

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

**Dinamica in perturbazioni di campi centrali
(non Kepleriani, e di possibile rilevanza galattica)**

Relatore

Prof. Francesco Fassò

Laureando

Pierre Béchaz

Anno Accademico 2021/2022

Introduzione

I sistemi meccanici superintegrabili sono caratterizzati dall'esistenza di una foliazione del loro spazio delle fasi $2d$ -dimensionale in tori di dimensione $n < d$ sui quali i moti avanzano linearmente. La dinamica delle perturbazioni di un sistema superintegrabile è completamente compresa solo quando $d = 3$ ed $n = 2$ (vedere [6] e [7]). Ciò si verifica nel caso di perturbazioni del corpo rigido di Euler-Poinsot e di un punto materiale in un generico campo centrale. In queste due situazioni, i quattro integrali primi che producono la superintegrabilità sono l'energia e le tre componenti del momento angolare. In presenza di perturbazioni, l'energia e la norma del momento angolare (le due azioni del sistema) rimangono circa costanti; al contrario, la direzione del vettore $e_M := \frac{M}{\|M\|}$ (ovvero i due integrali primi restanti) può essere soggetta a variazioni anche molto profonde, muovendosi sulla sfera unitaria bidimensionale secondo proprietà di regolarità o caoticità in base alle proprietà di risonanza delle condizioni iniziali.

Un'analisi dettagliata di questo fenomeno è stata condotta nel caso del corpo rigido (cfr. ad esempio [3]), ma non in quello del campo centrale, rispetto a cui lo studio della direzione del momento angolare significa lo studio dell'orientazione del piano dell'orbita.

In questa tesi ci proponiamo di illustrare la suddetta fenomenologia per un particolare campo centrale, il cosiddetto *potenziale isocrono*, introdotto nel 1958-59 da Michel Hénon in [11] per descrivere ammassi globulari di stelle a simmetria sferica. In tal caso, infatti, è possibile calcolare esplicitamente le coordinate di azione-angolo.

Dopo aver presentato le caratteristiche di un sistema superintegrabile e l'origine delle proprietà di regolarità e caoticità degli integrali primi diversi dalle azioni (dunque della direzione del momento angolare) nel campo centrale, descriveremo il potenziale isocrono di Hénon e le sue coordinate di azione-angolo. Considereremo poi una perturbazione che rompa la simmetria sferica del problema e integreremo numericamente le equazioni del moto, mostrando che la giacitura del piano dell'orbita può essere soggetta a moti regolari oppure caotici e diffusivi a seconda delle loro proprietà di (non)risonanza.

Indice

1	Perturbazioni di campi centrali	3
1.1	Nozioni di base	3
1.1.1	Sistemi completamente integrabili	3
1.1.2	Sistemi superintegrabili	4
1.2	Dinamica perturbativa	6
2	Il potenziale isocrono di Hénon	8
3	Variabili azione-angolo per il potenziale isocrono	10
3.1	Hamiltoniana del sistema	10
3.2	Caso piano	11
3.2.1	Applicazione del teorema di Liouville-Arnold	11
3.2.2	Costruzione degli angoli	13
3.2.3	Costruzione delle azioni	14
3.2.4	Parametrizzazione dei punti del toro bidimensionale	15
3.3	Caso spaziale	15
3.3.1	Applicazione del teorema di Liouville-Arnold	16
3.3.2	Costruzione delle variabili di azione-angolo e Hamiltoniana superintegrabile	17
3.3.3	Parametrizzazione dei punti del toro tridimensionale	18
4	Analisi perturbativa	20
4.1	Fatti preliminari	20
4.1.1	Varietà azione	20
4.1.2	Mappa in frequenza e condizione di risonanza	22
4.2	Scelta della perturbazione	22
4.3	Integrazione numerica	23
A	Periodo della coordinata radiale	27

Capitolo 1

Perturbazioni di campi centrali

In questo capitolo, seguendo le trattazioni fornite in [6], [7] e nei primi due capp. di [8], iniziamo definendo i sistemi Hamiltoniani completamente integrabili e quelli superintegrabili e presentiamo poi alcune note proprietà della dinamica di loro perturbazioni.

1.1 Nozioni di base

Indichiamo con $\mathcal{M} \ni (p, q)$ una varietà simplettica di dimensione $2d$, munita della 2-forma chiusa e non degenere $\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ e sulla quale è definita una Hamiltoniana $H : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$.

1.1.1 Sistemi completamente integrabili

Un sistema Hamiltoniano è detto *completamente integrabile* quando possiede d integrali primi $f_1, \dots, f_d : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ indipendenti e in involuzione, i cui insiemi di livello sono diffeomorfi a tori sui quali il flusso è lineare. Precisamente, vale il teorema di Liouville-Arnold (vedere ad esempio cap. 10, par. 49 di [1], sez. 1.2 di [8] e sez. 3.6 di [10]):

Teorema 1.1 (Liouville-Arnold). *Consideriamo la mappa $f = (f_1, \dots, f_d) : \mathcal{M} \mapsto f(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^d$ e assumiamo che*

LA1. *f sia una sommersione con fibre compatte e connesse.*

LA2. *f_1, \dots, f_d siano in mutua involuzione rispetto alle parentesi di Poisson, ossia $\{f_i, f_j\} = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, d$.*

Allora,

(i) *Le fibre di f sono diffeomorfe al toro \mathbb{T}^d .*

(ii) *Ogni fibra di f ha un intorno U dotato di un diffeomorfismo*

$$w := (a, \alpha) : U \mapsto \mathcal{A} \times \mathbb{T}^d \quad \text{con} \quad \mathcal{A} := a(U) \subset \mathbb{R}^d \quad (1.1)$$

il quale è simplettico, cioè

$$\Omega|_U = \sum_{k=1}^d da_k \wedge d\alpha_k. \quad (1.2)$$

(iii) *Se una Hamiltoniana $h_0 : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ soddisfa $\{f_i, h_0\} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, d$, allora $h_0 \circ w^{-1}$ dipende dalle sole $a \in \mathcal{A}$.*

Le coordinate $(a, \alpha) \in \mathcal{A} \times \mathbb{T}^d$ si chiamano *coordinate di azione-angolo* e \mathcal{A} è detta *varietà azione*.

1.1.2 Sistemi superintegrabili

Teorema di Mischenko-Fomenko. Come già specificato nell'Introduzione, il problema definito da un potenziale centrale è *superintegrabile* in quanto ha tre gradi di libertà, ma possiede non solo tre ma quattro integrali primi indipendenti. Corrispondentemente, i moti avanzano linearmente su tori di dimensione $2 \cdot 3 - 4 = 2$. Questo è un caso particolare della seguente situazione generale.

Teorema 1.2 (Mischenko-Fomenko). *Consideriamo un numero $n \in \mathbb{N}$, con $1 \leq n \leq d$, e una mappa $f = (f_1, \dots, f_{2d-n}) : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^{2d-n}$ che sia una sommersione con fibre compatte e connesse. Assumiamo che*

MF1. *Esistano funzioni $Q_{ij} : f(\mathcal{M}) \mapsto \mathbb{R}$ tali che $\{f_i, f_j\} = Q_{ij} \circ f$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.*

MF2. *La matrice Q di entrate Q_{ij} abbia rango $2d - 2n$ ovunque in $f(\mathcal{M})$.*

Allora:

(i) *Le fibre di f sono diffeomorfe a \mathbb{T}^n .*

(ii) *Ogni fibra di f ha un intorno U dotato di un diffeomorfismo*

$$\Psi := (b, \alpha) : U \mapsto \mathcal{B} \times \mathbb{T}^n \quad \text{con} \quad \mathcal{B} := b(U) \subset \mathbb{R}^{2d-n} \quad (1.3)$$

tale che le fibre di f coincidono con quelle di b e che è simplettico: scrivendo

$$b = (p_1, \dots, p_{d-n}, q_1, \dots, q_{d-n}, a_1, \dots, a_n),$$

si ha

$$\Omega|_U = \sum_{k=1}^{d-n} dp_k \wedge dq_k + \sum_{l=1}^n da_l \wedge d\alpha_l. \quad (1.4)$$

(iii) *Se una Hamiltoniana $h_0 : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ soddisfa $\{f_i, h_0\} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, 2d - n$, allora $h_0 \circ \Psi^{-1}$ dipende dalle sole azioni ed è detta *superintegrabile*.*

Le coordinate (a, α, p, q) sono dette *coordinate generalizzate di azione-angolo*: le “vere” azioni sono le a ; a volte le q sono angoli e in tal caso le p sono chiamate “azioni degeneri”.

Osservazione 1.1. Nello spazio delle fasi di un sistema superintegrabile sono presenti due fibrazioni¹, che indichiamo come $\mathcal{A} \xleftarrow{c} \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{B}$: per ogni $a \in \mathcal{A}$, stiamo individuando una fibra di c che a sua volta è una fibrazione di base la “foglia simplettica” di $f(\mathcal{M})$, che è una varietà di Poisson, e con fibre i tori \mathbb{T}^n . In questo contesto, le coordinate (a, α, p, q) hanno il seguente significato:

- $\alpha \in \mathbb{T}^n$ sono coordinate angolari sulle fibre di f , ossia i tori invarianti.
- (a, p, q) sono coordinate locali sulla base \mathcal{B} e $(p, q) \in \mathbb{R}^{2(d-n)}$ sono coordinate locali sulle foglie simplettiche.

¹che di fatto coincidono nel caso particolare in cui $n = d$ e allora si recupera il teorema 1.1

Un'efficace rappresentazione pittorica dello spazio delle fasi è fornita in [7]. Infatti, se pensiamo \mathcal{M} come un prato con fiori, \mathcal{A} è il prato, i fiori sono le fibre della fibrazione c , i petali sono i tori e i centri dei fiori le foglie simplettiche, cfr fig. 1.1.

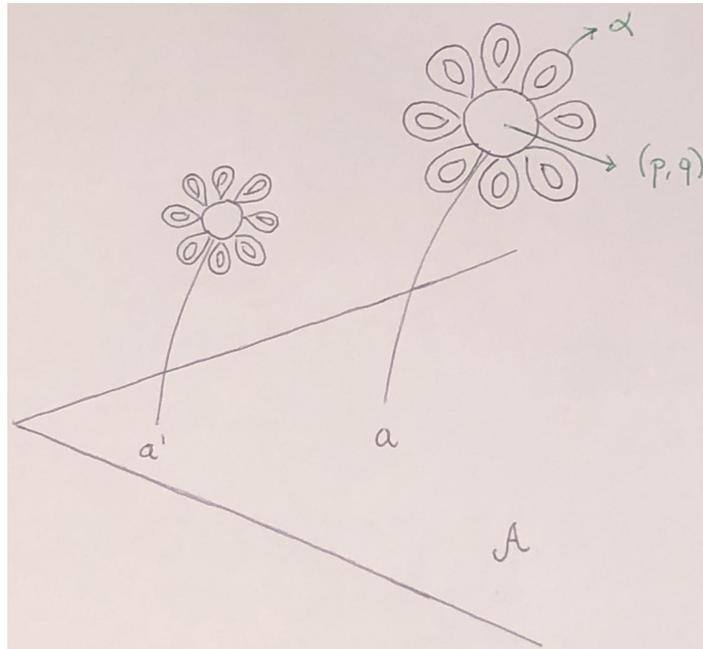


Figura 1.1: Rappresentazione pittorica dello spazio delle fasi di un sistema superintegrabile

Osservazione 1.2. Anche se le coordinate (a, α, p, q) sono definite localmente, la struttura geometrica appena descritta ha un carattere globale.

