.3 Stimatori ricavati “a buon senso”	25
3 Una variante asimmetrica della distribuzione U-power	29

4 Implementazione in R di alcune funzioni per l'analisi della distribuzione	33
4.1 Le funzioni di base	33
4.1.1 La funzione <code>dU</code>	33
4.1.2 La funzione <code>pU</code>	35
4.1.3 La funzione <code>qU</code>	36
4.1.4 La funzione <code>rU</code>	37
4.2 Un paio di funzioni per la verifica dell'adattamento	38
4.2.1 La funzione <code>qqU</code>	38
4.2.2 La funzione <code>ppU</code>	40
4.2.3 La funzione <code>ks.U.test</code>	41
4.3 La distribuzione asimmetrica: la funzione <code>dsU</code>	44
4.4 Una funzione per la verifica del teorema del limite centrale: la funzione <code>tlc.U</code>	45
4.5 Alcune funzioni per la stima dei parametri	45
4.5.1 Le funzioni per il calcolo delle stime	45
4.5.2 Una funzione per stimare tutto insieme...	47
4.5.3 Un paio di funzioni definitive un po' più sintetiche...	52
5 Un possibile utilizzo delle funzioni create per effettuare alcune analisi	57
5.1 Intervalli di confidenza e verifiche di ipotesi sui parametri via <i>bootstrap</i>	57
5.2 Anche per la U-power varrà il teorema del limite centrale?	59
6 Aspetti pratici della distribuzione	65
7 Una possibile missione per il futuro...	67
8 Due parole sull'Inventore...	69
A Alcune dimostrazioni	73
A.1 Calcolo del fattore di standardizzazione	73

<i>INDICE</i>	iii
A.2 Calcolo della funzione di ripartizione	74
A.3 Calcolo dei principali momenti: media e varianza	74
A.4 Calcolo dello stimatore di α basato sul metodo dei momenti .	76
A.5 Calcolo dello stimatore di α basato sul metodo della massima verosimiglianza	76
A.6 Calcolo dell'integrale della densità asimmetrica	77
Bibliografia	79
Ringraziamenti	81

Elenco delle figure

1	Il luogo esatto in cui fu inventata la distribuzione!	3
1.1	Funzione di densità della distribuzione U-power standard.	8
1.2	Effetto del vertice sulla funzione di densità.	10
1.3	Effetto del raggio sulla funzione di densità.	11
1.4	Effetto della potenza sulla funzione di densità.	14
1.5	Casi degeneri.	16
1.6	Comportamento della funzione di ripartizione.	18
1.7	Comportamento della funzione quantile.	20
3.1	Alcuni esempi di distribuzione U-power asimmetrica.	31
4.1	Istogramma di un vettore simulato dalla distribuzione U-power.	38
4.2	Q-Q plot di alcuni vettori simulati dalla distribuzione U-power.	40
4.3	P-P plot di alcuni vettori simulati dalla distribuzione U-power.	42
4.4	Distribuzione campionaria di tutti gli stimatori proposti.	51
4.5	Distribuzione campionaria degli stimatori ufficiali.	54
5.1	Distribuzione della media campionaria di una U-power standard per diversi valori di n	61
5.2	Distribuzione della media campionaria di una $Up(1, 2, 3.75)$ per diversi valori di n	63
6.1	Una partita di ping pong: un possibile utilizzo pratico della nostra distribuzione.	66

7.1	Un possibile esempio di come potrebbe risultare l'analogia discreta della distribuzione U-power continua.	68
8.1	L'Inventore e il sottoscritto a Stoccolma.	69
8.2	L'Inventore e il sottoscritto in una via di Uppsala (Svezia). . .	70
8.3	L'Inventore in preda ad un delirio di onnipotenza.	70
8.4	L'Inventore in preda ad un delirio di onnipotenza "svedese". .	71
8.5	Impossibile non prosternarsi dinanzi alla grandezza dell'Inventore!	71

Prefazione

Di cosa parleremo?

In questa trattazione ci occuperemo dello studio di una distribuzione continua di probabilità inventata da uno studente della Facoltà di Scienze Statistiche dell'Università di Padova.

Lo scopo principale di questa invenzione era quello di creare una famiglia di distribuzioni continue di probabilità che attribuissero più densità agli estremi di un intervallo limitato e simmetrico rispetto a un punto nel quale, invece, la densità è nulla; di questo tipo di distribuzioni, infatti, non ne sembrano¹ apparentemente esistere di catalogate e non vengono studiate nei corsi universitari di probabilità e statistica.

Desidero avvertire il lettore fin da adesso che questa non è la solita tesi di laurea esageratamente seria e spesso noiosa ma, oltre a contenere certamente e comunque una trattazione tradizionale degli argomenti, è anche ricca di sezioni, frasi e note in cui compaiono numerosi e simpatici retroscena che possono far sorridere; spero quindi che il lettore non si scandalizzi nel leggerla ma che, anzi, possa trovarla originale e appassionante!

Per iniziare il nostro percorso con leggerezza, soffermiamoci per un po' su come, quando, in che occasione, etc., è nata questa distribuzione di probabilità...

¹Vedremo perché solo “sembrano”...

Come nacque la distribuzione. . .

“Tonio², ora inventerò una variabile aleatoria. . .” (Alessio Ruzza)

Tutto cominciò da questa frase, pronunciata da Alessio Ruzza³ probabilmente il 26 marzo 2007 verso mezzogiorno, poco prima di andare a lezione di un certo insegnamento⁴.

Quel giorno io chiesi semplicemente all’Inventore della distribuzione se anche noi, comuni studenti universitari della laurea triennale, fossimo stati in grado di inventarci una distribuzione di probabilità; la sua risposta fu proprio quella che ho citato sopra. . .

Alle 12.30, appena iniziò la lezione, in uno dei posti centrali della seconda fila di sedie dell’aula SC120 del complesso di Santa Caterina, sede della Facoltà di Scienze Statistiche dell’Università di Padova (fig. 1), il Ruzza cominciò a dare sfogo alla sua mente creativa e io, insieme ad altri miei colleghi che citerò nei ringraziamenti⁵, fui uno dei fortunati testimoni di quella mirabile creazione. . . Nacque così una nuova distribuzione, inizialmente senza parametri, che soprannominammo *B di Ruzza*⁶.

Dopo aver inventato la distribuzione di base, il Ruzza nei giorni seguenti ci lavorò sopra, estendendola prima a uno e poi a due parametri; il vero capolavoro, però, arrivò nel dicembre 2007, quando riuscì a generalizzare la distribuzione ad un terzo caratteristico parametro.

La distribuzione con due parametri fu chiamata dall’Inventore stesso col

²È il soprannome del sottoscritto. . .

³Se siete così impazienti che volete saperne subito qualcosa di più sull’Inventore, andate a leggermi il cap. 8 a pag. 69.

⁴Preferisco evitare di dire quale, perché non vorrei che il relativo docente si offendesse del fatto che in quella lezione il Ruzza, invece di seguirla, inventò la distribuzione.

⁵Si veda pag. 81.

⁶Scegliemmo la lettera B essenzialmente per due motivi: innanzitutto perché tutti i grandi statistici hanno inventato variabili la cui lettera iniziale non ha alcun legame con il proprio nome e poi perché B sta per “Baffo”, uno dei tanti soprannomi del Ruzza.

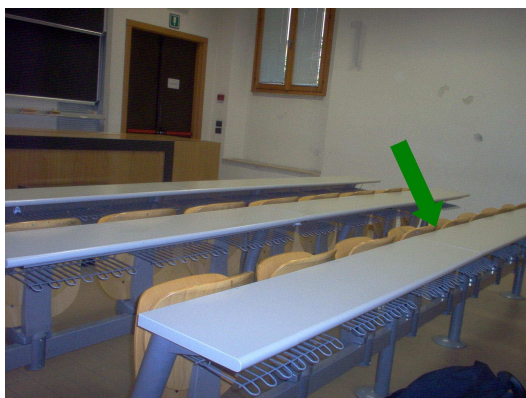


Figura 1: La freccia indica le sedie centrali della seconda fila dell’aula SC120 del complesso di Santa Caterina, sede della Facoltà di Scienze Statistiche dell’Università di Padova: il luogo esatto in cui fu inventata la distribuzione!

nome di *Distribuzione Parabolica*, quella a tre parametri fu chiamata invece *Distribuzione Parabolica Generalizzata*⁷.

Nacque ben presto, nell’Inventore, nei suoi colleghi e anche nel sottoscritto, l’idea di trovare Qualcuno⁸ che potesse ispezionare⁹ questa nuova distribuzione di probabilità nei suoi angoli più profondi e che le potesse aprire le porte della letteratura! La realizzazione di questo progetto fu impost. . . ehm. . . proposta a me e all’inizio fu preso tutto come uno scherzo, sia da me, che dai miei colleghi; in seguito, però, la cosa si fece sempre più seria, soprattutto quando la distribuzione venne generalizzata al terzo parametro e nel momento in cui io stesso ho cominciato a seguire le lezioni del corso di Statistica Computazionale I, in cui ho appreso delle conoscenze necessarie per poter redigere questa tesi; ecco quindi il motivo del perché ho la fortuna di essere qui a narrarvi questa storia. . .

⁷Per saperne di più sulla trattazione originale, si veda, sempre che lui ve lo conceda, il manoscritto dell’Inventore [5].

⁸Non è un caso che sia maiuscolo: quando, nel viaggio di istruzione che feci a Budapest insieme all’Inventore e ad altri tre nostri colleghi, si diceva “Che Qualcuno faccia questo. . .”, “Che Qualcuno faccia quest’altro. . .”, beh, il “Qualcuno” ero io. . .

⁹Anche questo termine non è casuale; questo però non lo spiego, la storia è un po’ troppo lunga. . .

Una terribile scoperta...!

Fu così che nei primi giorni del mese di aprile 2008 iniziai a fare ricerca¹⁰ su questa invenzione... Ma in realtà, ben presto, grazie all'aiuto del mio relatore, scoprii, ahimé, che l'idea era già nata e che il Ruzza, pur senza saperlo, effettivamente non aveva scoperto niente di nuovo... Il rammarico mio, del Ruzza, e dei nostri colleghi fu totale...

Il riscatto

Per fortuna scoprimmo ben presto una via di uscita dopo questa terribile notizia: se è vero che la versione a due parametri era già stata inventata, la distribuzione di probabilità U-quadrato¹¹, la generalizzazione al terzo parametro sembra essere del tutto innovativa¹²! Oltretutto la versione a due parametri del Ruzza è più raffinata e parsimoniosa, in quanto la U-quadrato è stata scritta con quattro parametri, di cui due dipendenti dagli altri due; l'Inventore, quindi, *senza saperlo*¹³, aveva efficacemente rinnovato una distribuzione di probabilità contenente alcuni parametri inutili e, soprattutto, l'aveva generalizzata ad una forma superiore!

Fu così che, insieme al mio relatore, decidemmo di chiamare questa nuova distribuzione *U-power* in quanto, come vedremo più avanti, il terzo parametro rappresenta proprio una sorta di potenza della distribuzione; vorrei segnala-

¹⁰Spero mi si conceda il termine...

¹¹Si veda il sito di Wikipedia inglese [7], o comunque anche la sottosez. 1.3.1 a pag. 12, in cui ho riportato più o meno tutte le informazioni essenziali sulla U-quadrato.

¹²Dico "sembra", in quanto non ne ho la certezza assoluta, anche se di fatto ne sono sicuro: non esiste un accenno a una distribuzione simile né sulla "Bibbia delle variabili aleatorie" (mi riferisco a [2], che tra l'altro non accenna neanche alla U-quadrato), né in altri libri che trattano le distribuzioni di probabilità, né sul web se non, appunto, in Wikipedia e in un altro paio di siti e, in ogni caso, limitatamente alla sola versione a due parametri.

¹³Ci tengo ad enfatizzarlo, in quanto non vorrei che qualcuno pensasse che il Ruzza abbia copiato la distribuzione, modificandola un po' e spacciandola per sua...

re però che l'Inventore in persona, attualmente, preferisce riferirsi alla sua distribuzione con il nome di *U di Ruzza*.

Che si inizi a parlare di questa nuova variabile aleatoria!

Cominceremo ora a trattare analiticamente questa nuova distribuzione di probabilità, partendo dalla forma base, sino alla forma più generale; la analizzeremo a fondo e vedremo poi come poter stimare i parametri nel caso di un campionamento da questa distribuzione (tutti i grafici, tutti i tipi di analisi e le funzioni create sono stati elaborati con il software R¹⁴).

Come ho cercato anche di puntualizzare bene nelle note, il Ruzza ha inventato e teorizzato praticamente tutto ciò che è descritto nel primo capitolo fatta eccezione, però, per il quarto caso degenerare della distribuzione in cui il terzo parametro, la potenza, è nullo¹⁵ e anche per alcune delle principali caratteristiche della distribuzione (la nuova forma della funzione di densità, la funzione di ripartizione, la funzione quantile e le formule generali dei momenti¹⁶); ha inoltre sviluppato le dimostrazioni dell'app. A.1 a pag. 73 e dell'app. A.3 a pag. 74. La parte restante di questa trattazione, invece, è frutto di mie elaborazioni, calcoli e considerazioni personali.

Detto questo, basta chiacchiere e, orsù, che si inizi a parlare di questa nuova variabile aleatoria!

¹⁴Si veda [6].

¹⁵Si veda pag. 15.

¹⁶Si veda la sottosez. 1.4.1 a pag. 15.

Capitolo 1

La distribuzione di probabilità U-power

1.1 La distribuzione U-power standard (o B di Ruzza)

Come si è già detto in precedenza, l'intento principale di questa nuova¹ variabile, era quello di ottenere una distribuzione che attribuisca densità soprattutto agli estremi; la forma base², inventata dal Ruzza al primo impatto, fu:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2\mathbb{I}_{(-1,1)}(x) \quad (1.1)$$

$$\mathbb{I}_{(-1,1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Come vedremo più avanti, la forma base, che chiameremo d'ora in avanti *U-power standard*, può essere considerata una distribuzione U-power di vertice 0, raggio 1 e potenza 2:

$$X \sim U_p(0, 1, 2)$$

¹Solo presunta, purtroppo...

²Quella, appunto, soprannominata confidenzialmente B di Ruzza.

È facile verificare che:

- $f(x) \geq 0, \quad \forall x$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 1$;

due requisiti entrambi essenziali per la densità di una distribuzione continua di probabilità.

Di fatto, inizialmente, il Ruzza non fece altro che prendere una parabola e troncarla simmetricamente in due punti simmetrici rispetto al vertice (1 e -1), facendo in modo che l'area sottesa dalla stessa sull'asse x risultasse pari a 1.

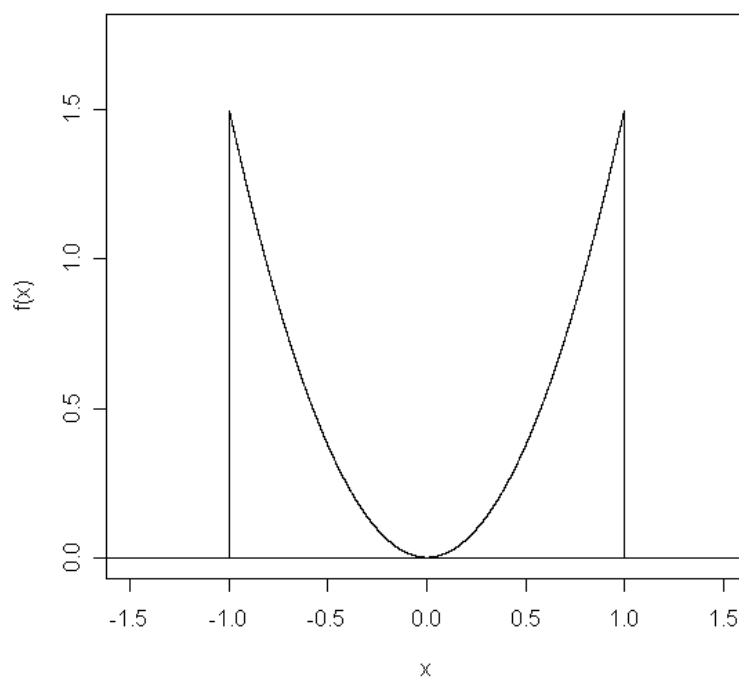


Figura 1.1: Funzione di densità della distribuzione U-power standard.

Il grafico di questa distribuzione (fig. 1.1) conferma infatti quanto detto finora: la densità agli estremi è massima (in questo caso è pari a $\frac{3}{2}$), mentre quella

nel vertice (che è ovviamente la media della distribuzione, cosa che dimostriamo analiticamente più avanti³) è nulla! Per questo motivo colloquialmente potremmo dire che la distribuzione è caratterizzata dalla cosiddetta, se così possiamo chiamarla, proprietà della *speranza insperabile!*

Rimandiamo la trattazione rigorosa e analitica di ripartizione, quantili, momenti, etc., sia per la distribuzione standard, che per le generalizzazioni a uno e due parametri, al momento in cui tratteremo la generalizzazione definitiva a tre parametri, che comprende tutte le altre⁴.

1.2 Una prima generalizzazione: il parametro μ (vertice)

La prima cosa che fece il Ruzza dopo aver inventato la distribuzione standard, fu quella di generalizzarla rispetto alla media, chiamando *vertice*⁵ il parametro che l'avrebbe definita. La densità si evolse quindi nella seguente forma:

$$f(x; \mu) = \frac{3}{2}(x - \mu)^2 \mathbb{I}_{(\mu-1, \mu+1)}(x), \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Dove la funzione indicatrice è definita in modo analogo a prima e ovviamente:

$$X \sim U_p(\mu, 1, 2)$$

Si osservi la fig. 1.2: è chiaro che modificando μ , viene traslato il vertice della parabola e quindi il punto centrale della distribuzione; μ è dunque un *parametro di posizione*.

