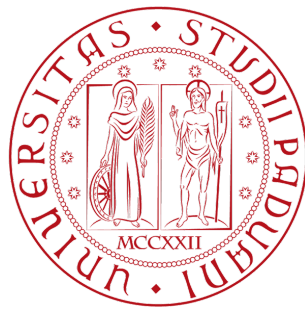


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea Magistrale in Fisica



Tesi di Laurea Magistrale

**Esplorando i modelli per le Anomalie del
Fondo Cosmico di Microonde**

Relatore:
Prof. Nicola Bartolo

Laureando:
Umberto Natale
1130605

26 Settembre 2017

Indice

1	Modello Cosmologico Standard	1
1.1	Il modello Λ CDM	2
1.2	Il paradigma inflazionario	6
1.2.1	Fluttuazioni quantistiche dell'inflatone	11
1.3	Perturbazioni cosmologiche	15
1.3.1	Il "problema" della dipendenza di gauge	16
1.3.2	Variabili gauge invarianti	18
1.3.3	Perturbazione di curvatura	20
1.3.4	Formalismo δN	22
1.3.5	Perturbazioni tensoriali	23
2	La Radiazione Cosmica di Microonde	27
2.1	Anisotropie del CMB	28
2.2	Decomposizione armonica e spettro di potenza	32
2.2.1	Legame con la perturbazione di curvatura	35
2.3	Funzioni finestra	36
3	Anomalie del CMB	38
3.1	Asimmetria tra gli emisferi	41
3.2	Asimmetria angolare nella distribuzione dello spettro di potenza	46
3.3	Modulazione di dipolo	48
4	Modellistica	51
4.1	Modulazione di dipolo e non-Gaussianità primordiale	51
4.1.1	Perturbazioni "super-horizon" nell'inflatone	57
4.1.2	Non-Gaussianità con dipendenza di scala	63
4.2	Bispettro inflazionario con dipendenza di scala	64
4.2.1	Modelli a singola sorgente	68
4.2.2	Modelli a sorgenti multiple	74
4.3	Dissipazione primordiale	75
4.4	Velocità del suono primordiale e formalismo δN generalizzato	79

5	Alla ricerca di un “toy-model”	84
5.1	Oltre la modulazione di dipolo	84
5.2	Legame tra i filtri e la perturbazione di curvatura ζ	85
5.3	Aggiunta di un ulteriore filtro g_ℓ	96
5.4	Perturbazione di curvatura ζ_G filtrata	98
A		105
A.1	Direzione primordiale privilegiata	105
A.2	Funzione di correlazione a quattro punti angolare	109
	Bibliografia	112

Convenzioni Utilizzate

In questo lavoro di tesi abbiamo utilizzato le unità naturali $\hbar = 1$, $c = 1$ e la metrica con segnatura $(-, +, +, +)$. Inoltre, per la trasformata di Fourier abbiamo utilizzato la convenzione

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} f(\mathbf{x}),$$

e quindi per l'antitrasformata

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} \tilde{f}(\mathbf{k}).$$

In questo modo abbiamo che la delta di Dirac si può scrivere come

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}.$$

Introduzione

La nascita della cosmologia moderna è stata possibile solo con l'avvento del XX secolo, corrispondente alla formulazione, da parte di *A. Einstein*, della *Relatività Generale*. Insieme alle equazioni di *Einstein* della gravità, un altro ingrediente principale sulla quale si basano molti dei risultati ottenuti in cosmologia è il *principio cosmologico*. Questo afferma che l'Universo, su scale opportunamente grandi (ovvero mediando su scale più grandi delle disomogeneità più estese), risulta omogeneo ed isotropo. Partendo da questi due ingredienti i cosmologi sono riusciti a formulare il *Modello Cosmologico Standard* (SCM), il cosiddetto modello Inflazione+ Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter).

Recenti analisi dati, ottenuti da osservazioni cosmologiche che sondano scale cosmologiche differenti, forniscono un enorme supporto al modello Λ CDM. Questo modello tiene conto della presenza sia di *Energia Oscura* (nella forma di una costante cosmologica Λ) sia di *Materia Oscura Fredda* (CDM) e predice un Universo statisticamente omogeneo ed isotropo. Per dare spiegazione ad alcuni “problemi” cosmologici, i cosiddetti problemi dell’“orizzonte” e della “piattezza”, è stato teorizzato, a partire dai primi anni 80, che in epoche primordiali l'Universo abbia affrontato un periodo di espansione accelerata, la cosiddetta “inflazione”, guidata da un campo scalare, il cosiddetto “inflatone”. Durante quest'epoca le fluttuazioni quantistiche dell'inflatone danno origine alle perturbazioni cosmologiche primordiali. Queste possono essere legate alle fluttuazioni osservate nel *Fondo Cosmico di Microonde* (CMB) e le predizioni teoriche risultano in perfetto accordo con le osservazioni del CMB stesso. Nel meccanismo inflazionario le perturbazioni nella densità di energia vengono prodotte dalle fluttuazioni quantistiche dell'inflatone attorno lo stato di vuoto. Queste perturbazioni sono distribuite come un campo (quasi) Gaussiano statisticamente omogeneo ed isotropo e, attraverso la teoria delle perturbazioni cosmologiche lineari, è possibile legarle alle anisotropie del campo di temperatura del CMB. Questa possibilità implica una distribuzione per le anisotropie molto vicina a quella di un campo Gaussiano statisticamente omogeneo ed isotropo.

Nonostante l'eccellente accordo tra teoria ed osservazioni, alcune misure delle anisotropie del CMB risultano essere statisticamente non consistenti con il best-fit basato sul modello Λ CDM, fornendo pertanto delle indicazio-

ni di deviazione dall' isotropia statistica. Infatti, specialmente soffermando l'attenzione su grandi scale angolari corrispondenti ai multipoli $\ell \lesssim 60$ (scale angolari $\vartheta \gtrsim 3^\circ$), o in alcuni casi $\ell \lesssim 600$ (scale angolari $\vartheta \gtrsim 0.3^\circ$), possiamo ritrovare alcuni comportamenti anomali. In particolare possiamo trovare un' *asimmetria tra gli emisferi nello spettro di potenza* (HPA), una *modulazione di dipolo* (DM) ed una *correlazione angolare nella distribuzione dello spettro di potenza* a circa 3σ .

L'HPA consiste nel ritrovare, nel range di multipoli $\ell = 2 - 40$ uno spettro di potenza calcolato per un emisfero, centrato in $(l, b) = (237^\circ, -20^\circ)$ in coordinate Galattiche, maggiore rispetto a quello calcolato nell'emisfero opposto.

Per visualizzare l'asimmetria angolare nella distribuzione dello spettro di potenza è stato suddiviso il cielo in diverse regioni e per ognuna di queste è stato calcolato il corrispettivo spettro di potenza. Quello che si trova a seguito di tale operazione è una certa correlazione angolare tra diversi dipoli ottenuti dai diversi spettri di potenza associati alle regioni considerate. L'asimmetria angolare risulta maggiormente evidente quando si considera come multipolo massimo $\ell_{max} \sim 600$.

Infine la DM consiste nel riuscire a parametrizzare la mappa del campo di temperatura con una modulazione di dipolo, ovvero

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = (1 + A\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}) \left. \frac{\Delta T}{T} \right|_{iso}(\hat{\mathbf{n}}),$$

dove A è l'ampiezza del dipolo, $\left. \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) \right|_{iso}$ è la componente isotropa del campo di temperatura e \mathbf{p} è la direzione del dipolo. Infatti, effettuando un fit dei dati con un campo di temperatura di questo tipo, il risultato dell'operazione mostra un'ampiezza per la modulazione pari a $A = 0.066 \pm 0.021$ su grandi scale angolari con direzionalità $(l, b) \simeq (212^\circ, -13^\circ)$ e range di validità statistica di 3.3σ .

Lo scopo principale di questa tesi è stato quello di costruire una corrispondenza uno ad uno tra la perturbazione di curvatura primordiale prodotta durante l'inflazione ed un modello fenomenologico recentemente proposto in letteratura per far fronte ad alcune delle anomalie osservate. Per raggiungere questo risultato è stato necessario, in prima istanza, esplorare gli aspetti fenomenologici ed osservativi legati alle anomalie del CMB. Successivamente sono stati analizzati diversi modelli cosmologici presentati in letteratura per spiegare questi "particolari" comportamenti. In particolare la tesi è stata strutturata nel seguente modo:

- Il Capitolo 1 contiene una review sul Modello Cosmologico Standard. In particolare una prima parte è stata dedicata alla presentazione del modello Λ CDM, mentre una seconda parte è stata dedicata alla descrizione delle basi dell'inflazione.

- Il Capitolo 2 è stato dedicato alla Radiazione Cosmica di Microonde. Sono state richiamate le nozioni base sulle anisotropie del CMB per poi concludere il capitolo relazionando la perturbazione primordiale di curvatura che viene generata dall'inflazione con le osservabili del CMB stesso.
- Il Capitolo 3 è stato dedicato agli aspetti fenomenologici ed osservativi di alcune anomalie. In particolare abbiamo presentato l'HPA, l'asimmetria angolare nella distribuzione dello spettro di potenza e la DM.
- Il Capitolo 4 è stato dedicato allo studio di alcuni modelli inflazionari presenti in letteratura che riproducono l'asimmetria tra gli emisferi nello spettro di potenza. In questo capitolo una maggiore attenzione è stata rivolta a quei modelli in cui la non-Gaussianità primordiale gioca un ruolo cruciale per la spiegazione delle anomalie.
- Il Capitolo 5 è stato dedicato alla ricerca di una corrispondenza uno ad uno tra un recente modello fenomenologico del campo di temperatura e la perturbazione di curvatura nella sua espressione più generale. In particolare è stato effettuato uno sviluppo integrale della ζ , prodotta durante l'inflazione, fino all'ordine di non-Gaussianità primordiale g_{NL} , corrispondente a non-linearità cubiche. Questo è un passo essenziale per cercare poi di trovare un legame tra il modello fenomenologico proposto e possibili specifiche realizzazioni di modelli inflazionari che riproducano il modello presentato.

Capitolo 1

Modello Cosmologico Standard

Il processo evolutivo che porta alla formulazione del modello utilizzato per descrivere il nostro Universo nasce dall'intuizione di *A. Einstein* che, nel 1915, propose una teoria descrivente le leggi della gravitazione universale, la *Relatività Generale*. Per fare ulteriori passi verso la comprensione del Cosmo, però, occorre attendere il lavoro di *A. Friedmann* del 1922, il quale propose, per il nostro Universo, condizioni globali di omogeneità ed isotropia¹. Proprio sfruttando le condizioni di simmetria imposte, la metrica sottostante dell'Universo può essere scritta come

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.1)$$

dove $k = -1, 0, +1$ è il *parametro di curvatura* di ipersuperfici 3-dimensionali, t è il *tempo cosmico*, (r, Ω) (con Ω angolo solido) sono *coordinate polari comoventi* ed $a(t)$ è il *fattore di espansione* dell'Universo. Si osservi che il parametro di curvatura k è normalizzato in modo che per $k = -1$ si hanno Universi aperti, per $k = 0$ si hanno Universi piatti e per $k = +1$ si hanno Universi chiusi. La metrica introdotta è nota come metrica di *Friedmann-Robertson-Walker* (FRW).

Partendo da questa idea, se $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, R è lo scalare di Ricci e $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso, risulta possibile risolvere l'equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

assumendo che la sorgente $T_{\mu\nu}$ sia ben descritta dal *tensore energia-impulso* di un fluido perfetto

¹Questa assunzione prende il nome di *Principio Cosmologico*. Empiricamente, questa è giustificata su scale di ~ 100 Mpc. Più precisamente esso afferma che l'Universo, su scale opportunamente grandi (ovvero mediando su scale più grandi delle disomogeneità più estese), risulta omogeneo ed isotropo.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

dove ρ è la *densità di energia*, P è la *pressione isotropa* ed $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ è la *quadrivelocità*, per un qualche *parametro affine* λ . In questo modo è possibile “semplificare” le equazioni di *Einstein* ottenendo due equazioni indipendenti

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \\ (ii) \quad & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

dette *equazioni di Friedmann*. La (i) e la (ii) sono affiancate da una terza equazione, l'*equazione di continuità*²

$$(iii) \quad \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (1.5)$$

la quale, però, risulta dipendente dalle altre. In queste tre equazioni $H = \dot{a}/a$ è il *parametro di Hubble*, mentre il punto indica la derivata rispetto al tempo cosmico.

Però la formulazione di quello che oggi chiamiamo *Modello Cosmologico Standard* (SCM) non è completa. Infatti queste equazioni ammettono come soluzione sia Universi in espansione che Universi in contrazione. Dunque solo nel 1925, quando *E. Hubble* osservò che le galassie tendevano ad allontanarsi da noi, si capì che le soluzioni delle equazioni di *Friedmann* permesse potevano essere solo quelle associate ad Universi in espansione. Questo è il risultato cardine alla base del SCM.

1.1 Il modello Λ CDM

Il modello utilizzato per descrivere le proprietà ed il comportamento dell'Universo così come lo conosciamo oggi attraverso diverse osservazioni cosmologiche è il modello Λ CDM (Λ -Cold Dark Matter), ovvero *Energia Oscura* (nella forma di una costante cosmologica Λ) più *Materia Oscura Fredda*. Esso risulta il modello più semplice ed in migliore accordo con i dati osservativi. Dalla metrica (1.1) è possibile ricavare informazioni sull'evoluzione del nostro Universo studiando l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$ in funzione del tempo cosmico t . In particolare si ha che in epoche iniziali il fattore di scala varia come $a(t) \propto t^{1/2}$, mentre in seguito risulta $a(t) \propto t^{2/3}$. La dipendenza temporale del fattore di scala, in questi modelli, è determinata

²Poiché le tre equazioni risultano dipendenti, per “chiudere” il sistema occorre introdurre un'equazione di stato che può essere, per esempio, $P = w\rho$, con w costante e dipendente dal fluido che permea l'Universo.

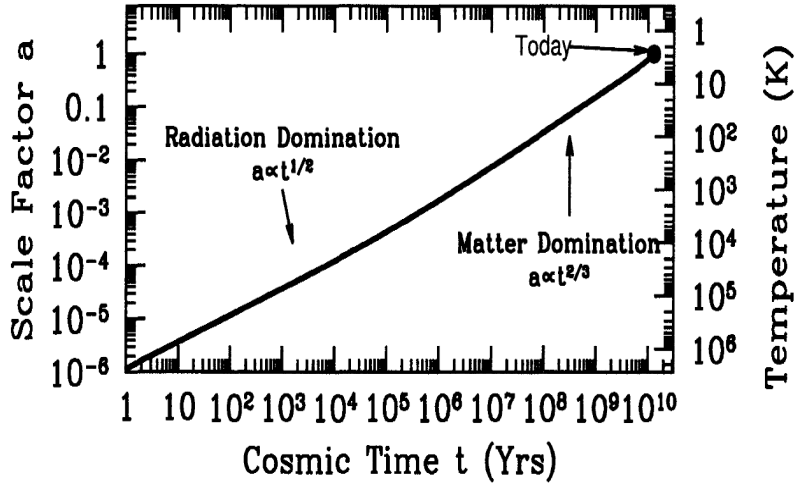


Figura 1.1: Evoluzione del fattore di scala in funzione del tempo cosmico. L'asse sulla destra, invece, mostra l'evoluzione della temperatura in funzione del tempo cosmico [30].

dalla densità di energia presente nell'Universo e l'equazione (1.5), in aggiunta all'equazione di stato $P = w\rho$, ci permette di individuare le fasi che ne caratterizzano la composizione. In una prima analisi possiamo distinguere due fasi di cui sopra: una prima fase composta da radiazione ($w = 1/3$) ed una fase successiva caratterizzata dalla presenza dominante di materia non collisionale ($w = 0$) oltre la quale domina la costante cosmologica Λ , vedi Figura 1.1.

La trattazione del SCM, però, non è completa. Infatti, benché sia possibile distinguere delle fasi in cui un particolare fluido risulta dominante, non è possibile escludere la presenza di quelli sottodominanti per avere una conoscenza dettagliata del nostro Universo oggi. Occorre andare a considerare, quindi, i vari contributi dovuti al singolo fluido (materia barionica, fotoni, neutrini...) e per fare questo possiamo introdurre il *parametro di densità* attuale della i -sima specie

$$\Omega_{0i} = \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}}, \quad (1.6)$$

dove il valore ρ_{0c} è definito come il valore della densità tale per cui l'Universo risulti piatto ed è direttamente calcolabile dalle equazioni di Friedmann, ovvero

$$\rho_0 \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Ragionando in questo modo si iniziano a riscontrare alcuni problemi con i semplici modelli di FRW caratterizzati dalla presenza di pura materia barionica e radiazione. Infatti il contributo al parametro di densità totale dovuto alla materia barionica³ che osserviamo è

$$\Omega_{0b}h^2 \sim 0.022, \quad (1.7)$$

mentre il contributo dovuto alla radiazione è di circa [36]

$$\Omega_{0r}h^2 \simeq 2.3 \times 10^{-5}. \quad (1.8)$$

I dati osservativi (per esempio i dati sul Fondo Cosmico di Microonde e sulle SN) ci dicono che oggi il nostro Universo è pressoché piatto (*i.e.* $\Omega_0 \simeq 1$) e ci impediscono di assumere che tutta la densità provenga dal contributo di materia barionica, sia che si tratti di stelle luminose, di nane brune (e quindi invisibili) o di gas. Inoltre su scale più piccole, tipicamente su scale galattiche, la meccanica Newtoniana prevede che la velocità di rotazione delle galassie vada come

$$v = \sqrt{\frac{GM_g(R)}{R}}, \quad (1.9)$$

dove la massa della galassia M_g dipende dalle masse degli oggetti contenuti all'interno del raggio R . Questo significa che a grandi distanze dal centro della stessa ci aspettiamo che la massa risulti pressoché costante e che quindi la velocità scali come $v \propto 1/\sqrt{R}$. La velocità tipica osservata a grandi R , però, può essere tre volte più grande di quella predetta tenendo conto solo della materia visibile: questo significa che la massa “reale” è circa dieci volte più grande di quella osservata.

Per tenere conto di queste diverse osservazioni, sia su scale cosmologiche che galattiche, è stata ipotizzata l'esistenza di un particolare tipo di materia, detta *Materia Oscura*, la quale interagisce solo gravitazionalmente. Questa ipotesi, consistente con i dati osservativi, porta alla formulazione del modello CDM nel quale viene considerata la presenza di materia oscura fredda⁴ oltre radiazione e materia già presenti nei modelli di FRW. Tuttavia anche introducendo la presenza di materia oscura fredda non si ha ancora un modello “completo”. Infatti quest'ultima costituisce, ad oggi, circa il 26% della densità di energia totale dell'Universo, ovvero non è la componente dominante e non spiega perché $\Omega_0 \simeq 1$.

³Il fattore h è introdotto nella parametrizzazione della costante di Hubble misurata oggi: $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

⁴Per materia oscura fredda si intende materia oscura costituita da particelle che, all'epoca del disaccoppiamento dalla materia ordinaria, risultano non-relativistiche.

Fino ad ora non abbiamo considerato il fatto che l'Universo risulta in espansione accelerata! Dalle equazioni di Friedmann è chiaro che questo è possibile solo se

$$P < -\frac{1}{3}\rho, \quad (1.10)$$

il che implica la presenza di un fluido con pressione negativa, cosa impossibile se ci si limita a considerare solo la presenza di materia e radiazione. Per avere un tale risultato è possibile introdurre all'interno delle equazioni di Einstein una costante Λ (la costante cosmologica) che può giocare questo ruolo. Così facendo, infatti, l'equazione (ii) di Friedmann diviene

$$(ii) \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}, \quad (1.11)$$

dove

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (1.12)$$

Quindi, descrivendo Λ come un fluido avente densità ρ_Λ costante si arriva, mediante l'equazione di continuità, alla relazione desiderata

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (1.13)$$

ovvero alla possibilità di avere un'espansione accelerata, se tale componente di densità di energia costante viene a dominare oggi la densità di energia totale.

La costante Λ introdotta viene utilizzata oggi per parametrizzare la cosiddetta Energia Oscura presente nel nostro Universo proprio come spiegazione dell'espansione accelerata ed il suo contributo è del 68% rispetto alla densità di energia totale dell'Universo. Energia Oscura e Materia Oscura Fredda costituiscono il modello Λ CDM, il quale fornisce la descrizione migliore del nostro Universo. Questo è caratterizzato da soli sei parametri chiave (Tabella 1.1): la *densità barionica* $\Omega_b h^2$, la *densità di Materia Oscura Fredda* $\Omega_c h^2$, la *sezione angolare dell'orizzonte acustico* θ_* , lo *spessore ottico* dello scattering Thomson dovuto alla reionizzazione τ , l'*indice spettrale scalare* n_s e l'ampiezza dello *spettro di potenza della curvatura primordiale* A_s , mentre tutti gli altri possono essere ricavati indirettamente da questi [36].

Parametri	Planck TT + lensing
$\Omega_b h^2$	0.02226 ± 0.00023
$\Omega_c h^2$	0.1186 ± 0.0020
$100 \times \theta_*$	1.04103 ± 0.00046
τ	0.066 ± 0.016
$\ln(10^{10} A_s)$	3.062 ± 0.029
n_s	0.9677 ± 0.0060

Tabella 1.1: I sei parametri cosmologici ottenuti dall’analisi dei dati di *Planck* effettuata sulla base del modello Λ CDM. Nell’analisi è stato tenuto conto del “*lensing*” gravitazionale [36]. Si osservi che per semplificare la notazione è stato rimosso il pedice “0”.

1.2 Il paradigma inflazionario

Il modello Λ CDM risulta in perfetto accordo con le osservazioni del CMB (*Cosmic Microwave Background*)⁵. Infatti, con la scelta di “opportune” condizioni iniziali, è possibile descrivere sia le anisotropie presenti nel campo di temperatura $T(\hat{\mathbf{n}})$ ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$), sia la formazione di *Strutture su Grandi Scale* (LSS). La scelta di queste condizioni non è arbitraria, ma scaturisce, intanto dal dover riprodurre le strutture che osserviamo oggi nell’Universo a partire da certe condizioni iniziali che riguardano le prime perturbazioni di densità nell’universo, e anche dal dover far fronte ad alcuni “problemi” cosmologici, come ad esempio i cosiddetti problemi dell’*orizzonte* e della *piattezza*.

Il problema dell’orizzonte consiste nel misurare le stesse “caratteristiche” per i fotoni del CMB, indipendentemente dalla direzione in cui si guarda. Poiché la CMB si forma quando i fotoni si disaccoppiano dalla materia⁶, quelli che stiamo osservando sono fotoni provenienti dalla *superficie di ultimo scattering*. I punti su questa superficie distanziati da una separazione angolare di $\theta \sim 1^\circ$, però, appartengono a regioni causalmente sconnesse e quindi risulta altamente improbabile ritrovarle oggi con la stessa temperatura media.

Il problema della piattezza, invece, è associato ad un problema di *fine-tuning* e risulta legato all’andamento temporale del parametro di curvatura nell’ambito del modello standard. In particolare, per introdurre il problema, possiamo considerare la relazione per il parametro di densità

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \equiv k r_H^2(t),$$

dove $r_H \equiv 1/Ha$ è il *raggio di Hubble comovente* definito a partire dal *raggio di Hubble*

⁵Si veda il **Capitolo 2**.

⁶Il disaccoppiamento radiazione materia avviene ad un *redshift* di $z \sim 1100$.

$$R_H \equiv \frac{1}{H}, \quad (1.14)$$

parametro fondamentale utilizzato per lo studio della dinamica inflazionaria e della generazione delle perturbazioni di densità primordiali. Nel caso in cui $\Omega \neq 1$, anche se per una piccola quantità, poiché durante le epoche dominate da radiazione e materia $r_H(t)$ cresce, ritroviamo che anche la quantità $|\Omega(t) - 1|$ cresce nel tempo. In particolare si ha

$$\begin{aligned} (i) \quad H_r^2 &\propto \rho_r \propto a^{-4} \quad \rightarrow \quad |\Omega - 1| \propto a^2 \\ (ii) \quad H_m^2 &\propto \rho_r \propto a^{-3} \quad \rightarrow \quad |\Omega - 1| \propto a. \end{aligned}$$

I limiti osservativi più recenti sulla quantità $\Omega_{k0} \equiv 1 - \Omega_0$ ci dicono che $|\Omega_{k0}| < 10^{-2}$ (95% C.L.) [36] il che implica un parametro $|\Omega_k| \sim 10^{-60}$ immediatamente dopo il Big-Bang e questo chiarisce in che modo il problema della piattezza risulti un problema di fine-tuning: per spiegare il valore misurato di $|\Omega_{k0}|$ occorrerebbe conoscere il valore iniziale di $|\Omega_k|$ con una precisione inaccettabile.