Mappa in frequenza. Consideriamo $h_0 = h_0(a)$. Allora la *mappa in frequenza* (o *vettore delle frequenze*) $\omega(a) := \nabla h_0(a)$ dipende solamente dalle azioni e quindi ogni fiore supporta moti con una data frequenza (in certi casi, quali Euler-Poinsot ma non necessariamente i campi centrali, esiste una corrispondenza biunivoca tra fiori e frequenze). Dal momento che fissata $a \in \mathcal{A}$ stiamo fissando un fiore cui corrisponde un vettore delle frequenze, possiamo distinguere tra fiori non risonanti e risonanti: nel primo caso $\omega(a) \cdot \nu \neq 0$ per ogni $\nu \in (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$, mentre nel secondo $\omega(a) \cdot \nu = 0$ per qualche $\nu \in (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$.

Campo centrale. Se si escludono i casi Kepleriano e quello dell'oscillatore armonico, un punto in campo centrale ha quattro (e non cinque: teorema di Bertrand) integrali primi indipendenti, che possono essere scelti come la Hamiltoniana e le tre componenti del momento angolare. Se il potenziale è definito e regolare anche nell'origine (come nel caso isocrono), in coordinate cartesiane lo spazio delle fasi è $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (p, q)$. Le parentesi di Poisson delle componenti della mappa $f = (H, M_x, M_y, M_z)$ soddisfano l'ipotesi MF1 del teorema 1.2 con matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_z & -M_y \\ 0 & -M_x & 0 & M_x \\ 0 & M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

che ha rango $6 - 4 = 2$ se $M \neq 0$. Allora il sistema è superintegrabile, con moti lineari su tori 2-dimensionali; nel sottoinsieme \mathcal{M} dello spazio delle fasi in cui le fibre di f sono compatte e connesse, ogni insieme di coordinate azione-angolo generalizzate è scrivibile come $(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q)$, con $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.

Come vedremo (nel caso del potenziale isocrono) nell'osservazione 3.3, le foglie simplettiche sono sfere bidimensionali descritte da $H = \text{cost.}$ ed $\|M\| = \text{cost.}$; quindi, a energia fissata, esse sono identificabili come sfere di norma costante i cui punti descrivono l'orientazione spaziale del piano ("istantaneo") dell'orbita.

1.2 Dinamica perturbativa

Indichiamo con $H_\epsilon(a, \alpha, p, q) = h_0(a) + \epsilon f(a, \alpha, p, q)$ (dove $\epsilon \geq 0$) la Hamiltoniana che definisce il sistema superintegrabile di Hamiltoniana h_0 perturbato da una funzione $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ (che assumiamo reale analitica). Allora le equazioni del moto sono

$$\dot{a} = -\epsilon \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = \omega + \epsilon \frac{\partial f}{\partial a}, \quad \dot{p} = -\epsilon \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \dot{q} = \epsilon \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (1.6)$$

Due fondamentali teoremi (per cui facciamo riferimento a [6] e [7]) spiegano il comportamento del sistema perturbato, per ogni d e per ogni n . Il *teorema KAM* afferma che, sotto condizioni di non-degeneratezza della mappa in frequenza, esiste un insieme di Cantor di misura grande costituito da fiori per ognuno dei quali la perturbazione crea un insieme di Cantor di misura grande formato da tori invarianti d -dimensionali sui quali i moti sono lineari per tutti i tempi. Il *teorema di Nekhoroshev*, assumendo opportune ipotesi di convessità o quasi-convessità per h_0 , fornisce² una stima di stabilità per le azioni su scale temporali esponenzialmente lunghe dell'ordine $T(\epsilon) \sim \exp\left[\left(\frac{\epsilon_*}{\epsilon}\right)^\beta\right]$ (per opportune costanti $\beta, \epsilon_* > 0$ e per $|\epsilon| < \epsilon_*$ con tipicamente $\beta = \frac{1}{2n}$); inoltre, esso consente di controllare anche il comportamento delle coordinate (α, p, q) grazie alla costruzione delle forme normali, adattate alle proprietà locali di risonanza del sistema imperturbato, che emergono nella dimostrazione del teorema.

Una volta fissata $a = \text{cost.}$, ciò che resta da studiare sono i moti $(p(t), q(t))$, i quali si svolgono sulla foglia simplettica, per le (1.6), con velocità proporzionale a ϵ . Quindi, l'analisi di tali moti diventa interessante per tempi $T \gg \epsilon^{-1}$. Attualmente si possiede una comprensione accurata di questi moti nel solo caso $d = 3$ ed $n = 2$, la quale indica comportamenti profondamente diversi a seconda che la condizione iniziale appartenga a fiori risonanti o non risonanti. La spiegazione di questi fatti si basa su uno dei punti salienti della dimostrazione del teorema di Nekhoroshev, ovvero la decomposizione della varietà azione in "zone" disgiunte, ciascuna caratterizzata da specifiche proprietà di risonanza.

L'analiticità di f implica che le sue armoniche di Fourier decadono esponenzialmente all'aumentare della norma L^1 di $\nu \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})$. Allora, dopo aver fissato un valore di "taglio" $N(\epsilon) \sim \left(\frac{\epsilon_*}{\epsilon}\right)^\beta$ (detto anche "cutoff"), si considerano come risonanti i vettori ν tali che

$$|\nu| := |\nu_1| + |\nu_2| \leq N(\epsilon) \quad (1.7)$$

²Precisamente, questo vale se le foglie simplettiche sono compatte; la formulazione del teorema di Nekhoroshev per i sistemi superintegrabili è dovuta a F. Fassò in [6].

mentre moti risonanti di ordine maggiore di $N(\epsilon)$ sono, sulla scala temporale $T(\epsilon) \sim N(\epsilon)^{-1}$, indistinguibili da moti non risonanti. Consideriamo poi tutti i reticoli $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^n$ dotati di un insieme di generatori di norma $L^1 \leq N(\epsilon)$ e, per ciascuno di essi, sia $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{A}$ la *zona risonante*, formata dai punti $a \in \mathcal{A}$ tali che $\omega(a) \cdot v = 0 \forall v \in \mathcal{L}$ e, allo stesso tempo, tali che $\omega(a)$ non presenti altre risonanze di ordine $\leq N(\epsilon)$ al di fuori dei vettori di \mathcal{L} . Infine, sia $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \setminus \cup_{\mathcal{L}} \mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$ la varietà azione svuotata di tutte le zone risonanti.

Dato iniziale non risonante. Prendiamo un dato iniziale $a_0 \in \mathcal{A}_0$ non risonante. Si può costruire un cambio di coordinate canonico che coniuga H_ϵ alla *forma normale non risonante*

$$h_0(a) + \epsilon f_0(a, p, q) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (1.8)$$

dove f_0 è la media di f sugli angoli α_1 e α_2 . Per questo motivo, la forma normale non risonante troncata $\tilde{H}_\epsilon(a, p, q) = h_0(a) + \epsilon f_0(a, p, q)$ è indipendente dagli angoli e ciò garantisce stime di stabilità per le (p, q) . Infatti, siccome \tilde{H}_ϵ si conserva e a è approssimativamente costante, f_0 deve pure conservarsi approssimativamente, quindi il moto delle (p, q) si mantiene $\mathcal{O}(\epsilon)$ -vicino alle curve di livello di f_0 sulle foglie simplettiche. L'effetto della perturbazione, che cala al diminuire di ϵ , è quello di provocare piccole oscillazioni attorno a questo andamento medio.

Dato iniziale risonante. Viceversa, consideriamo un dato iniziale risonante a_0 che appartenga alla zona risonante generata da un vettore $v \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})$ di norma $L^1 \leq N(\epsilon)$. Si può in essa costruire una *forma normale risonante* troncata

$$\tilde{H}_\epsilon(a, \sigma, p, q) = h_0(a) + \epsilon \bar{f}(a, \sigma, p, q). \quad (1.9)$$

dove $\sigma := v \cdot \alpha$. In questo caso, \tilde{H}_ϵ dipende da una combinazione lineare "lenta" di due angoli e il comportamento delle (p, q) è completamente diverso rispetto al caso precedente perché \bar{f} , dipendendo dagli angoli, non definisce curve di livello sulla foglia simplettica. In particolare le (p, q) possono invadere ampie regioni della foglia dando luogo a moti di natura erratica anche per ϵ piccoli.

Concludiamo con due osservazioni.

Osservazione 1.3.

- La quasi-convessità del campo centrale, e dunque l'applicabilità ad esso del teorema di Nekhoroshev, è stata dimostrata in [2].
- Le proprietà del moto lungo la foglia simplettica sono indagabili mediante la cosiddetta *teoria adiabatica* di Neishdadtd e altri (vedere [6] e le referenze ivi riportate).

Capitolo 2

Il potenziale isocrono di Hénon

Il *potenziale isocrono* è stato introdotto da M. Hénon in [11] per descrivere il campo di forza generato da certi ammassi globulari di stelle a simmetria sferica ed è (seguendo anche l'articolo [12] di J. Perez)

$$V(r) = -\frac{\mu m}{\beta + \sqrt{\beta^2 + r^2}} \quad (2.1)$$

dove μ e β sono costanti positive che dipendono dall'ammasso ed m è la massa del punto materiale (per esempio una stella) a distanza r dal centro.

Osservazione 2.1. Si noti che

$$\begin{aligned} V(r) + \frac{\mu m}{2\beta} &\propto r^2 && \text{per } r \rightarrow 0 \\ V(r) &\propto r^{-1} && \text{per } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

cioè $V(r)$ si comporta come un potenziale armonico o Kepleriano rispettivamente in prossimità del centro e a grandi distanze dall'ammasso (vedere anche la fig. 2.1, realizzata prendendo $\mu = 1 = \beta$).