³Si veda l'equazione 1.16 a pag. 20.

⁴Si veda la sez. 1.4 a pag. 13.

⁵Lascio pensare al lettore il motivo della scelta del nome del parametro...

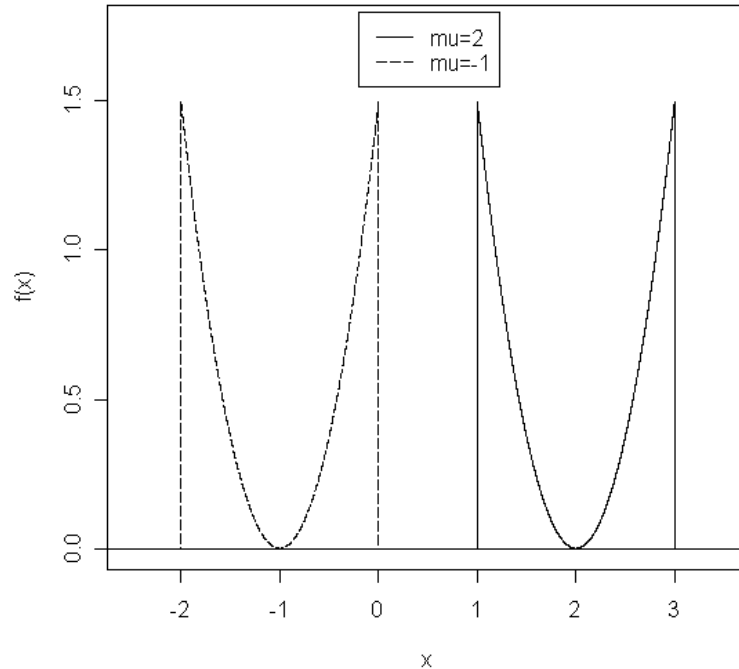


Figura 1.2: Effetto del vertice sulla funzione di densità.

1.3 Una seconda generalizzazione: il parametro δ (raggio)

In seguito il Ruzza generalizzò la distribuzione rispetto all'ampiezza della parabola, chiamando il parametro che l'avrebbe definita *raggio*; tale parametro, infatti, rappresenta la distanza fra il minimo della funzione e la media (oppure fra la media e il massimo, visto che la distribuzione è perfettamente simmetrica). La densità si evolve ulteriormente, quindi, nella seguente forma:

$$f(x; \mu, \delta) = \frac{3}{2\delta^3}(x - \mu)^2 \mathbb{I}_{(\mu-\delta, \mu+\delta)}(x), \quad \mu \in \mathbb{R}, \delta > 0 \quad (1.3)$$

$$X \sim Up(\mu, \delta, 2)$$

Si osservi la fig. 1.3 (entrambe le curve hanno media 0): anche in questo caso il

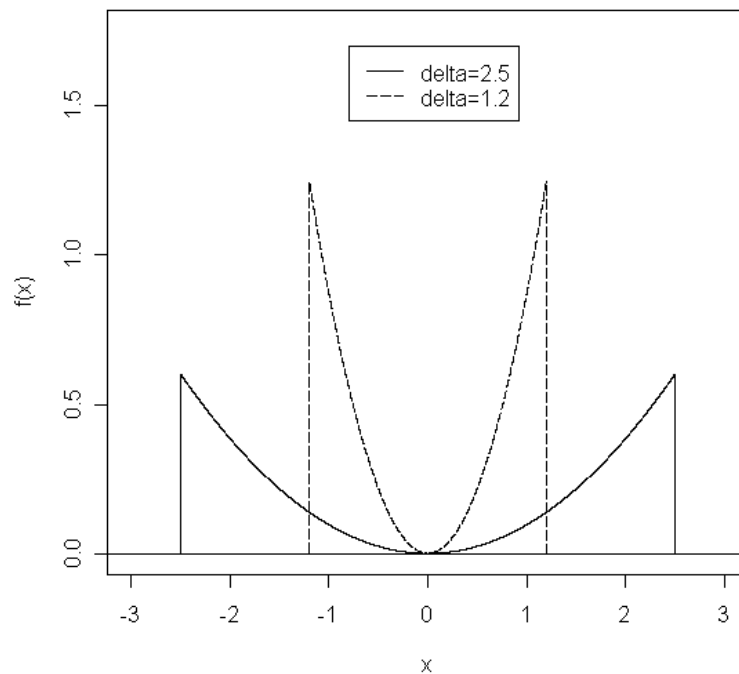


Figura 1.3: Effetto del raggio sulla funzione di densità.

ruolo che svolge il parametro sembra essere molto chiaro, infatti aumentando δ , il range della distribuzione si allarga e la densità massima diminuisce, diminuendo δ , invece, accade l'esatto contrario; δ è pertanto un *parametro di scala*.

Viene escluso dallo spazio parametrico il caso banale e degenere $\delta = 0$, in cui il vertice ha densità infinita⁶ e probabilità pari a 1.

⁶In questo caso, infatti, verrebbe persa la proprietà della speranza insperabile, ma soprattutto otterremmo una distribuzione degenere, di fatto una costante.

1.3.1 La distribuzione U-quadrato

Apriamo questa breve parentesi per illustrare la distribuzione U-quadrato⁷. Lo facciamo adesso in quanto, come già ripetuto più volte, la distribuzione U-power generalizzata alla media e al raggio e la distribuzione U-quadrato sono perfettamente equivalenti:

$$f(x; a, b, \alpha, \beta) = \alpha(x - \beta)^2, \quad a \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, b > a \quad (1.4)$$

Dove:

$$\alpha = \frac{12}{(b - a)^3} \quad \beta = \frac{a + b}{2}$$

$$X \sim U^2(a, b) \quad \text{o, equivalentemente:} \quad X \sim U^2(\alpha, \beta)$$

Riportiamo di seguito anche la corrispondenza fra i parametri delle due forme della distribuzione:

$$\mu = \frac{a + b}{2} = \beta \quad (1.5)$$

$$\delta = \frac{b - a}{2} = \beta - a = b - \beta \quad (1.6)$$

E ovviamente:

$$a = \mu - \delta \quad (1.7)$$

$$b = \mu + \delta \quad (1.8)$$

$$\alpha = \frac{3}{2\delta^2} \quad (1.9)$$

$$\beta = \mu \quad (1.10)$$

⁷Per una trattazione un po' più esaustiva vi rimando, come già detto, al sito di Wikipedia [7].

1.4 La terza (e definitiva) generalizzazione: il parametro α (potenza)

Nel dicembre 2007, poco prima di partire per l'Erasmus in Svezia⁸, il Ruzza arrivò dunque alla forma definitiva della variabile: dal momento che la distribuzione finora realizzata non consentiva di modificare il peso dato agli estremi, vincolato a una funzione di secondo grado (una parabola, infatti), il Ruzza ebbe l'idea di generalizzare questo peso con un terzo ulteriore parametro: la *potenza*.

Dopo questo lavoro, proteso alla continua ricerca della perfezione, la funzione di densità definitiva⁹ della distribuzione risultò essere¹⁰:

$$f(x; \mu, \delta, \alpha) = \frac{\alpha + 1}{2\delta^{\alpha+1}} |x - \mu|^\alpha \mathbb{I}_{(\mu-\delta, \mu+\delta)}(x), \quad \mu \in \mathbb{R}, \delta > 0, \alpha \geq 0 \quad (1.12)$$

$$\mathbb{I}_{(\mu-\delta, \mu+\delta)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [\mu - \delta, \mu + \delta] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

D'ora in poi diremo quindi che X si distribuisce come una U-power¹¹ di vertice μ , raggio δ e potenza α , in simboli:

$$X \sim Up(\mu, \delta, \alpha)$$

Si osservi la fig. 1.4 (entrambe le curve hanno media 2 e raggio 1.5): anche in

⁸Si veda la biografia dell'Inventore per maggiori dettagli: cap. 8 a pag. 69.

⁹In realtà la forma definitiva originariamente elaborata dal Ruzza, che è quella presente nel suo manoscritto, era:

$$f(x; \mu, \delta, \alpha) = \frac{2\alpha + 1}{2\delta^{2\alpha+1}} [(x - \mu)^2]^\alpha \mathbb{I}_{(\mu-\delta, \mu+\delta)}(x) \quad (1.11)$$

In questa trattazione abbiamo preferito “liberarci di tutti quei 2”, sostituendo la doppia parentesi (che serviva a evitare di ottenere una base negativa), con un più semplice ed elegante valore assoluto e raddoppiando il valore del parametro α .

¹⁰Per la verifica che questa distribuzione sia effettivamente una funzione di densità e che dunque essa integri a 1 nel suo dominio, si veda l'app. A.1 a pag. 73.

¹¹Oppure U di Ruzza, il nome che, come avevo già segnalato nella prefazione, il grande Inventore predilige.

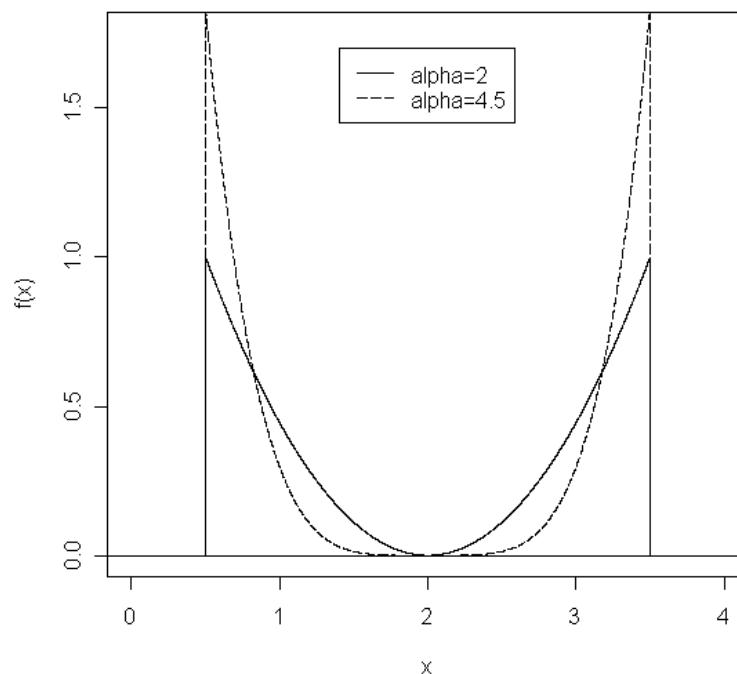


Figura 1.4: Effetto della potenza sulla funzione di densità.

questo caso l'effetto del parametro è abbastanza chiaro, infatti aumentando α rispetto al valore standard¹² 2, il peso dato agli estremi è sempre più grande e per α che tende a ∞ la densità si equiripartisce nei soli due estremi $\mu - \delta$ e $\mu + \delta$.

Per $\alpha < 2$, invece, si hanno dei casi che chiameremo degeneri¹³, in quanto le curve ottenute vanno contro la filosofia con cui fu inventata la distribuzione

¹²Ovviamente, con la distribuzione scritta nella forma del manoscritto del Ruzza, tale valore era 1, valore in parte più comodo per essere standard; in questa trattazione si è preferito però adottare questa nuova formulazione della densità per non appesantire la formula della stessa. Ad ogni modo il valore standard 2 ci ricorda che i pesi dati agli estremi nelle prime versioni della distribuzione sono vincolati a una curva di *secondo* grado.

¹³Casi che in realtà il Ruzza stesso, nel suo manoscritto, ha chiamato degeneri, anche se non si era premurato di soffermarsi sul quarto caso, quello in cui la potenza è nulla. Si veda [5] per vedere qual era la trattazione originale dei casi degeneri della distribuzione.

originale, per il fatto che fanno diminuire la densità agli estremi a favore dei valori centrali. Si osservi la fig. 1.5 (tutte le curve hanno media -1.5 e raggio 2):

- $1 < \alpha < 2$: per tali valori del parametro non accade niente di speciale se non che, appunto, gli estremi perdono densità a favore dei valori centrali; la funzione di densità, infatti, continua comunque ad essere derivabile nel suo supporto.
- $\alpha = 1$: in questo caso la curva degenera nella funzione valore assoluto (o in una sua trasformata); la densità perde quindi una desiderabile condizione di regolarità, in quanto non è più derivabile in tutto il suo supporto (si forma un punto angoloso nel vertice).
- $0 < \alpha < 1$: la situazione in questo caso è analoga al caso precedente; l'unica differenza rispetto a prima è che il punto angoloso viene sostituito da una cuspide; più α si avvicina a 0 e più “la valle intorno al vertice si stringe”.
- $\alpha = 0$: in quest'ultimo caso degenerare la U-power si riduce ad una distribuzione continua uniforme¹⁴ con $a = \mu - \delta$ e $b = \mu + \delta$ e, di conseguenza, con densità pari a $\frac{1}{2\delta}$.

In base a queste considerazioni α può essere senz'altro considerato un *parametro di forma*.

1.4.1 Principali caratteristiche della distribuzione U-power

Passiamo ora in rassegna tutte le principali caratteristiche della distribuzione generalizzata a tre parametri (alcune le abbiamo già viste).

¹⁴Eureka! Il Ruzza è riuscito perfino a generalizzare, seppur inconsapevolmente, l'uniforme!

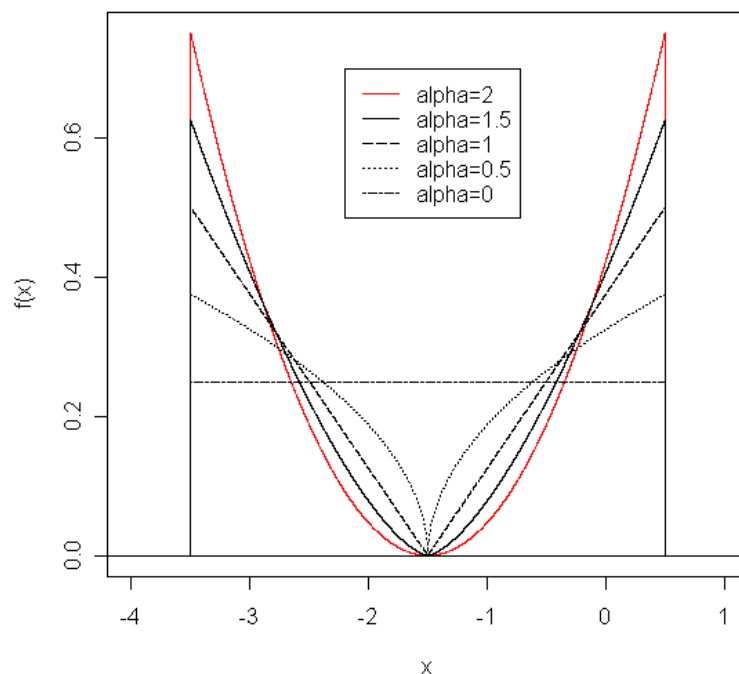


Figura 1.5: Casi degeneri.

Dominio

Il supporto della distribuzione coincide con l'intervallo $[\mu - \delta, \mu + \delta]$ e, ad essere pignoli, potremmo escludere anche il punto $y = \mu$, in quanto di densità nulla; di fatto lo lasceremo sempre indicato, perché non ci crea nessun problema e, oltretutto, come abbiamo già visto, nel caso degenero in cui $\alpha = 0$ si ottiene un'uniforme e il punto centrale assume densità non nulla¹⁵.

Parametri e spazio parametrico

Come già visto:

¹⁵C'è comunque da dire che volendo, considerando la funzione identificatrice, il dominio può essere esteso all'insieme intero dei numeri reali, ma questa considerazione sarebbe piuttosto banale e comunque varrebbe per ogni distribuzione di probabilità.

- $\mu \in \mathbb{R}$ (vertice): rappresenta il vertice della parabola e la media della distribuzione;
- $\delta > 0$ (raggio): rappresenta la lunghezza della semiampiezza del range;
- $\alpha \geq 0$ (potenza): è un parametro con cui può essere modificato il peso che viene dato agli estremi a favore/sfavore dei valori centrali.

Simbolo

$$X \sim Up(\mu, \delta, \alpha)$$

Funzione di densità

Come già visto:

$$f(x; \mu, \delta, \alpha) = \frac{\alpha + 1}{2\delta^{\alpha+1}} |x - \mu|^\alpha \mathbb{I}_{(\mu-\delta, \mu+\delta)}(x)$$

Oppure, alternativamente, per evidenziare la funzione dei parametri di posizione e di scala:

$$f(x; \mu, \delta, \alpha) = \frac{\alpha + 1}{2\delta} \left| \frac{x - \mu}{\delta} \right|^\alpha \mathbb{I}_{(\mu-\delta, \mu+\delta)}(x) \quad (1.13)$$

Facciamo notare, inoltre, che certamente la distribuzione non appartiene alla famiglia esponenziale, in quanto il dominio dipende da alcuni dei parametri (μ e δ).

Funzione di ripartizione

$$F(x; \mu, \delta, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \mu - \delta \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \mu) \left| \frac{x - \mu}{\delta} \right|^{\alpha+1} & \text{se } x \in (\mu - \delta, \mu + \delta) \\ 1 & \text{se } x \geq \mu + \delta \end{cases} \quad (1.14)$$

Dove, ovviamente, la funzione $\operatorname{sgn}(\cdot)$ restituisce il segno del suo argomento¹⁶.

¹⁶La funzione di ripartizione, calcolata così:

$$F(x) = \int_{\mu-\delta}^x f(t) dt \quad ,$$

In fig. 1.6 sono stati riportati i grafici della funzione di ripartizione per alcuni valori dei parametri (i parametri non indicati nella legenda hanno i valori della distribuzione standard); i tipi di effetti che ciascuno dei parametri esercita sulla funzione di ripartizione sembrano essere ben chiari.