Occorre chiarire che questi non sono reali problemi intrinseci del modello Λ CDM in quanto, imponendo delle condizioni iniziali molto “peculiarì”, è possibile “riprodurre” l’Universo come lo osserviamo oggi. Però, è proprio questa peculiarità che, nel 1981, spinse *A. Guth* a proporre un modello innovativo che “rilassasse” il problema delle condizioni iniziali, l’*inflazione* [57].

L’idea alla base dell’inflazione è che l’Universo nelle sue fasi iniziali abbia subito un’espansione accelerata, condizione soddisfatta nel caso in cui valga la disuguaglianza (1.10). In particolare durante questa fase l’Universo è descritto da uno spazio di *quasi de Sitter*⁷ la cui evoluzione è guidata dalla presenza di un campo scalare reale φ , detto *inflaton*.

Nel modello che coinvolge l’inflaton si assume che il campo scalare φ sia in accoppiamento minimale con la gravità. Questo si traduce nel considerare un’azione della forma

$$S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \varphi, \partial\varphi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (1.15)$$

dove g è il determinante della metrica (1.1), mentre $V(\varphi)$ è il potenziale del campo scalare. Nota l’azione della teoria è possibile ricavare sia il tensore energia-impulso, ottenendo così informazioni sulla densità ρ_φ e la pressione P_φ , sia ricavare le equazioni del moto, ottenendo informazioni sulla dinamica

⁷Si parla di Universi di de Sitter nel caso particolare in cui si ha per l’equazione di stato l’uguaglianza $w = -1$. In questo caso si ha un parametro H costante.

del campo φ . In particolare, variando l'azione rispetto al campo φ si ottiene l'equazione di Klein-Gordon (KG)

$$\square\varphi = \frac{\partial V}{\partial\varphi}, \quad (1.16)$$

dove \square è l'operatore covariante di D'Alambert

$$\square\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi). \quad (1.17)$$

Osservando che durante l'inflazione ogni "piccola" disomogeneità viene soppressa a causa del redshift dovuto all'espansione accelerata possiamo utilizzare una metrica di FRW come background. Inoltre, per lo stesso motivo, sia il contributo alla densità di energia dovuto alla presenza di radiazione che il parametro di curvatura k vengono trascurati. Dunque in un Universo di FRW l'equazione di KG diviene

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} + V_\varphi(\varphi) = 0, \quad (1.18)$$

dove $V_\varphi = \partial V/\partial\varphi$. Questa espressione ci dice che l'evoluzione dell'inflatone lungo il suo potenziale risente di un termine di frizione $3H\dot{\varphi}$ dovuto all'espansione dell'Universo. Il tensore energia-impulso, invece, è dato da

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\varphi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g_{\mu\nu}(-g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - V(\varphi)). \quad (1.19)$$

Classicamente, un campo scalare φ omogeneo si comporta come un fluido perfetto con densità di energia e pressione

$$\begin{aligned} (i) \quad \rho_\varphi &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \\ (ii) \quad P_\varphi &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ne segue che, se

$$V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2, \quad (1.21)$$

otteniamo la condizione

$$P_\varphi \simeq -\rho_\varphi. \quad (1.22)$$

Questo significa che in un Universo dominato dalla presenza di un campo scalare il cui potenziale risulta molto maggiore rispetto al termine cinetico si ha inflazione. Richiedendo quindi che $V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$ il campo φ “scivola lentamente” verso il minimo del potenziale. È possibile ottenere questa fase di *Slow-Roll* (SR) se l’inflatone si trova in una regione dove il potenziale risulta sufficientemente piatto, ovvero se le derivate del potenziale fatte rispetto l’inflatone variano lentamente al variare di φ stesso (*i.e.* $V(\varphi) \sim \text{cost}$). Sotto queste condizioni, nel caso di un campo scalare omogeneo ed isotropo, poiché l’equazione di KG diviene

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_\varphi(\varphi) = 0, \quad (1.23)$$

e poiché derivando rispetto al tempo la condizione (1.21) si ottiene

$$\ddot{\varphi} \ll V_\varphi, \quad (1.24)$$

risulta possibile trascurare anche il termine $\ddot{\varphi}$ di modo da ottenere come equazione del moto la relazione

$$3H\dot{\varphi} \simeq -V_\varphi(\varphi). \quad (1.25)$$

Sfruttando quanto ottenuto possiamo riscrivere l’equazione (ii) di Friedmann, nel caso di un campo scalare omogeneo ed isotropo, come

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\varphi), \quad (1.26)$$

e sfruttando le relazioni

$$\begin{aligned} (i) \quad \dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) &\implies \frac{V_\varphi^2}{V} \ll H^2 \\ (ii) \quad \ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} &\implies V_{\varphi\varphi} \ll H^2 \end{aligned} \quad (1.27)$$

è possibile riscrivere le condizioni di SR come

$$\begin{aligned} (i) \quad \epsilon &\equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_\varphi}{V} \right)^2 \ll 1 \\ (ii) \quad |\eta| &\equiv \frac{1}{3} \frac{|V_{\varphi\varphi}|}{H^2} \simeq \frac{1}{8\pi G} \left| \frac{V_{\varphi\varphi}}{V} \right| \ll 1, \end{aligned} \quad (1.28)$$

dove sono stati introdotti i parametri di SR ϵ ed η [61]. Questi parametri ci permettono di testare le predizioni teoriche dei vari modelli inflazionari mediante il confronto con le osservazioni.

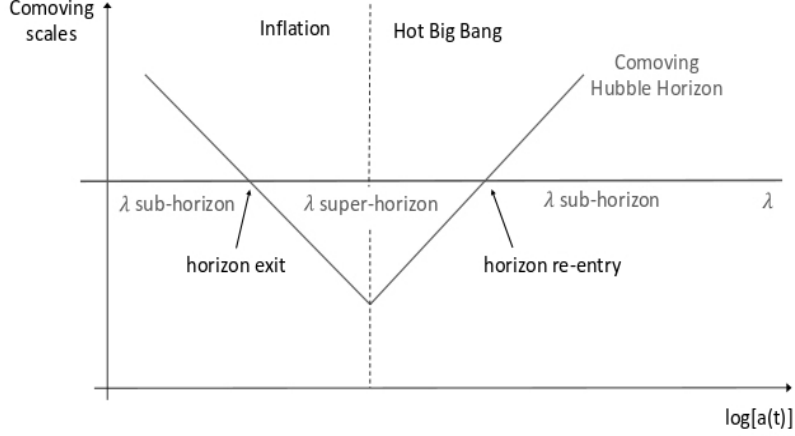


Figura 1.2: Schema sull'andamento del raggio di Hubble comovente confrontato con una generica scala λ .

Una volta analizzate le condizioni per avere inflazione possiamo considerare a titolo di esempio alcuni dettagli specifici relativi al problema dell'orizzonte. Osserviamo a tal proposito che il raggio di Hubble R_H definito dall'equazione (1.14) rappresenta una scala caratteristica oltre la quale si ha disconnessione causale e che durante l'inflazione risulta pressoché costante. Ne segue che, in questo periodo, il raggio di Hubble comovente r_H decresce dando la possibilità a scale comoventi inizialmente in connessione causale di superare l'orizzonte cosmologico definito dal raggio di Hubble. Allo stesso tempo, però, durante le ere dominate da radiazione e materia r_H aumenta permettendo alle scale di riconnettersi e permettendoci quindi di spiegare le condizioni di omogeneità ed isotropia che osserviamo indipendentemente dalla direzione di provenienza dei fotoni del CMB, vedi Figura 1.2.

Tuttavia si noti che per far sì che l'inflazione risolva sia il problema dell'orizzonte che quello della piatezza non basta avere una fase di espansione accelerata, ma bisogna imporre determinate condizioni anche sulla durata. Questo scaturisce dalla richiesta che tutte le scale comoventi che osserviamo oggi debbano uscire dall'orizzonte durante l'inflazione. Per imporre condizioni sulla durata possiamo introdurre il numero di *e-folding* N , definito come

$$N = \int_{t_i}^{t_f} dt H(t) = \ln \left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right), \quad (1.29)$$

dove t_i e t_f sono, rispettivamente, il tempo in cui l'inflazione inizia ed il tempo in cui finisce. Si può dimostrare che entrambi i problemi di cui abbiamo discusso sono risolti se $N \gtrsim 60 - 70$ [61]. Infatti, nel caso specifico del problema dell'orizzonte, la richiesta

$$r_H(t_0) \leq r_H(t_i), \quad (1.30)$$

può essere riscritta, moltiplicando ambo i membri per a_0 , come

$$\frac{a_i}{a_0} H_0^{-1} \leq H_i^{-1}, \quad (1.31)$$

da cui, moltiplicando e dividendo il membro di destra per a_f ,

$$\left(\frac{a_i}{a_f}\right) \left(\frac{a_f}{a_0}\right) H_0^{-1} \leq H_i^{-1} \implies e^{-N} \left(\frac{T_0}{T_f}\right) H_0^{-1} \leq H_i^{-1}. \quad (1.32)$$

Ne segue che

$$N \geq \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \ln\left(\frac{H_i}{T_f}\right), \quad (1.33)$$

da cui, sostituendo i valori numerici, si ottiene il risultato cercato.

Prima di concludere è importante osservare che i problemi dell'orizzonte e della piattezza non sono risolti solo nel caso specifico dell'inflatone. Infatti quanto detto sia sul raggio di Hubble sia sul numero di *e-folding* è del tutto generale, valido anche per modelli inflazionari che vanno oltre il modello dell'inflatone.

1.2.1 Fluttuazioni quantistiche dell'inflatone

Per poter studiare come l'inflatone “guidi” l'inflazione e come vengano prodotte le condizioni iniziali che sono all'origine per esempio delle anisotropie del CMB che osserviamo, risulta conveniente separare la parte di background dalle fluttuazioni, ovvero

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, \mathbf{x}), \quad (1.34)$$

dove $\varphi_0(t) = \langle 0 | \varphi(t, \mathbf{x}) | 0 \rangle$ è il valore di aspettazione sullo stato di vuoto del campo φ , mentre $\delta\varphi(t, \mathbf{x})$ è la fluttuazione quantistica dello stesso. Il paradigma inflazionario relaziona le fluttuazioni $\delta\varphi$ con le perturbazioni nella densità di energia primordiale, le quali rimangono presenti dopo l'inflazione e sono l'origine della formazione di tutte le strutture nel nostro Universo. Infatti, quando la materia domina l'Universo ($z \sim 3200$), le disomogeneità primordiali ($\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$) vengono amplificate dalla gravità, attraverso un processo di collasso gravitazionale, crescendo fino a formare le strutture che osserviamo oggi.

Come accennato nella sezione precedente è indispensabile che durante l'inflazione il raggio di Hubble comovente decresca con il tempo. In questo

modo la lunghezza d'onda delle fluttuazioni $\delta\varphi$ supera l'orizzonte. Poiché queste fluttuazioni quantistiche sono originate su scale molto più piccole di $(aH)^{-1}$ è possibile utilizzare la teoria di campo quantistica su uno spazio-tempo piatto per descriverle. La “micro-fisica” non agisce quando le lunghezze d'onda delle fluttuazioni si trovano al di fuori dell'orizzonte e questo significa che la loro ampiezza è fissata, quando queste superano r_H , ad un valore $\delta\varphi$ diverso da zero. Quando l'inflazione termina il raggio di Hubble aumenta più velocemente del fattore di scala permettendo alle fluttuazioni di rientrare nell'orizzonte durante le ere dominate da radiazione o materia. Queste conservano informazioni sul periodo inflazionario dandoci la possibilità di sondare la fisica dell'inflazione stessa, si faccia ancora riferimento alla Figura 1.2.

Per descrivere l'evoluzione delle fluttuazioni quantistiche possiamo perturbare l'equazione del moto (1.18) ottenendo, al primo ordine,

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\delta\varphi}{a^2} + V_{\varphi\varphi}\delta\varphi = 0. \quad (1.35)$$

È conveniente riscrivere l'equazione del moto in termini di tempo conforme $d\tau = dt/a$ ed introdurre il campo

$$\delta\hat{\varphi}(\tau, \mathbf{x}) = a(\tau)\delta\varphi(\tau, \mathbf{x}), \quad (1.36)$$

in modo da poter studiare la dinamica del campo $\delta\hat{\varphi}$ nello spazio di Fourier. Osservando che

$$\delta\hat{\varphi}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\hat{\varphi}(\tau, \mathbf{k}), \quad (1.37)$$

possiamo quantizzare $\delta\hat{\varphi}$ con la procedura standard della seconda quantizzazione, ovvero

$$\delta\hat{\varphi}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[u_k(\tau) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_k^*(\tau) a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (1.38)$$

dove $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ sono, rispettivamente, gli operatori di *annichilazione* e *creazione*. Gli operatori $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ soddisfano l'algebra

$$\begin{aligned} (i) \quad & [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\ (ii) \quad & [a_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}, a_{\mathbf{p}}^{(\dagger)}] = 0, \end{aligned} \quad (1.39)$$

mentre, introdotta la derivata rispetto al tempo conforme $' \equiv d/d\tau$, i modi $u_k(\tau)$ sono vincolati dalla condizione

$$u_k^* u_k' - u_k u_k'^* = -i. \quad (1.40)$$

Segue l'equazione del moto per $u_k(\tau)$

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + a^2 M_\varphi^2 \right) u_k = 0, \quad (1.41)$$

dove $M_\varphi^2 = V_{\varphi\varphi}$ è il quadrato della massa effettiva dell'inflatone. Benché nella fase di de Sitter l'equazione (1.41) abbia soluzione esatta risulta più conveniente analizzare separatamente o il caso in cui k^2 risulta dominante su $\frac{a''}{a}$, oppure quello opposto. Nel caso massless⁸ ($M_\varphi = 0$) abbiamo che, per scale *sub-horizon* ($k \gg aH$), k^2 risulta dominante e quindi la (1.41) si riduce all'equazione di un oscillatore armonico

$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \quad (1.42)$$

la cui soluzione è data dall'onda piana

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}. \quad (1.43)$$

Questo significa che la fluttuazione $\delta\varphi_k$ oscilla con un'ampiezza smorzata dal fattore di scala, ovvero

$$|\delta\varphi_k| = \frac{1}{a(\tau)\sqrt{2k}}. \quad (1.44)$$

Nel regime *super-horizon* ($k \ll aH$), invece, è il fattore a''/a ad essere dominante e quindi l'equazione del moto diviene

$$u_k'' - \frac{a''}{a} u_k = 0. \quad (1.45)$$

La soluzione risulta polinomiale nel fattore di scala ed in particolare abbiamo

$$u_k(\tau) = B_-(k)a^{-2}(\tau) + B_+(k)a(\tau). \quad (1.46)$$

Chiaramente con il passare del tempo il modo decrescente B_- viene soppresso dal fattore $a^{-2}(\tau)$ e quindi possiamo trascurarlo. In questo modo possiamo calcolare l'ampiezza del modo crescente B_+ effettuando un "matching" con il modulo della soluzione (1.43) valutando il tutto rispetta alla scala $k = aH$ che sta superando l'orizzonte

$$|\delta\varphi_k| = |B_+(k)| = \frac{H}{2k^3}. \quad (1.47)$$

⁸Ancora una volta è stato considerato il caso a massa nulla solo per comodità.

Quello ottenuto, però, è un risultato approssimato. Per ottenere la soluzione generale occorre considerare che, durante l'inflazione, non si ha un'espansione puramente di de Sitter ma si ha una fase di quasi de Sitter, ovvero

$$a(\tau) \simeq -\frac{1}{H} \frac{1}{\tau(1-\epsilon)}. \quad (1.48)$$

Inoltre bisogna tener conto della presenza della massa effettiva M_φ , ovvero del parametro di SR η , e delle perturbazioni della metrica attorno FRW, si veda per esempio [33]. In questo modo la soluzione per $\delta\varphi_k$ diviene (su scale super-horizon) [33]

$$|\delta\varphi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2}-\nu}, \quad (1.49)$$

dove $\nu^2 \simeq \frac{9}{4} + 9\epsilon - 3\eta$ e quindi $3/2 - \nu \simeq \eta - 3\epsilon$. A questo punto possiamo andare a studiare la statistica del campo $\delta\varphi$ andando a considerare la funzione di correlazione ad n punti $\langle \delta\varphi(\mathbf{x}_1) \cdots \delta\varphi(\mathbf{x}_n) \rangle$, in modo da ottenere un legame tra le fluttuazioni quantistiche primordiali e le perturbazioni che portano alle anisotropie del CMB. Osserviamo che per un campo Gaussiano solo la 2-punti risulta rilevante in quanto tutte le $(2n+1)$ -punti e le parti connesse con $n > 2$ sono nulle⁹. Poiché le osservazioni ci dicono che $\delta\varphi$ ha una distribuzione quasi Gaussiana possiamo focalizzarci sulla 2-punti. In particolare, se introduciamo la funzione di correlazione a due punti di una generica perturbazione $\delta(\mathbf{x})$ come

$$\langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\delta(\mathbf{x}) \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} \langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2) \rangle, \quad (1.50)$$

con la solita convenzione per la trasformata di Fourier

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{k}), \quad (1.51)$$

possiamo definire lo spettro di potenza (relativo alla perturbazione δ) come

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\delta(k_1). \quad (1.52)$$

Da questa definizione generale è possibile ricavare, nel limite di scale super-horizon $k \ll aH$, l'espressione dello spettro di potenza adimensionale \mathcal{P} associato alle fluttuazioni dell'inflatone [61]

⁹In generale se abbiamo una funzione di correlazione ad n -punti il teorema di *Wick* ci permette di riesprimerla in termini del prodotto di 2-punti più la parte ad n -punti connessa [55].

$$\mathcal{P}_{\delta\varphi}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\delta\varphi}(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}. \quad (1.53)$$

Prima di concludere osserviamo che lo spettro di potenza adimensionale, essendo $\langle \delta\varphi \rangle = 0$, può essere interpretato come il contributo alla varianza della fluttuazione su scala logaritmica, ovvero [61]

$$\sigma_{\delta\varphi}^2 = \langle \delta\varphi^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\delta\varphi}(k). \quad (1.54)$$

1.3 Perturbazioni cosmologiche

Per poter legare le anisotropie in temperatura del CMB con le fluttuazioni quantistiche dei campi presenti durante l'inflazione è necessario rivolgere l'attenzione allo studio dell'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche. Questo ci porta ad introdurre le perturbazioni della metrica; infatti, quando i campi in esame (indichiamole pure con χ) dominano la densità di energia dell'Universo, ogni fluttuazione quantistica $\delta\chi$ induce una perturbazione $\delta T_{\mu\nu}$ tensore energia-momento totale. Questa perturbazione, una volta inserita nell'equazione di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \quad (1.55)$$

restituisce una perturbazione del tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

Poiché il nostro Universo, su scale cosmologiche, in media sembra essere ben descritto da un background di Robertson-Walker $g_{\mu\nu}^{RW}$, introdurre le perturbazioni $h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) del tensore metrico significa andare a considerare una metrica del tipo

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{RW} + h_{\mu\nu}. \quad (1.56)$$

L'invarianza per diffeomorfismi della Relatività Generale (GR), dettata dal fatto che due soluzioni dell'equazione di Einstein risultano fisicamente equivalenti se diffeomorfe tra loro, rende la definizione delle perturbazioni in GR gauge dipendenti. In altre parole, possono esistere altre soluzioni per le equazioni di Einstein tali per cui la metrica possa essere ancora scritta come la metrica $g_{\mu\nu}^{RW}$ più un'altra perturbazione diversa dalla precedente. È chiaro quindi che la scelta di una gauge, ovvero un'identificazione tra punti di uno spazio-tempo perturbato (e quindi fisico) e punti di uno spazio-tempo di background, rappresenta un problema nell'ambito delle perturbazioni in GR.

1.3.1 Il “problema” della dipendenza di gauge

Possiamo cercare di formalizzare quanto detto andando a considerare due diverse varietà: una che rappresenti lo *spaziotempo di background*, M_b , e l'altra che rappresenti lo *spaziotempo fisico*, M_f . In aggiunta possiamo considerare un diffeomorfismo che leghi queste due, *i.e.* $\Gamma : M_b \rightarrow M_f$. Benché le varietà M_b ed M_f siano le “stesse” (sono diffeomorfe), possiamo pensare che sulla prima vi sia una metrica di Robertson-Walker, mentre sulla seconda vi sia una qualche metrica $g_{\mu\nu}$ che obbedisca all'equazioni di Einstein. Il diffeomorfismo φ ci permette di passare da uno *spazio-tempo* all'altro, ma poiché siamo interessati a costruire una metrica a partire dalla metrica imperturbata di Robertson-Walker, concentreremo la nostra attenzione sul *pullback* $(\Gamma^*g)_{\mu\nu}$ della metrica fisica, ovvero, detto “rozzamente”, la “forma” della metrica reale sulla varietà di background. In questo modo possiamo definire la perturbazione come

$$h_{\mu\nu} = (\Gamma^*g)_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{RW}. \quad (1.57)$$

A questa definizione dobbiamo aggiungere la richiesta che, tra tutti i diffeomorfismi, gli unici di nostro interesse siano quelli che rendono $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Dunque il problema relativo alla dipendenza di gauge si traduce nell'esistenza di un certo numero di diffeomorfismi tra M_b ed M_f che soddisfano la condizione $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Infatti se consideriamo una famiglia di diffeomorfismi ad un parametro $\psi_\epsilon : M_b \rightarrow M_f$, generati da un campo vettoriale $\xi^\mu(x) = dx^\mu/d\epsilon$ su M_b , per ϵ sufficientemente piccolo possiamo definire la perturbazione

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} &= [(\Gamma \circ \psi_\epsilon)^*g]_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{RW} \\ &= [\psi_\epsilon^*(\Gamma g)^*]_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{RW}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

dove è stato sfruttato il fatto che il pullback di una composizione è uguale alla composizione dei pullback in ordine invertito (per visualizzarlo basta osservare che la “funzione” Γ^* valuta la metrica fisica sullo “spazio” di background, mentre ψ_ϵ prende ed assume valori su M_b : se la legge di composizione tra pullback non fosse definita così ci ritroveremmo a valutare ψ_ϵ su un oggetto non appartenente al suo dominio di definizione). Se teniamo conto della relazione (1.56) otteniamo

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = \psi_\epsilon^*(h + g^{RW})_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{RW} = \psi_\epsilon^*(h)_{\mu\nu} + \psi_\epsilon^*(g^{RW})_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{RW}. \quad (1.59)$$

Poiché ϵ deve essere piccolo, al primo ordine $\psi_\epsilon^*(h)_{\mu\nu}$ risulta uguale ad $h_{\mu\nu}$, mentre gli altri due addendi rappresentano la parte dipendente dalla scelta di gauge, ovvero

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = h_{\mu\nu} + \psi_\epsilon^*(g^{RW})_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{RW}. \quad (1.60)$$

Infatti l'espressione scritta, al variare di ϵ , ci fa capire come sia possibile cambiare la "struttura" della perturbazione considerata, impedendone una determinazione univoca. Inoltre è possibile osservare come, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, gli ultimi due addendi rappresentino la derivata di Lie della metrica imperturbata lungo il campo vettoriale ξ^μ , ovvero

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} &= h_{\mu\nu} + \epsilon \frac{\psi_\epsilon^*(g^{RW})_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{RW}}{\epsilon} \\ &= h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}^{RW} \\ &= h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Adesso possiamo pensare di separare le perturbazioni alla metrica di background in accordo con le loro proprietà di trasformazione nel trispazio. La componente "00" è uno scalare rispetto alle trasformazioni nel trispazio, la componente "0i" (uguale alla componente "i0", in quanto la metrica perturbata è un tensore (0,2) simmetrico, *i.e.* $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) trasforma come un trivettore, mentre la componente "ij" trasforma come un tensore simmetrico a due indici di tipo spazio. Osserviamo ancora che il tensore spaziale può essere ulteriormente decomposto nella parte a traccia nulla più la traccia dello stesso. Segue per $g_{\mu\nu}$, esplicitando l'ordine r dello sviluppo perturbativo,

$$\begin{aligned} (i) \quad g_{00} &= g_{00}^{RW} + h_{00} = - \left[1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \tilde{\Phi}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \right] \\ (ii) \quad g_{i0} &= g_{i0}^{RW} + h_{i0} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \omega^{(r)}(\mathbf{x}, t) \\ (iii) \quad g_{ij} &= g_{ij}^{RW} + h_{ij} = a^2(t) \left\{ \left[1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \tilde{\Psi}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \right] \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \chi_{ij}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \right\}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

dove $\tilde{\Phi}^{(r)}$ e $\tilde{\Psi}^{(r)}$ sono due funzioni scalari, $\omega^{(r)}$ è una funzione vettoriale, mentre $\chi^{(r)}$ è una funzione tensoriale tale per cui $\chi_{ij}^{(r)} = \chi_{ji}^{(r)}$ e $\chi_i^{i(r)} = 0$. Quest'ultimo passaggio ci permette di studiare la scelta della gauge specificatamente per un ordine fissato nello sviluppo perturbativo. A questo punto possiamo fare un passaggio ulteriore andando a decomporre ogni perturbazione nella sua parte scalare, vettoriale e tensoriale. In particolare $\tilde{\Phi}^{(r)}$ e $\tilde{\Psi}^{(r)}$ hanno solo componente scalare, $\omega_i^{(r)}$ si può decomporre nella sua parte scalare e vettoriale *i.e.*

$$\omega_i^{(r)} = \partial_i \omega_{||}^{(r)} + \omega_{i\perp}^{(r)}, \quad (1.63)$$

con $\partial^i \omega_{i\perp}^{(r)} = 0$, ed infine $\chi_{ij}^{(r)}$ si può decomporre nella sua parte scalare, nelle sue parti vettoriali e nella sua componente tensoriale, *i.e.*

$$\chi_{ij}^{(r)} = D_{ij} \chi_{||}^{(r)} + \partial_i \chi_j^{(r)} + \partial_j \chi_i^{(r)} + \chi_{ij}^{(r)T}, \quad (1.64)$$

dove $\chi_i^{(r)Ti} = 0$, $\partial^i \chi_{ij}^{(r)T} = 0$ e

$$D_{ij} = \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2, \quad (1.65)$$

è un operatore simmetrico e traccia nulla. Inoltre, poiché l'equazione (1.61) ci sta dicendo che la perturbazione della metrica all'ordine lineare cambia lungo una certa direzione ξ^μ , possiamo pensare di estendere il ragionamento ad ordini superiori, ovvero sviluppare ξ^μ come

$$\xi^\mu = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \xi_{(r)}^\mu \quad (1.66)$$

ed, anche per $\xi_{(r)}^\mu$, separare la parte scalare dalla parte vettoriale, ovvero

$$\begin{aligned} (i) \quad \xi_{(r)}^0 &= \alpha_{(r)} \\ (ii) \quad \xi_{(r)}^i &= \partial^i \beta_{(r)} + d_{(r)}^i, \end{aligned} \quad (1.67)$$

con $\partial_i d_{(r)}^i = 0$. In questo modo fissare una gauge si traduce nel fissare, ordine per ordine, $\alpha_{(r)}$, $\beta_{(r)}$ e $d_{(r)}^i$.