Osservazione 2.2. La struttura dell'ammasso stellare che crea il potenziale isocrono è caratterizzata da una densità di massa $\rho(r)$ tale che $\rho(r) \rightarrow \rho_0 < \infty$ per $r \rightarrow 0$ e $\rho(r) \sim \mathcal{O}(r^{-3})$ per $r \rightarrow \infty$ (vedere la fig. 2.2). In realtà, nella sua deduzione, Hénon non parte da $\rho(r)$ per ricavare $V(r)$, ma procede sostanzialmente al contrario. Infatti, notando che sia per il potenziale armonico sia per quello Kepleriano è possibile calcolare esplicitamente il periodo della coordinata radiale e che in particolare quest'ultimo risulta indipendente dal momento angolare, egli cerca la forma più generale del potenziale $V(r)$ tale per cui il periodo della coordinata radiale dipenda solo dall'energia e non dal momento angolare (da cui l'aggettivo *isocrono*). A questo punto, grazie all'espressione (2.1) di $V(r)$, Hénon ricava¹ $\rho(r)$ e osserva che quest'ultima presenta una somiglianza notevole con alcuni dati sperimentali disponibili nel 1958-1959 (cfr. pagg. 10-11 di [11]).

¹usando l'equazione di Poisson $\frac{d^2V(r)}{dr^2} = 4\pi\mathcal{G}\rho(r)$, con \mathcal{G} la costante di gravità

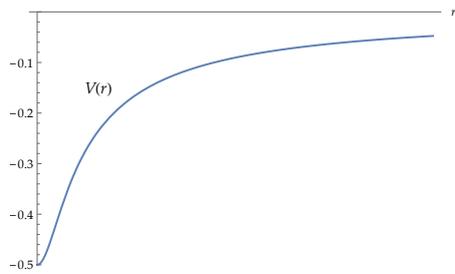


Figura 2.1: Potenziale isocrono

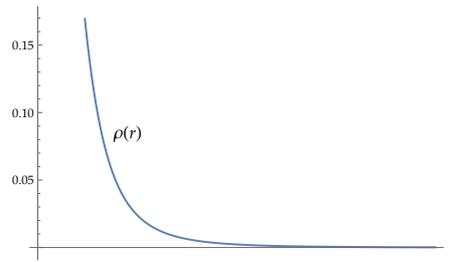


Figura 2.2: Densità di massa

Osservazione 2.3. Scegliamo questo potenziale come esempio di campo centrale non tanto per il suo interesse astrofisico ma perché ci consente di ricavare esplicitamente un insieme di coordinate azione-angolo, come vedremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 3

Variabili azione-angolo per il potenziale isocrono

In questo capitolo esprimiamo il problema definito dal potenziale isocrono nella sua formulazione Hamiltoniana e forniamo un insieme di variabili azione-angolo, seguendo tecniche leggermente diverse (e forse più brevi) rispetto a quelle implementate in [9], dove gli autori si basano sull'equazione di Hamilton-Jacobi.

3.1 Hamiltoniana del sistema

Lavorando in coordinate cartesiane e ponendo $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il potenziale (2.1) si scrive come

$$V(\|q\|) = -\frac{\mu m}{\beta + \sqrt{\beta^2 + \|q\|^2}}.$$

La Lagrangiana, definita su spazio delle fasi $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6 \ni (q, \dot{q})$, è

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 + \frac{\mu m}{\beta + \sqrt{\beta^2 + \|q\|^2}}.$$

Tramite il riscaldamento della coordinata $q := \beta Q$ e dividendo per $m\beta^2$, otteniamo

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \|\dot{Q}\|^2 + \frac{\mu}{\beta^3} \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + \|Q\|^2})}.$$

Infine, eliminando il fattore $\frac{\mu}{\beta^3}$ a seguito del riscaldamento del tempo $t \mapsto \sqrt{\frac{\beta^3}{\mu}} t$ e rinominando $Q \equiv q$, giungiamo a

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \|\dot{q}\|^2 + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \|q\|^2}}.$$

In coordinate sferiche $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times S^1 \times (0, \pi)$ tali per cui $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \phi$, dove S^1 indica il cerchio unitario, θ la longitudine e ϕ la colatitudine, $L(q, \dot{q})$ diventa

$$L(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \phi \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + r^2}}. \quad (3.1)$$

Perciò i momenti coniugati sono

$$p_r = \dot{r} \quad p_\theta = r^2 \sin^2 \phi \dot{\theta} \quad p_\phi = r^2 \dot{\phi} \quad (3.2)$$

e la Hamiltoniana, definita in

$$\hat{\Omega} = \{(p_r, p_\theta, p_\phi, r, \theta, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^1 \times (0, \pi)\}, \quad (3.3)$$

risulta

$$H(p_r, p_\theta, p_\phi, r, \theta, \phi) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{p_\theta^2}{\sin^2 \phi} + p_\phi^2 \right) - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + r^2}}. \quad (3.4)$$

Questa è la Hamiltoniana che descrive il problema nello spazio tridimensionale; tuttavia, per il calcolo delle variabili di azione-angolo, partiamo prima dal caso piano e poi generalizzeremo a quello spaziale.

3.2 Caso piano

Nel potenziale isocrono, come in ogni campo centrale, il moto si svolge su un piano determinato dal momento angolare e, per il teorema di Bertrand, la restrizione del sistema a un piano non è superintegrabile ma solo completamente integrabile. Denotando con (r, θ) le coordinate polari e con (p_r, p_θ) i loro momenti associati, lo spazio delle fasi del problema piano è

$$\hat{\Gamma} = \{(p_r, p_\theta, r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^1\} \quad (3.5)$$

e la Hamiltoniana è

$$H(p_r, p_\theta, r, \theta) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + r^2}}. \quad (3.6)$$

3.2.1 Applicazione del teorema di Liouville-Arnold

Dal momento che il sistema (3.6) è invariante per rotazioni, la Hamiltoniana e il momento angolare p_θ sono integrali primi. La riduzione sotto rotazioni della restrizione del sistema all'insieme di livello $p_\theta = G \neq 0$ è il sistema a un grado di libertà per la coordinata radiale di Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_G(p_r, r) = \frac{p_r^2}{2} + V_G(r) \quad \text{con} \quad V_G(r) := \frac{G^2}{2r^2} + V(r) \quad (3.7)$$

($V_G(r)$ è il potenziale efficace). Gli equilibri della Hamiltoniana ridotta $\mathcal{H}_G(p_r, r)$ sono i punti $(r^*, 0)$ con $V'_G(r^*) = 0$. Infatti, la derivata $V'_G(r) = -\frac{G^2}{r^3} + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}(1+\sqrt{1+r^2})^2}$ si annulla solo in

$$r^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4G^2 + G^4 + (2G + G^3)\sqrt{4 + G^2}} \quad (3.8)$$

in cui $V_G(r)$ assume il suo valor minimo $V_G(r^*)$. (In realtà esiste un'altra soluzione positiva di $V'_G(r) = 0$, ossia $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4G^2 + G^4 - (2G + G^3)\sqrt{4 + G^2}}$, ma il radicando non è definito positivo per tutti i valori di $G \neq 0$.) Questi punti $(r^*, 0)$ corrispondono agli "equilibri relativi" del sistema

completo nel piano, ovvero i moti circolari descritti da

$$\left(r(t) \equiv r^* \in \mathbb{R}^+, \theta(t) = \theta(0) + \frac{G}{(r^*)^2} t \right) \quad \forall t. \quad (3.9)$$

Verifichiamo ora in quale sottoinsieme dello spazio delle fasi H e p_θ soddisfano le ipotesi del teorema 1.1 di Liouville-Arnold, facendo anche riferimento alla fig. 3.1.

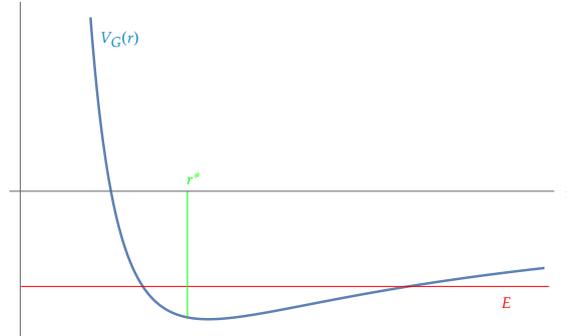


Figura 3.1: Grafico del potenziale efficace e dell'energia totale tale per cui $\frac{p_r^2}{2} + V_G(r) = E$ definisce una curva chiusa

Proposizione 3.1. Consideriamo le funzioni $H, p_\theta : \hat{\Gamma} \mapsto \mathbb{R}$.

(i) H e p_θ sono in mutua involuzione rispetto alle parentesi di Poisson e indipendenti in tutto il sottoinsieme dello spazio delle fasi ove $G \neq 0$ privato dei punti degli equilibri relativi (3.9).

(ii) Se $E < 0$, gli insiemi di livello regolari

$$\mathcal{M}_{EG} = \left\{ (p_r, p_\theta, r, \theta) \in \hat{\Gamma} : \frac{p_r^2}{2} + V_G(r) = E, p_\theta = G \right\} \quad (3.10)$$

sono diffeomorfi al toro \mathbb{T}^2 .

Dimostrazione. (i) La commutazione $\{H, G\} = 0$ segue subito dal fatto che G è integrale primo. Gli integrali primi sono indipendenti se i gradienti

$$\nabla H = \left(p_r, \frac{p_\theta}{r^2}, \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\theta^2}{2r^2} + V(r) \right), 0 \right) \quad \nabla G = (0, 1, 0, 0)$$

sono linearmente indipendenti, ossia se $p_\theta = G \neq 0$ in ogni $(p_r, p_\theta, r, \theta) \in \hat{\Gamma}$ tranne quelli per cui

$$\begin{cases} p_r = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\theta^2}{2r^2} + V(r) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Questi atti di moto corrispondono proprio agli equilibri relativi.

(ii) Fissati $G \neq 0$ ed $E \geq V_G(r^*)$, mostriamo che se $E \in (V_G(r^*), 0)$ allora \mathcal{M}_{EG} è compatto e connesso. Infatti, come si può anche vedere dalla fig. 3.1, gli andamenti asintotici di $V_G(r)$ sono

$$\begin{aligned} V_G(r) &\rightarrow \infty && \text{per } r \rightarrow 0^+ \\ V_G(r) &\rightarrow 0^- && \text{per } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

e $\frac{p_r^2}{2} + V_G(r) = E$ è una curva chiusa. \square

Osservazione 3.1. Il sistema ridotto di Hamiltoniana $\mathcal{H}_G(p_r, r)$ ha dinamica periodica e, per definizione stessa di isocronia (cfr. capitolo 2), il periodo della coordinata radiale $T_r(E)$ risulta indipendente da G . D'altro canto, denotando con $\Delta\theta$ l'avanzamento in θ durante un periodo T_r , in [13] si dimostra che

$$T_r = T_r(E) \Leftrightarrow \Delta\theta = \Delta\theta(G). \quad (3.12)$$

Le formule esplicite di T_r e $\Delta\theta$ sono ricavate in appendice A e in [14] e risultano:

$$T_r(E) = 2\pi \left(-\frac{1}{2E} \right)^{3/2} \quad \Delta\theta(G) = \pi \left(1 + \frac{G}{\sqrt{G^2 + 4}} \right). \quad (3.13)$$

Queste saranno utili nella prossima sottosezione.