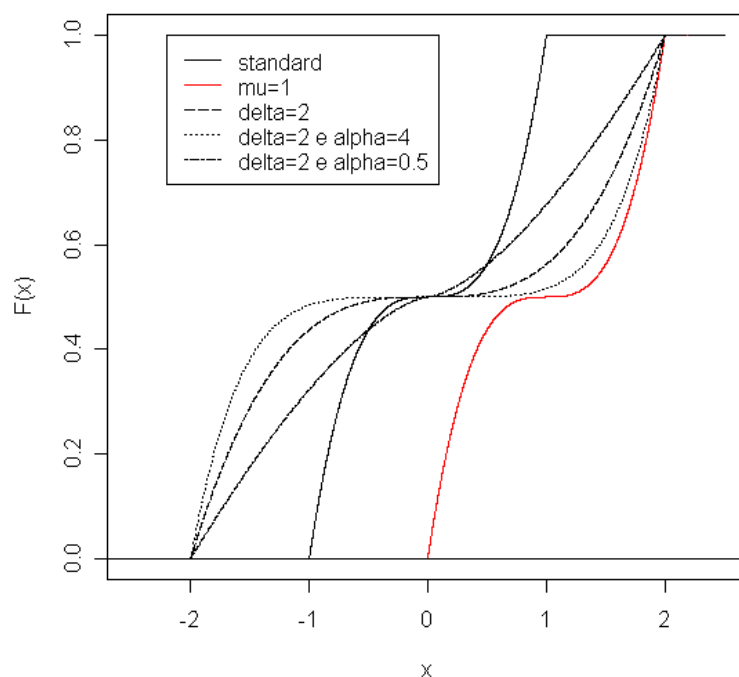


Figura 1.6: Comportamento della funzione di ripartizione.

intendendo con $f(t)$ la densità della distribuzione senza considerare la funzione indicatrice, avrebbe due espressioni diverse per alcuni segni a seconda del fatto che la si calcoli prima o dopo la media; questo deriva dal fatto che nella funzione di densità è presente un modulo che, una volta che questa viene integrata, va aperto diversamente a seconda dei due casi. In questa trattazione si è preferito utilizzare questa scrittura compatta, introducendo la funzione segno; la forma finale è anche abbastanza intuitiva, infatti se x è sopra la media, si aggiungerà della probabilità a 0.5, viceversa invece, se x è sotto la media, si dovrà togliere qualcosa a 0.5.

Si veda l'app. A.2 a pag. 74 per maggiori dettagli e per la dimostrazione della formula.

Funzione quantile

Questa distribuzione di probabilità è particolarmente fortunata, in quanto è possibile, come accade nella distribuzione Weibull¹⁷, per esempio, ricavarne la funzione quantile¹⁸, semplicemente invertendo la funzione di ripartizione:

$$Q(p; \mu, \delta, \alpha) = F^{-1}(p; \mu, \delta, \alpha) = \mu + \delta \operatorname{sgn} \left(p - \frac{1}{2} \right) \alpha^{+1} \sqrt{|2p - 1|} \quad (1.15)$$

Anche in questo caso ci serviamo, in modo analogo a prima, della funzione segno per compattare la forma della funzione in un'unica scrittura¹⁹. Ovviamente $p \in [0, 1]$, in quanto rappresenta la probabilità che lascia a sinistra il quantile che si desidera calcolare (x_p).

In fig. 1.7, analogamente a quanto fatto per la funzione di ripartizione, sono stati riportati i grafici della funzione quantile per alcuni valori dei parametri; anche in questo caso i tipi di effetti che ciascuno dei parametri esercita sulla funzione di ripartizione sembrano essere piuttosto chiari.

Momenti

Calcoliamo ora i momenti teorici della distribuzione; sia quelli non centrati che quelli centrati sono stati calcolati risolvendo degli integrali abbastanza semplici²⁰. Quelli centrati potrebbero anche essere ricavati a partire da quelli

¹⁷Si veda [3], lucidi 6, pag. 2.

¹⁸Ho parlato di fortuna, in quanto grazie alla funzione quantile sarà piuttosto facile ottenere una simulazione via inversione.

¹⁹Infatti se cerco un quantile con $p > 0.5$, aggiungerò qualcosa a μ , se invece $p < 0.5$, toglierò qualcosa a μ .

²⁰Ovviamente:

$$E(X^r) = \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} x^r f(x) dx$$

$$E[(X - \mu)^r] = \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} (x - \mu)^r f(x) dx$$

Per maggiori dettagli, in particolare per la dimostrazione delle formule di media e varianza, si veda l'app. A.3 a pag. 74.

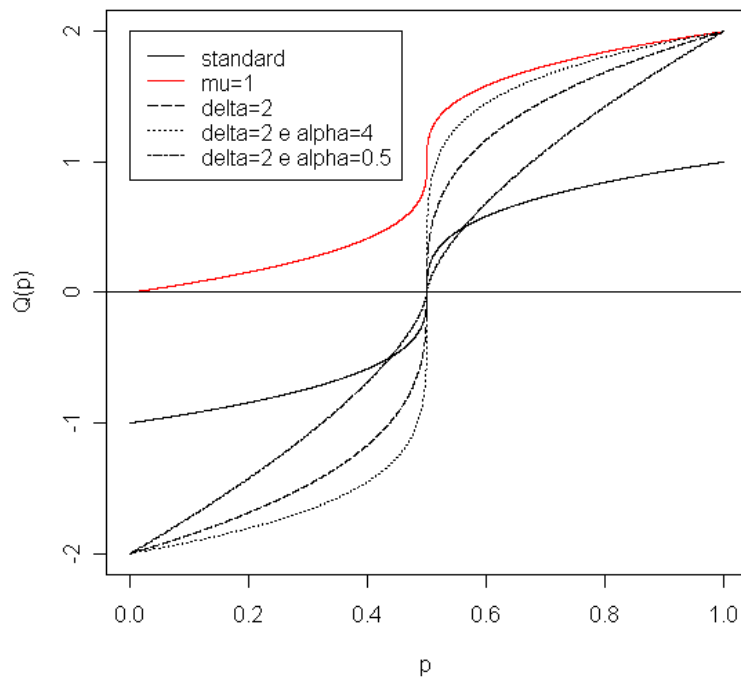


Figura 1.7: Comportamento della funzione quantile.

non centrati con una particolare formula²¹, ma risolvere l'integrale è, almeno in questo caso, nettamente più agevole:

Momenti non centrati

$$\text{Valore atteso: } E(X) = \mu_1 = \mu \quad (1.16)$$

$$E(X^2) = \mu_2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \delta^2 + \mu^2 \quad (1.17)$$

$$E(X^3) = \mu_3 = 3 \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \mu \delta^2 + \mu^3 \quad (1.18)$$

$$E(X^4) = \mu_4 = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 5} \delta^4 + 6 \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \mu^2 \delta^2 + \mu^4 \quad (1.19)$$

²¹Eccola:

$$E[(X - \mu)^r] = \bar{\mu}_r = \sum_{h=0}^r (-1)^h \binom{r}{h} \mu^h \mu_{r-h}$$

Più in generale²²:

$$E(X^r) = \mu_r = \begin{cases} \binom{r}{1} \frac{\alpha+1}{\alpha+r} \mu \delta^{r-1} + \binom{r}{3} \frac{\alpha+1}{\alpha+r-2} \mu^3 \delta^{r-3} + \\ + \dots + \binom{r}{r-2} \frac{\alpha+1}{\alpha+3} \mu^{r-2} \delta^2 + \binom{r}{r} \mu^r & \text{se } r \text{ è dispari} \\ \binom{r}{0} \frac{\alpha+1}{\alpha+r+1} \delta^r + \binom{r}{2} \frac{\alpha+1}{\alpha+r-1} \mu^2 \delta^{r-2} + \\ + \dots + \binom{r}{r-2} \frac{\alpha+1}{\alpha+3} \mu^{r-2} \delta^2 + \binom{r}{r} \mu^r & \text{se } r \text{ è pari} \end{cases} \quad (1.20)$$

Momenti centrati

$$\text{Be', ovviamente: } E[(X - \mu)] = \bar{\mu}_1 = 0 \quad (1.21)$$

$$\text{Varianza: } Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \bar{\mu}_2 = \frac{\alpha+1}{\alpha+3} \delta^2 \quad (1.22)$$

$$E[(X - \mu)^3] = \bar{\mu}_3 = 0 \quad (1.23)$$

$$E[(X - \mu)^4] = \bar{\mu}_4 = \frac{\alpha+1}{\alpha+5} \delta^4 \quad (1.24)$$

Più in generale:

$$E[(X - \mu)^r] = \bar{\mu}_r = \begin{cases} 0 & \text{se } r \text{ è dispari} \\ \frac{\alpha+1}{\alpha+r+1} \delta^r & \text{se } r \text{ è pari} \end{cases} \quad (1.25)$$

È interessante notare che la varianza²³ della distribuzione aumenta all'aumentare del raggio (risultato, comunque, piuttosto prevedibile, visto che il raggio gestisce il range della distribuzione e dunque la variabilità), e all'aumentare della potenza. La varianza della U-power standard è pari a $\frac{3}{5}$.

Asimmetria e curtosi Sono facilmente ricavabili dai momenti appena calcolati:

$$\gamma_1 = \frac{\bar{\mu}_3}{\sigma^3} = \frac{\bar{\mu}_3}{\mu_2^{3/2}} = 0 \quad (1.26)$$

²²Sapeste che fatica per trovare questa formulaccia...

²³Calcolabile, in modo molto più semplice, anche con la formula:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\gamma_2 = \frac{\bar{\mu}_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\bar{\mu}_4}{\bar{\mu}_2^2} - 3 = \frac{(\alpha + 3)^2}{(\alpha + 1)(\alpha + 5)} - 3 \quad (1.27)$$

Ovviamente una distribuzione U-power è perfettamente simmetrica. La curtosi, invece, dipende solo dalla potenza e diminuisce all'aumentare di questa (infatti, se è vero che all'aumentare di α aumenta la densità agli estremi, è anche vero che le code sono sempre più "strette"); ricordiamo, però, che non ha un gran significato calcolare la curtosi in una distribuzione bimodale.

Coefficiente di variazione

$$CV = \frac{\sigma}{|\mu|} = \frac{\delta}{|\mu|} \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha + 3}} \quad (1.28)$$

Mediana

Chiaramente μ , oltre a essere la media della distribuzione, ne è anche la mediana, a causa della simmetria della curva.

Moda

La distribuzione U-power è bimodale e le due mode corrispondono naturalmente ai punti di massimo della funzione di densità, ossia gli estremi del dominio: $\mu - \delta$ e $\mu + \delta$.

Capitolo 2

Stime dei parametri di una distribuzione U-power

In questo capitolo cercheremo soprattutto di capire come poter stimare i parametri a partire da un campionamento da una distribuzione U-power. Ci poniamo quindi nella situazione in cui abbiamo un campione y_1, y_2, \dots, y_n , composto da un insieme di realizzazioni di variabili casuali Y_1, Y_2, \dots, Y_n , con $Y_i \sim Up(\mu, \delta, \alpha)$ i.i.d.

2.1 Verosimiglianza e log-verosimiglianza

È abbastanza facile verificare che la funzione di verosimiglianza è:

$$L(y_i; \mu, \delta, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \mu, \delta, \alpha) = \left(\frac{\alpha + 1}{\delta^{\alpha+1}}\right)^n \prod_{i=1}^n |y_i - \mu|^\alpha \quad (2.1)$$

E, di conseguenza, quella di log-verosimiglianza è:

$$\ell(y_i; \mu, \delta, \alpha) = \sum_{i=1}^n \ln f(y_i; \mu, \delta, \alpha) = \alpha \sum_{i=1}^n \ln |y_i - \mu| + n \ln \frac{\alpha + 1}{\delta^{\alpha+1}} \quad (2.2)$$

Si può verificare facilmente che gli argomenti dei logaritmi non creano nessun conflitto con il supporto della distribuzione, infatti:

- $\frac{\alpha + 1}{\delta^{\alpha+1}} > 0$ per qualsiasi valore di δ e α ;

- $|y_i - \mu| > 0$ quando $y_i \neq \mu$, ossia sempre, dal momento che il vertice ha densità nulla; l'unica eccezione è il caso degenere in cui la distribuzione si riduce ad un'uniforme, ma in questo caso $\alpha = 0$ e dunque il termine che contiene il logaritmo si azzerava.

2.2 Proposte di stimatori

Si propongono ora tre vie che abbiamo tentato di intraprendere per ottenere dei buoni stimatori dei parametri.

2.2.1 Stimatori di massima verosimiglianza

La via tradizionale della stima di massima verosimiglianza è difficilmente praticabile, in quanto essa deriva da una funzione di densità il cui dominio dipende da alcuni dei parametri, il che comporta la presenza nella verosimiglianza (e nella log-verosimiglianza, naturalmente) di una funzione indicatrice (che non abbiamo riportato nelle formule 2.1 e 2.2); le condizioni di regolarità sotto le quali è valida la teoria asintotica dell'inferenza non sono quindi verificate, dato che la verosimiglianza non è regolare. Di fatto questa distribuzione di probabilità ha lo stesso problema che ha la distribuzione uniforme¹, per esempio. Per cui se provassimo² a calcolare le tre derivate prime parziali della funzione di log-verosimiglianza così come l'abbiamo scritta, rispetto ai parametri della distribuzione, ponendo le derivate uguali a 0, troveremo equazioni irrisolvibili, indeterminate o comunque con risultati insensati (per esempio risulterebbe $\hat{\alpha} = -1!$).

Non tutto è perduto, però, in quanto potremmo provare a stimare in una maniera sensata i parametri da cui dipende il dominio (μ e δ) e ricavarci poi una stima di α massimizzando la log-verosimiglianza condizionatamente alle stime di μ e δ trovate, come vedremo fra poco.

¹Non per niente abbiamo visto in precedenza che la U-power può essere considerata una generalizzazione dell'uniforme. . .

²Come ho sperimentato sulla mia pelle per redigere questa tesi. . .

2.2.2 Stimatori ottenuti con il metodo dei momenti

Anche la via del metodo dei momenti sembra presentare qualche problema, in quanto la terza equazione (quella che eguaglia il momento terzo teorico al momento terzo campionario) diventa una specie di identità una volta che, in essa, ad α viene sostituita l'espressione ricavata dalla seconda equazione.

Anche in questo caso, comunque, potremmo ricavarci una stima sensata di δ , (μ in questo caso non ha problemi, in quanto banalmente stimabile dalla prima equazione del metodo) e utilizzare poi la seconda equazione per stimare α .

2.2.3 Stimatori ricavati “a buon senso”

A causa di tutti i problemi rilevati nella stima con i due metodi tradizionali, si è pensato di stimare i parametri in questo modo, secondo le idee che abbiamo appena esposto:

- μ viene stimato con la semplice media campionaria (il che è abbastanza logico e oltretutto deriva anche banalmente dalla prima equazione del metodo dei momenti³) o, alternativamente, con il punto centrale del range della distribuzione campionaria;
- δ viene stimato in modo “sensato”: si prende, in valore assoluto, la distanza massima dei dati dalla stima di μ ;
- α viene ricavato sostituendo le stime degli altri due parametri nella seconda equazione del metodo dei momenti⁴ o, alternativamente, nella

3

$$E(X) = \bar{y}$$

4

$$E(X^2) = \bar{s}^2 + \bar{y}^2$$

terza equazione del metodo della massima verosimiglianza⁵;

Abbiamo quindi, almeno inizialmente, alcune alternative nella scelta degli stimatori:

- per la stima di μ :

$$\hat{\mu} = \bar{y} \quad (2.3)$$

$$\text{oppure: } \hat{\mu} = \frac{\min\{y_i\} + \max\{y_i\}}{2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

- per la stima di δ :

$$\hat{\delta} = \max\{|y_i - \hat{\mu}|\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

- per la stima⁶ di α :

$$\hat{\alpha} = \frac{3\bar{s}^2 - \hat{\delta}^2}{\hat{\delta}^2 - \bar{s}^2} \quad (2.6)$$

$$\text{oppure: } \hat{\alpha} = \frac{n}{n \log \hat{\delta} - \sum_{i=1}^n \log |y_i - \hat{\mu}|} - 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

Dove $\bar{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ è la varianza campionaria (non corretta).

Dal momento che è praticamente impossibile valutare analiticamente le proprietà di questi stimatori (correttezza, efficienza e consistenza), se non nel caso banale della stima di μ con la media campionaria, abbiamo cercato di scegliere l'una o l'altra alternativa con qualche simulazione⁷, da cui si vede che gli stimatori migliori sotto ogni profilo, o quasi, sono senza dubbio il 2.4 per μ , il 2.5 in cui si stima μ con il 2.4 per δ ; qualche certezza in meno la si ha sulla scelta dello stimatore per α , ma alla fine sembra che il migliore sia il 2.7.

⁵

$$\frac{\partial \ell(y_i; \mu, \delta, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

⁶Per le dimostrazioni si vedano le app. A.4 e A.5 a pag. 76.

⁷Si veda la parte di R: sez. 4.5 a pag. 45.

Di conseguenza questi tre stimatori, d'ora in avanti, saranno dichiarati gli stimatori ufficiali⁸ dei parametri della distribuzione U-power:

$$\hat{\mu} = \frac{\min\{y_i\} + \max\{y_i\}}{2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

$$\hat{\delta} = \max\{|y_i - \hat{\mu}|\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{n \log \hat{\delta} - \sum_{i=1}^n \log |y_i - \hat{\mu}|} - 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

⁸Ovviamente non ho nulla in contrario al fatto che possiate svilupparne dei vostri, magari migliori di questi.