1.3.2 Variabili gauge invarianti

Da quanto detto è chiaro che grandezze che non risultino *gauge invarianti*, come ad esempio la perturbazione di densità, non possano essere direttamente associate ad osservabili in quanto basterebbe cambiare gauge per cambiarne il valore! Dunque è necessario introdurre alcune grandezze gauge invarianti in modo da poter relazionare queste a certe quantità osservabili ed “eliminare” la dipendenza dalla scelta della gauge. Una quantità interessante sotto questo punto di vista è la perturbazione di curvatura su ipersuperfici di densità uniforme

$$\zeta(\mathbf{x}) \equiv -\tilde{\Psi} - \mathcal{H} \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad (1.68)$$

dove \mathcal{H} è il parametro di Hubble in coordinate conformi, mentre il “ ’ ” denota la derivata rispetto al tempo conforme τ . Altre due grandezze gauge invarianti che ci torneranno utili nel seguito sono i due potenziali di Bardeen [14]

$$\begin{aligned}
(i) \quad \Phi &= \tilde{\Phi} + \frac{1}{6} \nabla^2 \chi_{||} + \frac{a'}{a} \omega_{||} - \frac{1}{2} \frac{a'}{a} \chi'_{||} \\
(ii) \quad \Psi &= \tilde{\Psi} + \omega'_{||} + \frac{a'}{a} \omega_{||} - \frac{1}{2} \left(\chi''_{||} + \frac{a'}{a} \chi'_{||} \right).
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Prima di concludere questa sezione vale la pena analizzare nel dettaglio alcune delle gauge più utilizzate.

Gauge di Poisson

La *gauge di Poisson* è caratterizzata dalla scelta

$$\begin{aligned}
(i) \quad \omega_{||} &= 0 \\
(ii) \quad \chi_{||} &= 0 \\
(iii) \quad \chi_{i\perp} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.70}$$

ed, in particolare, vale la relazione

$$\begin{aligned}
(i) \quad \Phi &= \tilde{\Phi} \\
(ii) \quad \Psi &= \tilde{\Psi}.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Questa gauge generalizza quella Newtoniana o longitudinale nella quale perturbazioni vettoriali e tensoriali risultano trascurate, scelta non corrispondente ad una scelta di gauge, ma bensì ad una scelta dettata dalla dinamica.

Gauge spazialmente piatta

La *gauge spazialmente piatta* è caratterizzata dalla scelta

$$\begin{aligned}
(i) \quad \tilde{\Psi} &= 0 \\
(ii) \quad \chi_{||} &= 0 \\
(iii) \quad \chi_{i\perp} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.72}$$

ovvero vengono selezionate ipersuperfici spaziali tali per cui la metrica 3-dimensionale indotta rimanga imperturbata da perturbazioni scalari, vettoriali o tensoriali.

Gauge a densità uniforme

La *gauge a densità uniforme* è caratterizzata dalla condizione

$$\delta\rho = 0, \tag{1.73}$$

la quale lascia una libertà di scelta su una perturbazione scalare ed una perturbazione vettoriale.

1.3.3 Perturbazione di curvatura

La perturbazione di curvatura $\zeta(\mathbf{x})$, come abbiamo già detto, risulta essere una variabile gauge invariante. Per mostrarlo possiamo osservare che all'ordine lineare la curvatura spaziale intrinseca su ipersuperfici con tempo conforme τ costante per Universi piatti è data da [33]

$${}^{(3)}R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \hat{\Psi}, \quad (1.74)$$

dove per semplicità è stato posto

$$\hat{\Psi} \equiv \tilde{\Psi} + \frac{1}{6} \nabla^2 \chi. \quad (1.75)$$

La perturbazione di curvatura $\hat{\Psi}$ non risulta gauge invariante in quanto a seguito di una generica trasformazione si ha

$$\hat{\Psi} \rightarrow \tilde{\tilde{\Psi}} = \hat{\Psi} - \frac{a'}{a} \alpha, \quad (1.76)$$

tuttavia, poiché la perturbazione di densità trasforma come [33]

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho + \rho'_0 \alpha, \quad (1.77)$$

la combinazione

$$\zeta(\mathbf{x}) \equiv -\tilde{\tilde{\Psi}} - \mathcal{H} \frac{\tilde{\delta\rho}}{\rho'_0}, \quad (1.78)$$

risulta gauge invariante. La sua peculiarità risiede nel fatto che essa ci permette di studiare l'evoluzione delle perturbazioni di densità primordiali durante l'inflazione. Infatti se consideriamo il caso in cui φ sia l'inflatone, abbiamo che

$$\mathcal{H} \frac{\delta\rho_\varphi}{\rho'_\varphi} \simeq \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\varphi'}, \quad (1.79)$$

in quanto dall'equazione di continuità per l'inflatone e dalle (1.20) abbiamo che

$$\rho'_\varphi = -3\mathcal{H}(\rho_\varphi + P_\varphi) = -3\mathcal{H}\dot{\varphi}^2, \quad (1.80)$$

mentre l'approssimazione di Slow-Roll fornisce la relazione

$$\delta\rho_\varphi \simeq V_\varphi\delta\varphi \simeq -3\mathcal{H}\dot{\varphi}\delta\varphi. \quad (1.81)$$

A questo punto possiamo osservare che la ζ risulta costante su scale *super-horizon* in quanto la microfisica è “congelata” e dunque diviene possibile relazionare la ζ con le fluttuazioni quantistiche dell’inflatone nel momento in cui la scala di interesse fuoriesce dall’orizzonte cosmologico. Ad esempio possiamo considerare il caso in cui la scala di interesse k rientri nell’orizzonte cosmologico durante l’epoca dominata dalla radiazione. Se denotiamo con $t_H^{(2)}(k)$ l’epoca corrispondente al rientro della scala k nell’orizzonte cosmologico, mentre con $t_H^{(1)}(k)$ l’epoca in cui la stessa scala fuoriesce dall’orizzonte cosmologico abbiamo che, nella gauge spazialmente piatta,

$$\frac{1}{4} \frac{\delta\rho_r}{\rho_r} \Big|_{t_H^{(2)}(k)} = \zeta \Big|_{t_H^{(1)}(k)} = H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}} \Big|_{t_H^{(1)}(k)}, \quad (1.82)$$

ottenendo quindi una relazione tra lo spettro delle perturbazioni oggi (ovvero la dipendenza di $\delta\rho_r/\rho_r$ da k) ed il particolare modello inflazionario. Ora, in via del tutto generale, come abbiamo visto nella sezione 1.2.1 nel limite di scale *super-horizon* $k \ll aH$ l’espressione dello spettro di potenza adimensionale \mathcal{P} associato alle fluttuazioni dell’inflatone è data da

$$\mathcal{P}_{\delta\varphi}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\delta\varphi}(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}, \quad (1.83)$$

Ne segue che, nella *gauge spazialmete piatta*, introdotto lo spettro di potenza relativo alla perturbazione ζ

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\zeta(k_1), \quad (1.84)$$

si ha, a partire dall’espressione (1.68),

$$P_\zeta(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}}\right)^2 \Big|_{k=aH}. \quad (1.85)$$

Se H e $\dot{\varphi}$ variano “molto poco” significa che la dipendenza dalla scala k è nulla ed in questi casi si parla di spettro di Harrison-Zel’dovich. In particolare, definito l’indice spettrale n_s come

$$n_s - 1 = \frac{d \log \mathcal{P}_\zeta(k)}{d \log k}, \quad (1.86)$$

il caso citato corrisponde ad avere $n_s = 1$, ovvero $\mathcal{P}_\zeta(k) = \text{cost}$. In generale è possibile ottenere il legame tra parametri di SR (dipendenti dal modello inflazionario) ed indice spettrale stesso ricavando così informazioni sulla dinamica inflazionaria in quanto si ha che

$$\mathcal{P}_{\delta\rho/\rho}(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}} \right)^2 \Big|_{t_H^{(1)}(k)} \equiv \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu}, \quad (1.87)$$

dove è stata utilizzata l'espressione (1.53) valida per scale super-horizon. Ne segue, dunque, che

$$n_s - 1 = 3 - 2\nu = 2\eta - 6\epsilon. \quad (1.88)$$

1.3.4 Formalismo δN

Un'altra tecnica spesso utilizzata per calcolare lo spettro di potenza relativo alla perturbazione di curvatura ζ è costituita dal formalismo δN . Infatti questo fornisce un altro modo per legare le perturbazioni di un campo, come ad esempio l'inflatone, allo spettro di potenza della perturbazione ζ (ma, si noti, solo su scale più grandi del raggio di Hubble). In particolare con il formalismo δN la perturbazione di curvatura su ipersuperfici di densità uniforme $\zeta(\mathbf{x})$ ad un tempo t può essere interpretata come una quantità geometrica che indica le fluttuazioni nell'espansione locale dell'Universo. Nello specifico, se $N(\mathbf{x}, t^*, t)$ è il numero di *e-foldinig* dell'espansione valutata tra t^* e t , con ipersuperficie iniziale piatta ed ipersuperficie finale a densità uniforme, abbiamo [61]

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = N(\mathbf{x}, t^*, t) - N(t^*, t) = \delta N(\mathbf{x}, t), \quad (1.89)$$

con

$$N(t^*, t) = \int_{t^*}^t dt' H(t') = \ln \left(\frac{a(t)}{a(t^*)} \right). \quad (1.90)$$

È possibile partire da un modello inflazionario ben preciso e calcolare la perturbazione di curvatura su ipersuperfici di densità uniforme ζ , su scale più grandi del raggio di Hubble, sfruttando il formalismo δN , il quale permette di legare le perturbazioni dei campi all'istante in cui escono dall'orizzonte cosmologico durante l'inflazione con lo spettro di potenza che osserviamo oggi. Questo è un altro modo per ottenere un legame tra modello inflazionario ed osservabile, in quanto sono le fluttuazioni quantistiche del campo che determinano le condizioni iniziali nei modelli "post-inflazionari". In particolare, riesprimendo N come funzione dei campi inflazionari, la (1.89) diviene

$$\zeta(\mathbf{x}, t) \equiv \delta N(\chi(\mathbf{x}, t^*), t), \quad (1.91)$$

dove $N(\chi(\mathbf{x}, t^*))$ è il numero di *e-folding* dell'espansione dell'Universo nella posizione \mathbf{x} tra l'istante t^* in cui la scala esce dall'orizzonte durante l'inflazione e l'istante t nel quale la densità di energia ha un valore fisso. A partire dalla perturbazione nel campo χ

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \chi_0(t) + \delta\chi(\mathbf{x}, t) \quad (1.92)$$

si ottiene un'espressione per la $\zeta(\mathbf{x}, t)$ [56]

$$\zeta(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial N}{\partial \chi} \right|_{\chi_0(t^*)} \delta\chi(\mathbf{x}, t^*) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 N}{\partial \chi^2} \right|_{\chi_0(t^*)} (\delta\chi(\mathbf{x}, t^*))^2 + \dots, \quad (1.93)$$

ottenuta espandendo la (1.91). In realtà, in maniera del tutto generale, è possibile estendere questa espressione al caso in cui le perturbazioni derivino dalle fluttuazioni di diversi campi $\delta\chi^\mu$. Infatti, passando nello spazio di Fourier, la (1.93) "generalizzata" si può scrivere come [56]

$$\zeta(\mathbf{k}) = N_\alpha \delta\chi^\alpha(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} N_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \delta\chi^\alpha(\mathbf{q}) \delta\chi^\beta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \dots, \quad (1.94)$$

dove

$$N_\alpha \equiv \frac{\partial N}{\partial \chi^\alpha} \quad (1.95)$$

mentre

$$N_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial \chi^\alpha \partial \chi^\beta}. \quad (1.96)$$

In questo modo, utilizzando il formalismo introdotto nella sezione precedente e l'equazione (1.93), o la (1.94), è possibile calcolare lo spettro di potenza relativo alla ζ in funzione della variazione del numero di *e-folding* e delle fluttuazioni primordiali dei campi presenti durante l'inflazione..

1.3.5 Perturbazioni tensoriali

In Relatività Generale, oltre alle perturbazioni scalari, risulta inevitabile anche la produzione delle perturbazioni tensoriali, le quali risultano generate con lo stesso meccanismo delle perturbazioni scalari. Infatti le perturbazioni tensoriali vengono prodotte a causa delle fluttuazioni quantistiche dell'inflatone (se questo risulta l'unico campo presente durante l'inflazione).

Nel caso in cui l'inflatone $\varphi(\mathbf{x}, t)$ guidi l'inflazione, perturbando al primo ordine l'azione totale si ottiene l'azione per le perturbazioni tensoriali [15]

$$S_T = \frac{M_{Pl}^2}{8} \int d^4x a^2(t) \left[\dot{\chi}_{ij} \dot{\chi}_{ij} - \frac{1}{a^2} (\nabla \chi_{ij})^2 \right], \quad (1.97)$$

dove, come accennato nella (iii) delle (1.62), χ_{ij} è un tensore simmetrico, trasverso ed a traccia nulla. Variando l'azione scritta rispetto la perturbazione χ_{ij} otteniamo le equazioni del moto per la stessa [15]

$$\ddot{\chi}_{ij} + 3H\dot{\chi}_{ij} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \chi_{ij} = 0. \quad (1.98)$$

Da quanto ottenuto risulta chiaro che le perturbazioni tensoriali soddisfanno l'equazione delle onde da cui è possibile interpretarle come un fondo stocastico di onde gravitazionali (GW) primordiali. Dalle proprietà della perturbazione χ_{ij} una soluzione dell'equazione (1.98) è data da [15]

$$\chi_{ij}(\mathbf{x}, t) = \chi(t) \epsilon_{ij}^{(+, \times)}(\mathbf{x}), \quad (1.99)$$

dove $+$ e \times rappresentano i due possibili stati di polarizzazione delle GW, mentre $\epsilon_{ij}^{(+, \times)}(\mathbf{x})$ è un tensore di polarizzazione soddisfacente le condizioni [15]

$$\begin{aligned} (i) \quad & \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \\ (ii) \quad & k^i \epsilon_{ij} = 0 \\ (iii) \quad & \epsilon_i^i = 0. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Detto ciò, poiché noi siamo interessati allo spettro di potenza, occorre passare nello spazio di Fourier. Per farlo osserviamo che la soluzione generale della (1.98) è data da [15]

$$\chi_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\lambda=+, \times} \epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}, \tau) \chi_{(\lambda)}(\mathbf{k}). \quad (1.101)$$

Dunque, definita la quantità

$$v_{ij} \equiv \frac{aM_{Pl}}{\sqrt{2}} \chi_{ij}, \quad (1.102)$$

le equazioni del moto per il modo $v_{\mathbf{k}}$ definito a partire dalla relazione

$$v_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\lambda=+, \times} \epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}, \tau) v_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \quad (1.103)$$

divengono (in Fourier space e rispetto al tempo conforme τ) [15]

$$v_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} = 0. \quad (1.104)$$

L'equazione ottenuta risulta formalmente uguale all'equazione (1.41) nel caso massless. Ne segue che l'ampiezza $\chi_{(\lambda)}$ delle perturbazioni tensoriali oscilla per scale sub-horizon, mentre per scale super-horizon risulta "congelata". In generale, quindi, si ha [15]

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{\lambda} |\chi_{(\lambda)}(\mathbf{k})|^2, \quad (1.105)$$

mentre per scale super-horizon vale la relazione [15]

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{-2\epsilon}. \quad (1.106)$$

Osserviamo che da questa espressione è possibile definire un indice spettrale tensoriale come

$$n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k}, \quad (1.107)$$

che nel caso presentato risulta pari a $n_T = -2\epsilon$.

Prima di concludere questa sezione vale la pena introdurre un altro parametro cosmologico rilevante, il rapporto "tensor-to-scalar" definito come

$$r(k_*) = \frac{A_T(k_*)}{A_s(k_*)}. \quad (1.108)$$

In questa espressione k_* è una scala di riferimento fissata, mentre le ampiezze A_T ed A_s sono introdotte riparametrizzando gli spettri di potenza tensoriali e scalari rispettivamente come [15]

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathcal{P}_T(k) &= A_T \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_T + \frac{1}{2} \frac{dn_T}{d \ln k} \ln(k/k_*) + \dots} \\ (ii) \quad \mathcal{P}_s(k) &= A_s \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s - 1 + \frac{1}{2} \frac{dn_s}{d \ln k} \ln(k/k_*) + \dots} \end{aligned} \quad (1.109)$$

Dalle espressioni esplicite (1.85) e (1.106) per \mathcal{P}_s e \mathcal{P}_T rispettivamente, si può ottenere la relazione [15]

$$r = 16\epsilon = -8n_T, \quad (1.110)$$

nota come relazione di consistenza. Questa afferma che, se valida, una misura della dipendenza di scala dello spettro di potenza tensoriale risulta estremamente difficile. Infatti un indice spettrale tensoriale elevato renderebbe inesatta la relazione di consistenza in quanto ad oggi il valore misurato per il rapporto “tensor-to-scalar” risulta $r_{0.05} < 0.07$ al 95% C.L. [15], dove il pedice indica la scala di riferimento in Mpc^{-1} .

Capitolo 2

La Radiazione Cosmica di Microonde

Quando osserviamo l'Universo circostante, più cerchiamo di guardare lontano più guardiamo indietro nel tempo. Infatti i fotoni del Fondo Cosmico di Microonde che osserviamo provengono dall'epoca della ricombinazione avvenuta circa 14 miliardi di anni fa. È chiaro, quindi, che questi fotoni risultino in qualche modo una finestra osservativa sull'Universo primordiale. Grazie ad essi è possibile risalire alla storia del nostro Universo ricostruendo, passo dopo passo, le varie fasi che ne caratterizzano l'evoluzione. La loro peculiarità risiede nel fatto che, in prima approssimazione, la radiazione misurata risulti essere una radiazione di corpo nero, aspetto affascinante in quanto è possibile descriverne lo spettro utilizzando un unico parametro cruciale, la temperatura.

La Radiazione Cosmica di Fondo (CMB) venne scoperta per puro caso nel 1964 dall'astronomo *Arno Penzias* e dal fisico *Robert Woodrow Wilson* i quali, però, non ne intuirono la vera natura. Solo successivamente questa venne interpretata da *P. Peebles*, *R. Dicke*, *P. Roll* e *D. Wilkinson* come segnale di una fase primordiale “calda” del nostro Universo. La CMB ha una oggi temperatura media T_0 di $2.725K$ caratterizzata da “piccole” ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$) fluttuazioni tra le differenti regioni di cielo osservato, le quali hanno aperto la strada verso nuovi scenari per la fisica. L'intrigante possibilità di avere a disposizione il più grande laboratorio esistente per l'osservazione del nostro Universo ha spinto molti alla ricerca di modelli che spiegassero queste anisotropie sin dalla formulazione del SCM, di cui abbiamo già discusso.

Attualmente si ritiene che vi sia stata una prima fase di espansione accelerata, detta *inflazione*, ed una seconda fase descritta dal modello Λ CDM. Di fatti, benché le predizioni basate sul modello Λ CDM riproducano in ottimo accordo i dati osservativi, è essenziale introdurre, come abbiamo visto, un periodo inflazionario nelle fasi iniziali dell'Universo in modo da poter risolvere problemi cruciali come quello dell'orizzonte e quello della piattezza. Durante

l'*inflazione* l'Universo si espande in maniera accelerata fornendo la possibilità di "rilassare" il problema delle condizioni iniziali e spiegare alcune delle sue attuali proprietà. Le fluttuazioni quantistiche dell'inflatone attorno lo stato di vuoto permettono di produrre delle perturbazioni nella densità di energia distribuite come un campo (quasi) Gaussiano statisticamente omogeneo ed isotropo. D'altra parte la teoria lineare delle perturbazioni ci permette di relazionarle alle anisotropie del CMB: è proprio questo legame che ci permette di descrivere le anisotropie come un campo avente distribuzione (quasi) Gaussiana e proprietà di isotropia statistica. Analisi dati recenti [39], però, mostrano una deviazione dall'omogeneità ed isotropia statistica. Infatti, soprattutto su grandi scale angolari [39] [38] [47], sia il satellite *Planck* che il satellite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) hanno rivelato alcuni comportamenti anomali del CMB. Benché questi si discostino di circa 3σ dalle simulazioni basate sul modello Λ CDM, risulta molto difficile farli risalire ad errori sistematici a causa della diversa struttura dei rivelatori montati sui due satelliti (e tenendo anche conto dei due strumenti "Low frequency instrument" (LFI) e "High frequency instrument" (HFI) aventi sistematiche diverse montati sul satellite Planck). Dunque viene spontaneo cercare di investigare sulla natura cosmologica o astrofisica di queste anomalie.

Nel presente lavoro lo scopo principale è quello di focalizzarsi su alcune di queste anomalie, quali *Asimmetria tra gli Emisferi* (HPA)¹ e *Modulazione di Dipolo* (DM)², e cercare eventualmente di spiegarle partendo da modelli inflazionari. Per farlo occorre entrare nel dettaglio delle osservabili del CMB e riesprimerle in termini di parametri caratteristici dell'inflazione.

2.1 Anisotropie del CMB

Abbiamo più volte detto che l'inflazione ci permette di relazionare le anisotropie in temperatura con le fluttuazioni quantistiche del campo che domina la densità di energia durante questa fase. Nello scenario standard l'inflazione termina quando l'inflatone inizia ad oscillare intorno al minimo del potenziale. Queste oscillazioni seguono dopo una fase in cui i parametri di SR di avvicinano all'unità permettendo all'inflatone di acquisire massa. Infatti, se $\eta \sim 1$, segue che $V_{\varphi\varphi} = M_\varphi^2 \gtrsim H^2$ e quindi non è più possibile trascurarla. Inoltre, sviluppando V_φ in un intorno del minimo φ_m del potenziale, è possibile riscrivere l'equazione del moto (1.18) del campo φ come

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} + V_{\varphi\varphi}(\varphi_m)\delta\varphi = 0, \quad (2.1)$$

ovvero la massa dell'inflatone fissa anche la frequenza con cui φ oscilla nell'intorno di $V(\varphi_m)$. Una volta diventato massivo, l'inflatone inizia a deca-

¹Hemispherical Power Asymmetry.