3.2.2 Costruzione degli angoli

Ora indichiamo con $p = (p_r, p_\theta)$ e con $q = (r, \theta)$. Dati E e G , siano poi

$$\bar{p}(E, G) = (0, G) \quad \text{e} \quad \bar{q}(E, G) = (\bar{r}(E, G), 0) \quad (3.14)$$

con $\bar{r}(E, G)$ la più piccola soluzione (positiva) di $V_G(r) = E$ (di fatto stiamo individuando quell'unica orbita di energia E e momento angolare G che ha un pericentro sul semiasse $x > 0$).

Proposizione 3.2. Una scelta di variabili angolari (α_1, α_2) su \mathcal{M}_{EG} , definite modulo 2π , è

$$\alpha_1(p, q) = (-2E)^{3/2} \tau_E(p, q) \quad \alpha_2(p, q) = \tau_G(p, q) + \sqrt{2}(-E)^{3/2} \left(-1 + \frac{G}{\sqrt{G^2 + 4}} \right) \tau_E(p, q) \quad (3.15)$$

dove $\tau_E(p, q)$ e $\tau_G(p, q)$ sono i tempi necessari per raggiungere per la prima volta il punto di coordinate $(p, q) \in \mathcal{M}_{EG}$ a partire dal punto $(\bar{p}(E, G), \bar{q}(E, G))$ percorrendo i flussi dei campi vettoriali Hamiltoniani X_H e X_G di H e G rispettivamente.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in tre passi principali e si avvale di tecniche e risultati noti dalla dimostrazione del teorema di Liouville-Arnold.

Passo 1: Calcolo dei flussi associati agli integrali primi. Dal teorema di Liouville-Arnold si sa che, scelto un punto $(p, q) \in \mathcal{M}_{EG}$, è possibile raggiungerlo partendo da (\bar{p}, \bar{q}) e componendo i flussi di X_k (per $k = E, G$), indicati come $\Phi_{\tau_k}^k$.

(i) Il flusso di $X_G = \frac{\partial}{\partial \theta}$ agisce per traslazioni di angolo θ , pertanto per ogni $\tau_G \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\Phi_{\tau_G}^G(\bar{p}(E, G), \bar{q}(E, G)) = (\bar{p}_r(E, G), G, \bar{r}(E, G), \bar{\theta}(E, G) + \tau_G). \quad (3.16)$$

(ii) Denotando con $p_r(E, G; t)$ ed $r(E, G; t)$ le soluzioni delle equazioni di Hamilton di $\mathcal{H}_G(p_r, r)$ con dati iniziali $(0, \bar{r}(E, G))$, abbiamo che per ogni $\tau_E \in \mathbb{R}$

$$\Phi_{\tau_E}^H(\bar{p}(E, G), \bar{q}(E, G)) = \left(p_r(E, G; \tau_E), G, r(E, G; \tau_E), \int_0^{\tau_E} \frac{G}{r(E, G; t)^2} dt \right). \quad (3.17)$$

Passo 2: Calcolo della matrice dei periodi. A questo punto, indicando con $\Phi_\tau := \Phi_{\tau_E}^H \circ \Phi_{\tau_G}^G$ la composizione dei due flussi, determiniamo i $\tau = (\tau_E, \tau_G) \in \mathbb{R}^2$, chiamati "periodi", tali che

$\Phi_\tau(\bar{p}(E, G), \bar{q}(E, G)) = (\bar{p}(E, G), \bar{q}(E, G))$, cioè

$$\begin{aligned} & \left(p_r(E, G; \tau_E), G, r(E, G; \tau_E), \bar{\theta}(E, G) + \int_0^{\tau_E} \frac{G}{r(E, G; t)^2} dt + \tau_G \right) = \\ & = (\bar{p}_r(E, G), G, \bar{r}(E, G), \bar{\theta}(E, G)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

(i) Affinché valga $p_r(E, G; \tau_E) = \bar{p}_r(E, G)$ dobbiamo porre $\tau_E = m_E T_r$, con $m_E \in \mathbb{Z}$.

(ii) Sia

$$\Delta\theta(G) := \int_0^{T_r(E)} \frac{G}{r(E, G; t)^2} dt. \quad (3.19)$$

Allora

$$\int_0^{m_E T_r(E)} \frac{G}{r(E, G; t)^2} dt = m_E \Delta\theta(G)$$

e quindi, per ogni $m_G \in \mathbb{Z}$, abbiamo

$$\bar{\theta}(E, G) = \text{mod}(\bar{\theta}(E, G) + \tau_G + m_E \Delta\theta(G), 2\pi) \Leftrightarrow \tau_G + m_E \Delta\theta(G) \in 2\pi \mathbb{Z}$$

ossia $\tau_G = m_E(2\pi - \Delta\theta(G)) + m_G 2\pi$.

Perciò l'insieme dei periodi è

$$\mathcal{T} = \{ \tau \in \mathbb{R}^2 : \tau_E = m_E T_r(E), \tau_G = m_E(2\pi - \Delta\theta(G)) + m_G 2\pi \text{ con } m_E, m_G \in \mathbb{Z} \} \quad (3.20)$$

e la "matrice dei periodi" e la sua inversa sono

$$P(E, G) = \begin{pmatrix} T_r(E) & 0 \\ 2\pi - \Delta\theta(G) & 2\pi \end{pmatrix} \quad P^{-1}(E, G) = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_r(E)} & 0 \\ \frac{\Delta\theta(G) - 2\pi}{2\pi T_r(E)} & \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Passo 3: Calcolo degli angoli. Infine abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 2\pi P^{-1} \begin{pmatrix} \tau_E \\ \tau_G \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\pi}{T_r(E)} \tau_E \\ \alpha_2 = \tau_G + \frac{\Delta\theta(G) - 2\pi}{T_r(E)} \tau_E \end{cases}. \quad (3.22)$$

Usando le espressioni (3.13) si ritrovano precisamente le formule (3.15). \square

3.2.3 Costruzione delle azioni

Si può ora procedere con il calcolo delle azioni. Per semplificare la notazione scriviamo $f = (E, G)$.

Proposizione 3.3. *Le variabili di azione $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, risultanti dalla scelta degli angoli come in (3.15), sono*

$$a_1 = -\frac{1}{\sqrt{-2E}} + \frac{G}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{G^2 + 4} \quad a_2 = G. \quad (3.23)$$

Dimostrazione. Siccome sappiamo che la trasformazione dalle coordinate tempo-energia (τ, f) alle (a, α) è симпlettica, allora abbiamo $\frac{\partial a_i(E, G)}{\partial f_j} = \frac{1}{2\pi} P_{ji}(E, G)$ per $i, j = 1, 2$ (cfr. par. 2.2.C di [4]). Quindi, dall'espressione (3.21) della matrice dei periodi ricaviamo il seguente sistema di derivate

parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial E} = \left(-\frac{1}{2E}\right)^{3/2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial G} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G}{\sqrt{G^2+4}}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial a_2}{\partial E} = 0 \\ \frac{\partial a_2}{\partial G} = 1 \end{cases} .$$

Perciò otteniamo semplicemente $a_2(E, G) \equiv a_2(G) = G$, mentre per a_1 abbiamo

$$a_1(E, G) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} \int \frac{1}{(-E)^{3/2}} dE + \tilde{a}_1(G) = -\frac{1}{\sqrt{-2E}} + \tilde{a}_1(G)$$

dove

$$\frac{\partial a_1}{\partial G} = \frac{d\tilde{a}_1}{dG} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G}{\sqrt{G^2+4}}\right) \Rightarrow \tilde{a}_1(G) = \frac{G}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{G^2+4}.$$

Questo dimostra l'enunciato. □

Infine, invertendo la formula per $a_1(E, G)$ e usando il fatto che $a_2(G) = G$, deduciamo l'espressione della Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}$ in funzione delle coordinate di azione-angolo per il caso piano, ossia

$$H(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{a_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_2^2+4} - a_1\right)^2} \equiv H(a_1, a_2) \quad (3.24)$$

la quale, come atteso, risulta indipendente dagli angoli.

3.2.4 Parametrizzazione dei punti del toro bidimensionale

Concludiamo questa sezione esprimendo (p_x, p_y, x, y) in funzione delle $(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2)$.

Invertendo le espressioni (3.15) rispetto ai tempi τ_E e τ_G e usando che $G = a_2$ ed $E = H$ scritta in (3.24), otteniamo innanzitutto i tempi in funzione delle coordinate azione-angolo:

$$\tau_E(a, \alpha) = \alpha_1 \left(\frac{a_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_2^2+4} - a_1\right)^3 \quad \tau_G(a, \alpha) = \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2} \left(-1 + \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+4}}\right). \quad (3.25)$$

Sfruttando la (3.18) la quale, grazie alle (3.25), fornisce le coordinate polari in funzione delle (a, α) , ricaviamo subito che

$$x(a, \alpha) = r(a, \alpha) \cos(\Delta\theta(a, \alpha) + \tau_G(a, \alpha)) \quad y(a, \alpha) = r(a, \alpha) \sin(\Delta\theta(a, \alpha) + \tau_G(a, \alpha)) \quad (3.26)$$

dove $\Delta\theta(a, \alpha) := \int_0^{\tau_E(a, \alpha)} \frac{a_2}{r(E, G; t)^2} dt$. Per trasformare i momenti, avvalendoci della condizione di Liouville

$$\begin{aligned} p \cdot dq &= p_x dx + p_y dy = p_x d(r \cos \theta) + p_y d(r \sin \theta) = \\ &= (p_x \cos \theta + p_y \sin \theta) dr + (p_y r \cos \theta - p_x r \sin \theta) d\theta = p_r dr + p_\theta d\theta, \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} p_x(a, \alpha) = p_r(a, \alpha) \cos(\Delta\theta(a, \alpha) + \tau_G(a, \alpha)) - \frac{a_2}{r(a, \alpha)} \sin(\Delta\theta(a, \alpha) + \tau_G(a, \alpha)) \\ p_y(a, \alpha) = p_r(a, \alpha) \sin(\Delta\theta(a, \alpha) + \tau_G(a, \alpha)) + \frac{a_2}{r(a, \alpha)} \cos(\Delta\theta(a, \alpha) + \tau_G(a, \alpha)) \end{cases} \quad (3.27)$$

3.3 Caso spaziale

Ora torniamo al caso tridimensionale, utilizzando i risultati della sezione precedente.

Osservazione 3.2. Si costruisce un sistema (locale) di coordinate azione-angolo generalizzate del sistema superintegrabile spaziale come coordinate azione-angolo del sistema riguardato come completamente integrabile, con la scelta, fra i quattro integrali primi, di tre in involuzione.

3.3.1 Applicazione del teorema di Liouville-Arnold

Osserviamo che, per ogni valore di $G := \|M\| \neq 0$, il sistema completo ha in ogni piano i moti circolari (3.9), che sono ancora equilibri relativi. La proposizione 3.1 si generalizza nel modo seguente al caso spaziale.