Capitolo 3

Una variante asimmetrica della distribuzione U-power

Per ogni variabile simmetrica è sicuramente possibile crearne una corrispondente asimmetrica; quest'idea fu brevettata per la prima volta da A. Azzalini¹ nel 1985² per la distribuzione normale e consiste nel ricostruire una nuova distribuzione X con la seguente funzione di densità:

$$g(x) = 2\phi(x)\Phi(\gamma x), \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Dove $\phi(x)$ è la funzione di densità di una normale standardizzata valutata in x e $\Phi(\gamma x)$ è la funzione di ripartizione della normale standardizzata valutata nel punto γx . La distribuzione ottenuta viene poi generalizzata rispetto ai parametri di posizione (la media μ) e di scala (la varianza σ^2):

$$Y = \mu + \sigma X \quad (3.2)$$

Si potrà dunque dire che la variabile Y ha distribuzione normale asimmetrica di parametri μ , σ^2 e γ ; in simboli:

$$Y \sim SN(\mu, \sigma^2, \gamma)$$

¹È un illustre docente del Dipartimento di Scienze Statistiche di Padova.

²Si veda [1].

Un ragionamento analogo può essere attuato con la distribuzione U-power; basterà costruire una nuova variabile con la seguente funzione di densità:

$$g(x; \mu, \delta, \alpha, \gamma) = 2 f(x; \mu, \delta, \alpha) F\left(\gamma \frac{x - \mu}{\delta}; 0, 1, \alpha\right) \quad (3.3)$$

Dove $f(\cdot)$ e $F(\cdot)$ sono rispettivamente la funzione di densità e di ripartizione di una distribuzione U-power; la densità della variante asimmetrica della distribuzione U-power risulta essere dunque³:

$$g(x; \mu, \delta, \alpha, \gamma) = \frac{\alpha + 1}{2\delta^{\alpha+1}} |x - \mu|^\alpha + |\gamma|^{\alpha+1} \operatorname{sgn}[\gamma(x - \mu)] \frac{\alpha + 1}{2\delta^{2\alpha+2}} |x - \mu|^{2\alpha+1} \quad (3.4)$$

In fig. 3.1 sono riportati alcuni esempi di grafici di densità di distribuzioni U-power asimmetriche. Il ruolo del parametro γ , che regola il tipo di forma asimmetrica della distribuzione, è di facile individuazione:

- $\gamma \rightarrow -\infty$: la curva tende a diventare una specie di semiparabola sinistra, perdendo tutta la densità a destra;
- $\gamma < 0$: la curva ha un'asimmetria verso sinistra (la “gobba” di sinistra è più alta di quella di destra);
- $\gamma = 0$: la curva coincide con la solita distribuzione simmetrica U-power di vertice 0, raggio δ e potenza α .
- $\gamma > 0$: la curva ha un'asimmetria verso destra (la “gobba” di destra è più alta di quella di sinistra);
- $\gamma \rightarrow \infty$: la curva tende a diventare una specie di semiparabola destra, perdendo tutta la densità a sinistra.

In generale, dunque, maggiore è γ in valore assoluto, e più evidente è l'asimmetria della distribuzione: verso destra se $\gamma > 0$, verso sinistra se $\gamma < 0$; di fatto, quindi, il parametro di asimmetria agisce come una sorta di “manopola che travasa a destra o a sinistra della media la probabilità”.

³Per la verifica del fatto che essa sia effettivamente una funzione di densità e che dunque integri a 1 nel suo dominio, si veda l'app. A.6 a pag. 77.

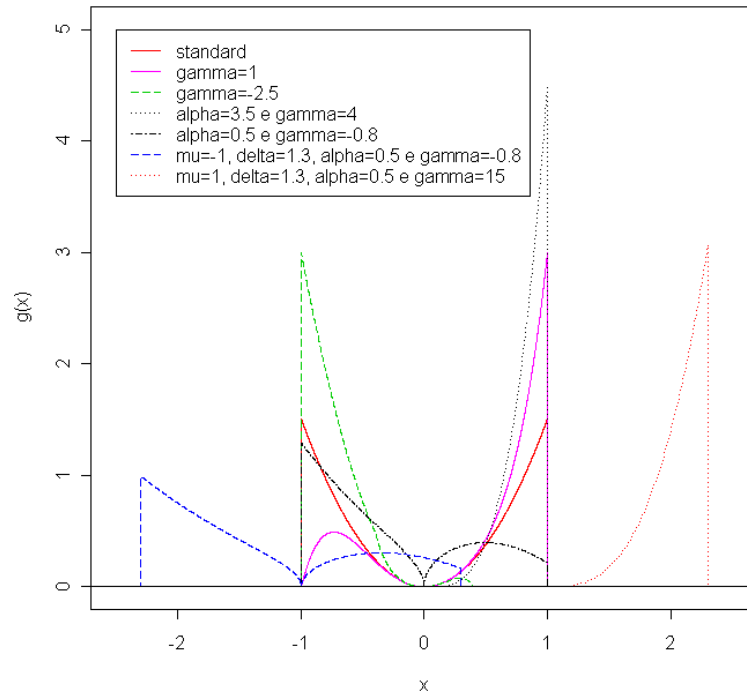


Figura 3.1: Alcuni esempi di distribuzione U-power asimmetrica.

Questa volta non abbiamo riportato la funzione indicatrice nella densità per non appesantire la scrittura, ma è chiaro che il dominio della versione asimmetrica della distribuzione è ancora $[\mu - \delta, \mu + \delta]$.

Capitolo 4

Implementazione in R di alcune funzioni per l'analisi della distribuzione

In questo capitolo verranno illustrate le funzioni di R che ho implementato per permettere lo studio della distribuzione¹; i nomi si ispirano a quelli delle funzioni caratteristiche delle altre variabili casuali già conosciute da R.

4.1 Le funzioni di base

4.1.1 La funzione dU

```
> dU<-function(x,mu=0,delta=1,alpha=2) {  
+ if ((delta<=0)|(alpha<0))  
+ stop("delta deve essere positivo \ne alpha non negativo!")  
+ I<-ifelse(abs(x-mu)<=delta,1,0)  
+ I*(alpha+1)/(2*delta^(alpha+1))*(abs(x-mu))^alpha  
+ }
```

¹I grafici delle funzioni di densità, ripartizione e quantile, riportati in precedenza, sono stati realizzati utilizzando queste stesse funzioni.

Questa funzione, come si può vedere dal programmino scritto per implementarla, calcola il valore della densità di una distribuzione U-power di vertice μ , raggio δ e potenza α in un certo punto (o vettore di punti) x . Come valori di default per i parametri sono stati impostati quelli della U-power standard ($\mu = 0$, $\delta = 1$, $\alpha = 2$).

Come si può notare dalla terza riga della funzione, se vengono inseriti valori dei parametri incompatibili con lo spazio parametrico, la funzione (come anche le prossime che seguiranno) restituisce un messaggio di errore. Riportiamo di seguito alcuni esempi di applicazione:

```
> dU(0)
[1] 0
> dU(1)
[1] 1.5
> dU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,0)
[1] 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667
[7] 0.1666667
> dU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,0.5)
[1] 0.2500000 0.2041241 0.1443376 0.0000000 0.1443376 0.2041241
[7] 0.2500000
> dU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,1.5)
[1] 0.4166667 0.22680461 0.08018754 0.00000000 0.08018754
[6] 0.22680461 0.4166667
> dU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,2.5)
[1] 0.58333333 0.21168430 0.03742085 0.00000000 0.03742085
[6] 0.21168430 0.58333333
> dU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,5.5)
[1] 1.083333333 0.116482365 0.002573921 0.000000000 0.002573921
[6] 0.116482365 1.083333333
> dU(1,2,-3,5.5)
Errore in dU(1, 2, -3, 5.5) : delta deve essere positivo
e alpha non negativo!
```

4.1.2 La funzione pU

```
> pU<-function(x,mu=0,delta=1,alpha=2) {
+ if ((delta<=0)|(alpha<0))
+ stop("delta deve essere positivo \ne alpha non negativo!")
+ ifelse(x>mu+delta,1,ifelse(abs(x-mu)<=delta,
+ 0.5+0.5*sign(x-mu)*abs((x-mu)/delta)^(alpha+1),0))
+ }
```

Questa funzione, invece, calcola i valori della ripartizione di una distribuzione U-power in un vettore di punti x ; i parametri (con i relativi valori di default), sono ovviamente gli stessi della precedente funzione. Ecco alcuni esempi di applicazione:

```
> pU(0)
[1] 0.5
> pU(1)
[1] 1
> pU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,0)
[1] 0.0000000 0.1666667 0.3333333 0.5000000 0.6666667 0.8333333
[7] 1.0000000
> pU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,0.5)
[1] 0.0000000 0.2278345 0.4037750 0.5000000 0.5962250 0.7721655
[7] 1.0000000
> pU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,1.5)
[1] 0.0000000 0.3185563 0.4679250 0.5000000 0.5320750 0.6814437
[7] 1.0000000
> pU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,2.5)
[1] 0.0000000 0.3790375 0.4893083 0.5000000 0.5106917 0.6209625
[7] 1.0000000
> pU(c(-1,0,1,2,3,4,5),2,3,5.5)
[1] 0.0000000 0.4641593 0.4996040 0.5000000 0.5003960 0.5358407
[7] 1.0000000
```

4.1.3 La funzione qU

```
> qU<-function(p,mu=0,delta=1,alpha=2) {
+ if ((delta<=0)|(alpha<0))
+ stop("delta deve essere positivo \ne alpha non negativo!")
+ ifelse(p<=1 & p>=0,
+ mu+delta*sign(p-0.5)*(abs(2*p-1))^(1/(alpha+1)),NaN)
+ }
```

Questa terza funzione fa esattamente l'opposto della precedente: in corrispondenza di una certa probabilità (o di un vettore di probabilità) p , calcola il quantile q_p di una distribuzione U-power. Ecco alcuni esempi di applicazione:

```
> qU(0)
[1] -1
> qU(0.5)
[1] 0
> qU(1)
[1] 1
> qU(1.5)
[1] NaN
> qU(-0.5)
[1] NaN
> qU(c(0,0.25,0.5,0.75,1),2,3,0)
[1] -1.0 0.5 2.0 3.5 5.0
> qU(c(0,0.25,0.5,0.75,1),2,3,0.5)
[1] -1.0000000 0.1101184 2.0000000 3.8898816 5.0000000
> qU(c(0,0.25,0.5,0.75,1),2,3,1.5)
[1] -1.0000000 -0.2735748 2.0000000 4.2735748 5.0000000
> qU(c(0,0.25,0.5,0.75,1),2,3,2.5)
[1] -1.0000000 -0.4610061 2.0000000 4.4610061 5.0000000
> qU(c(0,0.25,0.5,0.75,1),2,3,5.5)
[1] -1.0000000 -0.6965529 2.0000000 4.6965529 5.0000000
```

4.1.4 La funzione rU

```
> rU<-function(n,mu=0,delta=1,alpha=2) {  
+ if ((delta<=0)|(alpha<0))  
+ stop("delta deve essere positivo \ne alpha non negativo!")  
+ qU(runif(n),mu,delta,alpha)  
+ }
```

Quest'ultima funzione simula un campionamento di n osservazioni indipendenti da una distribuzione U-power. Come si era già detto in precedenza (ricordate che parlavo di fortuna riguardo all'ottenere analiticamente la funzione quantile?), per la simulazione si può sfruttare la tecnica dell'inversione della funzione di ripartizione², che consiste semplicemente nell'applicare $F^{-1}(x) = Q(x)$ a n estrazioni da una variabile casuale uniforme "standard" ($a = 0, b = 1$). Anche in questo caso, riportiamo alcuni esempi di applicazione:

```
> rU(5)  
[1] -0.3889484 -0.8610146  0.9139729 -0.9508489 -0.8978317  
> rU(5,2)  
[1] 2.810955 2.545044 1.238497 1.216059 1.034011  
> rU(5,2,0.5)  
[1] 1.651834 1.611329 2.462108 1.694192 1.520728  
> rU(5,2,2,10)  
[1] 0.11258782 3.86443160 0.01893469 3.83377935 0.18359357  
> aa<-rU(10000,1,2,4)  
> hist(aa,nc=50)
```

²E quindi la funzione quantile.

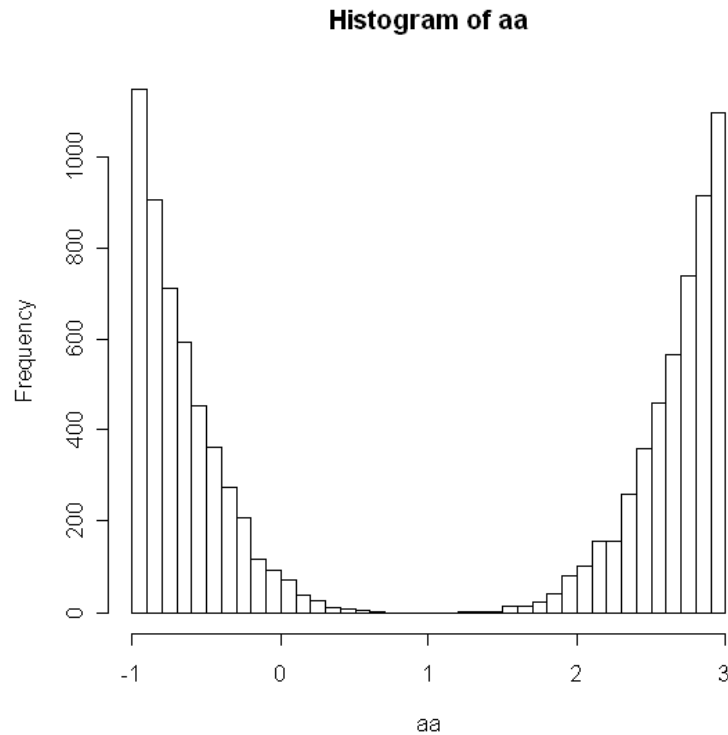


Figura 4.1: Istogramma di un vettore simulato dalla distribuzione U-power.

4.2 Un paio di funzioni per la verifica dell'adattamento

4.2.1 La funzione qqU

Questa funzione produce un grafico quantile-quantile per verificare l'adattamento di un vettore di dati alla distribuzione U-power:

```
qqU<-function(y,mu=0,delta=1,alpha=2,xlab="Quantili teorici",
              ylab="Quantili campionari",main="QQ-plot") {
  if ((delta<=0)|(alpha<0))
    stop("delta deve essere positivo \ne alpha non negativo!")
  qqplot(sapply(ppoints(y),function(x) qU(x,mu,delta,
    alpha)),
```



```
sort(y),xlab=xlab,ylab=ylob,main=main)
}
```

Ecco alcuni esempi:

```
> a<-rU(1000)
> b<-rU(1000,2)
> c<-rU(1000,2,0.5)
> d<-rU(1000,2,2,10)
> e<-rU(1000,2,2,0.5)
> f<-rU(1000,2,2,0)
> par(mfrow=c(2,3))
> qqU(a,main="Standard")
> qqU(b,2,main="mu=2")
> qqU(c,2,1.5,0,main="mu=2, delta=1.5 e alpha=0")
> qqU(d,2,1.5,1,main="mu=2, delta=1.5 e alpha=1")
> qqU(e,2,1.5,main="mu=2 e delta=1.5")
> qqU(f,2,1.5,5,main="mu=2, delta=1.5 e alpha=5")
```

Si osservi la figura 4.2: a cosa è dovuta quella specie di “gobba” che si forma nei quantili centrali e che pare aumentare di importanza al crescere di α ? È evidente che nel grafico quantile-quantile per l’adattamento ad una distribuzione U-power c’è un problema di fondo: il grafico infatti è basato sul confronto fra quantili teorici e quantili campionari e questa differenza esplose quando si è vicini al vertice, in cui la densità è nulla; infatti anche il grafico della funzione quantile³ presenta in corrispondenza del vertice un punto di non derivabilità (derivata infinita) e nei punti vicini la funzione è “sempre meno derivabile” all’aumentare di α .

Di fatto anche la distribuzione normale incorre in un problema analogo, seppur in misura notevolmente limitata, per il fatto che i quantili teorici 0 e 1 corrisponderebbero, rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$; è proprio per questo

³Si torni alla fig. 1.7 a pag. 20 per rivederne la forma.

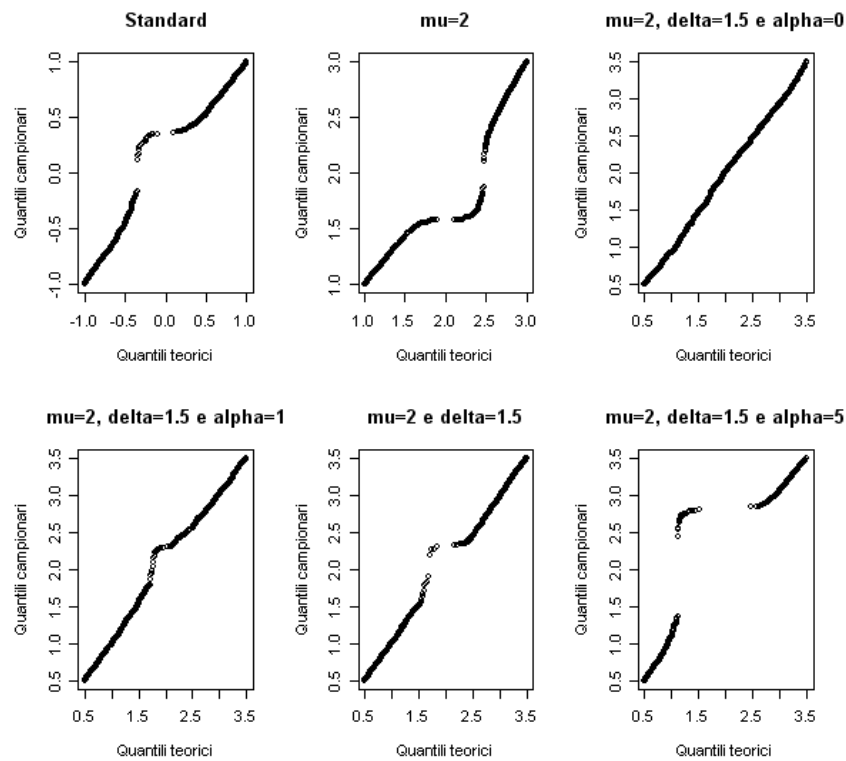


Figura 4.2: Q-Q plot di alcuni vettori simulati dalla distribuzione U-power.

motivo che le code di un grafico q-q plot per la verifica dell'adattamento alla normale non sono mai perfettamente adagate sulla retta bisettrice.