²Dipole Modulation.

dere in radiazione e particelle relativistiche più leggere dando origine ad una fase detta di *reheating* che segna il passaggio da Universo inflazionario ad Universo di FRW.

Una volta che l'inflatone decade, quindi, nell'Universo domina la radiazione la quale risulta strettamente accoppiata con la materia relativistica via *scattering Compton*

$$\gamma + e^- \leftrightarrow \gamma + e^- . \quad (2.2)$$

Infatti la sezione d'urto di interazione σ tra fotoni e particelle cariche scala con l'inverso della massa m della particella, ovvero $\sigma \propto m^{-1}$. Poiché gli elettroni risultano le particelle cariche più leggere è chiaro che l'interazione dominante risulti proprio quella tra fotoni ed elettroni stessi.

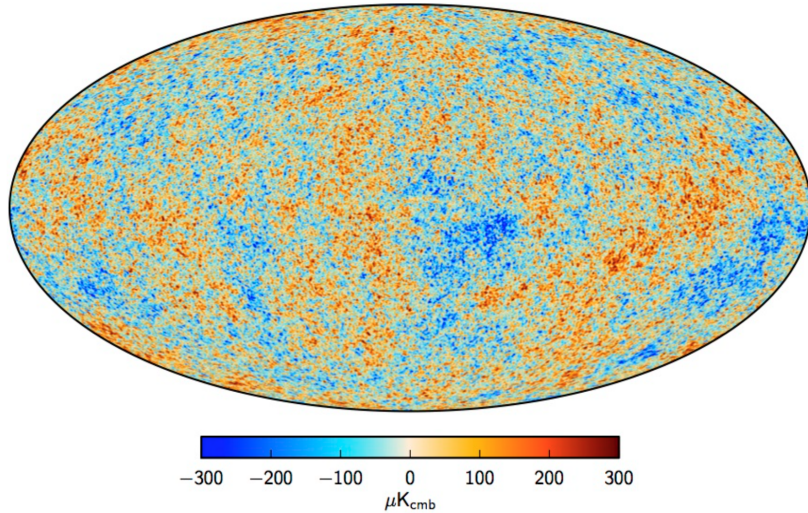


Figura 2.1: Mappa delle anisotropie nel campo di temperatura del CMB ad una risoluzione di $5'$ ottenuta dall'analisi dati del satellite *Planck*. Va osservato che una piccola striscia del piano Galattico (1.6% del cielo totale) è stata fissata imponendo le stesse proprietà statistiche della restante parte di cielo [35].

Nelle fasi iniziali è possibile descrivere l'Universo come un fluido relativistico con densità di energia ρ e pressione $P \simeq \rho/3$. In particolare i fotoni, grazie alle interazioni con la materia, risultano essere caratterizzati da uno spettro di corpo nero. Fotoni e materia rimangono fortemente accoppiati tramite scattering Compton fino a quando gli elettroni diventano non relativistici, nel qual caso l'interazione dominante diviene lo scattering Thomson. Durante la *ricombinazione*, però, la densità media di elettroni liberi³ decresce

³Per elettroni liberi si intende elettroni che non hanno legato con i protoni per formare atomi di idrogeno.

drasticamente e quindi il cammino libero medio dei fotoni tra un'interazione e l'altra diviene più grande del raggio di Hubble, ovvero anche lo scattering Thomson diviene inefficace⁴. Per descrivere la formazione e l'evoluzione del CMB si ricorre all'utilizzo delle equazioni di Boltzmann. Infatti grazie a queste è possibile descrivere l'evoluzione delle perturbazioni in temperatura partendo dall'assunzione che la funzione di distribuzione dei fotoni $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ su grande scala sia quella di un corpo nero, assunzione dettata dai limiti osservativi. In questo modo, introducendo le perturbazioni $\Delta T/T$ è possibile riscrivere la $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ come [30]

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{\mathbf{p}}, t) \simeq \left\{ \exp \left[\frac{p}{T(t) \left[1 + \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}) \right]} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (2.3)$$

dove è stata separata la parte isotropa della temperatura, quindi dipendente solo dal tempo, dalla parte disomogenea ed anisotropa⁵ $(\Delta T/T)(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}})$, quindi dipendente dalla direzione $\hat{\mathbf{p}}$ dei fotoni e dal punto \mathbf{x} . Passando nello spazio di Fourier, utilizzando il tempo conforme η e definendo lo sviluppo in multipoli

$$\Theta_\ell(k, \eta) \equiv \frac{1}{(-1)^\ell} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_\ell(\mu) \frac{\Delta T}{T}(k, \hat{\mathbf{k}}, \eta), \quad (2.4)$$

dove $\mu = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ e \mathcal{P}_ℓ è il polinomio di Legendre ℓ -simo, è possibile ottenere per il multipolo di ordine ℓ oggi l'espressione [30]

$$\begin{aligned} \Theta_\ell(k, \eta_0) &\simeq [\Theta_0 + \Phi](k, \eta_*) j_\ell[k(\eta_0 - \eta_*)] \\ &+ 3\Theta_1(k, \eta_*) \left(j_{\ell-1}[k(\eta_0 - \eta_*)] - \frac{\ell+1}{k(\eta_0 - \eta_*)} j_\ell[k(\eta_0 - \eta_*)] \right) \\ &+ \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} [\dot{\Psi} + \dot{\Phi}] j_\ell[k(\eta_0 - \eta)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

In questa espressione η_* indica il tempo conforme all'epoca della ricombinazione, j_ℓ è la funzione ℓ -sima di Bessel sferica, τ indica lo spessore ottico definito come [30]

$$\tau(\eta) \equiv \int_\eta^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a(\eta'), \quad (2.6)$$

⁴Occorre ricordare che la rate dello scattering Thomson è espressa da $\Gamma_T = \sigma_T n_e$, dove $\sigma_T = 6.6524 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ è la sezione d'urto Thomson ed n_e è la densità numerica degli elettroni [54].

⁵Occorre osservare che la perturbazione $(\Delta T/T)(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}})$ introdotta non dipende dal modulo p in quanto al primo ordine le collisioni tra elettroni e fotoni risultano elastiche e quindi non ne alterano l'energia.

e la gauge utilizzata è quella di Poisson. I tre termini sulle tre righe della (2.5) si chiamano rispettivamente *termine di Sachs-Wolfe*, *termine Doppler* e *termine di Sachs-Wolfe integrato* (ISW). In particolare, il primo termine è usualmente quello dominante: esso non è, in realtà, esattamente il monopolo della distribuzione (ovvero Θ_0), ma risulta una “temperatura” efficace data dal monopolo più un contributo gravitazionale dovuto alla presenza di porzioni di cielo sulla superficie di ultimo scattering aventi diversa densità. Il termine di dipolo, invece, è in genere sottodominante e produce anisotropie per effetto Doppler. Infatti, nel caso in cui, all’epoca della ricombinazione, le regioni dalle quali osserviamo i fotoni arrivare fino a noi avevano una velocità positiva rispetto alla nostra direzione questi ci arriveranno con frequenza maggiore e dunque quella zona sembrerà più calda. Questi due termini tengono conto solo delle anisotropie prodotte all’epoca della ricombinazione sulla superficie di ultimo scattering, mentre l’ultimo addendo è l’unico a tener conto di tutta la “storia” del CMB, essendo costruito come un integrale da $\eta = 0$ a $\eta = \eta_0$.

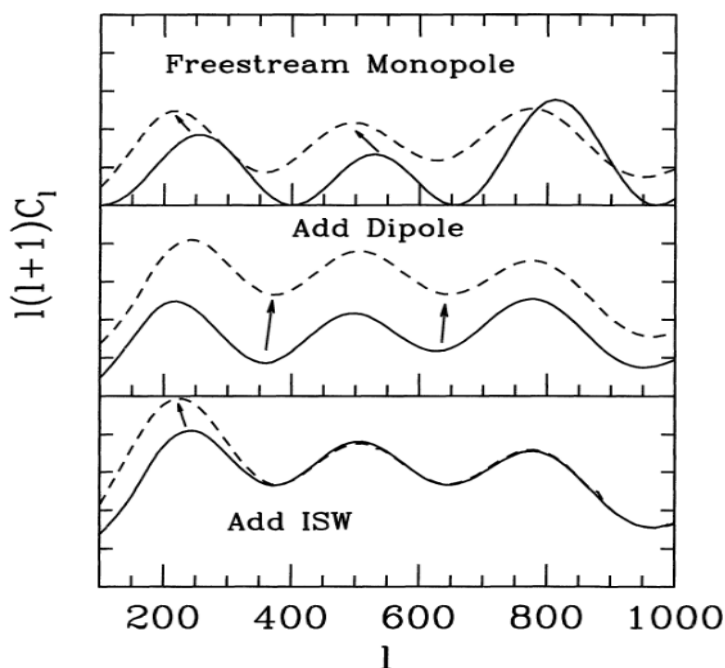


Figura 2.2: Anisotropie nello spettro di potenza angolare C_ℓ su piccole scale. Nel pannello superiore è riportato il contributo di monopolo alla ricombinazione e si può osservare come a seguito del free-streaming lo spettro di potenza angolare viene traslato verso bassi ℓ . Nel pannello di mezzo è riportato il contributo dovuto al termine di dipolo il quale aggiunge struttura allo spettro di potenza. Nel terzo pannello è riportato il contributo dovuto al termine ISW il quale tende ad aumentare le anisotropie nello spettro solo per scale comparabili con l’orizzonte cosmologico[30].

Una volta ottenuta l’espressione (2.5) che ci permette di studiare la di-

istribuzione dei fotoni provenienti dalla superficie di ultimo scattering, risulta pedagogicamente interessante capire il peso dei tre contributi. In particolare possiamo studiare cosa succede se andiamo a considerare piccole scale, ovvero scale cosmologiche che sono entrate nell'orizzonte in tempi "sufficientemente iniziali" dove la microfisica, dunque, può agire (ovvero scale che sono già entrate nell'orizzonte (acustico) all'epoca del disaccoppiamento). Il termine di monopolo $[\Theta_0 + \Phi](k, \eta_*)$ si propaga liberamente verso di noi oggi creando anisotropie su scale angolari dell'ordine di $\ell \sim k\eta_0$. Aggiungendo contributi dovuti alle piccole scale possiamo notare che la funzione di Bessel tende a traslare ed incrementare i picchi dello spettro, come mostrato nel pannello superiore della Figura 2.2. Tenendo conto anche del termine Doppler, dovuto alla presenza del dipolo, otteniamo un aumento dello spettro, come mostrato nel pannello centrale della Figura 2.2. Infine abbiamo il contributo dovuto al termine ISW, il quale tiene conto delle variazioni del potenziale gravitazionale dalla superficie di ultimo scattering fino ad oggi. Questo termine è costruito a partire da un integrale e risulta "efficace" per scale angolari maggiori di $(\eta_0 - \eta_c)/\eta_c$, dove η_c rappresenta l'istante in cui il potenziale varia. L'effetto del termine di ISW è riportato nel terzo pannello della Figura 2.2.

2.2 Decomposizione armonica e spettro di potenza

Arrivati a questo punto la domanda che sorge spontanea è come legare l'espressione (2.5) con delle osservabili. Per poter dare una risposta occorre entrare nel merito di una delle tecniche più utilizzate in Cosmologia: la decomposizione armonica. Questa consiste nel decomporre una funzione dipendente dalle componenti angolari $\hat{\mathbf{n}} = (\vartheta, \phi)$ sfruttando le armoniche sferiche, le quali costituiscono una base ortonormale in un sistema di coordinate sferiche. Se $f(\hat{\mathbf{n}})$ è la funzione di interesse si ha

$$f(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}).$$

L'espansione in armoniche sferiche è l'analogo della trasformata di Fourier fatta in un volume piatto (Euclideo) D dimensionale, solo che questa viene effettuata in un volume a curvatura non nulla (quindi con dipendenza angolare). In questo caso l'informazione sulla dipendenza dal modulo $|\mathbf{k}|$ è contenuta nell'indice ℓ dell'espansione, mentre l'informazione sulla dipendenza dalla direzione $\hat{\mathbf{k}}$ è contenuta nell'indice m . Questo significa che, in parole povere, ℓ dà l'informazione sulla scala, mentre m indica la direzione nella quale stiamo guardando. Quello che rende tale trasformazione così utile è la possibilità di separare il segnale nelle sue diverse componenti: la componente (a_{00}) di monopolo, la componente $(a_{1-1}, a_{10}, a_{11})$ di dipolo e così via. Inoltre, poiché la scala angolare ϑ va come $\vartheta \sim \frac{180^\circ}{\ell}$ significa che

più grande diventa ℓ più piccole sono le scale alle quali stiamo rivolgendo la nostra attenzione.

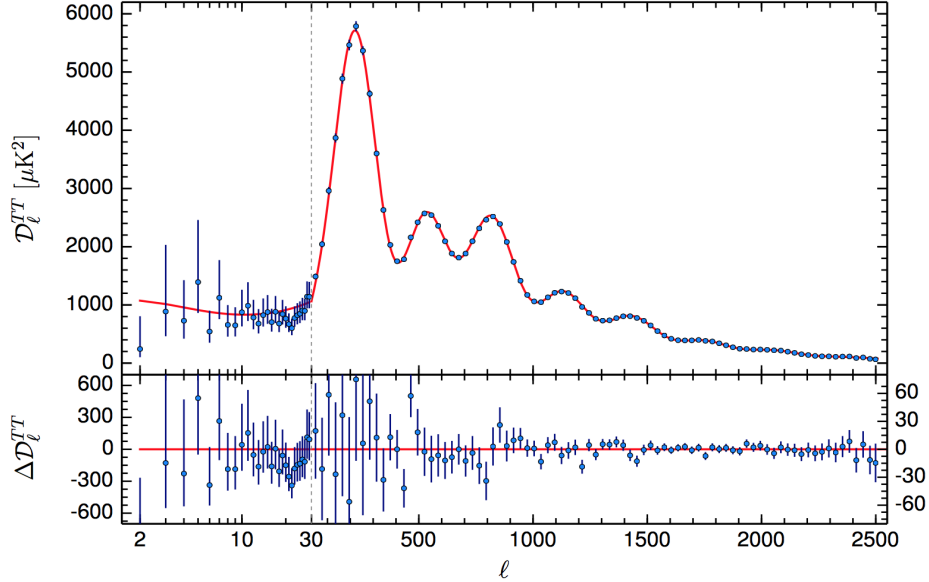


Figura 2.3: Spettro di potenza $\mathcal{D}_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi}C_\ell$ (in alto) e banda residua rispetto al fit dato da Λ CDM (in basso). Il *best-fit* è effettuato utilizzando il modello Λ CDM. La barra di errore racchiude i contributi dovuti dall'errore statistico e dalla varianza cosmica [35].

Per entrare più nel dettaglio, se $T(\hat{\mathbf{n}})$ è il campo di temperatura, abbiamo che [30]

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (2.7)$$

con

$$a_{\ell m} = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (2.8)$$

Come abbiamo già accennato, le perturbazioni che portano ad un Universo con delle disomogeneità e delle anisotropie hanno origine nel periodo inflazionario. Queste sono dovute a delle fluttuazioni quantistiche dei campi che “guidano” l’inflazione (nei modelli più semplici l’inflatone) ed essendo distribuite in modo (quasi) Gaussiano attorno lo stato di vuoto ci aspettiamo che anche i coefficienti $a_{\ell m}$ abbiano una distribuzione tale per cui il valor medio sia nullo, *i.e.*

$$\langle a_{\ell m} \rangle = 0. \quad (2.9)$$

Infatti, benché il valore di aspettazione sullo stato di vuoto possa essere in generale diverso da zero, ogni valore costante può essere riassorbito ridefinendo il campo in esame (semplicemente per traslazione) in modo da poter identificare $\langle \delta\varphi \rangle = 0$. Dunque il primo contributo non nullo è dato dalla loro varianza e quindi

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell}^{\ell'} \delta_m^{m'} C_{\ell}, \quad (2.10)$$

dove C_{ℓ} prende il nome di *spettro di potenza angolare*.

È utile osservare che per ℓ fissato abbiamo $2\ell + 1$ coefficienti $a_{\ell m}$. Inoltre, poiché vale la relazione

$$C_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle, \quad (2.11)$$

è possibile definire una certa incertezza fondamentale sulla conoscenza dei C_{ℓ} , chiamata *varianza cosmica* ΔC_{ℓ} data da

$$\begin{aligned} \Delta C_{\ell}^2 &= \langle C_{\ell}^2 \rangle - \langle C_{\ell} \rangle^2 \\ &= \frac{1}{(2\ell + 1)^2} (2\ell + 1) (3\langle C_{\ell} \rangle^2 + 2\ell \langle C_{\ell}^2 \rangle) - \langle C_{\ell} \rangle^2 \\ &= \frac{2}{2\ell + 1} \langle C_{\ell} \rangle^2. \end{aligned}$$

Ne segue quindi che

$$\left(\frac{\Delta C_{\ell}}{C_{\ell}} \right)_{\text{varianza cosmica}} = \sqrt{\frac{2}{2\ell + 1}},$$

la quale risulta avere peso maggiore per ℓ piccoli. In ogni caso vale la relazione

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}') \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_{\ell} \mathcal{P}_{\ell}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'). \quad (2.12)$$

Lo spettro di potenza angolare risulta il punto di congiunzione tra teoria ed esperimento ed il modello Λ CDM restituisce ottime previsioni sulla forma dello spettro di potenza, vedi Figura 2.3. In particolare per scale $\ell \lesssim 30$ ritroviamo il plateau di Sachs-Wolfe, questo perché le anisotropie su grandi scale non hanno subito un'evoluzione significativa riflettendo le condizioni iniziali imposte dall'inflazione.

Per scale $30 \lesssim \ell \lesssim 1500$ ritroviamo i picchi acustici e questo è dovuto al fatto che su scale intermedie l'interazione tra fotoni e barioni risulta ancora

rilevante. In particolare, prima della ricombinazione, si ha che le perturbazioni nel potenziale gravitazionale, dominato dalla densità di materia oscura, tendono a comprimere il fluido fotoni-barioni il quale, però, si oppone a questa compressione a causa della pressione del fluido dovuta alla presenza di radiazione nell'Universo. Queste fasi di compressione e decompressione del fluido danno origine ad oscillazioni dette oscillazioni acustiche. Successivamente alla fase di ricombinazione radiazione e materia si disaccoppiano e quindi la radiazione può viaggiare liberamente verso di noi. A questo punto la fase delle oscillazioni rimane fissa e viene proiettata nel cielo come una serie armonica di picchi, detti appunto picchi acustici.

Infine, per $\ell \gtrsim 1500$ ritroviamo una coda di smorzamento. Quello che succede è che le scale in esame sono sufficientemente piccole da poter essere confrontate con la distanza percorsa dai fotoni durante la ricombinazione, la quale non avviene istantaneamente. Infatti proprio per la breve (ma finita) durata della ricombinazione, la superficie di ultimo scattering acquisisce profondità e dunque se la distanza che intercorre tra uno scattering Thomson e l'altro risulta maggiore di questo spessore si ha uno smorzamento delle oscillazioni acustiche.

2.2.1 Legame con la perturbazione di curvatura

Fino ad ora non abbiamo mai affrontato nel dettaglio come relazionare lo spettro di potenza relativo alla perturbazione di curvatura ζ con lo spettro di potenza angolare del campo di temperatura. Per farlo possiamo osservare che, nella gauge di Poisson, prima che la scala di interesse rientri nell'orizzonte vale la seguente relazione [61]

$$\Phi = -\frac{3 + 3w}{5 + 3w}\zeta, \quad (2.13)$$

dove Φ è il potenziale di Bardeen (*i*) delle (1.69). Questo significa che all'epoca del disaccoppiamento (approssimandolo come dominato dalla materia con $w = 0$) abbiamo che

$$\Phi = -\frac{3}{5}\zeta. \quad (2.14)$$

Per esempio nel limite dell'effetto Sachs-Wolfe si ha che $\Delta T/T = \Phi/3$ [30], ovvero il potenziale di Bardeen risulta legato al campo di temperatura. Ne segue che ogni informazione cruciale contenuta in \mathcal{P}_ζ si riflette nello spettro di potenza del CMB. Partendo dalla relazione (2.8) e considerando l'approssimazione Sachs-Wolfe vale

$$\begin{aligned}
a_{\ell m} &= \frac{1}{3} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \Phi(\mathbf{x}_{dec}) \\
&= \frac{1}{3} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{dec}} \Phi_*(\mathbf{k}) \\
&= \frac{4\pi}{3} \sum_{\ell' m'} i^{\ell'} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) j_{\ell'}(kr_{dec}) \Phi_*(\mathbf{k}),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

dove il pedice “*” indica che il potenziale è valutato all’epoca del disaccoppiamento, mentre per l’onda piana è stato sfruttato lo sviluppo in armoniche sferiche [29]

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{dec}} = 4\pi \sum_{\ell' m'} i^{\ell'} j_{\ell'}(kr_{dec}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{n}}), \tag{2.16}$$

con r_{dec} distanza dalla superficie di disaccoppiamento ($\mathbf{x}_{dec} = r_{dec} \hat{\mathbf{n}}$) e j_{ℓ} funzione di Bessel sferica. Sfruttando l’ortornormalità tra le armoniche sferiche otteniamo l’espressione

$$a_{\ell m} = i^{\ell} \frac{4\pi}{3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) j_{\ell}(kr_{dec}) \Phi_*(\mathbf{k}). \tag{2.17}$$

A questo punto è possibile introdurre una funzione di trasferimento $D_{\ell}(k)$ la quale tiene conto della relazione generale tra Φ e $\Delta T/T$ in modo da ottenere, per i coefficienti $a_{\ell m}$, l’espressione

$$a_{\ell m} = 4\pi i^{\ell} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_{\ell}(k) \Phi(\mathbf{k}). \tag{2.18}$$

Dall’espressione (2.14) segue

$$a_{\ell m} = -4\pi i^{\ell} \frac{3}{5} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_{\ell}(k) \zeta(\mathbf{k}), \tag{2.19}$$

dalla quale risulta possibile relazionare lo spettro di potenza angolare del CMB con lo spettro di potenza relativo alla perturbazione ζ .

2.3 Funzioni finestra

Discusso prevalentemente l’aspetto teorico legato allo spettro del CMB, è necessario entrare nel dettaglio di alcuni aspetti osservativi. Quanto scritto in questo paragrafo ci sarà anche utile per alcuni dettagli che svilupperemo successivamente relativamente alle anomalie del CMB. Come abbiamo visto, teorie ed esperimenti vengono confrontati attraverso i coefficienti $a_{\ell m}$. Questo confronto, però, non è in rapporto uno ad uno in quanto le reali misure

delle anisotropie risultano limitate dalle caratteristiche dello strumento utilizzato, tra cui in particolare la risoluzione finita dello stesso. Quindi, per risolvere il problema, si ricorre all'utilizzo di "filtri", i quali limitano il range dei multipoli ℓ rispetto ai quali un dato esperimento risulta sensibile.

In particolare, il campo di temperatura misurato $T_s(\hat{\mathbf{n}})$ viene legato alla temperatura "reale" $T(\hat{\mathbf{n}})$ attraverso la convoluzione con una *funzione di fascio*⁶ $B(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}')$ centrata in $\hat{\mathbf{n}}$ [30], [54]

$$T_s(\hat{\mathbf{n}}) = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}'} B(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}') T(\hat{\mathbf{n}}'). \quad (2.20)$$

In questo modo possiamo relazionare la funzione di correlazione a due punti del campo di temperatura misurato in due direzioni diverse con quella del campo di temperatura reale, ovvero

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta T_s}{T_s}(\hat{\mathbf{n}}_1) \frac{\Delta T_s}{T_s}(\hat{\mathbf{n}}_2) \right\rangle &= \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}'_1} d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}'_2} B(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}'_1) B(\hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}'_2) \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}'_1) \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}'_2) \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2}} \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2}^* \rangle \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}'_1} d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}'_2} B(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}'_1) B(\hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}'_2) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}'_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}'_2) \\ &= \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_{\ell} W_{\ell}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2), \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove è stata utilizzata la relazione (2.10) in aggiunta alla proprietà per le armoniche sferiche

$$\sum_m Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}') = \frac{2\ell + 1}{4\pi} \mathcal{P}_{\ell}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'), \quad (2.22)$$

con \mathcal{P}_{ℓ} polinomio di Legendre, ed infine è stato posto

$$W_{\ell}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}'_1} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}'_2} B(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}'_1) B(\hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}'_2) \mathcal{P}_{\ell}(\hat{\mathbf{n}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}'_2). \quad (2.23)$$

La funzione $W_{\ell}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)$ prende il nome di *funzione finestra* ed è quella che "rompe" l'ortogonalità delle armoniche sferiche in quanto seleziona porzioni incomplete di cielo. Una volta nota la funzione finestra è possibile relazionare le fluttuazioni in temperatura misurate con i valori teorici, e quindi "model-dependent", dello spettro angolare C_{ℓ} .