Proposizione 3.4. Dato $\hat{\Omega}$ definito in (3.3),

- (i) Le funzioni $H, G := \|M\|, J := M_z = p_\phi : \hat{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ sono in mutua involuzione rispetto alle parentesi di Poisson e indipendenti nel sottoinsieme dello spazio delle fasi ove $M \neq 0$ eccetto che negli equilibri relativi (3.9).
- (ii) Per $E < 0$, i loro insiemi di livello regolari

$$\mathcal{M}_{EGJ} = \left\{ (p_r, p_\theta, p_\phi, r, \theta, \phi) \in \hat{\Omega} : \frac{p_r^2}{2} + V_G(r) = E, \frac{p_\theta^2}{\sin^2 \phi} + J^2 = G^2, p_\phi = J \right\} \quad (3.28)$$

sono diffeomorfi al toro \mathbb{T}^3 .

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla proposizione 3.1.

- (i) Siccome G e J sono integrali primi, allora $\{H, G\} = \{H, J\} = 0$; il fatto che $\{J, G^2\} = 0$ è pure immediato. Notiamo poi che

Lemma 3.1. Il modulo del momento angolare si esprime come

$$G = \sqrt{\frac{p_\theta^2}{\sin^2 \phi} + p_\phi^2}. \quad (3.29)$$

Dimostrazione del lemma. Abbiamo

$$G^2 = \|q \times p\|^2 = \|q\|^2 \|p\|^2 - (q \cdot p)^2.$$

Inoltre,

$$H(p, q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(\|q\|) \quad \Rightarrow \quad \|p\|^2 = 2(H - V)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} G^2 &= 2 \|q\|^2 (H - V) - (q \cdot p)^2 = 2r^2 \left[\frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{p_\theta^2}{\sin^2 \phi} + p_\phi^2 \right) \right] - (rp_r)^2 = \\ &= \frac{p_\theta^2}{\sin^2 \phi} + p_\phi^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che, scrivendo la posizione come $q = r e_r$ e il momento come $p = p_r e_r + p_\theta e_\theta + p_\phi e_\phi$, otteniamo semplicemente che $q \cdot p = rp_r$ (con e_r, e_θ ed e_ϕ versori associati a r, θ, ϕ). \square

Gli integrali primi sono indipendenti se i gradienti

$$\begin{aligned} \nabla H &= \left(p_r, \frac{p_\theta}{r^2 \sin^2 \phi}, \frac{p_\phi}{r^2}, \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\theta^2}{2r^2 \sin^2 \phi} + V(r) \right), 0, -\frac{p_\theta^2 \cos \phi}{r^2 \sin^3 \phi} \right) \\ \nabla G &= \left(0, \frac{p_\theta}{G \sin^2 \phi}, \frac{p_\phi}{G}, 0, 0, -\frac{p_\theta^2 \cos \phi}{G \sin^3 \phi} \right) \quad \nabla J = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

sono linearmente indipendenti. Imponendo che $c_1 \nabla H + c_2 \nabla G + c_3 \nabla J = 0$, per generiche costanti reali c_1, c_2 e c_3 , otteniamo due casi:

- (1) Se $c_1 = 0$, allora anche $c_2 = c_3 = 0$.
- (2) Se invece $c_1 \neq 0$ abbiamo le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\theta^2}{2r^2 \sin^2 \phi} + V(r) \right) = 0 \quad c_2 = -\frac{G}{r^2} c_1 \quad p_r = 0 \quad c_3 = 0.$$

Perciò, se $G \neq 0$, gli integrali primi sono indipendenti per ogni $(p_r, p_\theta, p_\phi, r, \theta, \phi) \in \hat{\Omega}$ tranne quelli per cui

$$\begin{cases} p_r = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\theta^2}{2r^2 \sin^2 \phi} + V(r) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

ovvero gli equilibri relativi.

- (ii) L'insieme di livello \mathcal{M}_{EGJ} espresso in (3.28) è compatto e connesso se la prima e la seconda equazione definiscono due curve chiuse, ovvero per $E \in (V_G(r^*), 0)$ e per $|J| < G$, con $G > 0$ ed r^* come in (3.8). \square

Osservazione 3.3. La condizione $J \in (-G, G)$ significa che stiamo trascurando i moti con "inclinazione nulla", cioè quelli per cui il momento angolare è parallelo all'asse z . Possiamo così capire che le coordinate sulle foglie simplettiche sono locali. In particolare, tenendo conto che $E < 0$ e che $M \neq 0$ (con i vincoli espressi nel punto (ii) della dimostrazione precedente), la base della fibrazione in tori $\mathcal{M}_{EGJ} \mapsto \mathcal{B}$ è una varietà di dimensione 4 scrivibile come $\mathcal{B} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \times S^2$, con $a \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ e $(p, q) \in S^2$. Come anticipato nella sottosezione 1.1.2, abbiamo allora provato che, a energia E fissata, le foglie simplettiche sono le sfere bidimensionali descritte da $\|M\| = \text{cost}$.

3.3.2 Costruzione delle variabili di azione-angolo e Hamiltoniana superintegrabile

Possiamo quindi concludere che

Proposizione 3.5. *Un insieme (locale) di coordinate azione-angolo per il problema isocrono spaziale è dato da*

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{\sqrt{-2E}} + \frac{G}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{G^2 + 4} \\ a_2 = G \\ a_3 = J \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \text{mod}((-2E)^{3/2} \tau_E, 2\pi) \\ \alpha_2 = \text{mod}\left(\tau_G + \sqrt{2}(-E)^{3/2} \left(-1 + \frac{G}{\sqrt{G^2+4}}\right) \tau_E, 2\pi\right) \\ \alpha_3 = \text{mod}(j, 2\pi) \end{cases} \quad (3.31)$$

dove j è l'angolo formato fra il versore e_x e la linea dei nodi $e_n := \frac{e_z \times M}{\|e_z \times M\|}$ (si veda la fig. 3.2). La Hamiltoniana scritta in tali coordinate assume la forma

$$H(a, \alpha) \equiv H(a) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{a_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_2^2 + 4} - a_1\right)^2}. \quad (3.32)$$

Osservazione 3.4. Alcuni commenti alla proposizione precedente:

- Nella sottosezione 1.1.2, abbiamo detto che, per un campo centrale, lo spazio delle fasi è foliato in tori bidimensionali $\mathbb{T}^2 \ni (\alpha_1, \alpha_2)$ e non tridimensionali. Allora è concettualmente più corretto scrivere $(a, \alpha) = (a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2)$ e pensare $(J, j) \in (-G, G) \times (0, 2\pi)$ come coordinate di tipo cilindrico. Di fatto, quindi, le (a, α, J, j) sono un insieme di coordinate azione-angolo generalizzate, nell'accezione specificata dal teorema 1.2. Lavorando in tali coordinate, i quattro integrali primi risultano le tre azioni e l'angolo j .
- Ribadiamo che le coordinate (a, α, J, j) sono *coordinate locali*, quindi, se volessimo ad esempio studiare il moto passante per il polo, dovremmo scegliere un diverso insieme di coordinate.
- Siccome il sistema è superintegrabile, la Hamiltoniana scritta in coordinate azione-angolo generalizzate non dipende dagli angoli e neppure da J . Essa ha la stessa espressione di quella trovata nel caso piano, ovvero la (3.24).
- Di fatto, dalle eqq. (3.31) e ricordando l'espressione (3.13) del periodo della coordinata radiale, vediamo che $\alpha_1 = \frac{2\pi}{T_r} \tau_E$, similmente al caso Kepleriano (cfr. par. 3.4.A di [4]), ma con la differenza che ora compare il periodo della coordinata radiale T_r e non il periodo del moto. Quindi α_1 ha un significato molto simile a quello di "anomalia media" del caso Kepleriano, mentre α_2 non ha il significato di "longitudine del pericentro" (a differenza delle orbite Kepleriane, quelle del problema isocrono non sono chiuse).

3.3.3 Parametrizzazione dei punti del toro tridimensionale

Infine, scriviamo (p_x, p_y, p_z, x, y, z) in funzione delle $(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, J, j)$ (questo sarà utile nella sezione 4.2 per esprimere i dati iniziali (p_0, q_0) in funzione di $(a_0, \alpha_0, J_0, j_0)$). Per fare ciò, come ora mostriamo, è sufficiente sfruttare i risultati del caso piano, esposti nella sottosezione 3.2.4, e individuare un'opportuna matrice di rotazione. In particolare,

Proposizione 3.6. Il legame fra i momenti e le posizioni della terna cartesiana e le coordinate di azione-angolo generalizzate è

$$\begin{cases} p_x(a, \alpha, J, j) = p_{x'}(a, \alpha) \cos j - p_{y'}(a, \alpha) \sin j \\ p_y(a, \alpha, J, j) = \frac{J}{G} (p_{x'}(a, \alpha) \sin j + p_{y'}(a, \alpha) \cos j) \\ p_z(a, \alpha, J, j) = \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} (p_{x'}(a, \alpha) \sin j + p_{y'}(a, \alpha) \cos j) \end{cases} \quad (3.33)$$

e

$$\begin{cases} x(a, \alpha, J, j) = x'(a, \alpha) \cos j - y'(a, \alpha) \sin j \\ y(a, \alpha, J, j) = \frac{J}{G} (x'(a, \alpha) \sin j + y'(a, \alpha) \cos j) \\ z(a, \alpha, J, j) = \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} (x'(a, \alpha) \sin j + y'(a, \alpha) \cos j) \end{cases} \quad (3.34)$$

dove $(x'(a, \alpha), y'(a, \alpha))$ e $(p_{x'}(a, \alpha), p_{y'}(a, \alpha))$ sono date rispettivamente dalle eqq. (3.26) e (3.27).

Dimostrazione. Cerchiamo una terna cartesiana (x, y, z) in cui il piano (x, y) sia ortogonale alla direzione del momento angolare, ovvero in cui M sia parallelo al versore e_z . A questo scopo, rinominiamo $(x'(a, \alpha), y'(a, \alpha))$ le coordinate $(x(a, \alpha), y(a, \alpha))$ trovate in (3.26) nel caso piano e completiamole alle (x', y', z') con $z' = 0$. Analogamente, per i momenti consideriamo $(p_{x'}, p_{y'}, p_{z'})$ con $(p_{x'}(a, \alpha), p_{y'}(a, \alpha))$ dati in (3.27) e $p_{z'} = 0$. L'estensione canonica ai momenti è

$$\begin{aligned} C_R : \mathbb{R}^6 &\mapsto \mathbb{R}^6 \\ (p', q') &\mapsto C_R(p', q') = (R^{-T}p', Rq') = (Rp', Rq') := (p, q) \end{aligned}$$

con $R \in \text{SO}(3)$. In forma matriciale la trasformazione agisce come

$$C_R \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la forma esplicita di R , facendo riferimento alla fig. 3.2.