Dal momento, quindi, che nella distribuzione U-power incorriamo in questo problema nel tracciare un grafico q-q plot, ci creiamo una funzione che disegni il grafico p-p plot che, invece, non ha alcun problema di fondo.

4.2.2 La funzione ppU

Ed ecco la funzione che può fare al caso nostro:

```
> ppU<-function(y,mu=0,delta=1,alpha=2,xlab="Ripartizione
+   empirica",ylab="Ripartizione teorica",
+   main="PP-plot") {
+   if ((delta<=0)|(alpha<0))
```

```

+ stop("delta deve essere positivo \ne alpha non negativo!")
+ plot(ppoints(y),pU(sort(y),mu,delta,alpha),
+      xlab=xlab,ylab=ylob,main=main)
+ abline(0,1,col=2)
+ }

```

Mettiamola alla prova:

```

> aa<-rU(1000)
> bb<-rU(1000,2,1.5,4)
> cc<-rU(1000,2,1.5,0.7)
> par(mfrow=c(1,3))
> ppU(aa,main="Standard")
> ppU(bb,2,1.5,4,main="mu=2, delta=1.5 e alpha=4")
> ppU(cc,2,1.5,0.7,main="mu=2, delta=1.5 e alpha=0.7")

```

Questa volta, come si può notare in fig. 4.3, non ci sono problemi di alcun genere e la funzione può dunque essere un valido strumento per verificare l'adattamento di alcuni dati alla distribuzione U-power.

4.2.3 La funzione `ks.U.test`

La seguente funzione produce un test (quello di Kolmogorov-Smirnov) utile per verificare l'adattamento alla nostra distribuzione⁴:

```

> ks.U.test<-function(y,mu=0,delta=1,alpha=2) {
+   if ((delta<=0)|(alpha<0))
+   stop("delta deve essere positivo \ne alpha non negativo!")

```

⁴Dobbiamo, però, specificare interamente la distribuzione (in tutti e tre i suoi parametri, quindi) con cui confrontare la funzione di ripartizione empirica; sarebbe meglio implementare un test per verificare l'adattamento globale ad una distribuzione U-power, ma non è di facile realizzazione e oltretutto è anche vero che basta una semplice analisi grafica per ricavare una stima molto buona dei veri μ e δ da cui provengono i dati; bisogna poi provare il test per diversi valori plausibili di α , magari aiutandosi anche con i grafici delle distribuzioni teoriche per capire che valore potrebbe assumere tale parametro.

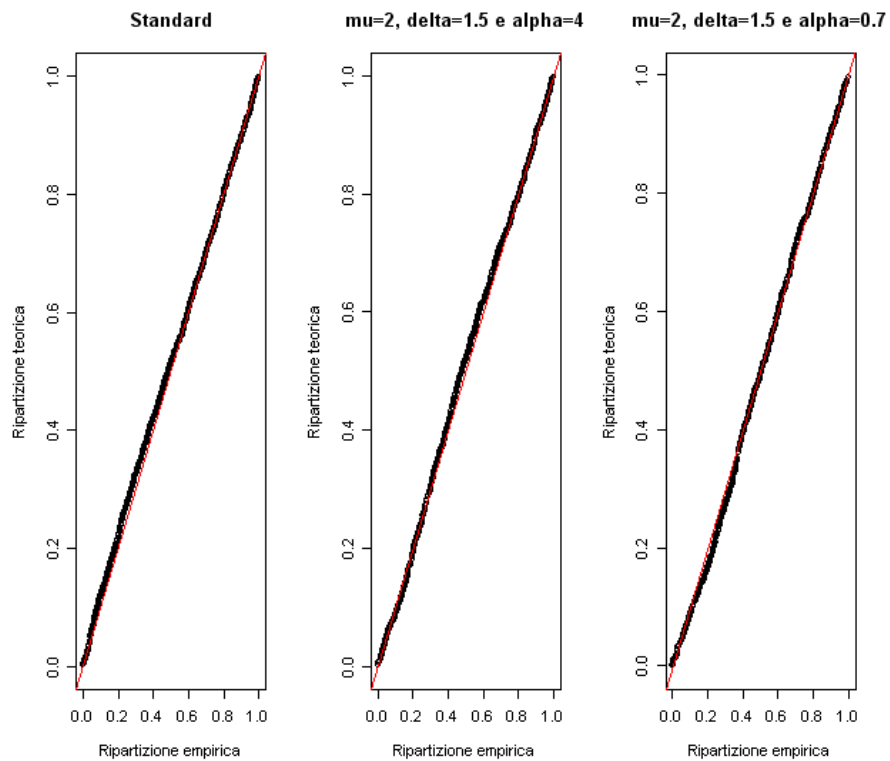


Figura 4.3: P-P plot di alcuni vettori simulati dalla distribuzione U-power.

```
+ ks.test(y, "pU", mu, delta, alpha)
+ }
```

Ecco alcuni esempi di applicazione del test: solo per il primo presentiamo l'output completo, degli altri riportiamo solo il p-value, arrotondato alla sesta cifra decimale:

```
> g<-rU(1000, -1, 2, 4)
> ks.U.test(g, -1, 2, 4)
```

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: y
D = 0.0226, p-value = 0.6854
```

```
alternative hypothesis: two.sided
```

```
> round(ks.U.test(g,-0.98,2,4)$p.value,6)
[1] 0.151557
> round(ks.U.test(g,-1.2,2,4)$p.value,6)
[1] 0
> round(ks.U.test(g,-1,1.9,4)$p.value,6)
[1] 0
> round(ks.U.test(g,-1,2.03,4)$p.value,6)
[1] 0.077165
> round(ks.U.test(g,-1,2,3.5)$p.value,6)
[1] 0.344794
> round(ks.U.test(g,-1,2,4.5)$p.value,6)
[1] 0.080756
> round(ks.U.test(g,-1.02,2.01,4.05)$p.value,6)
[1] 0.065961
```

A giudicare da questi primi risultati il test sembrerebbe funzionare abbastanza bene, in quanto sembra essere abbastanza sensibile dove ce n'è bisogno e meno dove è meno necessario: in particolare è confortante vedere come il p-value sia 0, quando nell'ipotesi nulla si verifica che δ sia più piccolo, anche di poco, del vero δ (è chiaro che il vero raggio non può certamente essere minore della semiampiezza del range campionario); bisognerebbe, però, per avere qualche certezza in più sulla validità del test, provare con vettori simulati che hanno tutti i tipi di combinazioni possibili di parametri; in questo caso, infatti, i test sono stati condotti su un vettore di 1000 osservazioni, simulato da una distribuzione U-power di vertice -1 , raggio 2 e potenza 4, ma bisognerebbe provare anche a manipolare i parametri del vettore simulato.

Giusto per avere qualche conferma in più, riportiamo un'altra serie di test analoghi calcolati, però, a partire da un altro vettore simulato:

```
> h<-rU(1000,3,1,0.9)
> round(ks.U.test(h,3,1,0.9)$p.value,6)
```

```

[1] 0.651794
> round(ks.U.test(h,3.1,1,0.9)$p.value,6)
[1] 0
> round(ks.U.test(h,2.98,1,0.9)$p.value,6)
[1] 0.113918
> round(ks.U.test(h,3,1.2,0.9)$p.value,6)
[1] 0
> round(ks.U.test(h,3,0.9,0.9)$p.value,6)
[1] 0
> round(ks.U.test(h,3,1,1)$p.value,6)
[1] 0.911927
> round(ks.U.test(h,3,1,0.97)$p.value,6)
[1] 0.924909
> round(ks.U.test(h,3.02,1.01,1.1)$p.value,6)
[1] 0.087775

```

I risultati ci fanno comunque ben sperare e ci suggeriscono che utilizzare il test di Kolmogorov-Smirnov per verificare l'adattamento alla distribuzione U-power può andare tranquillamente bene.

4.3 La distribuzione asimmetrica: la funzione dsU

La seguente funzione calcola il valore della densità della versione asimmetrica⁵ della distribuzione U-power in un certo punto (o in vettore di punti) x :

```

> dsU<-function(x,mu=0,delta=1,alpha=2,gamma=0) {
+ 2*dU(x,mu,delta,alpha)*pU(gamma*(x-mu)/delta,0,1,alpha)
+ }

```

⁵La "s" del nome della funzione sta per *skew*, asimmetrico.

4.4 Una funzione per la verifica del teorema del limite centrale: la funzione `tlc.U`

```
> tlc.U<-function(mu=0,delta=1,alpha=2,n=50,B=1000,nc=50,
+               main="") {
+ k<-matrix(double(n*B),n,B)
+ for (i in 1:B) {
+ k[,i]<-rU(n,mu,delta,alpha)
+ }
+ m<-apply(k,2,mean)
+ h<-hist(m,nc=nc,xlab="",main=main)
+ invisible(h)
+ shapiro.test(m)
+ }
```

La funzione precedente è stata implementata per permetterci di indagare sulla numerosità minima a partire dalla quale è verificato il teorema del limite centrale, nel caso della media campionaria calcolata su un campione proveniente da una distribuzione U-power; la funzione, dopo aver effettuato B simulazioni di n campioni, restituisce un test di normalità (quello di Shapiro-Wilk) e un istogramma della media campionaria⁶.

4.5 Alcune funzioni per la stima dei parametri

4.5.1 Le funzioni per il calcolo delle stime

```
> mu.hat.1<-function(y) mean(y)

> mu.hat.2<-function(y) (max(y)+min(y))/2
```

⁶Per le applicazioni di questa funzione, si veda la sez. 5.2 a pag. 59.

```
> delta.hat<-function(y,i=2) {
+   if (i==1)
+     m<-max(abs(y-mu.hat.1(y)))
+   if (i==2)
+     m<-max(abs(y-mu.hat.2(y)))
+   m
+ }

> alpha.hat.mom<-function(y,i=2) {
+   n<-length(y)
+   var.smv<-var(y)*(n-1)/n
+   (3*var.smv-delta.hat(y,i)^2)/(delta.hat(y,i)^2-var.smv)
+ }

> alpha.hat.log<-function(y,i=2) {
+   n<-length(y)
+   if (i==1)
+     a<-n/(n*log(delta.hat(y,i))-sum(log(abs(y-mu.hat.1(y))))
+     )-1
+   if (i==2)
+     a<-n/(n*log(delta.hat(y,i))-sum(log(abs(y-mu.hat.2(y))))
+     )-1
+   a
+ }
```

Le sei funzioni precedenti calcolano, a partire da un vettore di dati, le stime dei parametri della distribuzione U-power in tutti e otto⁷ i modi che avevamo proposto in precedenza⁸.

⁷Due per μ , due per δ e quattro per α , con quattro possibili combinazioni di stimatori.

⁸Nel caso di un vuoto di memoria, si torni alla sottosez. 2.2.3 a pag. 25 per rinfrescarsi le idee.

4.5.2 Una funzione per stimare tutto insieme...

Le funzioni della sottosezione precedente sono propedeutiche alla successiva, la quale, per ogni tipo di stimatore, ne calcola una stima del valore atteso, dell'errore standard, dell'errore quadratico medio e un intervallo di confidenza⁹ per il valore atteso; inoltre, sempre per ognuno degli stimatori, fornisce un istogramma della distribuzione campionaria:

```
> stima.prel.par.U<-function(mu=0,delta=1,alpha=2,n=50,
+                             B=1000,p=0.05,r=4,nc=50) {
+   M<-matrix(double(n*B),n,B)
+   for (i in 1:B) {
+     M[,i]<-rU(n,mu,delta,alpha)
+   }
+   m1<-apply(M,2,mu.hat.1)
+   m2<-apply(M,2,mu.hat.2)
+   d1<-apply(M,2,delta.hat,i=1)
+   d2<-apply(M,2,delta.hat,i=2)
+   a1mom<-apply(M,2,alpha.hat.mom,i=1)
+   a1log<-apply(M,2,alpha.hat.log,i=1)
+   a2mom<-apply(M,2,alpha.hat.mom,i=2)
+   a2log<-apply(M,2,alpha.hat.log,i=2)
+   K<-data.frame(m1,m2,d1,d2,a1mom,a1log,a2mom,a2log)
+   Par.veri<-c(rep(mu,2),rep(delta,2),rep(alpha,4))
+   Medie<-apply(K,2,mean)
+   SE<-apply(K,2,sd)
+   Lim.inf<-apply(K,2,quantile,prob=p/2)
+   Lim.sup<-apply(K,2,quantile,prob=1-p/2)
+   MSE<-(Par.veri-Medie)^2+SE^2
+   D<-data.frame(Par.veri,Medie,SE,Lim.inf,Lim.sup,MSE)
+   rownames(D)<-c("mu I","mu II","delta I","delta II",
```

⁹Ottenuto con il metodo dei percentili.

```

+           "alpha.mom I","alpha.log I",
+           "alpha.mom II","alpha.log II")
+ h1<-hist(m1,nc=nc,xlab="mu.hat",main="mu I")
+ h2<-hist(m2,nc=nc,xlab="mu.hat",main="mu II")
+ h3<-hist(d1,nc=nc,xlab="delta.hat",main="delta I")
+ h4<-hist(d2,nc=nc,xlab="delta.hat",main="delta II")
+ h5<-hist(a1mom,nc=nc,xlab="alpha.hat",main="alpha.mom I")
+ h6<-hist(a1log,nc=nc,xlab="alpha.hat",main="alpha.log I")
+ h7<-hist(a2mom,nc=nc,xlab="alpha.hat",main="alpha.mom II")
+ h8<-hist(a2log,nc=nc,xlab="alpha.hat",main="alpha.log II")
+ invisible(list(h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8))
+ round(D,r)
+ }

```

Con “I” si intende uno stimatore al cui interno μ viene stimato con la media campionaria¹⁰, mentre con “II” si intende uno stimatore al cui interno μ viene stimato con il punto medio del range campionario¹¹; per la stima di α , “mom” si riferisce alla stima con il metodo dei momenti¹², mentre “log” si riferisce alla stima con il metodo della massima verosimiglianza¹³. Si presentano di seguito alcuni esempi (per comodità, solo dell’ultimo abbiamo riportato anche gli istogrammi: vd. fig. 4.4 a pag. 51):

```

> sp<-stima.prel.par.U(n=50,B=1000)
> sp

```

	Par.veri	Medie	SE	Lim.inf	Lim.sup	MSE
mu I	0	-0.0037	0.1105	-0.2083	0.2177	0.0122
mu II	0	0.0000	0.0090	-0.0187	0.0186	0.0001
delta I	1	1.0725	0.0671	0.9862	1.2276	0.0098
delta II	1	0.9867	0.0092	0.9635	0.9983	0.0003

¹⁰Eq. 2.3 a pag. 26.

¹¹Eq. 2.8 a pag. 27.

¹²Eq. 2.6 a pag. 26.

¹³Eq. 2.10 a pag. 27.