⁶Dall'inglese "beam function".

Capitolo 3

Anomalie del CMB

La presenza di strutture nel nostro Universo, come per esempio la distribuzione osservata di galassie e ammassi di galassie su grandi scale, è compatibile con l'esistenza delle anisotropie nello spettro del CMB, le quali sono state misurate per la prima volta dal satellite COBE e risultano consistenti con l'ipotesi di uno spettro di potenza delle perturbazioni di densità primordiali che sono (quasi) con invarianza di scala¹. Nell'ultimo ventennio, grazie alla realizzazione di diversi esperimenti basati sulle misure del CMB, la nostra comprensione delle anisotropie osservate risulta estremamente migliorata. In particolare, le misure dei satelliti WMAP e Planck hanno giocato un ruolo speciale permettendoci di ottenere misure su tutto cielo e consentendoci di approfondire lo studio della CMB su diversi range angolari, da $\ell = 1$ ad $\ell \sim 2500$.

L'analisi dei dati ottenuti, quindi, ci permette sia di estrapolare i parametri del modello Λ CDM con estrema precisione sia di testare l'assunzione alla base dello stesso. In particolare, l'assunzione di condizioni di isotropia ed omogeneità statistica su grandi scale risulta uno dei pilastri fondamentali per il modello cosmologico standard ed è indispensabile, quindi, testarla e comprendere quali sono le condizioni sotto le quali l'ipotesi risulta valida. Quasi subito dopo le misure del fondo cosmico di microonde rilasciate da WMAP e Planck, diversi gruppi di ricerca (tra cui gli stessi team di WMAP e Planck) hanno trovato alcuni comportamenti anomali che sembrano indicare una violazione dell'isotropia statistica. Si osservi che con comportamenti anomali si intende misure non statisticamente consistenti con il best-fit basato sul modello Λ CDM. Benché la natura “*a posteriori*” della statistica renda difficile l'interpretazione, le anomalie osservate risultano abbastanza significative da meritare attenzione. In particolare, nelle prossime due sottosezioni, verranno analizzate nel dettaglio sia l'asimmetria tra gli emisferi (HPA²) che

¹Per invarianza di scala si intende che per bassi multipoli ℓ lo spettro $\mathcal{D}_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi}C_\ell$ risulta pressoché costante (vedi Figura 2.3).

²Hemispherical Power Asymmetry.

la modulazione di dipolo (DM³). Prima di concludere, però, è utile dare una descrizione qualitativa delle altre anomalie “principali” riscontrate.

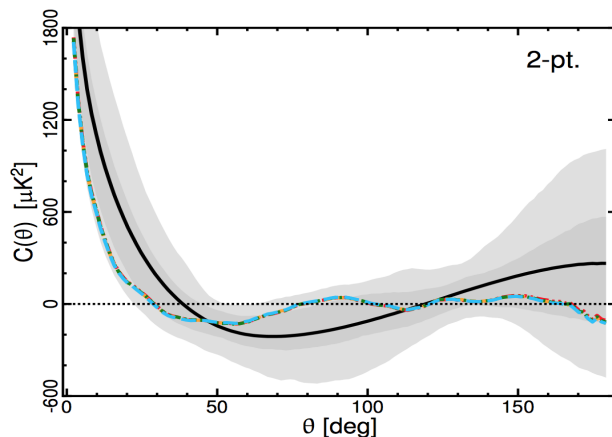


Figura 3.1: Funzione di correlazione a due punti. La linea nera rappresenta l’andamento atteso da 1000 simulazioni SMICA basate sul modello Λ CDM, mentre le regioni grigio chiaro e grigio scuro sono le regioni al 95% e 68% C.L. Il plot mostra anche quattro linee colorate sovrapposte frutto dell’analisi dati effettuata [39]. Si vede come, nonostante quest’ultime non escano mai dalla regione al 95% C.L., per angoli $\theta \gtrsim 60^\circ$ la funzione di correlazione angolare a due punti segue un andamento inatteso fluttuando in un intorno dello zero.

Mancanza di correlazione

Storicamente uno dei primi comportamenti anomali del CMB ad essere osservato è stato l’andamento della funzione di correlazione a due punti, vedi Figura 3.1. Infatti sia COBE [1] che WMAP [13] avevano già osservato questa “mancanza” di correlazione confermata nell’analisi effettuata in [39]. In particolare questa anomalia consiste nel misurare una funzione di correlazione a due punti prossima allo zero per scale angolari $\theta \gtrsim 60^\circ$ diversamente da quanto previsto nelle simulazioni basate sul modello Λ CDM.

Parità definita per bassi multipoli

Un’altra anomalia è stata osservata studiando le proprietà dello spettro del CMB nel caso di una riflessione rispetto l’origine, *i.e.* $\hat{\mathbf{n}} \rightarrow -\hat{\mathbf{n}}$. Per farlo il campo di temperatura $T(\hat{\mathbf{n}})$ è stato decomposto nella componente avente parità positiva

$$T^+(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{T(\hat{\mathbf{n}}) + T(-\hat{\mathbf{n}})}{2}$$

³Dipole Modulation

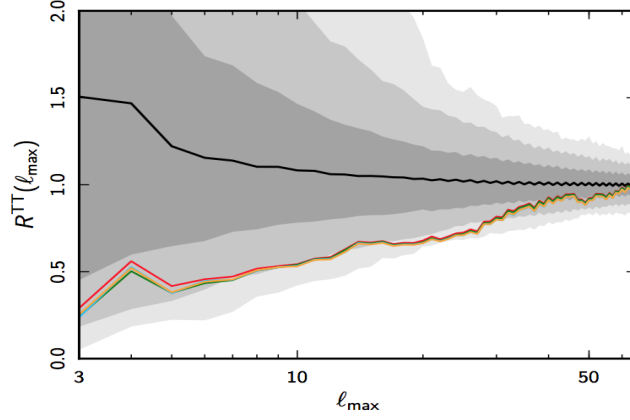


Figura 3.2: Rapporto $R^{TT}(\ell_{max})$ ottenuto mediante analisi dati effettuata con **Commander** (linea rossa), **NILC** (linea arancione), **SEVEM** (linea verde), **SMICA** (linea blu). La linea nera indica il valore ottenuto da simulazioni MC effettuate con **SMICA** dove le regioni in grigio scuro, grigio e grigio chiaro individuano le regioni ad un livello di confidenza di 1, 2 e 3σ [39].

e nella componente avente parità negativa

$$T^{-}(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{T(\hat{\mathbf{n}}) - T(-\hat{\mathbf{n}})}{2},$$

di modo che, essendo

$$Y_{\ell m}(-\hat{\mathbf{n}}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}),$$

risulta possibile studiare la parità riferendosi ai multipoli ℓ . Infatti multipoli pari hanno parità positiva, mentre multipoli dispari hanno parità negativa. In particolare, per analizzare nel dettaglio la parità del campo di temperatura possiamo introdurre la quantità [39]:

$$R^{TT}(\ell_{max}) = \frac{D_{+}^{TT}(\ell_{max})}{D_{-}^{TT}(\ell_{max})}, \quad (3.1)$$

dove

$$\begin{aligned} (i) \quad D_{+}^{TT}(\ell_{max}) &= \frac{1}{\ell_{max}^{+}} \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}^{+}} \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_{\ell} \\ (ii) \quad D_{-}^{TT}(\ell_{max}) &= \frac{1}{\ell_{max}^{-}} \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}^{-}} \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_{\ell}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

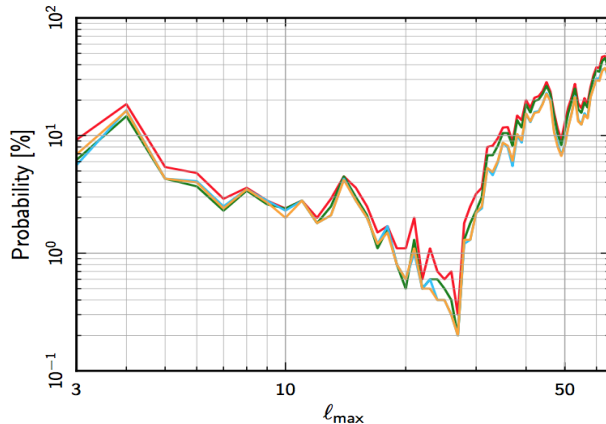


Figura 3.3: Probabilità di ottenere un valore per $R^{TT}(\ell_{max})$ simulato consistente con le osservazioni per **Commander** (linea rossa), **NILC** (linea arancione), **SEVEM** (linea verde), **SMICA** (linea blu) [39].

Nelle espressioni (3.2) ℓ_{max}^+ è il numero totale di multipoli pari, mentre ℓ_{max}^- è il numero totale di multipoli dispari. È chiaro che i parametri $D_+^{TT}(\ell_{max})$ e $D_-^{TT}(\ell_{max})$ corrispondono alla somma di $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$, rispettivamente, per multipoli pari e dispari. Dunque se $R^{TT}(\ell_{max}) < 1$ si ha parità negativa, mentre se $R^{TT}(\ell_{max}) > 1$ si ha parità positiva. Detto ciò, in [39] è stato considerato un range di multipoli $2 \leq \ell \leq 30$, corrispondente al plateau Sachs-Wolfe, ed è stato stimato il valore di $R^{TT}(\ell_{max})$ in questo range, vedi Figura 3.2. La probabilità di ottenere dalle simulazioni un valore per $R^{TT}(\ell_{max})$ consistente con le osservazioni è riportata in Figura 3.3. Quello che si riscontra è un comportamento anomalo per $\ell_{max} = 20$ dove l'asimmetria nella parità dello spettro di potenza risulta più evidente.

Cold-Spot

Centrata alle coordinate Galattiche⁴ $(l, b) = (210^\circ, -57^\circ)$, ritroviamo una regione chiamata “Cold-Spot” dove la temperatura osservata risulta più bassa rispetto alla temperatura attesa dalle simulazioni basate sul modello Λ CDM.

3.1 Asimmetria tra gli emisferi

Per introdurre il problema occorre entrare nel dettaglio della statistica del CMB e capire come testarne alcune proprietà. Come prima cosa osserviamo

⁴Il sistema di coordinate Galattiche è un sistema di coordinate celesti che ha come centro il Sole e come piano il piano Galattico della Via Lattea: qui l e b sono rispettivamente la latitudine e la logitudine riferite a questo sistema di riferimenro.

che, sotto l'assunzione di Gaussianità, la distribuzione di probabilità N -dimensionale (N -pdf⁵) risulta essere del tipo [39]

$$f(\mathbf{T}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{pix}/2}\sqrt{\mathbf{C}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{T}^T\right\}, \quad (3.3)$$

dove \mathbf{T} è un vettore avente per componenti le misure effettuate del campo di temperatura $T(\mathbf{x})$, N_{pix} è il numero di pixel presenti nel vettore, \mathbf{C} è la matrice ($N_{pix} \times N_{pix}$) di covarianza del campo Gaussiano. Poiché il numero di pixel massimo per le misure a tutto cielo è molto elevato ($N_{side} = 2048$) il calcolo del termine $\mathbf{T}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{T}^T$ risulta complicato. Per ovviare a tale problema i dati vengono analizzati ad una risoluzione più bassa utilizzando le funzioni di filtro associate alla particolare risoluzione N_{side} scelta. In particolare, sotto l'assunzione di isotropia, la matrice di covarianza \mathbf{C} risulta completamente caratterizzata a partire dallo spettro di potenza angolare C_ℓ mediante la relazione [39]

$$C_{ij} = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \frac{2\ell+1}{4\pi} b_\ell^2 C_\ell \mathcal{P}_\ell(\cos\theta_{ij}), \quad (3.4)$$

dove C_{ij} è la covarianza tra il pixel i ed il pixel j formanti un angolo θ_{ij} , ℓ_{max} è il multipolo massimo che viene testato, mentre b_ℓ è la funzione filtro effettiva relativa al numero di pixel N_{side} : si osservi che b_ℓ è l'analogo della funzione finestra introdotta nella Sezione 2.3, ma questa volta espressa nello spazio armonico. Infatti filtrando i coefficienti armonici nello spazio armonico stesso mediante la relazione

$$a_{\ell m}^F = b_\ell a_{\ell m}, \quad (3.5)$$

si ha che

$$T(\hat{\mathbf{n}}_i) = \sum_{\ell m} b_\ell a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_i). \quad (3.6)$$

In questo modo

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} b_\ell b_{\ell'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^+ \rangle Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_i) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{n}}_j) \\ &= \sum_{\ell m} b_\ell^2 C_\ell Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_i) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}_j) \\ &= \sum_{\ell} b_\ell^2 C_\ell \mathcal{P}_\ell(\cos\theta_{ij}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

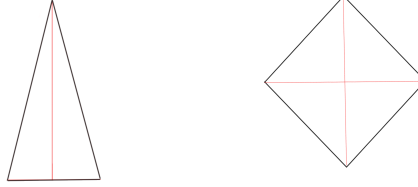


Figura 3.4: A sinistra è schematizzata la configurazione pseudo-collassata per la funzione di correlazione a 3-punti, mentre a destra è schematizzata la configurazione romboidale per la 4-punti.

ovvero la (3.4). Si osservi che nell'ultimo passaggio è stata sfruttata la relazione (2.22).

Sotto l'ipotesi di Gaussianità, l'argomento dell'esponenziale dell'equazione (3.3) dovrebbe seguire una distribuzione di χ^2 con N_{pix} gradi di libertà o, equivalentemente se $N_{pix} \gg 1$, una distribuzione normale $\mathcal{N}(N_{pix}, \sqrt{N_{pix}})$.

Per passare nello spazio reale occorre introdurre la funzione di correlazione ad N -punti, definita come la media del prodotto di temperature ottenute "guardando" N differenti posizioni $\hat{\mathbf{n}}_1, \dots, \hat{\mathbf{n}}_N$. In particolare, osservando che sotto l'ipotesi di isotropia statistica la N -punti dipende solo dalla forma e dalla dimensione del poligono ad N lati e non dalla posizione o l'orientazione, ne segue che il numero di gradi di libertà necessari per descriverlo è $2N - 3$. Dunque, decomposto il versore $\hat{\mathbf{n}}_i$ come $\hat{\mathbf{n}}_i \equiv (\theta_i, \phi_i)$, le uniche variabili necessarie per descrivere la funzione di correlazione ad N -punti sono gli angoli $(\theta_1, \dots, \theta_{2N-3})$. Segue quindi [39]

$$C_N(\theta_1, \dots, \theta_{2N-3}) \equiv \langle T(\hat{\mathbf{n}}_1) \cdots T(\hat{\mathbf{n}}_N) \rangle. \quad (3.8)$$

La stima numerica della funzione di correlazione ad N -punti è data semplicemente da [39]

$$C_N(\theta_1, \dots, \theta_{2N-3}) = \frac{\sum_i (w_1^i \cdots w_N^i) (T_1^i \cdots T_N^i)}{\sum_i (w_1^i \cdots w_N^i)}, \quad (3.9)$$

dove i pesi w_1^i, \dots, w_N^i relativi al pixel i -simo sono introdotti per ridurre il rumore e mascherare effetti secondari⁶. Osserviamo che in [39] le configurazioni scelte per il poligono nell'analisi dati sono le configurazioni *equilatera*

⁵ N -probability density function.

⁶Ad esempio possono essere scelti in modo tale da essere uguali ad 1, se si vuole includere il pixel i -simo, o uguali a 0 se lo si vuole escludere.

e *pseudo-collassata*⁷ per la 3-punti e la configurazione *romboidale*⁸ per la 4-punti. Va detto che la scelta è dettata dalla semplicità nella loro implementazione e non da scelte fisiche. Infatti in questo modo per parametrizzare la forma nelle configurazioni equilatera e romboidale, per la 3-punti e la 4-punti rispettivamente, occorre utilizzare un solo parametro θ ; analogamente, per la configurazione pseudo-collassata, per determinare la forma del poligono basta conoscere uno dei due angoli più grandi θ .

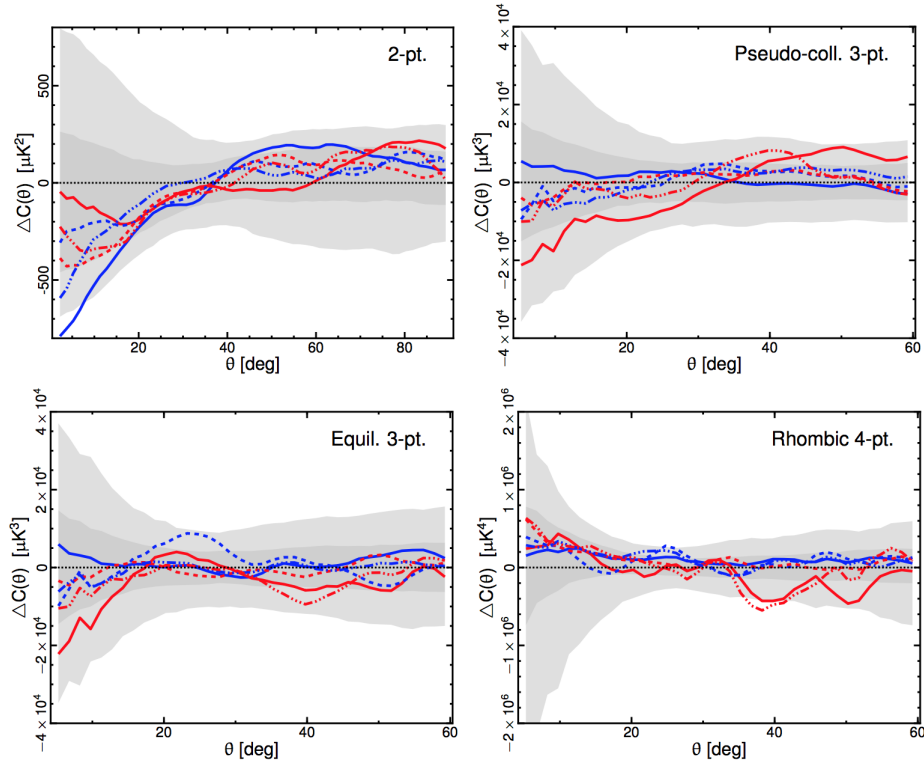


Figura 3.5: Differenza della funzione di correlazione ad N -punti ottenuta tramite **SMICA** ad $N_{side} = 64$ e 1000 simulazioni. Il risultato è mostrato per la funzione di correlazione a 2-punti (in alto a sinistra), configurazione pseudo-collassata (in alto a destra) ed equilatera (in basso a sinistra) per la 3-punti, configurazione romboidale (in basso a destra) per la 4-punti. Le funzioni di correlazione sono mostrate per l'analisi effettuata nell'emisfero Nord (linea blu) e nell'emisfero Sud (linea rossa) individuati nel sistema di coordinate eclittiche (linea solida), nel sistema di coordinate che massimizza il boost dovuto all'effetto Doppler (linea tratteggiata) e nel sistema di coordinate che massimizza la modulazione di dipolo (linea a puntini e tratteggiata). La banda grigio scura e la banda grigio chiara individuano le regioni al 68% e 95% C.L. [39].

Per quantificare l'accordo tra simulazione e misura sperimentale possiamo definire il χ^2 come [39]

⁷La configurazione pseudo-collassata per la 3-punti consiste in un triangolo isoscele la cui base passa per i pixel (i, j) individuati dalla separazione angolare θ_{ij} , vedi Figura 3.4.

⁸La configurazione romboidale per la 4-punti consiste in due triangoli equilateri aventi un lato in comune, vedi Figura 3.4.

$$\chi^2 = \sum_{i,j=1}^{N_{bin}} \left[\hat{C}_N(\theta_i) - \langle C_N(\theta_i) \rangle \right] M_{ij}^{-1} \left[\hat{C}_N(\theta_j) - \langle C_N(\theta_j) \rangle \right], \quad (3.10)$$

dove $\hat{C}_N(\theta_i)$ è la funzione di correlazione ad N -punti, $\langle C_N(\theta_i) \rangle$ è la media corrispondente ottenuta da simulazioni Monte Carlo (MC), N_{bin} è il numero di bin⁹ utilizzati nell'analisi mentre M_{ij} è la matrice di covarianza. Se denotiamo con $\hat{C}_N^{(k)}(\theta_i)$ la k -sima simulazione della N -punti e con N_{sim} il numero di simulazioni effettuate, allora abbiamo [39]

$$M_{ij} = \frac{1}{N'_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} \left[\hat{C}_N^{(k)}(\theta_i) - \langle C_N(\theta_i) \rangle \right] \left[\hat{C}_N^{(k)}(\theta_j) - \langle C_N(\theta_j) \rangle \right], \quad (3.11)$$

dove $N'_{sim} = N_{sim} - 1$.

Una volta chiarito come stimare l'accordo tra simulazioni e i dati misurati, è possibile entrare nel merito dell'anomalia HPA. Questa è stata rivelata per la prima volta nell'analisi dati di WMAP [5] ed è stata confermata sia da Planck 2013 [38] sia da Planck 2015 [39], il che sembra escludere la possibilità di errori sistematici. Infatti non solo i satelliti WMAP e Planck posseggono strumentazioni a bordo con sistematiche diverse, ma il satellite Planck in realtà è costituito da due diversi rivelatori, uno ad alte frequenze (HFI) ed uno a basse frequenze (LFI). Questo significa che ben tre strumenti differenti tra loro hanno rivelato questo comportamento anomalo. In particolare la HPA consiste nel ritrovare, nel range $\ell = 2 - 40$, uno spettro di potenza calcolato per un emisfero, centrato in $(l, b) = (237^\circ, -20^\circ)$ in coordinate Galattiche, maggiore rispetto a quello calcolato per l'emisfero opposto. Questa asimmetria risulta maggiore se calcolata negli emisferi nord e sud nel sistema di coordinate eclittiche¹⁰ e, per le configurazioni precedentemente scelte, il risultato ottenuto è mostrato in Figura 3.5.

È evidente come, indipendentemente dal sistema di coordinate scelto per l'analisi dati, vi sia sempre una "mancanza" di spettro di potenza in uno dei due emisferi. In particolare è possibile osservare che, a differenza della funzione di correlazione a 2-punti, le funzioni di correlazione a 3 e 4 punti dell'emisfero settentrionale sono relativamente vicine allo zero, mentre quelle dell'emisfero meridionale mostrano un livello di struttura consistente con le simulazioni Gaussiane.

Per concludere, osservando che il χ^2 fornisce un metodo per quantificare le fluttuazioni rispetto al modello Λ CDM, è possibile stimare l'asimmetria tra

⁹Il numero di bin corrisponde al numero di blocchi indipendenti in cui vengono suddivisi i multipoli ℓ . Quindi, se ad esempio nell'analisi viene scelto un range per i multipoli $2 \leq \ell \leq 600$ con 100 bin, allora ogni bin sarà costituito da 6 multipoli.

¹⁰Le coordinate eclittiche sono coordinate celesti in cui il piano fondamentale coincide con il piano individuato dall'orbita della terra, ovvero il piano eclittico.

Emisferi	Probabilità [%]		
	Ecl.	DB	DM
Negativo	88.0	86.9	61.8
Positivo	77.6	91.1	59.9
rapporto- χ^2	22.3	5.1	7.7

Tabella 3.1: Probabilità di ottenere un valore stimato con la statistica del χ^2 per la 2-punti dal modello Λ CDM grande almeno quanto quello osservato. Nella prima colonna è riportato il valore ottenuto nel sistema di coordinate eclittiche, nella seconda quello ottenuto nel sistema di coordinate che massimizza il boost dovuto all'effetto Doppler (DB), nella terza il valore ottenuto nel sistema di coordinate che massimizza la modulazione di dipolo (DM) [39].

i due emisferi andando a calcolare il rapporto tra i rispettivi χ^2 . Il risultato di tale operazione effettuata per la 2-punti è riportato in Tabella 3.1.