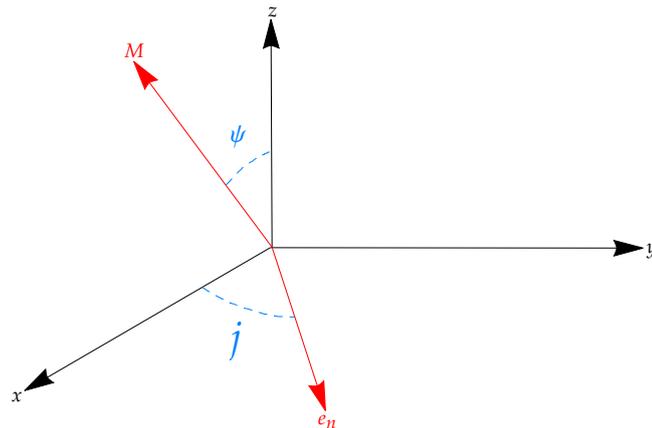


Figura 3.2: Rappresentazione della linea dei nodi e_n e degli angoli j e ψ

La linea dei nodi $e_n := \frac{e_z \times M}{\|e_z \times M\|}$ e l'angolo j sono già stati introdotti nella proposizione 3.5; notiamo poi che

$$\cos \psi = \frac{M \cdot e_z}{\|M\| \|e_z\|} = \frac{J}{G} \quad \Rightarrow \quad \sin \psi = \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}}$$

con $\psi \in (0, \pi)$ e ricordando che $|J| < G$. Applichiamo ora due rotazioni consecutive: la prima ruota i versori e_x ed e_y di angolo j in verso antiorario, portando quindi e_x a coincidere con e_n ; la seconda porta M a essere parallelo e_z . Quindi la matrice che stiamo cercando è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos j & -\sin j & 0 \\ \sin j & \cos j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos j & -\sin j & 0 \\ \cos \psi \sin j & \cos \psi \cos j & -\sin \psi \\ \sin \psi \sin j & \sin \psi \cos j & \cos \psi \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \cos j & -\sin j & 0 \\ \frac{J}{G} \sin j & \frac{J}{G} \cos j & -\sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} \\ \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} \sin j & \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} \cos j & \frac{J}{G} \end{pmatrix} := R\left(\frac{J}{G}, j\right) \quad (3.35)$$

Pertanto, le formule per le posizioni sono

$$\begin{pmatrix} x(a, \alpha, J, j) \\ y(a, \alpha, J, j) \\ z(a, \alpha, J, j) \end{pmatrix} = R\left(\frac{J}{G}, j\right) \begin{pmatrix} x'(a, \alpha) \\ y'(a, \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(a, \alpha, J, j) = x'(a, \alpha) \cos j - y'(a, \alpha) \sin j \\ y(a, \alpha, J, j) = \frac{J}{G} (x'(a, \alpha) \sin j + y'(a, \alpha) \cos j) \\ z(a, \alpha, J, j) = \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} (x'(a, \alpha) \sin j + y'(a, \alpha) \cos j) \end{cases}$$

e in modo del tutto analogo si ottengono quelle per i momenti. □

Capitolo 4

Analisi perturbativa

In questo capitolo iniziamo descrivendo la varietà azione del sistema, trovando la condizione di (non)risonanza e individuando una possibile scelta per la perturbazione; successivamente mostriamo e commentiamo i risultati ottenuti tramite integrazione numerica, alla luce di quanto esposto nella sezione 1.2.

4.1 Fatti preliminari

4.1.1 Varietà azione

Ricordiamo che, in coordinate di azione-angolo generalizzate, la varietà simplettica è

$$\mathcal{M} = \{(a, \alpha, J, j) : (a_1, a_2) \in \mathcal{A}, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{T}^2, J \in (-a_2, a_2), j \in (0, 2\pi)\} \quad (4.1)$$

con \mathcal{A} la varietà azione esprimibile come

$$\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < 0, a_2 \in (0, G_c)\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (4.2)$$

dove G_c indica il momento angolare delle orbite circolari. Infatti, dalle eqq. (3.31) segue che $a_1 < 0$. Inoltre, riprendendo le tecniche descritte da Hénon in [11],

Lemma 4.1. *Data l'energia $E < 0$, il massimo valore permesso per G è quello $G_c(E)$ delle orbite circolari di energia E .*

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta nel caso piano. Iniziamo definendo la variabile $x := 2r^2 \geq 0$ e poniamo

$$f(x) := x V\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right). \quad (4.3)$$

Allora si mostra che $f(x)$ è una parabola di equazione

$$f(x) = 2 - 2\sqrt{1 + \frac{x}{2}}. \quad (4.4)$$

Ricordando poi la formula (3.7) della Hamiltoniana in coordinate polari ristretta agli insiemi di livello di p_θ , possiamo scrivere

$$\frac{p_r^2}{2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 = E - \frac{G^2}{2r^2} - V(r) \quad (4.5)$$

e, moltiplicando ambo i membri per $2r^2$, otteniamo

$$r^2\dot{r}^2 = \frac{1}{16}\dot{x}^2 = Ex - G^2 - f(x) \geq 0. \quad (4.6)$$

Definiamo ora la parabola C e la retta L_G come

$$C : y = f(x) \quad L_G : y = Ex - G^2. \quad (4.7)$$

Dal momento che $\dot{x}^2 \geq 0$, allora $Ex - G^2 \geq f(x)$ e quindi C "sta sopra" L_G , la quale interseca C in due punti di coordinate x_p e x_a (cfr. fig. 4.1), che di fatto corrispondono a pericentro e apocentro espressi nella variabile x . A energia E fissata, facendo variare l'intercetta di L_G (cioè $-G^2$) otteniamo un fascio di rette parallele. Sia quindi L_c la retta tangente a C in x_c , ottenuta traslando L_G e mantenendola parallela a quest'ultima. In particolare, il massimo valore di G permesso è quello per cui L_G è tangente a C (altrimenti, per valori più grandi di G avremmo $\dot{x}^2 < 0$) e in tal caso $x_p = x_a$. Questo implica che pericentro e apocentro coincidono: $r_p = r_a$. Pertanto l'orbita corrispondente al massimo valore del momento angolare è circolare, come volevamo dimostrare. \square

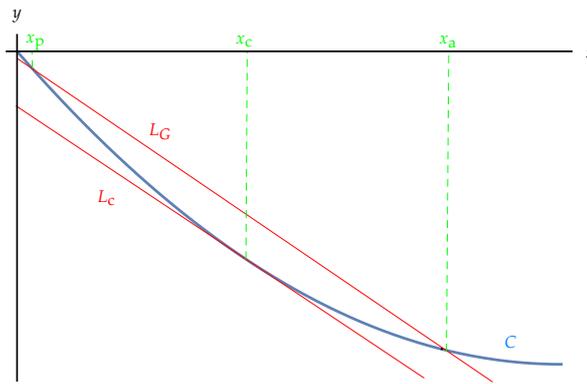


Figura 4.1: Parabola C passante per l'origine (cfr. (4.4)), rette L_G ed L_c , punti x_p , x_c e x_a

Infine, il valore esplicito di G_c è fornito dal seguente

Lemma 4.2. *Lungo un'orbita circolare di energia E fissata, il valore del modulo del momento angolare è*

$$G_c(E) = \frac{1 + 2E}{\sqrt{-2E}}. \quad (4.8)$$

Dimostrazione. L'orbita è circolare quando $r_p = r_a$. Facendo riferimento alla fig. 3.1, vediamo che pericentro e apocentro si ottengono calcolando le soluzioni positive di $V_G(r) = E$, con V_G potenziale efficace definito in (3.7). Esse risultano

$$r_{p,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{E^2} (1 \mp \sqrt{1 + 4E + 4E^2 + 2EG^2}) + \frac{2 + G^2}{E}}. \quad (4.9)$$

Allora, la condizione $r_p = r_a$ è verificata se e soltanto se $\sqrt{1 + 4E + 4E^2 + 2EG^2} = 0$, la quale, risolta rispetto a G , conduce alla (4.8). Notiamo che quest'ultima ha senso solo per $E \in [-\frac{1}{2}, 0)$, ma ciò è

vero perché dalla (3.6) abbiamo

$$H(p_r, p_\theta, r, \theta) \equiv E = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + V(r) \geq V(r) = -\frac{1}{1 + \sqrt{1+r^2}} \geq -\frac{1}{2} \quad (4.10)$$

(vedere anche la fig. 2.1). □

4.1.2 Mappa in frequenza e condizione di risonanza

Chiamiamo $h_0(a)$ la Hamiltoniana imperturbata (3.32) ed esprimiamo la mappa in frequenza $\omega : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^2$:

$$\omega(a) = (\omega_1(a), \omega_2(a)) := \nabla h_0(a) = \frac{1}{\left(\frac{a_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_2^2 + 4} - a_1\right)^3} \left(-1, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + 4}} \right) \right). \quad (4.11)$$

Sceglieremo dati iniziali $(a_0, \alpha_0, J_0, j_0)$ con $\alpha_0 = 0$ e a_0 non risonante o risonante, come specificato nella sottosezione 1.1.2. In particolare, la condizione di risonanza, con $\nu \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})$, è

$$-v_1 + \frac{v_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + 4}} \right) = 0 \quad (4.12)$$

la quale, invertita rispetto ad a_2 , diventa

$$a_2 = \frac{v_2 - 2v_1}{\sqrt{v_1(v_2 - v_1)}}. \quad (4.13)$$

Possiamo prendere $v_1 > 0$ e allora deve essere $v_2 > 2v_1$. Queste sono quindi le possibili risonanze.

4.2 Scelta della perturbazione

Lavoriamo in coordinate cartesiane $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e indichiamo con $V_{\text{is}}(\|q\|) = -\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \|q\|^2}}$ il potenziale isocrono. Scegliamo arbitrariamente un potenziale perturbativo $V(q)$, funzione delle (x, y, z) , che rompa la simmetria sferica del problema imperturbato. Allora la Hamiltoniana perturbata è

$$H_\epsilon(p, q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V_{\text{is}}(\|q\|) + \epsilon V(q) \quad (4.14)$$

a cui corrispondono le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{p} = -\nabla V_{\text{is}} - \epsilon \nabla V \\ \dot{q} = p \end{cases}. \quad (4.15)$$

Come perturbazione possiamo scegliere

$$V(q) = -\frac{\gamma'}{\|q - q'\|} - \frac{\gamma''}{\|q - q''\|} \quad (4.16)$$

con $\gamma', \gamma'' > 0$ e q', q'' due punti non allineati. Il potenziale (4.16) può essere interpretato come l'effetto dovuto a due galassie posizionate ad esempio in $q' = (R', 0, 0)$ e $q'' = (0, R'', 0)$, con

$R', R'' > 0$, a grande distanza dalla galassia cui appartiene l'ammasso.