```

alpha.mom I      2  1.2564 0.6857  0.1056  2.7800 1.0232
alpha.log I      2  1.4267 0.6008  0.3029  2.6166 0.6896
alpha.mom II     2  2.0985 0.5234  1.1985  3.1982 0.2837
alpha.log II     2  2.1892 0.4827  1.3973  3.2168 0.2688

```

```
> sp1<-stima.prel.par.U(delta=2,alpha=4,n=50,B=1000)
```

```
> sp1
```

	Par.veri	Medie	SE	Lim.inf	Lim.sup	MSE
mu I	0	0.0019	0.2318	-0.4600	0.4149	0.0537
mu II	0	0.0008	0.0125	-0.0262	0.0272	0.0002
delta I	2	2.1681	0.1354	1.9912	2.5073	0.0466
delta II	2	1.9835	0.0117	1.9533	1.9980	0.0004
alpha.mom I	4	2.2817	1.1256	0.4207	4.5610	4.2194
alpha.log I	4	2.5569	1.0478	0.7139	4.6477	3.1804
alpha.mom II	4	4.0358	0.8392	2.4770	5.8200	0.7056
alpha.log II	4	4.3183	0.7901	3.0188	6.0442	0.7255

```
> sp2<-stima.prel.par.U(alpha=4,n=10,B=1000)
```

```
> sp2
```

	Par.veri	Medie	SE	Lim.inf	Lim.sup	MSE
mu I	0	0.0113	0.2664	-0.5297	0.4972	0.0711
mu II	0	0.0017	0.0570	-0.0721	0.0709	0.0033
delta I	1	1.1516	0.1596	0.9474	1.4832	0.0484
delta II	1	0.9540	0.0538	0.8793	0.9950	0.0050
alpha.mom I	4	1.8388	2.3158	-0.5075	7.6983	10.0335
alpha.log I	4	2.0520	2.2837	-0.3050	8.0318	9.0103
alpha.mom II	4	4.5442	2.7391	0.5925	10.9278	7.7989
alpha.log II	4	6.1781	3.2663	2.4229	13.9669	15.4128

```
> sp3<-stima.prel.par.U(alpha=0.5,n=50,B=1000)
```

```
> sp3
```

	Par.veri	Medie	SE	Lim.inf	Lim.sup	MSE
mu I	0.0	-0.0015	0.0906	-0.1791	0.1665	0.0082
mu II	0.0	0.0005	0.0189	-0.0383	0.0393	0.0004
delta I	1.0	1.0420	0.0564	0.9548	1.1744	0.0049
delta II	1.0	0.9738	0.0185	0.9262	0.9972	0.0010
alpha.mom I	0.5	0.3038	0.3071	-0.2615	0.9378	0.1328
alpha.log I	0.5	0.3677	0.2473	-0.0726	0.9039	0.0787
alpha.mom II	0.5	0.6021	0.2696	0.1227	1.1971	0.0831
alpha.log II	0.5	0.5770	0.2309	0.1923	1.0832	0.0592

```
> sp4<-stima.prel.par.U(alpha=15,n=50,B=1000)
```

```
> sp4
```

	Par.veri	Medie	SE	Lim.inf	Lim.sup	MSE
mu I	0	0.0029	0.1330	-0.2608	0.2562	0.0177
mu II	0	0.0000	0.0019	-0.0038	0.0039	0.0000
delta I	1	1.1050	0.0775	0.9994	1.2995	0.0170
delta II	1	0.9974	0.0018	0.9930	0.9997	0.0000
alpha.mom I	15	5.6995	3.9631	0.7908	16.4375	102.2050
alpha.log I	15	6.0477	3.9309	1.0565	16.7673	95.5966
alpha.mom II	15	13.7687	3.1746	7.0026	19.9883	11.5944
alpha.log II	15	16.0330	2.4307	11.8652	21.2088	6.9754

```
> par(mfrow=c(3,3))
```

```
> stima.prel.par.U()
```

	Par.veri	Medie	SE	Lim.inf	Lim.sup	MSE
mu I	0	-0.0047	0.1099	-0.2266	0.2088	0.0121
mu II	0	-0.0002	0.0096	-0.0192	0.0210	0.0001
delta I	1	1.0725	0.0657	0.9869	1.2273	0.0096
delta II	1	0.9867	0.0090	0.9634	0.9981	0.0003
alpha.mom I	2	1.2580	0.6506	0.1006	2.5485	0.9738
alpha.log I	2	1.4339	0.5825	0.3189	2.5936	0.6598

alpha.mom II	2	2.1221	0.5206	1.2082	3.2550	0.2859
alpha.log II	2	2.2143	0.4822	1.4509	3.3292	0.2785

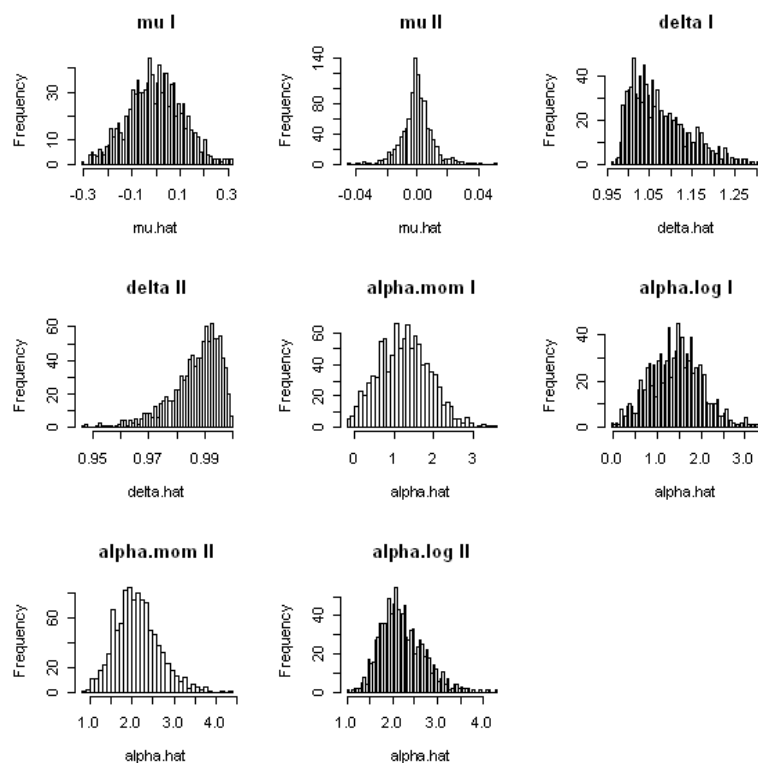


Figura 4.4: Distribuzione campionaria di tutti gli stimatori proposti.

Ecco giustificate, dunque, le nostre scelte precedenti sugli stimatori da utilizzare: sul fatto che le stime “II” siano migliori delle ‘I’ non vi è sicuramente alcun dubbio e la stima dell’MSE, l’errore quadratico medio¹⁴, degli stimatori, è più che eloquente (anche gli istogrammi, limitatamente all’ultimo esempio, sono piuttosto chiari): stimare μ con il punto medio del range campionario, piuttosto che con la media campionaria è nettamente più preciso, il che si

¹⁴La cui formula è:

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$$

dove: $B(\hat{\theta}) = \hat{\theta} - \theta$

riflette anche sulla stima di δ , il cui unico difetto è una leggerissima, anche se sistematica, sottostima¹⁵. Possono sorgere, invece, molti più dubbi sulla scelta dello stimatore di α , in quanto non sembra esserci una stima nettamente migliore fra quella basata sul metodo dei momenti e quella basata sulla massima verosimiglianza; alla fine, però, abbiamo preferito quest'ultima, in quanto sembrerebbe essere leggermente migliore nella maggior parte dei casi e, oltretutto, gli intervalli di confidenza riferiti a questa stima sono quasi sempre meno ampi di quelli riferiti alla stima con il metodo dei momenti. In generale, però, lo stimatore ricavato con il metodo dei momenti non sembra essere da buttare e la cosa migliore, per essere più precisi e per avere un orizzonte più ampio nell'individuazione dei valori sensati per la potenza, sarebbe utilizzare entrambi gli stimatori.

4.5.3 Un paio di funzioni definitive un po' più sintetiche...

Dopo queste considerazioni possiamo dunque alleggerire la funzione precedente per ottenere le informazioni limitatamente agli stimatori che abbiamo scelto:

```
> stima.par.U<-function(mu=0,delta=1,alpha=2,n=50,B=1000,
+                       p=0.05,r=4,nc=50) {
+   M<-matrix(double(n*B),n,B)
+   for (i in 1:B) {
+     M[,i]<-rU(n,mu,delta,alpha)
+   }
+   m<-apply(M,2,mu.hat.2)
+   d<-apply(M,2,delta.hat,i=2)
+   a<-apply(M,2,alpha.hat.log,i=2)
+   K<-data.frame(m,d,a)
```

¹⁵Sarebbe meglio, dunque, cercare di indagare un po' di più sull'entità della distorsione dello stimatore del raggio, per ricentrare l'intervallo di confidenza.

```

+ Par.veri<-c(mu,delta,alpha)
+ Medie<-apply(K,2,mean)
+ SE<-apply(K,2,sd)
+ Lim.inf<-apply(K,2,quantile,prob=p/2)
+ Lim.sup<-apply(K,2,quantile,prob=1-p/2)
+ D<-data.frame(Par.veri,Medie,SE,Lim.inf,Lim.sup)
+ rownames(D)<-c("Stima di mu","Stima di delta",
+ "Stima di alpha")
+ h1<-hist(m,nc=nc,xlab="mu.hat",main=
+ "Distribuzione campionaria\n dello stimatore\n di mu")
+ h2<-hist(d,nc=nc,xlab="delta.hat",main=
+ "Distribuzione campionaria\n dello stimatore\n di delta")
+ h3<-hist(a,nc=nc,xlab="alpha.hat",main=
+ "Distribuzione campionaria\n dello stimatore\n di alpha")
+ invisible(list(h1,h2,h3))
+ round(D,r)
+ }

```

Di seguito presentiamo, inoltre, un esempio di utilizzo, riportando anche gli istogrammi delle distribuzioni campionarie dei tre stimatori (vd. fig. 4.5):

```

> par(mfrow=c(1,3))
> stima.par.U()

```

	Par.veri	Medie	SE	Lim.inf	Lim.sup
Stima di mu	0	-0.0005	0.0092	-0.0185	0.0192
Stima di delta	1	0.9866	0.0094	0.9649	0.9984
Stima di alpha	2	2.1947	0.4691	1.4077	3.2040

Infine scriviamo una funzione che ci servirà nel prossimo capitolo per calcolare stime dei parametri e intervalli di confidenza degli stessi, a partire da un vettore dato:

```

> stima.par<-function(y,r=4,p=0.05,B=1000) {
+ n<-length(y)

```

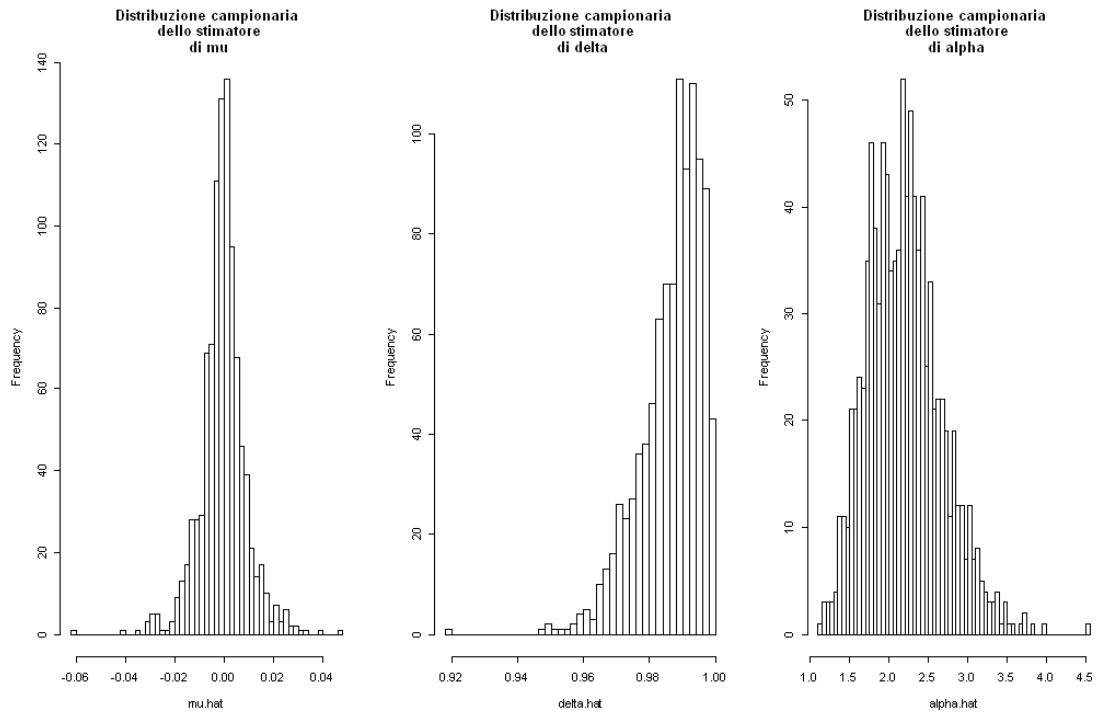


Figura 4.5: Distribuzione campionaria degli stimatori ufficiali.

```

+ m<-mu.hat.2(y)
+ d<-delta.hat(y,i=2)
+ a<-alpha.hat.log(y,i=2)
+ Stime.puntuali<-c(m,d,a)
+ M<-matrix(double(n*B),n,B)
+ for (i in 1:B) {
+ M[,i]<-rU(n,m,d,a)
+ }
+ mm<-apply(M,2,mu.hat.2)
+ dd<-apply(M,2,delta.hat,i=2)
+ aa<-apply(M,2,alpha.hat.log,i=2)
+ K<-data.frame(mm,dd,aa)
+ Lim.inf<-apply(K,2,quantile,prob=p/2)

```



```
+ Lim.sup<-apply(K,2,quantile,prob=1-p/2)
+ D<-data.frame(Stime.puntuali,Lim.inf,Lim.sup)
+ rownames(D)<-c("Stima di mu","Stima di delta",
+               "Stima di alpha")
+ round(D,r)
+ }
```


Capitolo 5

Un possibile utilizzo delle funzioni create per effettuare alcune analisi

5.1 Intervalli di confidenza e verifiche di ipotesi sui parametri via *bootstrap*

Finora ci siamo occupati di cercare di capire, via simulazione, quali fossero i migliori stimatori per i parametri della distribuzione U-power; ora che ce li abbiamo, possiamo dare un breve input su come potremmo analizzare un vettore di dati, assumendo che esso provenga da una distribuzione U-power¹.

Molto semplicemente, la funzione `stima.par()`, appena creata nel capitolo precedente, fornisce una stima puntuale dei parametri e un loro intervallo di confidenza al livello² che desideriamo, calcolato via *bootstrap* parametrico con il metodo dei percentili; di fatto, cioè, una volta calcolate delle stime dei parametri sul vettore dato (che noi simuleremo per forza, visto che di dati reali con questa distribuzione è difficile trovarne³), si simulano altri B vettori

¹Il che, comunque, non capiterà mai a nessuno nella vita, immagino. . .

²Il parametro p della funzione.

³Per maggiori “chiarimenti”, ammesso che possano essere definiti tali, in merito alle

di dati da una distribuzione U-power con i parametri uguali alle stime calcolate sul vettore dato, si ristimano i parametri su tutti questi B vettori e si vanno ad analizzare le distribuzioni campionarie ottenute; nella fattispecie, per calcolare degli intervalli di confidenza, si prendono i quantili desiderati.

Si vedano i seguenti esempi:

```
y<-rU(50,alpha=5)
```

```
> stima.par(y,B=100)
```

	Stime.puntuali	Lim.inf	Lim.sup
Stima di mu	0.0024	-0.0084	0.0123
Stima di delta	0.9957	0.9747	0.9942
Stima di alpha	4.1470	3.2282	6.4845

```
> stima.par(y)
```

	Stime.puntuali	Lim.inf	Lim.sup
Stima di mu	0.0024	-0.0097	0.0152
Stima di delta	0.9957	0.9759	0.9945
Stima di alpha	4.1470	3.1275	6.3091

```
> stima.par(y,p=0.01)
```

	Stime.puntuali	Lim.inf	Lim.sup
Stima di mu	0.0024	-0.0146	0.0207
Stima di delta	0.9957	0.9648	0.9953
Stima di alpha	4.1470	2.8544	6.9107

```
> z<-rU(50,mu=2,delta=0.5)
```

```
> stima.par(z,B=100)
```

	Stime.puntuali	Lim.inf	Lim.sup
Stima di mu	1.9928	1.9810	2.0034

applicazioni reali di questa distribuzione si veda il cap. 6 a pag. 65.

Stima di delta	0.4878	0.4692	0.4866
Stima di alpha	1.8770	1.3365	3.1076

```
> stima.par(z)
```

	Stime.puntuali	Lim.inf	Lim.sup
Stima di mu	1.9928	1.9812	2.0034
Stima di delta	0.4878	0.4680	0.4869
Stima di alpha	1.8770	1.2661	3.0391

```
> stima.par(z,p=0.01)
```

	Stime.puntuali	Lim.inf	Lim.sup
Stima di mu	1.9928	1.9759	2.0064
Stima di delta	0.4878	0.4638	0.4874
Stima di alpha	1.8770	1.1999	3.4573

Notiamo comunque che, nel caso del parametro δ , è sempre più affidabile la stima puntuale rispetto all'intervallo di confidenza ottenuto con il metodo dei percentili a causa della leggera sottostima del suo stimatore.

Le verifiche di ipotesi, perlomeno quelle bilaterali, sono analoghe agli intervalli di confidenza e per verificare:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

basta vedere se θ_0 appartiene o meno all'intervallo di confidenza per θ : se vi appartiene accetteremo l'ipotesi nulla H_0 , in caso contrario la rifiuteremo.

5.2 Anche per la U-power varrà il teorema del limite centrale?

La risposta è: ovviamente sì⁴! Una volta che siamo di fronte ad un campionamento di n osservazioni indipendenti da una distribuzione U-power e

⁴Perlomeno nel caso della versione di Lindeberg-Lévy, la più nota formulazione del teorema.

quindi, analogamente, da n distribuzioni U-power i.i.d. (con valore atteso e varianza finiti), è chiaro che vale:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\delta \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} n}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (5.1)$$

Dove naturalmente:

$$X_i \sim Up(\mu, \delta, \alpha) \text{ indipendenti}$$

Cerchiamo ora, utilizzando la funzione `tlc.U()`, di capire a partire da quale numerosità la convergenza alla normale della media campionaria è soddisfatta (per comodità, presentiamo l'output completo del test solo nel primo caso, degli altri riportiamo solo il p-value, arrotondato alla sesta cifra decimale):

```
> par(mfrow=c(3,3))
> tlc.U(n=2,main="n=2")
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: m
W = 0.9405, p-value < 2.2e-16

> round(tlc.U(n=3,main="n=3")$p.value,6)
[1] 0
> round(tlc.U(n=4,main="n=4")$p.value,6)
[1] 1e-06
> round(tlc.U(n=5,main="n=5")$p.value,6)
[1] 0.00016
> round(tlc.U(n=6,main="n=6")$p.value,6)
[1] 0.054959
> round(tlc.U(n=7,main="n=7")$p.value,6)
[1] 0.320136
> round(tlc.U(n=8,main="n=8")$p.value,6)
```