3.2 Asimmetria angolare nella distribuzione dello spettro di potenza

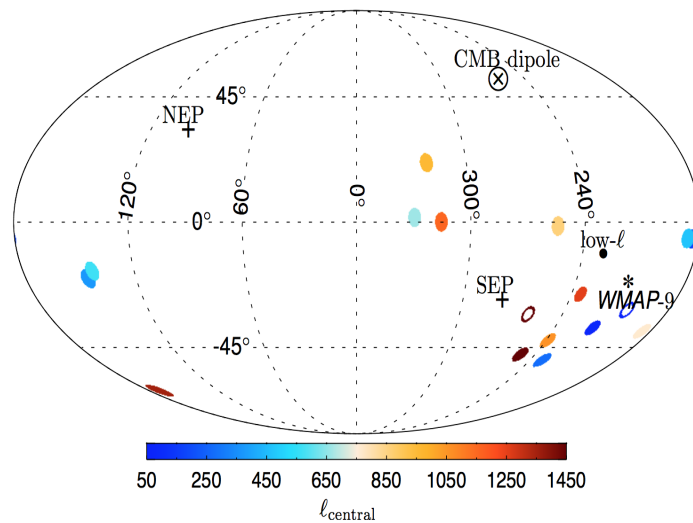


Figura 3.6: Direzionalità del dipolo per gli spettri di potenza locali nel range $\ell = 2 - 1500$. Nell'immagine è mostrata anche la direzione del dipolo (labellata con "low- ℓ ") discussa nella sezione 3.3 [39].

Un'altra anomalia riportata dall'analisi effettuata sui dati raccolti dal satellite WMAP [44] consiste in una possibile deviazione dall'isotropia statistica nel range di multipoli $\ell = 2 - 600$. Nell'analisi effettuata sui dati raccolti dal satellite Planck [38] [39], invece, è stato ampliato il range di multipoli considerato in modo da sondare l'asimmetria rilevata anche in un range di

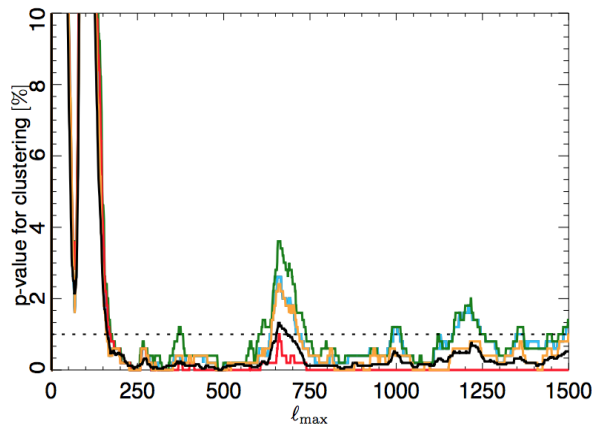


Figura 3.7: p -value per l'accoppiamento angolare nella distribuzione dello spettro di potenza in funzione di ℓ_{max} ottenuto in 500 simulazioni effettuate con **Commander** (linea rossa), **NILC** (linea arancione), **SEVEM** (linea verde), **SMICA** (linea blu) . La linea nera rappresenta il p -value ottenuto da 2500 simulazioni fatte con **SMICA** [39].

multipoli più elevato. In particolare è stato suddiviso il cielo in 12 regioni non sovrapposte. Successivamente sono stati calcolati 12 spettri di potenza locali corrispondenti ad ogni porzione di cielo individuata utilizzando 16 bin da 100 multipoli ℓ circa. Il multipolo più alto considerato è stato $\ell_{max} = 1500$ [38] [39]. Procedendo in questo modo si ha che ognuno dei 16 bin possiede una mappa associata. Utilizzando la “routine” **remove-dipole** del Software **HEALPix** è stata ottenuta la direzionalità di dipolo dello spettro di potenza per ogni mappa considerata. In seguito l'allineamento del dipolo tra i differenti bin è stato utilizzato come misura dell'asimmetria nello spettro di potenza, vedi Figura 3.6.

Successivamente è stata ripetuta la stessa procedura per le mappe del CMB ottenute tramite simulazioni basate sul modello Λ CDM. Per confrontare quanto ottenuto dall'analisi dati con quanto ottenuto dalle simulazioni sono state considerate tutte le possibili coppie tra i 16 blocchi ed è stato calcolato l'angolo di separazione medio θ_{mean} tra i diversi dipoli [38] [39]. Questo passaggio è stato fatto sia per i dati che per le simulazioni. A questo punto è stato definito il “ p -value” della statistica come la frazione di simulazioni che presentano un angolo θ_{mean} maggiore di quello estrapolato dai dati. Il p -value così definito è stato calcolato in funzione del multipolo massimo considerato nell'analisi dati ℓ_{max} . Il risultato ottenuto è riportato in Figura 3.7. L'allineamento risulta maggiormente anomalo quando si considera un multipolo massimo $\ell_{max} \sim 600$ dove il p -value risulta maggiore, mentre per $\ell_{max} \gtrsim 700$ il p -value rimane basso [39].

3.3 Modulazione di dipolo

L'asimmetria tra gli spettri di potenza calcolati nei due emisferi sembra indicare una rottura dell'isotropia statistica. Inoltre, quanto visto nella sezione precedente sembra segnalare la presenza di questa asimmetria nello spettro di potenza ad un range di multipoli più ampio. Per analizzare le anomalie trattate fino ad ora, però, non è stato scelto alcun modello parametrico. Dunque lo scopo di questa sezione è quello di presentare un modello ben preciso da utilizzare per l'analisi dati e per sondare le caratteristiche dell'asimmetria riscontrata.

La prima cosa da fare è analizzare un possibile metodo per rompere l'isotropia statistica. Un modo per farlo, seguendo il lavoro presentato in [48], consiste nel ricorrere all'utilizzo di due ingredienti fondamentali: come prima cosa possiamo osservare che introducendo un campo le cui fluttuazioni spaziali risultano dominate da contributi dovuti a modi k corrispondenti a grandi lunghezze d'onda (grandi rispetto l'orizzonte cosmologico durante l'inflazione), localmente tutti i termini di ordine superiore al gradiente della fluttuazione del campo risultano sottodominanti, in quanto di ordine $O(k^{n \geq 2})$ nello spazio di Fourier. Il gradiente di un campo possiede una direzione privilegiata ed è tale proprietà che localmente permette di rompere l'isotropia statistica. Inoltre, poiché le fluttuazioni di questo campo risultano avere una distribuzione random, la teria totale sottostante mantiene le proprietà di omogeneità ed isotropia statistica.

Il secondo ingrediente fondamentale è una risposta non lineare delle perturbazioni del campo di temperatura del CMB rispetto alle fluttuazioni di questo campo. Sotto queste ipotesi, dunque, se chiamiamo $\hat{\mathbf{d}}_3$ l'asse lungo la quale il gradiente è orientato, la struttura risultante è del tipo

$$G(\hat{\mathbf{n}}) \propto (1 + G_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{d}}_3) = (1 + G_1 \cos \theta),$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la direzione nel cielo nella quale stiamo guardando, G_1 è l'ampiezza del gradiente e θ è l'angolo compreso tra la direzione nella quale osserviamo e l'asse privilegiato del gradiente stesso. Una risposta non lineare può essere descritta come una funzione del gradiente stesso, $F[G(\hat{\mathbf{n}})]$. Ora possiamo esprimere tale risposta in termini dei suoi coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche con polo allineato nella direzione dell'asse del gradiente, *i.e.*

$$F[G(\hat{\mathbf{n}})] = \sum_{\ell} w_{\ell} Y_{\ell 0}(\hat{\mathbf{n}}),$$

dove la simmetria azimutale del problema¹¹ fissa il coefficiente m ad $m = 0$.

¹¹È indispensabile specificare che la scelta di allineare il polo nella direzione del gradiente è fatta semplicemente per semplificare la trattazione matematica del problema.

In generale il campo di temperatura del CMB può fornire una risposta non-lineare in due modi: producendo un effetto additivo, oppure producendo un effetto moltiplicativo che va a modulare l'anisotropia stessa. Dunque è possibile definire un modello per le fluttuazioni del campo di temperatura del CMB del tipo

$$T(\hat{\mathbf{n}}) = A(\hat{\mathbf{n}}) + B(\hat{\mathbf{n}})(1 + F[G(\hat{\mathbf{n}})]),$$

dove $A(\hat{\mathbf{n}})$ e $B(\hat{\mathbf{n}})$ sono due campi statisticamente isotropi e con distribuzione Gaussiana e possono rappresentare due sorgenti fisiche di anisotropie distinte.

Quanto discusso fino ad ora risulta un formalismo del tutto generale per “modellare” il campo di temperatura tenendo conto di una rottura dell'isotropia statistica. Come abbiamo detto all'inizio di questa sezione, però, noi siamo interessati ad un particolare fenomeno che segna la rottura dell'isotropia statistica: l'asimmetria tra gli emisferi. Per riportarci al caso specifico della HPA occorre, come prima cosa, considerare una risposta $F[G(\hat{\mathbf{n}})]$ lineare. Inoltre se ad esempio identifichiamo il campo $A(\hat{\mathbf{n}})$ con il rumore di fondo dovuto allo strumento di misura e $B(\hat{\mathbf{n}})$ con la parte isotropica del campo di temperatura, il modello proposto in [48] si riduce ad una modulazione di dipolo del campo di temperatura del tipo

$$\left. \frac{\Delta T}{T} \right|_{mod}(\hat{\mathbf{n}}) = (1 + A\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \left. \frac{\Delta T}{T} \right|_{iso}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (3.12)$$

In questa espressione il parametro A rappresenta l'ampiezza della modulazione, mentre $\hat{\mathbf{p}}$ la direzionalità del dipolo stesso.

Quindi, in questo modo, è possibile caratterizzare il modello da utilizzare per l'anomalia in esame. Una volta ottenuta tale caratterizzazione occorre, per proseguire con l'analisi dati, definire il vettore dati [39]

$$\mathbf{d} = M\mathbf{s} + \mathbf{r}, \quad (3.13)$$

dove

$$M_{ij} = (1 + A\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i)\delta_{ij} \quad (3.14)$$

rappresenta la matrice che modula il campo di temperatura, \mathbf{s} denota la componente isotropa intrinseca del segnale, \mathbf{r} denota il rumore strumentale ed $\hat{\mathbf{n}}_i$ è la direzione relativa al pixel i -esimo. Poiché in questa espressione sia \mathbf{s} che \mathbf{r} sono considerati come campi Gaussiani con matrice di covarianza S ed R , abbiamo che la matrice di covarianza totale può essere espressa come $C = MSM^T + R$, mentre la funzione di probabilità risulta [39]

$$\mathcal{L}(A, \hat{\mathbf{p}}, n, q) \propto \frac{1}{\sqrt{|C|}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{d}^T C^{-1}\mathbf{d}}, \quad (3.15)$$

dove i parametri q ed n caratterizzano lo spettro di potenza parametrizzato in termini dello spettro di potenza di best fit del modello Λ CDM come [39]

$$C_\ell(q, n) = q \left(\frac{\ell}{30} \right)^n C_\ell^{\Lambda\text{CDM}}. \quad (3.16)$$

Procedendo in questo modo l'analisi dati mostra un'ampiezza per la modulazione pari a $A = 0.066 \pm 0.021$ su grandi scale angolari con direzionalità $(l, b) \simeq (212^\circ, -13^\circ)$ ¹² e range di validità statistica di 3.3σ [39].

¹²La direzionalità è espressa in coordinate Galattiche.

Capitolo 4

Modellistica

L'analisi dati che porta alla rivelazione della HPA e della DM (e anche di altre anomalie) non fornisce alcuna spiegazione sulla loro natura, la quale potrebbe essere di origine cosmologica o astrofisica (o, anche se appare ormai difficile, potrebbe essere ancora di natura sistematica-strumentale). Benché esistano queste due possibilità, la più intrigante è sicuramente quella che prevede un'origine cosmologica comune a tutte le anomalie. In particolare sarebbe interessante cercare una loro possibile spiegazione andando a studiare l'evoluzione dell'Universo durante il periodo inflazionario, cercando di ricollegare il particolare modello analizzato con le osservabili che è possibile estrapolare dai dati osservativi. Questo passaggio risulta necessario in quanto non è ancora ben chiaro in che modo l'origine primordiale di queste anomalie sia compatibile con i modelli inflazionari più semplici, i quali tipicamente non prevedono (per nessun range di multipoli) alcuna asimmetria angolare nello spettro di potenza come invece i dati sembrano mostrare (*e.g.* sezione 3.2). Lo scopo principale di questo capitolo, quindi, è quello di presentare alcuni modelli inflazionari che sono stati proposti in letteratura per spiegare innanzitutto la HPA e la DM.

4.1 Modulazione di dipolo e non-Gaussianità primordiale

Le anisotropie osservate implicano che i modelli utilizzati per spiegare il comportamento “anomalo” del campo di temperatura del CMB devono produrre uno spettro di potenza dipendente da vettore d'onda \mathbf{k} o dal punto dello spazio tempo \mathbf{x} . Infatti, sotto l'ipotesi di isotropia statistica, se consideriamo un generico campo Gaussiano $\phi(\mathbf{x})$ possiamo definire lo spettro di potenza mediante la relazione

$$\langle \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_\phi(k), \quad (4.1)$$

e riscrivere la funzione di correlazione a due punti come

$$\left\langle \phi\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)\phi\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_\phi(k). \quad (4.2)$$

Questa relazione, però, non permette di spiegare l'asimmetria tra gli emisferi che osserviamo nel CMB, o la modulazione di dipolo, in quanto porta ad uno spettro di potenza indipendente dalla direzionalità del vettore d'onda \mathbf{k} (ma solo dal modulo), in contrasto con quanto sembra mostrino i dati (vedi sezione 3.2). Quello che occorre fare, quindi, è introdurre una dipendenza del tipo $P_\phi(k) \rightarrow P_\phi(\mathbf{k})$. Un modo naturale per farlo è quello di considerare perturbazioni con modi di "grande" lunghezza d'onda (super-horizon) accoppiati con modi di "piccola" lunghezza d'onda in modo da legare la non-Gaussianità primordiale con le anomalie in esame. Infatti, andando a considerare modelli che prevedono non-Gaussianità primordiale, è possibile ottenere una modulazione spaziale del tipo $P_\phi(k) \rightarrow P_\phi(k, \mathbf{x})$ in modo da rompere l'isotropia statistica [26].

Per capire come ottenere un tale risultato, possiamo pensare di voler effettuare una statistica in un volume molto grande $V_L \rightarrow \infty$, ovvero maggiore dell'Universo osservabile, e considerare il potenziale di Bardeen Φ assumendo l'ipotesi di località. In questo modo possiamo scrivere Φ come

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + f_{NL} [\phi^2(\mathbf{x}) - \langle \phi^2(\mathbf{x}) \rangle], \quad (4.3)$$

dove ϕ risulta un campo Gaussiano, mentre f_{NL} risulta l'ampiezza della non-Gaussianità. Ricordando che la trasformata di Fourier di un prodotto è uguale alla convoluzione delle trasformate di Fourier, è possibile legare i modi \mathbf{k} del campo non-Gaussiano con quelli del campo Gaussiano mediante la relazione

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ \phi(\mathbf{k}) + f_{NL} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [\phi(\mathbf{k} - \mathbf{q})\phi(\mathbf{q}) - \langle \phi(\mathbf{k} - \mathbf{q})\phi(\mathbf{q}) \rangle] \right\}, \quad (4.4)$$

ovvero

$$\Phi(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{k}) + f_{NL} [\phi(\mathbf{k} - \mathbf{q})\phi(\mathbf{q}) - \langle \phi(\mathbf{k} - \mathbf{q})\phi(\mathbf{q}) \rangle]. \quad (4.5)$$

In questo modo, andando a calcolare lo spettro di potenza per $\Phi(\mathbf{x})$, segue

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} \langle \Phi(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}') \rangle \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_\phi(k) \\
&\quad + f_{NL} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \left[\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \phi(\mathbf{k}')\phi(\mathbf{p})\phi(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \langle \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{p}')\phi(\mathbf{k}'-\mathbf{p}') \rangle \right] + \mathcal{O}(f_{NL}^2),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

dove è stato sfruttata la relazione (4.5) in aggiunta al fatto che

$$\langle \phi(\mathbf{k})\langle \phi(\mathbf{p})\phi(\mathbf{k}') \rangle \rangle = \langle \phi(\mathbf{k}) \rangle \langle \phi(\mathbf{p})\phi(\mathbf{k}') \rangle = 0, \tag{4.7}$$

essendo $\langle \phi(\mathbf{k}) \rangle = 0$. Ora, poiché ϕ è un generico campo Gaussiano, è chiaro che integrando su un volume infinito (*i.e.* V_L) il contributo della tre punti restituisce un valore nullo. Se però andiamo a considerare una regione di lunghezza caratteristica λ_M (dove le lunghezze d'onda possono essere sia maggiori che minori di λ_M) otteniamo per tutti i modi con lunghezza d'onda maggiore di λ_M ($p < k_M \propto 1/\lambda_M$)

$$\langle \phi(\mathbf{p})\phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}') \rangle_M = \phi(\mathbf{p})\langle \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}') \rangle_M, \tag{4.8}$$

dove il pedice M indica che la statistica è effettuata nella regione V_M . Dunque, valutando la relazione (4.6) all'interno di questo volume, il risultato che si ottiene per la funzione di correlazione a due punti è

$$\begin{aligned}
\left\langle \Phi\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)\Phi\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right\rangle_M &= \int_{k > k_M} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_\phi(k) \left\{ 1 + \right. \\
&\quad \left. + 2f_{NL} \int_{p < k_M} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{p}) \left[e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{r}}{2})} + e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{r}}{2})} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dove è stato sfruttata la definizione di spettro di potenza per il campo ϕ definito dalla relazione $\langle \phi(\mathbf{k}')\phi(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}'-\mathbf{k}+\mathbf{p}) P_\phi(k)$. Segue

$$\begin{aligned}
\left\langle \Phi\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)\Phi\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right\rangle_M &= \int_{k > k_M} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_\phi(k) \left[1 + \right. \\
&\quad \left. + 4f_{NL} \int_{p < k_M} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{p}) \cos\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{2}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Osserviamo che la dipendenza spaziale dello spettro di potenza è racchiusa quindi nella presenza del fattore $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$. Questo significa che su scale più piccole di $1/p$ (ovvero $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \ll 1$), la dipendenza spaziale risulta minima e quindi $P_\phi(k, \mathbf{x})$ risulta pressoché costante rispetto a \mathbf{x} . Se quindi ci restringiamo a considerare quelle regioni separate da una distanza \mathbf{r} tale per cui $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} \ll 1$ è possibile utilizzare l'approssimazione $\cos(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/2) \sim 1$ e quindi

$$P_\Phi(k, \mathbf{x}) \equiv P_{\Phi, M}(k) \simeq P_\phi(k) \left[1 + 4f_{NL} \int \frac{d^3\mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}_l) e^{i\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (4.11)$$

dove il pedice l indica che l'integrale è fatto solo su modi di grandi lunghezze d'onda ($k_l < k_M$).

A questo punto, se espandiamo l'onda piana $e^{i\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{x}}$ in multipoli otteniamo l'espressione dello spettro di potenza con modulazione in multipoli, ovvero

$$P_{\Phi, M}(k) = P_\phi(k) \left[1 + f_{NL}g_{00} + f_{NL} \sum_{m=\{-1,0,1\}} g_{1m} Y_{1m}(\hat{\mathbf{n}}) + \dots \right], \quad (4.12)$$

con

$$g_{\ell m} = i^\ell \int \frac{d^3\mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} j_\ell(k_l r) \phi(\mathbf{k}_l) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}_l). \quad (4.13)$$

Ora, poiché lo shift dovuto al monopolio non è osservabile, possiamo ridefinire l'osservabile

$$P_\Phi^{obs}(k) = P_\phi(k) [1 + f_{NL}g_{00}], \quad (4.14)$$

ottenendo così

$$P_{\Phi, M}^{obs}(k) = P_\phi^{obs}(k) \left[1 + \frac{f_{NL}}{1 + f_{NL}g_{00}} \sum_{m=\{-1,0,1\}} g_{1m} Y_{1m}(\hat{\mathbf{n}}) + \dots \right]. \quad (4.15)$$

Lo shift dello spettro di potenza si ripercuote anche sul valore osservato di f_{NL} . Infatti dalla definizione del modello locale del bispettro

$$\langle \Phi(\mathbf{k}_1)\Phi(\mathbf{k}_2)\Phi(\mathbf{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B^{obs}(k_1, k_2, k_3), \quad (4.16)$$

con

$$\begin{aligned}
B^{obs}(k_1, k_2, k_3) &= 2f_{NL}[1 + f_{NL}g_{00}]P_{\Phi}(k_1)P_{\Phi}(k_2) + \text{perm} \\
&= 2f_{NL}^{obs}P_{\Phi}^{obs}(k_1)P_{\Phi}^{obs}(k_2) + \text{perm},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

segue

$$P_{\Phi, M}^{obs}(k) = P_{\phi}^{obs}(k) \left[1 + f_{NL}^{obs} \sum_{m=\{-1,0,1\}} g_{1m} Y_{1m}(\hat{\mathbf{n}}) + \dots \right]. \tag{4.18}$$

Si osservi che nell'espressione (4.17) il parametro f_{NL}^{obs} risulta definito come

$$f_{NL}^{obs} \equiv \frac{f_{NL}}{1 + f_{NL}g_{00}}. \tag{4.19}$$

Prima di concludere questa sezione possiamo provare a generalizzare quanto visto andando a considerare due campi random Gaussiani scorrelati tra loro. In questo caso il potenziale di Bardeen, sempre soggetto all'ipotesi di località, può essere espresso mediante la relazione

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}) + f_{NL}^{\phi} [\phi^2(\mathbf{x}) - \langle \phi^2(\mathbf{x}) \rangle] + f_{NL}^{\sigma} [\sigma^2(\mathbf{x}) - \langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle]. \tag{4.20}$$

Seguendo passaggi analoghi a quanto fatto nel caso precedente otteniamo la relazione che lega i modi d'onda del campo non-Gaussiano Φ con i modi d'onda dei due campi Gaussiani ϕ e σ

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{k}) &= \phi(\mathbf{k}) + \sigma(\mathbf{k}) + f_{NL}^{\phi} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}-\mathbf{p}) + \langle \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \rangle] + \\
&+ f_{NL}^{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [\sigma(\mathbf{k})\sigma(\mathbf{k}-\mathbf{q}) + \langle \sigma(\mathbf{q})\sigma(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \rangle].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Dunque è possibile andare a calcolare la funzione di correlazione a due punti per $\Phi(\mathbf{x})$ nel volume V_M , ricordando che ϕ e σ sono scorrelati, *i.e.* $\langle \phi\sigma \rangle = 0$. In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned}
\langle \Phi\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \Phi\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \rangle_M &= \int_{k > k_M} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [P_{\Phi, \phi}(k) + P_{\Phi, \sigma}(k)] \\
&+ 4f_{NL}^{\phi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_{\Phi, \phi}(k) \int_{p < k_M} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\phi(\mathbf{p}) + \sigma(\mathbf{p})] \cos\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{2}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&+ 4f_{NL}^{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_{\Phi, \sigma}(k) \int_{p < k_M} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\phi(\mathbf{p}) + \sigma(\mathbf{p})] \cos\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{2}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Nell'approssimazione $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \ll 1$, l'espressione per lo spettro di potenza in modulazione di multipoli diviene

$$P_{\Phi,M}(k) \simeq P_{\Phi,\phi}(k) \left[1 + f_{NL}^{\phi,obs} \sum_{m=\{-1,0,1\}} g_{1m}^{\phi} Y_{1m}(\hat{\mathbf{n}}) + \dots \right] + P_{\Phi,\sigma}(k) \left[1 + f_{NL}^{\sigma,obs} \sum_{m=\{-1,0,1\}} g_{1m}^{\sigma} Y_{1m}(\hat{\mathbf{n}}) + \dots \right], \quad (4.23)$$

dove $g_{\ell m}^{\phi}$ è lo stesso definito nell'espressione (4.13), mentre

$$g_{\ell m}^{\sigma} = i^{\ell} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} j_{\ell}(k_l r) \sigma(\mathbf{k}_l) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}_l). \quad (4.24)$$

Infine si osservi che valgono le relazioni

$$(i) \quad f_{NL}^{\phi,obs} = \frac{f_{NL}}{1 + f_{NL} g_{00}} \quad (4.25)$$

$$(ii) \quad f_{NL}^{\sigma,obs} = \frac{f_{NL}^{\sigma}}{1 + f_{NL}^{\sigma} g_{00}}.$$

Nel limite in cui la non-Gaussianità prodotta da uno dei due campi risulti trascurabile, *e.g.* $f_{NL}^{\phi} \sim 0$, definendo

$$\xi(k) = \frac{P_{\Phi,\sigma}^{obs}(k)}{P_{\Phi}^{obs}(k)}, \quad (4.26)$$

con $P_{\Phi}^{obs}(k) = P_{\Phi,\phi}^{obs}(k) + P_{\Phi,\sigma}^{obs}(k)$, si ottiene per lo spettro di potenza in modulazione di dipolo

$$P_{\Phi,M}(k) \simeq P_{\Phi}^{obs} \left[1 + \xi(k) f_{NL}^{\sigma,obs} \sum_{m=\{-1,0,1\}} g_{1m} Y_{1m}(\hat{\mathbf{n}}) + \dots \right]. \quad (4.27)$$

In questo modo abbiamo ottenuto un modello che produce una modulazione di dipolo con ampiezza dipendente dalla scala k .