Giungiamo così alla Hamiltoniana

$$H_\epsilon(p, q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V_{\text{is}}(\|q\|) - \frac{\epsilon\gamma'}{\sqrt{(x-R')^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\epsilon\gamma''}{\sqrt{x^2 + (y-R'')^2 + z^2}}. \quad (4.17)$$

Quindi le equazioni del moto (4.15) sono

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}(1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})^2} - \frac{\epsilon\gamma'(x-R')}{((x-R')^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\epsilon\gamma''x}{(x^2+(y-R'')^2+z^2)^{3/2}} \\ \dot{p}_y = -\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}(1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})^2} - \frac{\epsilon\gamma'y}{((x-R')^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\epsilon\gamma''(y-R'')}{(x^2+(y-R'')^2+z^2)^{3/2}} \\ \dot{p}_z = -\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}(1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})^2} - \frac{\epsilon\gamma'z}{((x-R')^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\epsilon\gamma''z}{(x^2+(y-R'')^2+z^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (4.18)$$

e

$$\dot{x} = p_x \quad \dot{y} = p_y \quad \dot{z} = p_z. \quad (4.19)$$

Per determinare le condizioni iniziali risonanti e non risonanti, serve l'espressione dei dati iniziali (p_0, q_0) in funzione di $(a_0, \alpha_0, J_0, j_0)$. Usiamo i risultati trovati nella sottosezione 3.3.3. Fissiamo dunque $a_i(0) := a_{i0}$ per $i = 1, 2$ (non)risonanti e $\alpha_{i0} = 0$. Allora, dalle (3.25), abbiamo subito che $\tau_E = 0 = \tau_G$ e quindi, sfruttando le eqq. (3.18) e (3.26), deduciamo che $(x'_0, y'_0) = (r_0, 0)$, con r_0 la più piccola soluzione di $V_G(r) = E$, ovvero il pericentro r_p scritto in (4.9). Una volta che avremo scelto i dati $(a_{10}, a_{20}) \in \mathcal{A}$, basterà sostituirli in $E = H$ scritta in (3.32) e in $a_2 = G$ per avere esplicitamente $r_0 = r_0(a_0)$. Inoltre, per quanto riguarda i momenti, usando le (3.27) e il fatto che $p_r(E, G; \tau_E = 0) = \bar{p}_r(E, G) = 0$, abbiamo direttamente $(p_{x'_0}, p_{y'_0}) = (0, \frac{a_{20}}{r_0})$. Infine, dalle eqq. (3.33) e (3.34), otteniamo

$$\begin{cases} p_{x_0} = -\frac{a_{20}}{r_0} \sin j_0 \\ p_{y_0} = \frac{J_0}{r_0} \cos j_0 \\ p_{z_0} = \frac{\sqrt{a_{20}^2 - J_0^2}}{r_0} \cos j_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_0 = r_0 \cos j_0 \\ y_0 = \frac{J_0}{a_{20}} r_0 \sin j_0 \\ z_0 = \sqrt{1 - \frac{J_0^2}{a_{20}^2}} r_0 \sin j_0 \end{cases}. \quad (4.20)$$

4.3 Integrazione numerica

Ora mostriamo i risultati di alcune integrazioni numeriche delle eqq. (4.18) e (4.19), al fine di analizzare il comportamento del momento angolare e quindi di comprendere come varia la giacitura del piano dell'orbita a seconda che consideriamo dati iniziali non risonanti o risonanti. A questo scopo, abbiamo implementato l'algoritmo di Runge-Kutta di ordine due (cfr. par. 1.2.F di [5]) e abbiamo posto le costanti che compaiono nelle (4.18) uguali a $\gamma' = 1 = \gamma''$, $R' = 10 = R''$. Abbiamo scelto tempi di integrazione T che riscalano con ϵ^{-1} , consistentemente col fatto che il moto del versore e_M sulla sfera unitaria S^2 , rappresentato nelle figure che seguono, si svolge con velocità proporzionale a ϵ (cfr. sezione 1.2).

Moti non risonanti. Fissate a_{10} e a_{20} non risonanti, abbiamo individuato tre dati iniziali che differiscono per la scelta di J_0 e j_0 e che corrispondono ai tre colori nelle figure sottostanti. Come

atteso, e_M segue le curve di livello regolari di una funzione (prossima alla f_0 introdotta nella sezione 1.2) e la perturbazione causa un'oscillazione attorno a queste curve. Diminuendo ϵ , tale oscillazione rispetto all'andamento medio è progressivamente ridotta e le curve si stringono pure progressivamente (i punti seguono le curve di livello della funzione con meno "frastagliamenti"): vedere le figg. 4.2, 4.3 e 4.4.

Nello spazio, il punto segue una traiettoria "a rosetta", tipica dei moti in un campo centrale (cfr. cap. 2, par. 8 di [1]), il cui piano però precece nello spazio (fig. 4.5).

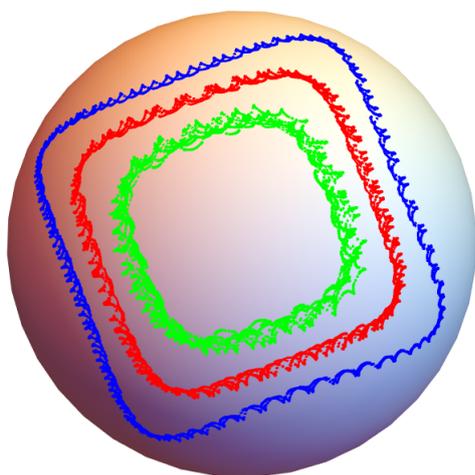


Figura 4.2: Non risonante, $\epsilon = 10^{-3}$,
 $T = 10^5$

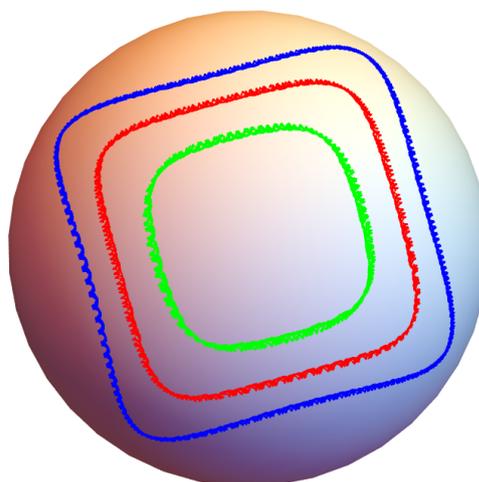


Figura 4.3: Non risonante,
 $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, $T = 2 \cdot 10^5$

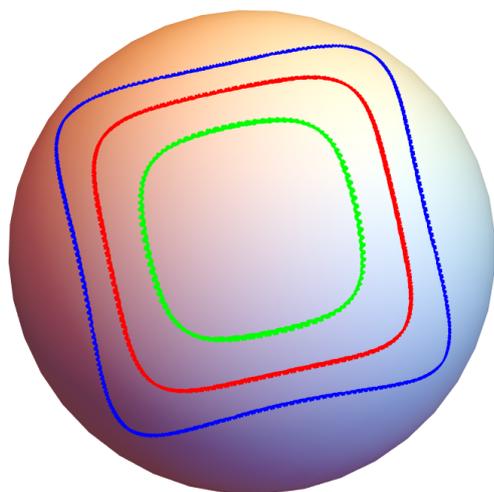


Figura 4.4: Non risonante,
 $\epsilon = 2.5 \cdot 10^{-4}$, $T = 4 \cdot 10^5$

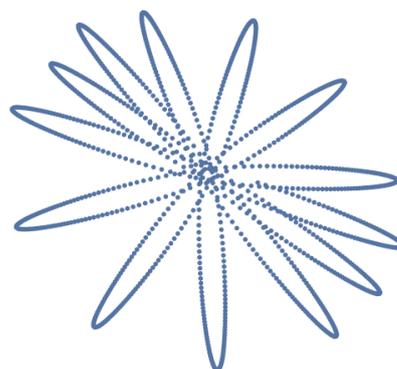


Figura 4.5: Tratto (per $t < 10^4$)
della traiettoria spaziale dell'orbita
con dato iniziale riferito al colore
blu della fig. 4.4

Moti risonanti. Abbiamo analizzato il comportamento di e_M per la risonanza $\nu = (1, 4)$. Il dato iniziale risonante è stato individuato usando l'eq. (4.13) e la differenza delle figure riportate sotto rispetto alle precedenti è evidente. Infatti, e_M vaga erraticamente su S^2 e ne riempie densamente vaste regioni. Anche riducendo ϵ , permangono moti caotici e altamente irregolari che continuano a invadere ampie zone della sfera. Si vedano le figg. da 4.6 a 4.9.

Sottolineiamo che anche in questi moti la traiettoria spaziale ruota "a rosetta" (figg. 4.10 e 4.11), ma su un piano che vaga erraticamente.

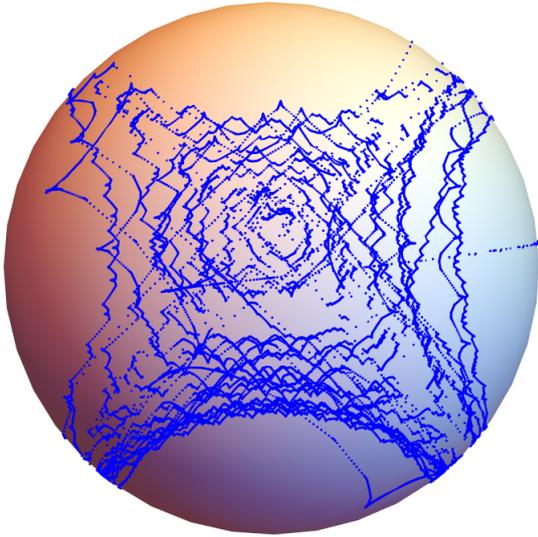


Figura 4.6: Risonante, $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$,
 $T = 1.5 \cdot 10^6$