```
[1] 0.171866
> round(tlc.U(n=9,main="n=9")$p.value,6)
[1] 0.278669
> round(tlc.U(n=10,main="n=10")$p.value,6)
[1] 0.224811
```

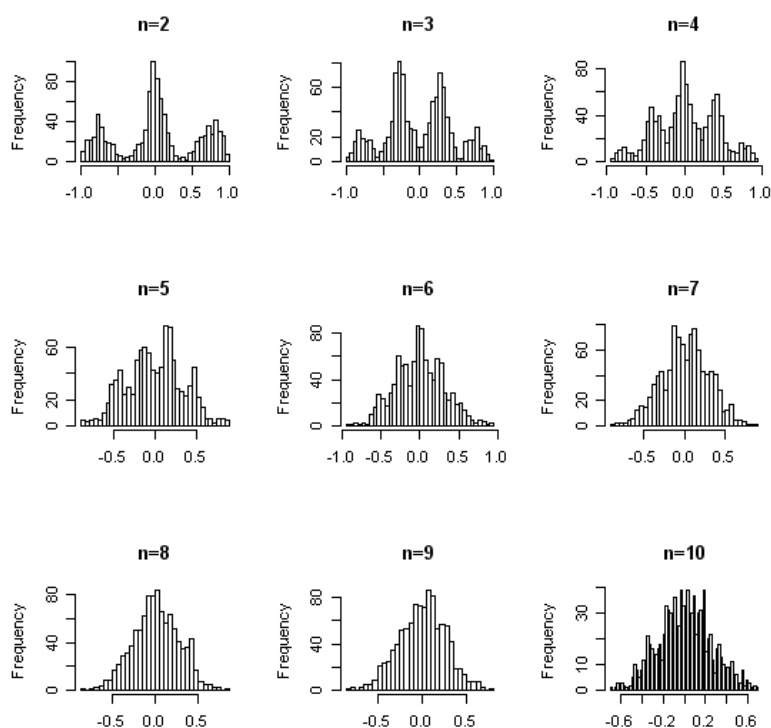


Figura 5.1: Distribuzione della media campionaria di una U-power standard per diversi valori di n .

I risultati dei test condotti e i grafici degli istogrammi lascerebbero intendere che, almeno per la distribuzione standard, la convergenza alla normale inizia ad essere soddisfacente a partire da $n = 7$ circa, una numerosità, quindi, sorprendentemente bassa⁵. Proviamo ora a cambiare un po' i parametri

⁵Ci sono distribuzioni che, prima di far convergere la rispettiva media campionaria alla normale, hanno bisogno di parecchie estrazioni...

per vedere se varia anche la numerosità minima perché la convergenza sia garantita o se invece resta uguale o quasi:

```
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=2,main="n=2")$p.value,6)
[1] 0
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=3,main="n=3")$p.value,6)
[1] 0
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=4,main="n=4")$p.value,6)
[1] 0
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=5,main="n=5")$p.value,6)
[1] 0
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=6,main="n=6")$p.value,6)
[1] 1.2e-05
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=7,main="n=7")$p.value,6)
[1] 0.00012
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=8,main="n=8")$p.value,6)
[1] 0.000474
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=9,main="n=9")$p.value,6)
[1] 0.040908
> round(tlc.U(mu=1,d=2,a=3.75,n=10,main="n=10")$p.value,6)
[1] 0.166247
```

Si nota immediatamente (e lo si può controllare provando anche per altri valori di α) che, all'aumentare della potenza⁶, aumenta la numerosità minima a partire dalla quale la media campionaria di una distribuzione U-power comincia a convergere alla distribuzione normale. In questo caso, per esempio, con $\alpha = 3.75$, sembra che ci vogliano almeno 10 estrazioni prima che inizi ad esserci una convergenza soddisfacente.

Portiamo, infine, un'ultima serie di esempi (questa volta senza grafici), a ulteriore riprova di ciò che abbiamo appena detto:

⁶Vertice e raggio non influiscono, anche se ciò non traspare dagli esempi che ho riportato.

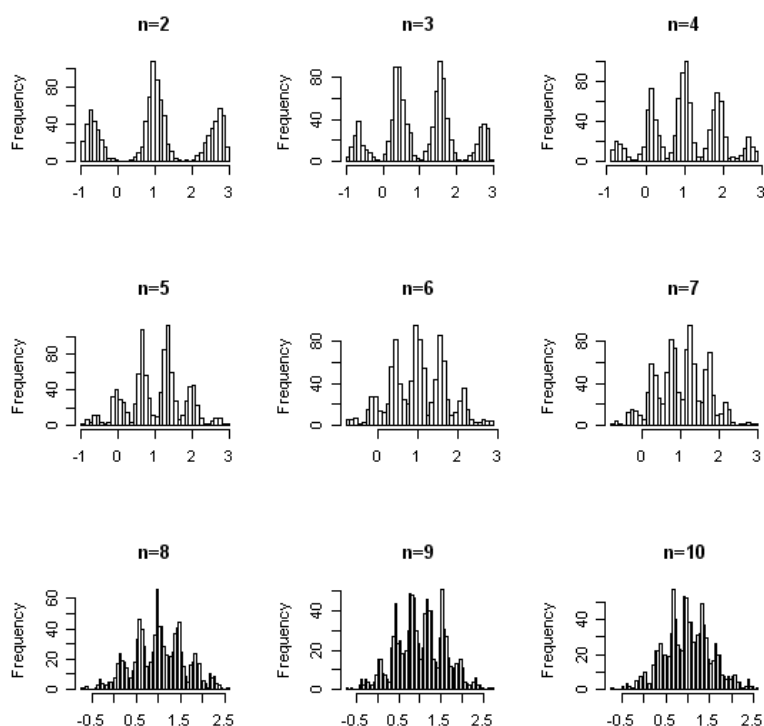


Figura 5.2: Distribuzione della media campionaria di una $U_p(1, 2, 3.75)$ per diversi valori di n .