Arrivati a questo punto, sia per il caso di singolo campo che per il caso di più campi, è possibile scegliere tre direzioni ortonormali ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$) nel cielo e riscrivere la (4.18) in approssimazione di dipolo nella direzione \mathbf{d}_i come [26]

$$P_{\Phi,M}^{obs}(k) = P_{\Phi}^{obs}(k) [1 + 2A_i \cos \theta] \quad (4.28)$$

dove A_i è l'ampiezza dell'asimmetria vista nella direzione \mathbf{d}_i , mentre $\cos \theta = \mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$. È chiaro dunque che l'ampiezza totale sarà data da $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ dove ogni A_i dipende dalla direzione \mathbf{d}_i corrispondente ad un particolare $m = \{-1, 0, 1\}$. Ad esempio per $m = 0$ si ha che

$$A_i = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} f_{NL} g_{10}, \quad (4.29)$$

dove quindi A_i è il contributo non-Gaussiano al dipolo nella direzione \mathbf{d}_i ed il suo valore risulta normalmente distribuito con media nulla e deviazione standard pari a

$$\sigma_{f_{NL}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} |f_{NL}| \sqrt{\langle g_{10}^2 \rangle}. \quad (4.30)$$

4.1.1 Perturbazioni “super-horizon” nell’inflatone

Nei modelli inflazionari a singolo campo, come abbiamo discusso nella sezione 1.2, la densità di energia nell’Universo primordiale è dovuta alle fluttuazioni quantistiche dell’inflatone φ . Sotto le condizioni di slow-roll il contributo alla densità di energia dovuto all’energia potenziale dell’inflatone risulta dominante e questo permette di avere una pressione negativa, ovvero un’espansione accelerata dell’Universo. In questa fase, le fluttuazioni quantistiche dell’inflatone danno luogo a perturbazioni della densità di energia caratterizzate da uno spettro di potenza del campo gravitazionale Φ con un andamento [6]

$$P_{\Phi}(k) \propto \frac{V}{\epsilon} k^{n_s - 1}, \quad (4.31)$$

dove V ed ϵ sono valutati al tempo in cui la scala k fuoriesce dall’orizzonte durante l’inflazione, mentre $n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta$ è l’indice spettrale scalare. Lo spettro di potenza può variare con k in quanto differenti valori della scala considerata restituiscono differenti valori per l’inflatone. Questo si traduce in diversi valori del rapporto V/ϵ [6]. Allora è possibile chiedersi se l’asimmetria osservata nel CMB possa essere dovuta alla presenza di fluttuazioni di φ aventi lunghezze d’onda maggiori del raggio di Hubble oggi ($k \ll H_0^{-1}$), vedi Figura 4.1.

Adrienne L. Erickcek, Marc Kamionkowski e Sean M. Carroll in [6] hanno proposto un modello per spiegare l’asimmetria tra gli emisferi proprio considerando fluttuazioni dei campi presenti durante l’inflazione aventi grande lunghezza d’onda. In particolare, considerando modelli a singolo campo (inflatone) ed andando a calcolare la variazione $\delta P_{\Phi}(k)$ è possibile ottenere [6]

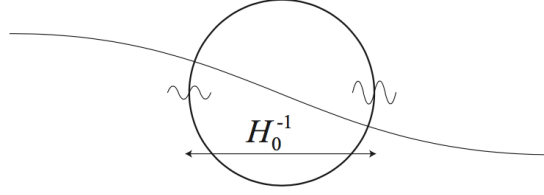


Figura 4.1: La figura mostra come, nel caso di fluttuazioni con modi di lunghezza d'onda maggiore di H_0^{-1} , si possa avere un'ampiezza nelle fluttuazioni del CMB maggiore in un emisfero piuttosto che nell'altro.

$$\delta P_\Phi = \frac{\delta P_\Phi}{\delta \varphi} \delta \varphi = -2P_\Phi \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} (1 - n_s) \frac{\delta \varphi}{M_{Pl}}, \quad (4.32)$$

dove sono state utilizzate le definizioni dei parametri di slow-roll e dell'indice spettrale partendo dalla relazione $P_\Phi \propto \frac{V}{\epsilon}$. Integrando sui possibili valori che il campo φ assume attraverso l'Universo osservabile otteniamo un'espressione per ΔP_Φ , dalla quale è possibile definire l'ampiezza dell'asimmetria nello spettro di potenza come [6]

$$A = \frac{\Delta P_\Phi}{P_\Phi} = -2 \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} (1 - n_s) \frac{\Delta \varphi}{M_{Pl}}. \quad (4.33)$$

Arrivati a questo punto è possibile andare a relazionare l'ampiezza A con la variazione del potenziale gravitazionale. Infatti, nell'era dominata dalla materia, il potenziale gravitazionale può essere espresso in funzione della variazione dell'inflatone $\delta \varphi$ mediante la relazione [6]

$$\Phi = \frac{6}{5} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \frac{\delta \varphi}{M_{Pl}}. \quad (4.34)$$

In questo modo ne segue, sfruttando la relazione (4.33), che

$$\Delta \Phi = \frac{3A}{5(n_s - 1)}. \quad (4.35)$$

Dalla relazione (4.34) si capisce come una perturbazione di grande lunghezza d'onda nell'inflatone permetta di relazionare il potenziale gravitazionale con l'ampiezza della modulazione di dipolo. Infatti una perturbazione con grande lunghezza d'onda, ovvero del tipo $\delta \varphi \propto \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \bar{\omega})$ con $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{l_s} \ll 1$, dove \mathbf{x}_{l_s} è la distanza dalla superficie di ultimo scattering, induce una perturbazione al potenziale gravitazionale avente la stessa dipendenza spaziale [6].

Prima di proseguire occorre fare alcune osservazioni derivanti dalla scelta di voler andare a studiare la fisica su grandi scale. La prima cosa da osservare è, senza dubbio, che le fluttuazioni del campo di temperatura del CMB sono prevalentemente descritte mediante effetto Sachs-Wolfe, *i.e.* $\Delta T/T \simeq \Phi/3$. La seconda cosa da osservare è che, essendo interessati a perturbazioni con grandi lunghezze d'onda, la distanza percorsa da neutrini e fotoni è molto più piccola della lunghezza d'onda della perturbazione stessa. Questo implica che la componente di quadrupolo della funzione di distribuzione di neutrini e fotoni è sottodominante rispetto la componente di monopolo [49]. Ne segue che, essendo la componente di quadrupolo della distribuzione di neutrini e fotoni la prima sorgente di stress anisotropo, vale l'approssimazione $\Psi = \Phi$ per i due campi gravitazionali introdotti nella sezione 1.3 come perturbazioni della metrica. Infine va osservato che la perturbazione al potenziale gravitazionale in questo modello induce una velocità peculiare e per shift Doppler, in Universi di Einstein-de Sitter (o Universi spazialmente piatti con costante Cosmologica [49]), la componente di dipolo intrinseca del campo di temperatura viene cancellata [6].

Queste considerazioni ci portano a dedurre che le misure sui momenti di quadrupolo ed ottupolo della temperatura del CMB sono quelle che vincolano il potenziale gravitazionale. Segue dunque che, schematizzando il potenziale come [6]

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \vartheta), \quad (4.36)$$

dove ϑ è la fase tra le diverse realizzazioni, ed espandendo in potenze di $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ (essendo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{ts} \ll 1$), vale l'approssimazione [6]

$$\Phi = -\Phi_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^2}{2} \sin \vartheta + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^3}{6} \cos \vartheta \right\}, \quad (4.37)$$

dove il termine di dipolo ($\sim (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \cos \vartheta$) è stato omesso per quanto detto prima, mentre il termine di monopolo ($\sim \sin \vartheta$) è stato trascurato in quanto fornisce uno shift inosservabile. Valutando l'espressione trovata all'epoca del disaccoppiamento τ_d , posto $\mu = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, otteniamo per il campo di temperatura del CMB [6]

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = -\Phi_{\mathbf{k}}(\tau_d) \left\{ \frac{\mu^2}{2} (kx_d)^2 \delta_2 \sin \vartheta + \frac{(\mu)^3}{6} (kx_d)^3 \delta_3 \cos \vartheta \right\}. \quad (4.38)$$

In questa espressione i parametri δ_2 e δ_3 tengono conto dei contributi al quadrupolo ed all'ottupolo dovuti agli effetti Sachs-Wolfe, Sachs-Wolfe integrato e Doppler. Per un Universo Λ CDM con $\Omega_M = 0.28$ e redshift di disaccoppiamento $z_d = 1090$ si ha $\delta_2 = 0.33$ e $\delta_3 = 0.35$ [6]. Scegliendo $\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{z}}$,

dall'equazione (4.38), seguono valori non nulli per i coefficienti dell'espansione in armoniche sferiche a_{20} ed a_{30} da cui è possibile fornire dei constraints ai contributi di quadrupolo ed ottupolo dati da [6]

$$\begin{aligned} (i) \quad & (kx_d)^2 |\Phi_{\mathbf{k}}(\tau_d) \sin \vartheta| \lesssim 5.8Q \\ (ii) \quad & (kx_d)^3 |\Phi_{\mathbf{k}}(\tau_d) \cos \vartheta| \lesssim 32\mathcal{O}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Si osservi che Q e \mathcal{O} sono i limiti superiori dei coefficienti $|a_{20}|$ ed $|a_{30}|$ ottenuti in un sistema di coordinate in cui l'asimmetria osservata risulta allineata con l'asse $\hat{\mathbf{z}}$. In questo modo, scegliendo $Q = 3\sqrt{C_2} \lesssim 1.8 \times 10^{-5}$ e $\mathcal{O} = 3\sqrt{C_3} \lesssim 2.7 \times 10^{-5}$ (ovvero circa 3σ dal valore di quadrupolo e di ottupolo osservati) e selezionando la configurazione che massimizza il valore di $\Delta\Phi$ ($\vartheta = 0$), si ottiene un valore massimo per l'ampiezza $A_{max} \simeq 0.1(32\mathcal{O})^{\frac{1}{3}} \simeq 0.0095$ [6]. Tale valore, però, risulta più basso di più di un ordine di grandezza rispetto al valore osservato $A \sim 0.07$ e questo sembra escludere la possibilità di un'inflazione a singolo campo con fluttuazioni di grande lunghezza d'onda.

Modelli con curvatone

I modelli inflazionari a singolo campo, come abbiamo discusso, non riescono a riprodurre un'asimmetria tra gli emisferi in accordo con le osservazioni. Come abbiamo visto nella sezione 4.1, però, i modelli a singolo campo non sono gli unici che possono produrre questo tipo di asimmetria. Infatti *Adrienne L. Erickcek, Marc Kamionkowski e Sean M. Carroll*, a seguito del valore di A_{max} ottenuto nei modelli a singolo campo, hanno proposto in [6] un modello inflazionario basato sulla presenza di un secondo campo scalare σ , detto curvatone. La Lagrangiana alla base di questo modello inflazionario prevede un termine cinetico standard per il curvatone in aggiunta al termine cinetico dell'inflatone, ovvero [64] [3] [60] [32] [22] [12]

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) - V(\varphi, \sigma) \tag{4.40}$$

con

$$V(\varphi, \sigma) = V(\varphi) + V(\sigma). \tag{4.41}$$

In questo modello il curvatone risulta debolmente accoppiato con l'inflatone, il che spiega la scelta di un potenziale separabile. Inoltre i due potenziali $V(\sigma)$ e $V(\varphi)$ sono della forma

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 \quad (4.42)$$

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m_\varphi^2\varphi^2. \quad (4.43)$$

In questo scenario le perturbazioni cosmologiche sono prodotte dalle fluttuazioni del curvatone σ in un periodo dell'inflazione in cui le fluttuazioni dell'inflatone risultano trascurabili. In particolare, durante l'inflazione, tale campo risulta privo di massa ($m_\sigma \ll H_I$ con H_I rate di espansione dell'Universo durante l'inflazione) e la sua densità di energia è trascurabile rispetto quella dell'inflatone [64] [3] [60] [32] [22] [12].

Per studiare la dinamica del curvatone è necessario procedere in analogia a quanto fatto per l'inflatone e separare, quindi, la parte classica dalle fluttuazioni quantistiche, *i.e.*

$$\sigma(\tau, \mathbf{x}) = \sigma_0(\tau) + \delta\sigma(\tau, \mathbf{x}). \quad (4.44)$$

Le equazioni della dinamica che si ottengono procedendo in questo modo sono formalmente le stesse che si ritrovano per l'inflatone, ovvero le (1.41). Essendo $V_{\sigma\sigma} = m_\sigma^2 \ll H_I^2$, però, l'unico caso da risolvere per le fluttuazioni $\delta\sigma_{\mathbf{k}}$ nello spazio di Fourier risulta [64] [3] [60] [32] [22] [12]

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' - \frac{a''}{a}\delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0, \quad (4.45)$$

ottenendo che su scale super-horizon la perturbazione $\delta\sigma_{\mathbf{k}}$ rimane costante.

Dopo l'inflazione l'inflatone inizia a decadere in radiazione ed il curvatone inizia a scivolare verso il minimo del potenziale. Raggiunta tale configurazione, σ inizia ad oscillare attorno al minimo comportandosi come materia non relativistica. Le fluttuazioni del curvatone producono un potenziale gravitazionale, al secondo ordine dello sviluppo perturbativo, della forma [64] [6]

$$\Phi = -\frac{R}{5} \left[2 \left(\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right] \quad (4.46)$$

avente spettro di potenza (fintanto che $\bar{\sigma} \gg H_I$) [64] [6]

$$P_{\Phi,\sigma} \propto R^2 \left\langle \left[\frac{\delta V}{V(\bar{\sigma})} \right]^2 \right\rangle \simeq R^2 \left(\frac{H_I}{\pi\bar{\sigma}} \right)^2, \quad (4.47)$$

dove $\bar{\sigma}$ è il valore medio del curvatone, mentre

$$R = \frac{\rho_\sigma}{\rho_{tot}} \Big|_{t_{\sigma dec}}, \quad (4.48)$$

è la frazione di densità di energia dovuta alla presenza del curvatone valutata nell'istante $t_{\sigma_{dec}}$ in cui il curvatone decade. Si osservi in particolare che $\rho_\sigma = m_\sigma^2 \sigma^2$ [64] [3] [60] [32] [22] [12]. Poiché abbiamo supposto che la densità di energia del campo σ risulti sottodominante rispetto a quella dell'inflatone, segue il vincolo $R \ll 1$.

L'ipotesi è che l'asimmetria osservata derivi dalle variazioni nel valor medio del curvatone, $\Delta\bar{\sigma}$, attraverso l'Universo osservabile. Poiché $R \propto \bar{\sigma}^2$ e poiché è stato imposto il vincolo $R \ll 1$, una variazione di $\Delta\bar{\sigma}$ produce una frazione di asimmetria nello spettro di potenza [6]

$$\frac{\Delta P_{\Phi,\sigma}}{P_{\Phi,\sigma}} \simeq 2 \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}. \quad (4.49)$$

In analogia al caso di singolo campo, considerando una perturbazione di grande lunghezza d'onda nel curvatone $\delta\sigma = \sigma_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \vartheta)$, si ottiene il vincolo (per $\vartheta = 0$) [6]

$$R \left(\frac{\Delta\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right)^2 \lesssim \frac{5}{2} (5.8Q). \quad (4.50)$$

Fino ad ora, però, abbiamo considerato solo la presenza del curvatone, mentre come abbiamo visto nella trattazione generale presentata nella sezione 4.1 lo spettro di potenza è dato dalla somma dei contributi dovuti alla presenza di tutti i campi. In questo odello in particolare, quindi, lo spettro di potenza è dato dalla somma del contributo dovuto alla presenza dell'inflatone e del contributo dovuto alla presenza del curvatone, ovvero $P_\Phi = P_{\Phi,\phi} + P_{\Phi,\sigma}$. Definita la frazione $\xi \equiv P_{\Phi,\sigma}/P_\Phi$, come nella (4.26), è possibile ottenere l'ampiezza

$$A \simeq 2\xi \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}, \quad (4.51)$$

senza violare il vincolo dato dalla relazione (4.50), scegliendo [6]

$$R \lesssim (5.8Q) \frac{\xi^2}{A^2}. \quad (4.52)$$

A questo punto è possibile introdurre il parametro di non-Gaussianità, come nella (4.3), ed osservare che se la scala di interesse rientra nell'epoca dominata dalla radiazione l'espressione del potenziale di Bardeen diviene

$$\Phi = -\frac{3}{5}\zeta = -\frac{R}{5} \frac{\delta\rho_\sigma}{\rho_\sigma}. \quad (4.53)$$

Confrontando con la (4.46) si ottiene che

$$\frac{\delta\rho_\sigma}{\rho_\sigma} = \left[2 \left(\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right]. \quad (4.54)$$

Ne segue che, se per l'appunto

$$\Phi = \Phi_{Gauss,\sigma} + \Phi_{Gauss,\varphi} + f_{NL}\Phi_{Gauss,\sigma}^2, \quad (4.55)$$

allora il parametro di non-Gaussianità f_{NL} si può scrivere come [62] [6]

$$f_{NL} = \frac{5}{4R}\xi^2. \quad (4.56)$$

In questo modo, utilizzando il vincolo dettato dalla (4.52), è possibile riscrivere il parametro di non-Gaussianità f_{NL} in termini dell'ampiezza A come

$$f_{NL} \gtrsim 25 \left(\frac{A}{0.07} \right)^2, \quad (4.57)$$

dove è stata sfruttata la normalizzazione per A di 0.07. Imponendo i vincoli dettati dai limiti osservativi riportati da Planck su f_{NL} [40], il modello presentato nel lavoro [6] prevede un valore per l'ampiezza dell'asimmetria che si discosta dal valore osservato $A \sim 0.07$ [59]. Questo risultato comporta l'incompatibilità tra il modello con curvatone ed il valore dettato dai dati osservativi.

4.1.2 Non-Gaussianità con dipendenza di scala

Fino ad ora, sia nel caso generale presentato nella sezione 4.1 sia nei due casi specifici presentati nella sezione 4.1.1, abbiamo discusso gli effetti dovuti alla non-Gaussianità di “tipo locale” con un parametro f_{NL} costante. Questi scenari, però, possono funzionare solo se restringiamo la nostra attenzione alle grandi scale. Infatti sia l'ampiezza dell'asimmetria che l'ampiezza della non-Gaussianità devono decrescere sulle piccole scale.

Un modo per generalizzare quanto visto fino ad ora lo si può trovare nel lavoro di *Bekir Baytas, Aruna Kesavan, Elliot Nelson, Sohyun Park e Sarah Shandera* [34]. L'idea è quella di introdurre un potenziale di Bardeen della forma

$$\Phi(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{k}) + \frac{f_{NL}}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q}_2 \phi(\mathbf{q}_1)\phi(\mathbf{q}_2)N(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k})\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \dots, \quad (4.58)$$

dove ϕ è un campo Gaussiano, mentre $N(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k})$ è un kernel integrale il quale può determinare la località o la non località del potenziale di Bardeen. Ripetendo gli stessi passaggi che dalla relazione (4.6) ci hanno portato alla (4.11) otteniamo l'espressione [26]

$$P_{\Phi}(k, \mathbf{x}) \equiv P_{\Phi, M}(k) \simeq P_{\phi}(k) \left[1 + 2f_{NL} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}_l) N(\mathbf{k}_l, -\mathbf{k}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}} \right], \quad (4.59)$$

dove \mathbf{k}_l è il modo di grande lunghezza d'onda. Si osservi che è possibile ottenere il modello locale con f_{NL} costante se $N(\mathbf{k}_l, -\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rightarrow N^{loc} = 2$ [26].

Il formalismo introdotto ci permette di estendere quanto visto fino ad ora a modelli che prevedono una non-Gaussianità con dipendenza di scala. Ora, poichè in generale se l'asimmetria nello spettro di potenza è causata dall'accoppiamento di modi di diversa lunghezza d'onda, il fatto che l'asimmetria osservata vada a zero su piccole scale significa che le grandi scale risultano accoppiate con i modi super-horizon maggiormente rispetto le piccole scale. Questo si traduce nel richiedere che la "forza" dell'accoppiamento tra i modi sub-horizon e la perturbazione di grande lunghezza d'onda debba manifestare una dipendenza di scala. Il tipo di accoppiamento può essere parametrizzato come segue [26]

$$P_{\Phi, M}(k) = P_{\phi}(k) \left[1 + 4f_{NL}(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_f} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}_l) \left(\frac{k_l}{k_0} \right)^{\alpha} e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}} \right]. \quad (4.60)$$

In questa espressione l'indice $n_f < 0$ manda a zero l'asimmetria per tutti i modi di piccola lunghezza d'onda, mentre $\alpha < 0$ tende ad aumentare la sensibilità del modello a modi infrarossi.

Dall'espressione (4.60) quindi, scegliendo opportunamente gli indici introdotti, è possibile andare a studiare gli effetti sullo spettro di potenza dovuti alla presenza di non-Gaussianità primordiale con dipendenza di scala. Ad esempio, scegliendo $n_f = 0$ è possibile ottenere gli stessi risultati ottenuti da *Fabian Schmidt e Lam Hui* in [8].

4.2 Bispettro inflazionario con dipendenza di scala

Come abbiamo visto nella sezione 4.1.2 è possibile estendere i modelli analizzati fino ad ora al caso in cui l'ampiezza della non-Gaussianità presenti una dipendenza dalla scala considerata. Sorge spontaneo chiedersi, però, come la funzione di correlazione a due punti, nel caso di un f_{NL} con dipendenza di scala, "risponda" all'accoppiamento tra modi di piccola lunghezza d'onda con una o più perturbazioni aventi grande lunghezza d'onda. *Christian T. Byrnes, Donough Regan, David Seery ed Ewan R. M. Tarrant* in

[56] rispondono a questa domanda ripercorrendo passaggi analoghi a quanto visto nella sezione 4.1.

In particolare in [56] considerano una regione nel cielo di lunghezza caratteristica λ_M , all'interno della quale vogliono andare a calcolare la funzione di correlazione a due punti della ζ . Nello scenario presentato, questa regione risulta contenuta in una porzione di cielo di lunghezza caratteristica λ_L , con $\lambda_L \gg \lambda_M$, all'interno della quale meccanismi primordiali (come ad esempio l'inflazione) hanno prodotto un insieme di fluttuazioni $\delta\phi^\mu$ statisticamente omogenee ed isotrope. Si osservi che l'indice μ è stato introdotto per labellare le diverse fluttuazioni prodotte durante questa fase primordiale all'interno del volume V_L , vedi Figura 4.2.

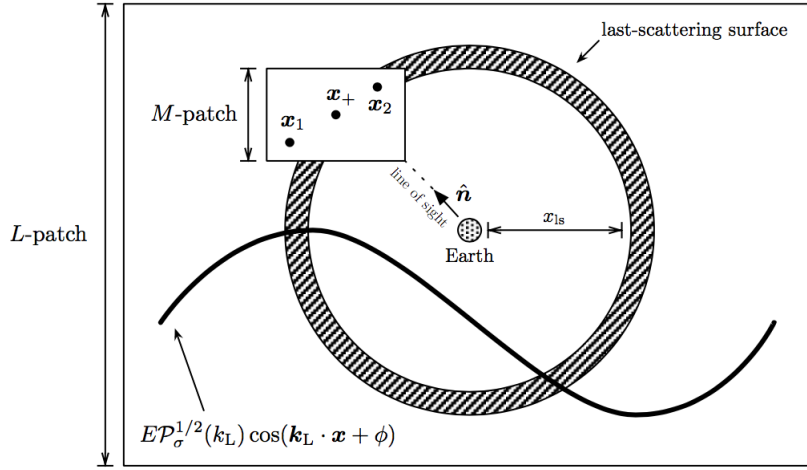


Figura 4.2: La figura mostra il volume V_M contenuto nel volume V_L . Inoltre è schematizzato il modo di grande lunghezza d'onda che attraversa il volume V_L . Si osservi che nelle applicazioni il volume V_M viene centrato sulla superficie di ultimo scattering [56].