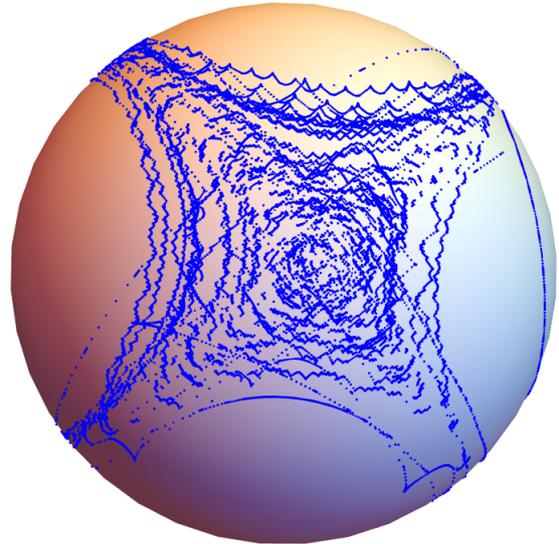


Figura 4.7: Risonante,
 $\epsilon = 2.5 \cdot 10^{-4}$, $T = 3 \cdot 10^6$

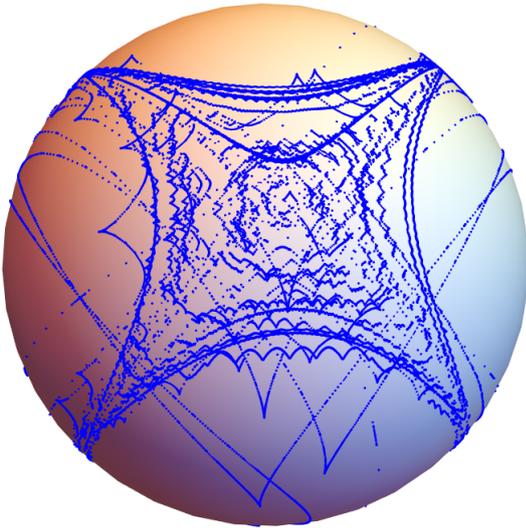


Figura 4.8: Risonante,
 $\epsilon = 1.25 \cdot 10^{-4}$, $T = 6 \cdot 10^6$

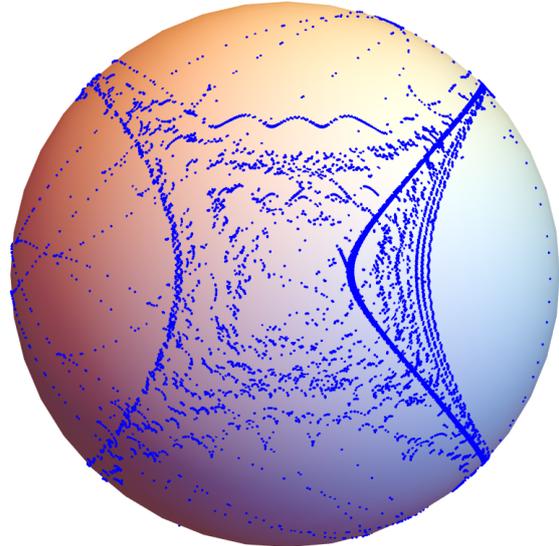


Figura 4.9: Risonante,
 $\epsilon = 6.25 \cdot 10^{-5}$, $T = 1.2 \cdot 10^7$

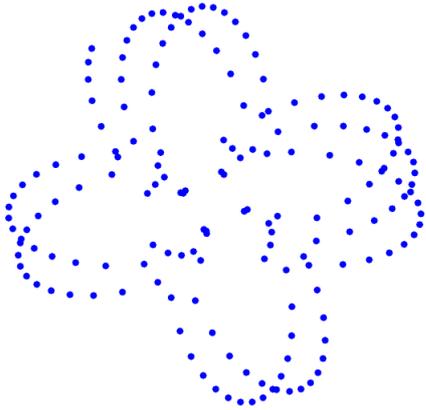


Figura 4.10: Tratto (per $t \in (1.9 \cdot 10^5, 1.9017 \cdot 10^5)$) della traiettoria spaziale dell'orbita risonante, $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$

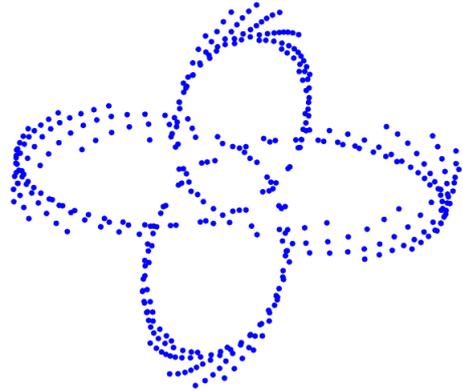


Figura 4.11: Tratto (per $t \in (2 \cdot 10^3, 2.4 \cdot 10^3)$) della traiettoria spaziale dell'orbita risonante, $\epsilon = 6.25 \cdot 10^{-5}$

Appendice A

Periodo della coordinata radiale

In questa appendice esponiamo una dimostrazione della formula (3.13) del periodo della coordinata radiale, seguendo le tecniche introdotte in [11] e [14].

Periodo in forma integrale. Per svolgere i conti che conducono all'espressione di T_r che abbiamo fornito, riprendiamo la dimostrazione del lemma 4.1, in particolare la formula (4.5). Infatti, invertendola rispetto a $\frac{dr}{dt}$ otteniamo che

$$T_r = 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{1}{\sqrt{2E - \frac{G^2}{r^2} - 2V(r)}} dr$$

e, passando alla variabile $x := 2r^2$,

$$T_r = \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_a} \frac{1}{\sqrt{Ex - G^2 - f(x)}} dx \quad (\text{A.1})$$

(la positività del radicando è garantita dalla (4.6)).

Calcolo dell'integrale (A.1). Facendo riferimento alla fig. 4.1, scriviamo la retta L_c come $y = Ex - G_c^2$, dove G_c indica il momento angolare che corrisponde alle orbite circolari, calcolato nel lemma 4.2. Definiamo la variabile u

$$-u^2 := Ex - G_c^2 - f(x) \quad (\text{A.2})$$

con $u \leq 0$ a seconda che sia $x \in [x_p, x_c]$ o $x \in [x_c, x_a]$. Poniamo poi $\frac{dx}{du} := F(u)$ e sostituiamo il parametro G con un nuovo parametro λ definito come $\lambda^2 := G_c^2 - G^2$. Infine scriviamo $u = \lambda \sin \xi$. Allora la formula (A.1) diventa

$$T_r = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\lambda \sin \xi) d\xi. \quad (\text{A.3})$$

Dalla regolarità del potenziale isocrono segue che possiamo sviluppare $F(u)$ in serie di Taylor all'intorno del punto base $u = 0$, ottenendo

$$F(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n.$$

Inseriamo quindi questa espansione nella formula (A.3):

$$T_r = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda \sin \xi)^n \right] d\xi = \frac{\pi}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} a_{2n} \lambda^{2n} \sin^{2n} \xi d\xi \quad (\text{A.4})$$

(solo i coefficienti di ordine pari sono non nulli, dato che stiamo integrando su un dominio simmetrico).

A priori i coefficienti a_n e λ dipendono da E e anche da G . Tuttavia sappiamo che, per definizione di potenziale isocrono (cfr. capitolo 2), $T_r = T_r(E)$. L'unico modo per ottenere che anche il termine di destra dell'eq. (A.4) dipenda solo da E è imporre che $a_n \equiv 0$ per ogni $n \geq 1$. Resta allora il problema di determinare a_0 , che però è facilmente calcolabile dato che, a questo punto, $F(u) = a_0$ e pertanto:

$$\begin{aligned} \int_{u(x_p)=-\lambda}^{u(x_a)=\lambda} F(u) du &= x_a - x_p \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} a_0 du = 2\lambda a_0 = 2\sqrt{G_c^2 - G^2} a_0 \end{aligned}$$

Quindi arriviamo alla seguente espressione per il periodo

$$T_r(E) = \frac{\pi}{4} \frac{x_a - x_p}{\sqrt{G_c^2 - G^2}}, \quad (\text{A.5})$$

la quale, per costruzione, è indipendente da G .

Calcolo esplicito di $T_r(E)$. Facendo riferimento alla formula (A.5), dobbiamo calcolare $x_a - x_p$ e $G_c^2 - G^2$. Usando le formule (4.9) di pericentro e apocentro e il fatto che $x = 2r^2$ otteniamo subito

$$x_{p,a} = \frac{1}{E^2} (EG^2 + 2E + 1 \mp \sqrt{2EG^2 + 4E^2 + 4E + 1}).$$

Inoltre sappiamo che $G_c = \frac{2E+1}{\sqrt{-2E}}$, come dall'eq. (4.8). Pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{(x_a - x_p)^2}{G_c^2 - G^2} &= \frac{\frac{4}{E^4} (2EG^2 + 4E^2 + 4E + 1)}{\frac{4E^2+1+4E}{-2E} - G^2} = \frac{8}{-E^3} \frac{2EG^2 + 4E^2 + 4E + 1}{4E^2 + 1 + 4E + 2EG^2} = \\ &= \frac{8}{-E^3} \frac{(2EG^2 + 4E^2 + 4E + 1)}{4E^2 + 1 + 4E + 2EG^2} = \frac{8}{-E^3} \end{aligned}$$

e allora

$$T_r(E) = 2\pi \left(\frac{1}{-2E} \right)^{3/2}.$$

Con procedure del tutto analoghe si dimostra anche la formula per $\Delta\theta$.

Bibliografia

- [1] Arnold, V. I.: *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti University Press, Roma, 2010
- [2] Bambusi, D. e Fusè, A.: Nekhoroshev theorem for perturbations of the central motion, *Regul. Chaotic Dyn.* (2017) 22(1): 18–26 [<https://arxiv.org/pdf/1610.02262.pdf>]
- [3] Benettin, G., Fassò, F. e Guzzo, M.: Il corpo rigido in rapida rotazioni: una moderna visione hamiltoniana, *Complementi alle Lezioni di Meccanica Razionale di T. Levi-Civita e U. Amaldi*, Edizioni CompoMat (2013): 281-300
- [4] Fassò, F.: *Notes on Finite Dimensional Integrable Hamiltonian Systems* (1999), non pubblicato [<https://www.math.unipd.it/~fasso/research/papers/sc.pdf>]
- [5] Fassò, F.: *Note per il corso di Dynamical Systems per il corso di Laurea Magistrale in Matematica*, A.A. 2021-2022
- [6] Fassò, F.: Perturbations of superintegrable Hamiltonian systems. In pubblicazione in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (2021)
- [7] Fassò, F.: Superintegrable Hamiltonian Systems: Geometry and Perturbations, *Acta Applicandae Mathematicae* (2005) 87: 93-121
- [8] Fontanari, D.: *Quantum manifestations of the adiabatic chaos of perturbed superintegrable Hamiltonian systems*, Tesi di Dottorato, Università di Padova e Université du Littoral Côte d’Opale (2013)
- [9] Gerhard, O.E. e Saha, P.: Recovering galactic orbits by perturbation theory, *Mon. Not. R. astr. Soc.* (1991) 251: 449-467 [<https://academic.oup.com/mnras/article/251/3/449/996655>]
- [10] Guzzo, M.: *Appunti del corso di Meccanica Analitica*, A.A. 2021-2022
- [11] Hénon, M.: L’amas isochrone I, *Annales d’Astrophysiques* (1959) 22, 126 [<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1959AnAp...22..126H/abstract>]
- [12] Perez, J.: A marvelous contribution from Michel Hénon to globular cluster’s study: the isochrone cluster, *HAL, Open Science* (2016) [<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281653/document>]
- [13] Ramond, P. e Perez, J.: New methods of isochrone mechanics, *J. Math. Phys.* (2021) 62, 112704 [<https://doi.org/10.1063/5.0056957>]

- [14] Ramond, P. e Perez, J.: The Geometry of Isochrone Orbits, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (2020) 132, 22 [<https://arxiv.org/abs/2003.13456>]