```
> round(tlc.U(n=24,alpha=10,main="n=24")$p.value,6)
[1] 0.009228
> round(tlc.U(n=25,alpha=10,main="n=25")$p.value,6)
[1] 0.006588
> round(tlc.U(n=26,alpha=10,main="n=26")$p.value,6)
[1] 0.068198
```

Come si può notare, il primo p-value che ci è risultato non significativo al 5% con $\alpha = 10$, è in corrispondenza di $n = 26$, numerosità ben più alta delle precedenti⁷.

⁷Non ho riportato i risultati da $n = 2$ a $n = 23$ per non dilungare troppo e inutilmente la trattazione.

Capitolo 6

Aspetti pratici della distribuzione

“Applicazioni realistiche del modello dubito ve ne possano essere, si tratta comunque di un piacevole sofisma probabilistico. . .”

(Alessio Ruzza)

Questa frase, scritta dal Ruzza nel suo manoscritto¹, sembra dire tutto o quasi. . . Sembra essere difficile, infatti, trovare qualche fenomeno in natura che si distribuisca in una tal maniera, con densità alta agli estremi e bassa nei valori centrali; forse, ma è da verificare, la distribuzione potrebbe essere utile per descrivere le coordinate laterali dei punti in cui batte una pallina su un tavolo da ping-pong durante una partita².

¹Vi rimando per l'ennesima volta al manoscritto dell'Inventore [5].

²Mi sarebbe piaciuto molto fare un esperimento del genere, ma non è di facile realizzazione; in realtà, insieme ad alcuni miei colleghi (si vedano i ringraziamenti a pag. 81), l'esperimento l'abbiamo tentato, ma i risultati non erano esattamente quelli attesi. Probabilmente, per ottenere una distribuzione della caduta della pallina simile a quella della U-power, bisognerebbe osservare la partita di due professionisti e non di due dilettanti, in cui accade invece che la pallina cade soprattutto a metà tra il vertice e gli estremi, più che cadere intorno agli estremi stessi.



Figura 6.1: Una partita di ping pong: un possibile utilizzo pratico della nostra distribuzione...

Detto questo, potreste provare voi ad effettuare l'esperimento o a trovare altri possibili utilizzi di questa famiglia di distribuzioni probabilistiche, magari comunicando al Ruzza o a me le vostre idee e i vostri risultati.

Capitolo 7

Una possibile missione per il futuro. . .

In questa trattazione abbiamo sviluppato dei concetti intorno a questa nuova distribuzione *continua*. Invitiamo gli eventuali lettori di questa tesi¹ a sviluppare in futuro la stessa idea, ma nel mondo *discreto*. Si dovrà cercare di partire da una quantità sempre positiva che sommata in un certo numero di punti dia 1 e che abbia pesi maggiori agli estremi piuttosto che al centro; tanto per capirci, il risultato dovrebbe essere qualcosa di simile rispetto a quanto illustrato in fig. 7.1.

¹Ammesso che mai ve ne saranno. . .

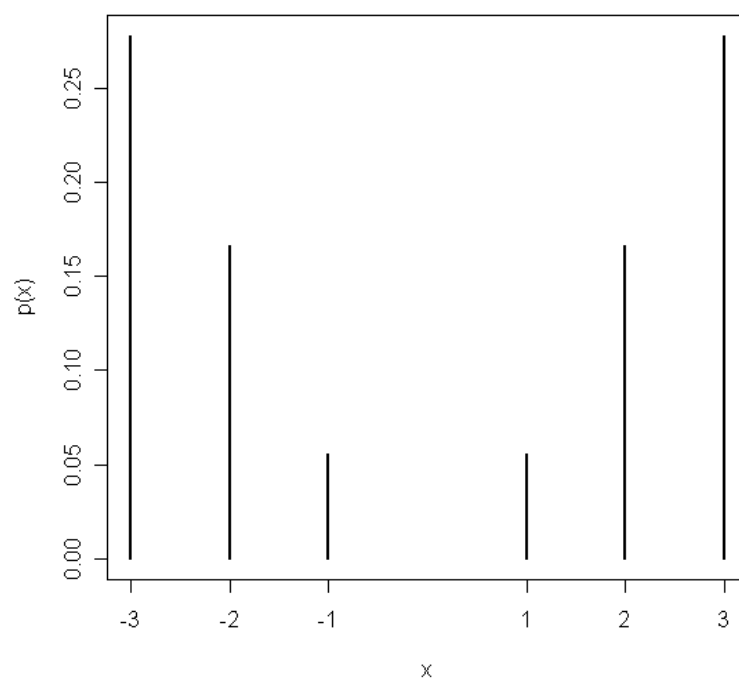


Figura 7.1: Un possibile esempio di come potrebbe risultare l'analogia discreta della distribuzione U-power continua.

Capitolo 8

Due parole sull'Inventore. . .



Figura 8.1: L'Inventore e il sottoscritto a Stoccolma.

Alessio Ruzza è nato il 24 novembre 1985 a Rovigo; attualmente è residente a Cavàrzere, un comune in provincia di Venezia.

Il Ruzza è un brillante studente di statistica: oltre alla laurea in Statistica e Gestione delle Imprese, corso impartito dalla Facoltà di Scienze Statistiche dell'Università di Padova, conseguita nell'Anno Accademico 2006/07 (al momento della creazione, dunque, non aveva ancora conseguito il titolo) con punteggio pari a 110 con lode, lo conferma anche il 21 nell'esame di Statistica cp ottenuto al primo appello e con un anno di anticipo; attualmente è iscritto regolarmente e frequenta il Corso di Laurea Specialistica in Scienze Statistiche, Economiche, Finanziarie e Aziendali.



Figura 8.2: L'Inventore e il sottoscritto in una via di Uppsala (Svezia).

La sua residenza a Padova si trova presso il collegio universitario “Don Nicola Mazza”, istituzione finalizzata a promuovere l'eccellenza negli studenti universitari.



Figura 8.3: L'Inventore in preda ad un delirio di onnipotenza.

L'Inventore è appena tornato dalla Svezia, dove è rimasto per quattro mesi nell'ambito del Programma Socrates-Erasmus, frequentando alcuni corsi dell'Università Sveriges Lantbruksuniversitetet di Uppsala. È probabile che l'anno prossimo torni in Svezia per scrivere la tesi della Laurea Specialistica e potrebbe rimanerci per fare il Dottorato, che è maggiormente remunerativo al di fuori dei nostri confini. Ad ogni modo vogliamo comunque sperare e augurarci che il nostro Paese non si lasci scappare una mente così luminosa. . .



Figura 8.4: L'Inventore in preda ad un delirio di onnipotenza "svedese".



Figura 8.5: Impossibile non prosternarsi dinanzi alla grandezza dell'Inventore!

Appendice A

Alcune dimostrazioni

A.1 Calcolo del fattore di standardizzazione

Come fece il Ruzza a fare in modo che l'integrale della densità nel suo supporto risultasse 1, condizione necessaria per qualsiasi densità di probabilità? Molto semplice: una volta individuata la funzione base da integrare, bisognava fare in modo che l'integrale della stessa nel supporto, moltiplicata per un fattore di standardizzazione k desse 1, pertanto:

$$k \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} |x - \mu|^\alpha dx = 1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} |x - \mu|^\alpha dx &= \int_{\mu-\delta}^{\mu} (\mu - x)^\alpha dx + \int_{\mu}^{\mu+\delta} (x - \mu)^\alpha dx = \\ &= -\frac{1}{\alpha + 1} [(\mu - x)^{\alpha+1}]_{\mu-\delta}^{\mu} + \frac{1}{\alpha + 1} [(x - \mu)^{\alpha+1}]_{\mu}^{\mu+\delta} = \\ &= -\frac{1}{\alpha + 1} [-\delta^{\alpha+1}] + \frac{1}{\alpha + 1} [\delta^{\alpha+1}] = \frac{2\delta^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

Da cui:

$$k = \frac{\alpha + 1}{2\delta^{\alpha+1}}$$

A.2 Calcolo della funzione di ripartizione

Per ricavarci la funzione di ripartizione, calcoliamo prima a parte i due seguenti integrali:

$$I_1(x) = \int_{\mu-\delta}^x \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} |t-\mu|^\alpha dt, \quad \mu-\delta \leq x < \mu$$

$$I_2(x) = \int_{\mu}^x \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} |t-\mu|^\alpha dt, \quad \mu \leq x \leq \mu+\delta$$

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} \int_{\mu-\delta}^x (\mu-t)^\alpha dt = -\frac{1}{2\delta^{\alpha+1}} [(\mu-t)^{\alpha+1}]_{\mu-\delta}^x = \\ &= -\frac{1}{2\delta^{\alpha+1}} [(\mu-x)^{\alpha+1} - \delta^{\alpha+1}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-x}{\delta} \right)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$I_2(x) = \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} \int_{\mu}^x (t-\mu)^\alpha dt = \frac{1}{2\delta^{\alpha+1}} [(t-\mu)^{\alpha+1}]_{\mu}^x = \frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\delta} \right)^{\alpha+1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\mu-\delta}^x \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} |t-\mu|^\alpha dt &= \begin{cases} I_1(x) & \text{se } \mu-\delta \leq x < \mu \\ I_1(\mu) + I_2(x) & \text{se } \mu \leq x \leq \mu+\delta \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-x}{\delta} \right)^{\alpha+1} & \text{se } \mu-\delta \leq x < \mu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\delta} \right)^{\alpha+1} & \text{se } \mu \leq x \leq \mu+\delta \end{cases} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-\mu) \left| \frac{x-\mu}{\delta} \right|^{\alpha+1} \end{aligned}$$

Che è esattamente l'espressione della funzione di ripartizione nel caso in cui $x \in [\mu-\delta, \mu+\delta]$.

A.3 Calcolo dei principali momenti: media e varianza

In questa breve appendice, per semplicità, ci limitiamo alla dimostrazione delle formule dei momenti principali: il valore atteso (il momento primo non

centrato) e la varianza (il momento secondo centrato); nel calcolo di entrambi gli integrali si adotterà la sostituzione $x - \mu = t$ e quindi $x = t + \mu$, da cui $dx = dt$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} x |x-\mu|^\alpha dx = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} (t+\mu) |t|^\alpha dt = \\ &= \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} t |t|^\alpha dt}_{I_1} + \mu \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} |t|^\alpha dt}_{I_2} = \mu \end{aligned}$$

Questo perché:

- $I_1 = 0$ perché I_1 è l'integrale fra due estremi opposti di una funzione dispari;
- $I_2 = 1$ perché I_2 è l'integrale della densità di una distribuzione U-power con vertice nullo fra gli estremi del suo supporto¹.

Calcoliamo ora il momento secondo non centrato, da cui ricaveremo la varianza semplicemente sottraendogli μ^2 :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} x^2 |x-\mu|^\alpha dx = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} (t+\mu)^2 |t|^\alpha dt = \\ &= \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} \int_{-\delta}^{\delta} (t^2 + 2\mu t + \mu^2) |t|^\alpha dt = \\ &= \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} \left[\int_{-\delta}^0 (t^2 + 2\mu t + \mu^2) (-t)^\alpha dt + \int_0^{\delta} (t^2 + 2\mu t + \mu^2) t^\alpha dt \right] = \\ &= \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} \left[-\frac{1}{\alpha+3} (-t)^{\alpha+3} + \frac{2\mu}{\alpha+2} (-t)^{\alpha+2} - \frac{\mu^2}{\alpha+1} (-t)^{\alpha+1} \right]_{-\delta}^0 + \\ &+ \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} \left[\frac{1}{\alpha+3} t^{\alpha+3} + \frac{2\mu}{\alpha+2} t^{\alpha+2} + \frac{\mu^2}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right]_0^{\delta} = \\ &= \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} \left(\frac{2}{\alpha+3} \delta^{\alpha+3} + \frac{2\mu^2}{\alpha+1} \delta^{\alpha+1} \right) = \frac{\alpha+1}{\alpha+3} \delta^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

¹Questo "trucchetto" dei due integrali è stato interamente ripreso dal manoscritto dell'Inventore [5].

Da cui:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \delta^2 + \mu^2 - \mu^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \delta^2$$

A.4 Calcolo dello stimatore di α basato sul metodo dei momenti

Per ottenere lo stimatore di α 2.6 di pag. 26, dopo aver proposto una stima sensata² per δ , abbiamo considerato le prime due equazioni del metodo dei momenti:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} E(X) = \bar{y} \\ E(X^2) = \bar{s}^2 + \bar{y}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \bar{y} \\ \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \delta^2 + \mu^2 = \bar{s}^2 + \bar{y}^2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{cases} \mu = \bar{y} \\ \alpha \delta^2 + \delta^2 = \alpha \bar{s}^2 + 3\bar{s}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \bar{y} \\ (\delta^2 - \bar{s}^2)\alpha = 3\bar{s}^2 - \delta^2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{y} \\ \hat{\alpha} = \frac{3\bar{s}^2 - \delta^2}{\delta^2 - \bar{s}^2} \end{cases} \end{aligned}$$

A.5 Calcolo dello stimatore di α basato sul metodo della massima verosimiglianza

Per ottenere lo stimatore 2.7 di pag. 26, dopo aver proposto degli stimatori sensati per μ e δ , abbiamo considerato la terza equazione di verosimiglianza:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ell(y_i; \mu, \delta, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\alpha + 1} - n \ln \delta + \sum_{i=1}^n \ln |y_i - \mu| = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \alpha + 1 = \frac{n}{n \ln \delta - \sum_{i=1}^n \ln |y_i - \mu|} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n}{n \log \hat{\delta} - \sum_{i=1}^n \log |y_i - \hat{\mu}|} - 1 \end{aligned}$$

²Vd. pag. 26.

A.6 Calcolo dell'integrale della densità asimmetrica

Dimostriamo che effettivamente anche la versione asimmetrica della variabile è a tutti gli effetti una distribuzione di probabilità, verificando dunque che l'integrale della sua densità nel supporto risulta pari a 1:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} g(x) dx = \\
&= \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \frac{\alpha+1}{2\delta^{\alpha+1}} |x-\mu|^\alpha dx + \\
&+ \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} |\gamma|^{\alpha+1} \operatorname{sgn}[\gamma(x-\mu)] \frac{\alpha+1}{2\delta^{2\alpha+2}} |x-\mu|^{2\alpha+1} dx = \\
&= 1 + |\gamma|^{\alpha+1} \frac{\alpha+1}{2\delta^{2\alpha+2}} \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \operatorname{sgn}[\gamma(x-\mu)] |x-\mu|^{2\alpha+1} dx
\end{aligned}$$

Il primo addendo è pari a 1, in quanto è l'integrale della densità della distribuzione U-power nel suo supporto; basterà dunque verificare, per ognuno dei tre diversi casi dovuti al fatto che il segno di γ è determinante nel risultato della funzione segno, che il secondo addendo sia pari a 0 e quindi, tralasciando a questo punto le costanti esterne, che l'integrale del secondo addendo sia nullo:

- Se $\gamma = 0$ il secondo addendo si azzera, a causa della presenza del fattore $|\gamma|^{\alpha+1}$.
- Se $\gamma > 0$, allora:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \operatorname{sgn}[\gamma(x-\mu)] |x-\mu|^{2\alpha+1} dx = \\
&= - \int_{\mu-\delta}^{\mu} (\mu-x)^{2\alpha+1} dx + \int_{\mu-\delta}^{\mu} (x-\mu)^{2\alpha+1} dx = \\
&= \frac{1}{2\alpha+2} [(\mu-x)^{2\alpha+2}]_{\mu-\delta}^{\mu} + \frac{1}{2\alpha+2} [(x-\mu)^{2\alpha+2}]_{\mu}^{\mu+\delta} = \\
&= \frac{1}{2\alpha+2} [-\delta^{2\alpha+2}] + \frac{1}{2\alpha+2} [\delta^{2\alpha+2}] = 0
\end{aligned}$$

- Se $\gamma < 0$, allora:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \operatorname{sgn}[\gamma(x-\mu)] |x-\mu|^{2\alpha+1} dx = \\
 &= \int_{\mu-\delta}^{\mu} (\mu-x)^{2\alpha+1} dx - \int_{\mu-\delta}^{\mu} (x-\mu)^{2\alpha+1} dx = \\
 &= -\frac{1}{2\alpha+2} [(\mu-x)^{2\alpha+2}]_{\mu-\delta}^{\mu} - \frac{1}{2\alpha+2} [(x-\mu)^{2\alpha+2}]_{\mu}^{\mu+\delta} = \\
 &= -\frac{1}{2\alpha+2} [-\delta^{2\alpha+2}] - \frac{1}{2\alpha+2} [\delta^{2\alpha+2}] = 0
 \end{aligned}$$

Abbiamo così verificato che anche $g(x)$ è una funzione di densità di probabilità.

Bibliografia

- [1] A. Azzalini (1985). *A class of distributions, which includes the normal ones*. Scandinavian Journal of Statistics 12:171-178.

- [2] N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan (1994). *Continuous univariate distributions, Volumi I e II*. Seconda Edizione, John Wiley, New York, Stati Uniti.

- [3] G. Masarotto (febbraio-aprile 2008). *Dispense di Statistica computazionale I³*. Non pubblicato.
URL <http://www.statistica.unipd.it/servizi/matdid.asp?idins=183>.

- [4] L. Pace, A. Salvan (2001). *Introduzione alla statistica II. Inferenza, Verosimiglianza, Modelli*. Cedam, Padova.

- [5] A. Ruzza (dicembre 2007). *Una famiglia di distribuzioni paraboliche*. Non pubblicato.

³Il titolo non è ufficiale, ma è semplicemente un nome per identificare le dispense utilizzate per il corso di Statistica computazionale I nell'Anno Accademico 2007/08.

- [6] R Development Core Team (2007). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- [7] Pagina web del sito internet di Wikipedia (in lingua inglese) dedicata alla distribuzione U-quadrato.
URL http://en.wikipedia.org/wiki/U-quadratic_distribution.

Altre informazioni, formule, etc., le ho ricavate da dispense, appunti e fogli vari inerenti ai corsi che ho seguito in questi tre anni di studio.

Per ulteriori chiarimenti e delucidazioni in merito a quanto esposto in questo lavoro o in merito alla bibliografia non pubblicata, contattate pure Qualcuno⁴ all'indirizzo:

`tonio86@tele2.it`

⁴Se non vi ricordate chi è, tornate a leggervi la nota 8 a pag. 3.

Ringraziamenti

È giunto anche per me il momento dei ringraziamenti dopo queste 70 e oltre pagine di tesi: mai avrei pensato di riuscire a scriverne tante⁵, ma alla fine, a differenza di ciò che capita molto spesso per una tesi di laurea (triennale soprattutto), non è stato assolutamente difficile, né mi sono dovuto sforzare eccessivamente per scriverle, anzi è stato un vero piacere e un vero divertimento!!!

Il primo ringraziamento va, ovviamente, ai miei genitori: a mia mamma Maria e al mio patrigno (possibile che non ci sia una parola più bella?) Franz, che mi hanno sempre sostenuto, aiutato, incoraggiato (e anche sopportato, devo dire) e hanno condiviso con me tutti i momenti più importanti della mia vita. Un grazie di cuore va ovviamente anche a mio fratello Alessandro che, soprattutto da qualche anno a questa parte, posso considerare il mio più grande amico, oltre che mio fratello.

Un ringraziamento particolare va anche alla persona più cara che ho perso, ormai nove anni fa, mio padre, ed è anche per questo che ci tengo a sottolineare il precedente ringraziamento a Franz, perché il suo ingresso nella vita mia e della mia famiglia è stato estremamente fondamentale; è stato, ed è tuttora per me, un padre e anche di più!

A mia mamma va un ulteriore ringraziamento per avermi convinto, ormai quasi tre anni fa, dopo due bici normali che mi furono rubate nello stesso giorno (!!!), a comprare la minibici con cui vengo tutti i giorni in facoltà. A

⁵In realtà fino a tre mesi fa neanche mi sarei sognato di scrivere una tesi del genere... È stata veramente un'esperienza unica!

parte la sua enorme utilità, è una cosa a cui sono molto affezionato ed è un oggetto che in qualche modo, forse meglio di tutti gli altri, può simboleggiare e rappresentare questi miei primi tre anni di università.

Passo adesso a ringraziare chi mi ha aiutato e ha contribuito significativamente alla stesura di questa tesi: il prof. Guido Masarotto, in primis, che ha accolto questo progetto, che reputavo di impossibile realizzazione data la sua natura “particolarmente originale”, e che si è sempre dimostrato molto disponibile nei miei confronti; ci tengo, inoltre, a dire che ammiro e stimo moltissimo il prof. Masarotto e che, se un giorno, come attualmente spero, diventerò un docente universitario, sarà sicuramente per me un modello di docente da seguire, soprattutto per il modo efficace in cui riesce a conciliare una chiara spiegazione con un’incredibile dose di humour! Quando, dopo aver seguito il corso di Statistica Computazionale I, insegnamento tenuto appunto dal prof. Masarotto, ho preso seriamente in considerazione l’ipotesi di scrivere questa tesi, è stato il primo a cui ho pensato come relatore⁶; vorrei ringraziarlo particolarmente anche per avermi consigliato di scrivere questa tesi utilizzando \LaTeX , ve lo consiglio passionatamente, è un programma veramente favoloso!

L’altra persona da ringraziare in merito al contributo per la tesi è ovviamente Alessio Ruzza che, oltre ad essere l’Inventore della distribuzione di cui mi sono occupato, nonostante tutto (le quadernate soprattutto...), è anche un mio buon amico.

Ringrazio di cuore, poi, tutti i miei parenti più stretti, a cui voglio molto bene: i nonni Giuseppe e Angela, lo zio Antonio, la zia Teresa e i miei cuginetti Giuseppe ed Elisa, la zia Silvana e mio cugino Samuel; un grazie anche a tutti gli altri parenti: sia a tutti gli altri che abitano nel vicentino, sia a quelli di Latina, che a quelli in Olanda.

Capitolo superiori: un sentito ringraziamento ai miei compagni della scuo-

⁶Un consiglio per tutti gli statistici di Padova: non uscite da questa facoltà senza aver seguito un suo corso! Imparerete molto, vi divertirete un sacco e, se ancora non è così, vi appassionerete sicuramente alla statistica!

la superiore (Liceo Scientifico Lioy di Vicenza, sezione E, quelli del “PNI”, Piano Niente Informatica!), i dodici (me compreso) della quinta in particolare, con cui ho condiviso moltissimi momenti belli degli ultimi anni: Mattia (Bic), Luisa, Claudio, Andrea (Jar), Marco (Malta), Chiara, Monica, Andrea (Scarpari), Giulio (Giugi, il Cavaliere Forte), Martina e Luca (Walker, Mullah e tutti gli altri diecimila soprannomi che non ricordo). E nell’ambito della scuola superiore, un ringraziamento di cuore vorrei farlo anche ai miei professori delle superiori, in particolare ad alcuni di loro, con cui ho sempre avuto un ottimo rapporto e che mi hanno trasmesso e insegnato moltissimo: Andrea Rodighiero (lettere II), Carlo Bogo (lettere triennio), Elisabetta Pazzi (matematica biennio), Simonetta Perazzolo (matematica triennio), Isabella Beltrame (inglese), Mario Resi (storia e filosofia triennio), Giampietro Boesso (fisica biennio), Enrica Volpi (disegno e storia dell’arte), Paolo Sogaro (educazione fisica), Antonio Montepaone (religione). I ricordi più belli dei cinque anni di superiori? Difficile dirlo, perché sono tantissimi; ne riporto solo alcuni fra i più belli: l’indimenticabile gita a Vienna di quinta superiore, le traduzioni artistiche delle poesie in latino (una su tutte: *Tunc vero condimus longas Iliadas!* = “Allora, in verità, mettiamo al riparo le grandi troiane!”), le mitiche serate al “Punaro” (che tuttora facciamo), il “Tonini’s Saturday show” nell’ora di filosofia con Resi in quarta superiore, le partite a “calcetto” (le virgolette non sono casuali) o a pallavolo in palestra e tanto altro...

Ringrazio anche i tre compagni della terza media a cui sono rimasto legato e con cui mi tengo tuttora in contatto: Mattia, Daniele e Davide (Shapa, Luamaus, Cion Pe e tanti altri soprannomi⁷).

Inizio ora a ringraziare gli amici dell’università: comincerei senz’altro da Alessandro (Skylvr), Pietro (Pierre) e Riccardo (Rick) che reputo i miei più cari amici di questi tre anni di università e a cui sono legato di più in assoluto da una bella amicizia; i momenti più belli vissuti in questi tre anni sono innegabilmente legati a loro.

⁷Fino alla terza media erano 161, ora il numero è ampiamente lievitato...

Non sono da meno i miei “educatori”, di un anno più grandi di me, con cui ho condiviso molti bei giorni in questi tre anni, nel terzo in particolare: Andrea (Kappa85), Emanuele (Léle, che tra l’altro è da ringraziare anche per aver scattato alcune foto che ho inserito nella tesi, quelle dell’Inventore e quella dell’aula SC120 e per avermi suggerito di utilizzare qualche passato remoto in più nella redazione della tesi), Tommaso (Tommy, anche se eviterei di ringraziare la “manona”...), Matteo (Stocco) e, ovviamente, il già citato Alessio (Alexej), l’Inventore della distribuzione.

Ci sono poi gli “essepiessini” (un termine coniato dalla Silvietta per designare gli iscritti al corso in Statistica, Popolazione e Società), a cui sono più legato, oltre a Rick: Federico (Fede, a cui auguro di cuore una felice permanenza a Chicago, dove rimarrà fino ad ottobre), Alberto (Grosso, per l’incredibile somiglianza), Elena, Silvia (la Silvietta) e Alessandra.

Vorrei ricordare alcuni dei momenti più belli di questi tre anni di università, dell’ultimo in particolare: i viaggi a Budapest (molto bello, a parte la seconda notte...) con Alessio, Andrea, Léle e Tommy, a Stoccolma e Uppsala con Alessio e Léle, a Barcellona con l’Elena, la Silvietta, l’Alessandra e Rick (indimenticabile, nonostante il nubifragio che abbiamo incredibilmente incontrato!); le indimenticabili gare degli zatteroni a Montorio; le innumerevoli partite a carte e quelle a calcetto (in cui mi sono sempre divertito molto ma, soprattutto, credo di aver fatto divertire...).

E infine, restando nell’ambito dell’università, ringrazio tutti gli altri ragazzi della facoltà di altri corsi e anni, che ho avuto l’opportunità di conoscere un pochino di più degli altri: Francesco (Pozza), Alessandro (Ale il Bello), Adriana, Marica, Annalisa, Laura (Neve), Valentina (Minnie), Daria, Chiara (Gnoato), Marta (Bernardinello), Serena, Elisa (Garbuio), Marta (Vencato), Francesco (Cescov), Tomaso (con una “m”, non è un errore), Michele (Mazzilli), Andrea (Schez), Diego (Achille), Francesco (Agu), Alessandro (Zanna), Ibrahim (Bas), Filippo (Bordignon), Marco (Gastaldi), Daniele (Longato), Alessio (Pulin), Matteo (Schiavo), Andrea (Piga), Enrico (Droga o Didier), Omar, Anna (Pinto), Martina (Taborelli), Giovanna (la Giò), Jacopo (lo sfi-

dante nella gara di minibici), Gianni, Michele (Gigi), Francesco (Dromo), Filippo (Pippo), Alessandro (Ale), Barbara, Simone, Giovanni (il Fas), Nicola (El Zuliano), Antonio (Lovatin), Federico (Rotolo), Riccardo (Cavaz), Andrea (Vacca) e Lorenzo (Becks); ringrazio anche tutti gli altri frequentanti dell'aula studio e tutte le persone che ho conosciuto in questi tre anni meravigliosi.

Un ringraziamento particolare va rifatto ad Andrea (Kappa85), Tommy, Stocco e la Laura: sono loro, infatti, insieme a me, i testimoni di quell'incredibile momento catartico in cui l'Inventore partorì la distribuzione!

E un altro ringraziamento particolare va pure rifatto a Léle, Pierre e all'Inventore stesso: con loro infatti abbiamo cercato di verificare se i punti in cui cade una pallina da ping-pong tendono ad assumere una distribuzione U-power.

Non dimenticherei nemmeno di ringraziare tutti coloro che, da parte di Rick e Kappa soprattutto, hanno ricevuto, più o meno consapevolmente, un soprannome: Burney, Carvalho, Fra Galdino, Fred, l'innominevole, l'uomo fumetto, tutti gli "zii" della facoltà (in particolare lo "zio furbo" della mensa), i sosia della facoltà e dei dintorni (fra i principali: Giletti, il già citato Grosso, Amauri, Gilardino, Renga, Ronaldinho); i momenti di ilarità nell'evocare questi soprannomi sono stati molti e intensi!

Ora alcuni ringraziamenti sportivi: per la Juventus, la mia squadra del cuore (interisti e milanisti, tremate, perché torneremo molto presto a vincere e allora non ce ne sarà più per nessuno!), per il Vicenza, la squadra della mia città (speriamo che prima o poi decida di fare una stagione mirata a puntare alla serie A invece che a salvarsi, come ogni anno!) e per la Nazionale Italiana di calcio. E poi un pensierino va anche al grande Schumi, per tutti gli incredibili e indimenticabili momenti che ci ha fatto vivere in questi ultimi anni. Forza Ferrari!

Vorrei ringraziare, infine, anche tutti coloro che mi sono dimenticato di ringraziare fino ad adesso o di cui non ho citato il nome per non allungare ulteriormente queste ultime pagine, che non me ne vogliano.

Vorrei concludere con un appello finale all'Inventore: "Ruzza, inventa al più presto qualcos'altro (la versione discreta della distribuzione, magari), in modo che possa avere già pronto l'argomento per la tesi della laurea specialistica..." Stavo scherzando... (o forse no, chissà...)