Considerare due porzioni di cielo contenute una dentro l'altra è indispensabile per il meccanismo proposto in [56]. Infatti una generica fluttuazione nel volume V_L , in generale, può avere modi d'onda $k_L \ll 1/\lambda_M$. Inoltre, per la natura della fluttuazione quantistica $\delta\phi^\mu$ stessa si ha che $\langle \delta\phi^\mu \rangle = 0$. Fatte queste considerazioni possiamo andare a calcolare la funzione a due punti sul patch M e perturbarla linearmente rispetto all'accoppiamento con le fluttuazioni $\delta\phi^\mu$. In questo modo abbiamo che all'ordine zero (ovvero in assenza di fluttuazioni) la funzione di correlazione a due punti sul volume V_M coincide con la due punti sul volume V_L , mentre all'ordine successivo occorre tener conto della presenza della perturbazione $\delta\phi^\mu$ e di come vari la due punti nel volume V_L a causa della stessa. Traducendo quanto detto in

un'espressione è possibile ottenere l'espressione [56]

$$\langle \zeta(\mathbf{x}_1)\zeta(\mathbf{x}_2) \rangle_M = \langle \zeta(\mathbf{x}_1)\zeta(\mathbf{x}_2) \rangle_L + \delta\phi^\mu(\mathbf{x}_+) \frac{\partial}{\partial\phi^\mu} \langle \zeta(\mathbf{x}_1)\zeta(\mathbf{x}_2) \rangle_L + \dots, \quad (4.61)$$

dove i “...” indicano termini quadratici nelle fluttuazioni $\delta\phi^\mu$, mentre

$$\mathbf{x}_+ = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}. \quad (4.62)$$

Si osservi che tecnicamente potrebbero contribuire anche operatori locali costruiti a partire dal gradiente della fluttuazione, *e.g.* $\partial^2\delta\phi^\mu$, ma poiché noi siamo interessati a fluttuazioni con grandi lunghezze d'onda questi termini risultano sottodominanti (basta ricordare che nello spazio di Fourier le derivate si “trasformano” nei modi $k \sim 1/\lambda$).

Inserendo la relazione, valida all'interno del volume V_L ,

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_L = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P(k), \quad (4.63)$$

dove $k = |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$, nella (4.61), dopo essere passati nello spazio di Fourier, otteniamo l'espressione [56]

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_M = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P(k) (1 + \delta\phi^\mu(\mathbf{x}_+) \rho_\mu(k) + \dots). \quad (4.64)$$

Si osservi che l'espressione ottenuta implica che lo spettro di potenza $P(k)$ acquista una dipendenza dal punto dello spazio tempo, *i.e.* $P(k) \rightarrow P(k, \mathbf{x})$. Per ottenere l'espressione (4.64) è stata introdotta la *funzione di risposta* $\rho_\mu(k)$ definita come

$$\rho_\mu(k) \equiv \frac{1}{P(k)} \frac{\partial P(k)}{\partial\phi^\mu} = \frac{d \ln P(k)}{d\phi^\mu}, \quad (4.65)$$

la quale ci dice come lo spettro di potenza “risponde” alla presenza della perturbazione $\delta\phi^\mu$ di grande lunghezza d'onda. Osserviamo che la risposta della funzione di correlazione a due punti $\langle \zeta\zeta \rangle$, però, deve essere controllata in qualche modo dalla funzione di correlazione a tre punti¹ $\langle \delta\phi^\mu \zeta\zeta \rangle$. Per ricavare tale relazione possiamo andare a considerare un punto \mathbf{x}_3 tale per cui $|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_+| \gg |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$. Fatto ciò possiamo sviluppare la funzione di correlazione a tre punti all'interno del volume V_L , tenendo conto dello sviluppo (4.61) sempre effettuato su V_L . In questo modo si ha [56]

¹In particolare la configurazione considerata nello spazio di Fourier è quella “squeezed”, ovvero un triangolo isoscele in cui la base è molto minore degli altri cateti.

$$\langle \delta\phi^\lambda(\mathbf{x}_3)\zeta(\mathbf{x}_1)\zeta(\mathbf{x}_2) \rangle_L \simeq \langle \delta\phi^\lambda(\mathbf{x}_3)\delta\phi^\mu(\mathbf{x}_+) \rangle_L \frac{\partial}{\partial\phi^\mu} \langle \zeta(\mathbf{x}_1)\zeta(\mathbf{x}_2) \rangle_L + \dots, \quad (4.66)$$

dove è stato sfruttato il fatto che $\langle \delta\phi^\mu \rangle_L = 0$. Possiamo definire il *bispettro della funzione di correlazione mista* come

$$\langle \delta\phi^\lambda(\mathbf{k}_3)\zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_L = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B^\lambda(k_1, k_2, k_3). \quad (4.67)$$

Si può dimostrare, effettuando una trasformata di Fourier della (4.66), che

$$B^\lambda(k_1, k_2, k_3) \simeq \Sigma^{\lambda\mu}(k_3) \frac{\partial}{\partial\phi^\mu} P \left(\left| \mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}_3}{2} \right| \right), \quad (4.68)$$

se $k_3 \ll k_1, k_2$, dove $\Sigma^{\lambda\mu}$ è lo spettro di potenza definito come

$$\langle \delta\phi^\lambda(\mathbf{k}_1)\delta\phi^\mu(\mathbf{k}_2) \rangle_L = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \Sigma^{\lambda\mu}(k_1). \quad (4.69)$$

Ne segue che, invertendo la relazione,

$$\frac{\partial}{\partial\phi^\mu} P \left(\left| \mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}_3}{2} \right| \right) \simeq \Sigma_{\lambda\mu}^{-1}(k_3) B^\lambda(k_1, k_2, k_3), \quad (4.70)$$

e dunque la funzione di risposta può essere espressa come

$$\rho_\mu(k) \simeq \frac{1}{P(k)} \Sigma_{\lambda\mu}^{-1}(k_3) B^\lambda(k, k, k_3), \quad (4.71)$$

dove k è il modo di valore che approssima k_1 e k_2 , ovvero $k \sim k_1 \sim k_2$. Ottenuta la relazione (4.71) è possibile riscrivere la (4.64) come

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_M = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P(k) \left(1 + \delta\phi^\mu(\mathbf{x}_+) \frac{1}{P(k)} \Sigma_{\lambda\mu}^{-1}(k_3) B^\lambda(k, k, k_3) + \dots \right). \quad (4.72)$$

Nel seguito andremo a stimare la perturbazione alla due punti $\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle$ nel volume V_M prodotta da un'insieme di modi di grandi lunghezze d'onda che attraversano il volume V_L . Per farlo, benché le espressioni scritte fino ad ora siano del tutto generali, per semplicità andremo a considerare una singola perturbazione con vettore d'onda \mathbf{k}_L prodotta da un'unica specie, che chiameremo σ . Va osservato che in questa approssimazione il campo σ è l'unico presente durante l'inflazione (dunque può essere anche l'inflatone).

4.2.1 Modelli a singola sorgente

Seguendo la notazione utilizzata fino ad ora possiamo definire lo spettro di potenza adimensionale per la perturbazione σ

$$\mathcal{P}_\sigma(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \Sigma^{\sigma\sigma}(k), \quad (4.73)$$

dove va specificato che gli indici ad apice dello spettro di potenza $\Sigma(k)$ non sono sommati, ma indicano solo che questo è il contributo

$$\langle \delta\sigma(\mathbf{k})\delta\sigma(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \Sigma^{\sigma\sigma}(k). \quad (4.74)$$

La dipendenza spaziale della perturbazione di grande lunghezza d'onda può essere modellata utilizzando l'espressione [56]-[18]

$$\delta\sigma \simeq E \mathcal{P}_\sigma^{\frac{1}{2}}(k_L) \cos(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x} + \vartheta), \quad (4.75)$$

dove il parametro E è stato introdotto per modularne l'ampiezza: per $E = 1$ l'ampiezza risulta "standard", mentre per $E \gg 1$ questa risulta molto più grande del valore tipico. Le anisotropie che osserviamo nello spettro di potenza del CMB provengono dalla superficie di ultimo scattering e vengono proiettate fino a noi tramite effetto Sachs-Wolfe, in quanto siamo nel limite di grandi scale. Dunque per produrre queste anisotropie occorre che il volume V_M sia centrato proprio sulla superficie di ultimo scattering. Questo significa che V_M si troverà ad una distanza comovente x_{ls} tale per cui $\mathbf{x} = x_{ls} \hat{\mathbf{n}}$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore unitario che determina la direzione in cui si guarda dalla Terra, vedi Figura 4.2.

Nel limite che stiamo considerando il modo \mathbf{k}_L corrisponde ad una scala spaziale maggiore della distanza tra la Terra e la superficie di ultimo scattering, ovvero $\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x} \lesssim 1$. Inoltre a noi interessa un campo di puro gradiente e questo ci spinge a richiedere che $\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x} \lesssim 10^{-1}$. Questo significa che, almeno in linea di principio, non esiste alcun limite superiore per la scala associata al modo \mathbf{k}_L in quanto ogni riduzione del gradiente può essere compensata andando a modulare l'ampiezza E della perturbazione. Però, poiché occorre rapportare la scala \mathbf{k}_L con la distanza x_{ls} , possiamo andare a parametrizzarla utilizzando l'espressione

$$\mathbf{k}_L = \frac{2\pi}{x_{ls}} \alpha \hat{\mathbf{p}}, \quad (4.76)$$

dove $\hat{\mathbf{p}}$ è un versore unitario ed $\alpha < 1$ caratterizza di quanto il prodotto $\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_{ls}$ è minore di 1. Se espandiamo l'equazione (4.64) in termini di $\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}$ otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_M &= \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_L [1 + \delta\sigma(\mathbf{x})\rho_\sigma(k) + \dots] \\
&\simeq \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_L \left[1 + E\mathcal{P}_\sigma^{\frac{1}{2}}(k_L) \cos(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x} + \vartheta) \rho_\sigma(k) + \dots \right] \\
&\simeq \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_L \left[1 + E\mathcal{P}_\sigma^{\frac{1}{2}}(k_L) \left(\cos\vartheta - \frac{\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}}{2} \sin\vartheta \right) \rho_\sigma(k) + \dots \right].
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Definendo le quantità $A(k)$ e $C(k)$ come

$$\begin{aligned}
(i) \quad A(k) &= \pi\alpha E\mathcal{P}_\sigma^{\frac{1}{2}}(k_L)\rho_\sigma(k) \sin\vartheta \\
(ii) \quad C(k) &= -\frac{1}{2}E\mathcal{P}_\sigma^{\frac{1}{2}}(k_L)\rho_\sigma(k) \cos\vartheta,
\end{aligned} \tag{4.78}$$

è possibile riscrivere l'espressione (4.77) come [56]

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_M \simeq \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle_L \left\{ 1 - 2C(k) + 2A(k) \frac{\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{x_{ls}} + \dots \right\}, \tag{4.79}$$

dove ricordiamo che la funzione di risposta alla perturbazione $\delta\sigma$ ha la forma

$$\rho_\sigma(k) \simeq \frac{1}{P(k)} \Sigma_{\sigma\sigma}^{-1}(k_3) B^\sigma(k, k, k_3). \tag{4.80}$$

Questa espressione mostra che, in aggiunta alla modulazione di dipolo ricercata, è presente anche uno shift nell'ampiezza espresso dal parametro $C(k)$, il quale può essere relazionato con il parametro $A(k)$ tramite l'espressione

$$C(k) = -\frac{A(k)}{2\pi\alpha} \cot\vartheta. \tag{4.81}$$

Per misurare l'ampiezza della funzione di correlazione a tre punti possiamo definire il *bispettro ridotto*

$$\frac{6}{5} f_{NL}(k_1, k_2, k_3) = \frac{B(k_1, k_2, k_3)}{P(k_1)P(k_2) + P(k_1)P(k_3) + P(k_2)P(k_3)}, \tag{4.82}$$

dove $B(k_1, k_2, k_3)$ è il bispettro definito a partire dalla funzione di correlazione a tre punti $\langle \zeta\zeta\zeta \rangle$. Osserviamo che nel limite squeezed $k_3 \ll k_1, k_2$ il bispettro ridotto diviene

$$\frac{6}{5} f_{NL}(k, k, k_3) \simeq \frac{B(k, k, k_3)}{2P(k)P(k_3)}, \tag{4.83}$$

con $k \sim k_1, k_2$. Osservando che dall'espressione (1.94) segue $\zeta \sim N_\mu \delta\phi^\mu$ (all'ordine lineare), è possibile interpretare la perturbazione di curvatura come una fluttuazione $\delta\phi^\mu$ orientata lungo la direzione

$$\hat{\mathbf{n}}_\mu = \frac{N_\mu}{\sqrt{N_\lambda N_\lambda}}, \quad (4.84)$$

dove è stata sottointesa la somma sugli indici ripetuti. Ne segue che la funzione di risposta della ζ può essere calcolata come proiezione della funzione di risposta ρ_μ lungo la direzione $\hat{\mathbf{n}}_\mu$, ovvero

$$\rho_\zeta(k) = \frac{\hat{\mathbf{n}}_\mu \rho_\mu(k)}{\sqrt{N_\lambda N_\lambda}} \simeq \frac{N_\mu \Sigma_{\alpha\mu}^{-1}(k_3) B^\alpha(k, k, k_3)}{(N_\lambda N_\lambda) P(k)}, \quad (4.85)$$

se $k_3 \ll k$. Si osservi che, sempre all'ordine lineare, si ha che

$$\begin{aligned} (i) \quad & P(k) \simeq N_\mu N_\nu \Sigma^{\mu\nu}(k) \\ (ii) \quad & B(k_1, k_2, k_3) \simeq N_\mu B^\mu(k_1, k_2, k_3). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Nel caso di modelli a singola sorgente in approssimazione di slow-roll, le relazioni operatoriali divengono semplici moltiplicazioni e divisioni² il che implica per ρ_σ la relazione [56]

$$\rho_\sigma \simeq \frac{12}{5} f_{NL}(k, k, k_3). \quad (4.87)$$

L'espressione ottenuta, ricordando la definizione (i) delle (4.78), permette di legare, in ultima istanza, l'ampiezza della modulazione nello spettro di potenza $A(k)$ con il bispettro ridotto $f_{NL}(k, k, k_3)$.

Fino ad ora non abbiamo discusso alcun metodo per calcolare la dipendenza di scala del bispettro generato durante l'inflazione. Per farlo possiamo descrivere l'evoluzione delle fluttuazioni $\delta\phi^\mu$ su scale super-horizon, come affrontato in [56]. Iniziamo con il riscrivere la fluttuazione di nostro interesse come [56]

$$\delta\phi^\alpha(\mathbf{k}) = \Gamma_a^\alpha \delta\phi^a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \Gamma_{ab}^\alpha \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \delta\phi^a(\mathbf{q}) \delta\phi^b(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \dots, \quad (4.88)$$

dove sono state definite le matrici

$$\Gamma_a^\alpha = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial\phi^a} \quad (4.89)$$

$$\Gamma_{ab}^\alpha = \frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial\phi^a\partial\phi^b}. \quad (4.90)$$

²Infatti nel caso di singola sorgente (σ) si ha che gli indici vengono soppressi e dunque quelli che prima erano operatori divengono semplici numeri (*e.g.* $\Sigma_{\mu\nu} \rightarrow \Sigma_{\sigma\sigma}$).

Nell'equazione (4.88) la fluttuazione sul lato sinistro è valutata al tempo di interesse, mentre le fluttuazioni sul lato destro sono valutate ad un tempo primordiale. Queste ultime sono indicate con gli indici $\{a, b, \dots\}$.

Dalla definizione (1.90) del numero di e-foldin N è possibile definire il cambio di variabili

$$dt = \frac{dN}{H}. \quad (4.91)$$

In questo modo è possibile definire l'equazione per il campo di background ϕ^α [56]

$$\frac{d\phi^\alpha}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d\phi^\alpha}{dt} \simeq -\frac{V^\alpha}{3H^2}, \quad (4.92)$$

dove è stata utilizzata l'approssimazione di slow-roll (1.25) ed è stato definito

$$V^\alpha = \frac{\partial V}{\partial \phi_\alpha}. \quad (4.93)$$

In particolare il campo ϕ^α sarà soluzione dell'equazione differenziale [56]

$$\frac{d\phi^\alpha}{dN} = u^\alpha. \quad (4.94)$$

Si osservi che u^α risulta una funzione del campo di background ϕ^α . Questa osservazione ci permette di scrivere un'equazione temporale per l'evoluzione della perturbazione $\delta\phi^\alpha$. Infatti è possibile effettuare uno sviluppo in serie di Taylor della funzione u^α , ovvero [65]

$$\frac{\delta\phi_\alpha}{dN} = u_{\alpha\beta}\delta\phi_\beta + \frac{1}{2}u_{\alpha\beta\gamma}\delta\phi_\beta\delta\phi_\gamma + \dots, \quad (4.95)$$

dove $u_{\beta\alpha} = \partial_\beta u_\alpha$ e $u_{\gamma\alpha\beta} = \partial_\gamma u_{\beta\alpha}$. In questo modo segue che [65]

$$\frac{d}{dN}\langle\delta\phi_\alpha\delta\phi_\beta\rangle = u_{\alpha\gamma}\langle\delta\phi_\gamma\delta\phi_\beta\rangle + u_{\beta\gamma}\langle\delta\phi_\alpha\delta\phi_\gamma\rangle + \dots \quad (4.96)$$

Inoltre, sfruttando lo sviluppo (4.88) è possibile riscrivere la due punti come [65]

$$\langle\delta\phi^\alpha\delta\phi^\beta\rangle = \Gamma_a^\alpha\Gamma_b^\beta\langle\delta\phi_a\delta\phi_b\rangle + \dots, \quad (4.97)$$

da cui segue che

$$\frac{d}{dN} \langle \delta\phi^\alpha \delta\phi^\beta \rangle = \frac{d\Gamma_a^\alpha}{dN} \Gamma_b^\beta \langle \delta\phi_a \delta\phi_b \rangle + \Gamma_a^\alpha \frac{d\Gamma_b^\beta}{dN} \langle \delta\phi_a \delta\phi_b \rangle + \Gamma_a^\alpha \Gamma_b^\beta \frac{d}{dN} \langle \delta\phi_a \delta\phi_b \rangle + \dots \quad (4.98)$$

A questo punto possiamo distinguere i due istanti temporali caratterizzati dagli indici $\{\alpha, \beta, \dots\}$ e $\{a, b, \dots\}$ definendo le funzioni del tempo N_+ ed N_- rispettivamente associate. In questo modo, per far sì che l'evoluzione dello spettro di potenza sia determinata solo dall'evoluzione delle matrici Γ , queste devono soddisfare le relazioni [56]

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{d\Gamma_a^\alpha}{dN_+} = u_\beta^\alpha \Gamma_a^\beta \\ (ii) \quad & \frac{d\Gamma_a^\alpha}{dN_-} = -\Gamma_b^\alpha u_a^b. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Si osservi che è possibile estendere quanto visto alla funzione a tre punti. In particolare si ha [56]

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi^\alpha(\mathbf{k}_1) \delta\phi^\beta(\mathbf{k}_2) \delta\phi^\gamma(\mathbf{k}_3) \rangle &= \Gamma_a^\alpha \Gamma_b^\beta \Gamma_c^\gamma \langle \delta\phi^a(\mathbf{k}_1) \delta\phi^b(\mathbf{k}_2) \delta\phi^c(\mathbf{k}_3) \rangle \\ &+ \Gamma_{mn}^\alpha \Gamma_b^\beta \Gamma_c^\gamma \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^m(\mathbf{q}) \delta\phi^b(\mathbf{k}_2) \rangle \langle \delta\phi^n(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \delta\phi^c(\mathbf{k}_3) \rangle \\ &+ \text{permutazioni} + \dots, \end{aligned} \quad (4.100)$$

da cui [56]

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{d\Gamma_{ab}^\alpha}{dN_+} = u_\beta^\alpha \Gamma_{ab}^\beta + u_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_a^\beta \Gamma_b^\gamma \\ (ii) \quad & \frac{d\Gamma_{ab}^\alpha}{dN_-} = -\Gamma_c^\alpha u_{ab}^c - \Gamma_{cb}^\alpha u_a^c - \Gamma_{ac}^\alpha u_a^c. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Il formalismo utilizzato ci permette di studiare la dipendenza di scala semplicemente risolvendo le equazioni differenziali (4.99) e (4.101) per le matrici Γ . In particolare, utilizzando l'approssimazione di slow-roll (1.25) in aggiunta alla (4.92), otteniamo [56]

$$\begin{aligned} (i) \quad & u_\beta^\alpha \simeq -\frac{V_\beta^\alpha}{3H^2} + \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \frac{\dot{\phi}^\alpha \dot{\phi}_\beta}{H^2 M_{Pl}^2} + \frac{2}{3} \frac{\dot{\phi}^{(\alpha} \dot{\phi}^{\beta)}}{H^3 M_{Pl}^2} \\ (ii) \quad & u_{\beta\gamma}^\alpha \simeq -\frac{V_{\beta\gamma}^\alpha}{3H^2} + \frac{\dot{\phi}^\alpha}{HM_{Pl}} u_{\beta\gamma} + \frac{\dot{\phi}_\beta}{HM_{Pl}} u_\gamma^\alpha + \frac{\dot{\phi}_\gamma}{HM_{Pl}} u_\beta^\alpha - \frac{\dot{\phi}^\alpha \dot{\phi}_\beta \dot{\phi}_\gamma}{H^3 M_{Pl}^3}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

dove $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ è il solito parametro di slow-roll definito nella sezione 1.2. Poiché abbiamo utilizzato l'approssimazione di slow-roll, i campi ϕ^α soddisfano la relazione

$$\frac{\dot{\phi}^\alpha}{HM_{Pl}} \ll 1. \quad (4.103)$$

Ne segue che i contributi dominanti per u_β^α ed $u_{\beta\gamma}^\alpha$ provengono rispettivamente da V_β^α e $V_{\beta\gamma}^\alpha$.

A questo punto è possibile tornare al caso in cui un singolo campo σ contribuisce alla perturbazione di curvatura ζ . Assumendo che la derivata seconda del potenziale rispetto al campo σ risulti maggiore di H , mentre la derivata terza sia trascurabile otteniamo [56]

$$u_\sigma^\sigma \simeq -\eta_\sigma \quad (4.104)$$

$$u_{\sigma\sigma}^\sigma \simeq 0, \quad (4.105)$$

dove

$$\eta_\sigma = \frac{V_{\sigma\sigma}}{3H^2}. \quad (4.106)$$

Definito il momento risultante $k_t = \sum_i k_i$ e scelto il tempo N_- in modo tale da caratterizzare l'uscita dall'orizzonte della scala k_t , segue [56]

$$\frac{d}{d \ln k_t} \Gamma_\sigma^\sigma \simeq \eta_\sigma \Gamma_\sigma^\sigma \quad (4.107)$$

$$\frac{d}{d \ln k_t} \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma \simeq 2\eta_\sigma \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma. \quad (4.108)$$

Se η_σ risulta pressoché costante quando alcune delle scale considerate lasciano l'orizzonte, allora (per queste scale) si ha

$$\Gamma_\sigma^\sigma \simeq k_t^{\eta_\sigma} \quad (4.109)$$

$$\Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma \simeq k_t^{2\eta_\sigma}. \quad (4.110)$$

Questo è un semplice meccanismo attraverso il quale risulta possibile generare una significativa dipendenza di scala. Il prezzo da pagare per ottenere ogni dipendenza di scala con legge a potenza, però, è quello di richiedere una calibrazione della massa del campo in esame σ . Inoltre occorre imporre che η_σ abbia un valore costante per un certo range di numeri d'onda. Infine, poiché in questo tipo di meccanismo si hanno leggi a potenza ben definite

sia per Γ_σ^σ che per $\Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma$, queste influenzano la dipendenza di scala sia della funzione di correlazione a due punti che di quella a tre punti. Questa ultima osservazione ci fa capire che la scelta del parametro η_σ non solo deve essere tale da soddisfare le condizioni elencate sopra, ma deve anche rendere il modello consistente con le misure che si hanno sull'indice spettrale n_s introdotto nella sezione 1.2.

4.2.2 Modelli a sorgenti multiple

Come abbiamo discusso alla fine della sezione precedente, trovare un modello a singola sorgente che non violi i constraint osservativi risulta molto complicato. Infatti le condizioni da imporre sul parametro di slow-roll η_σ sarebbero troppo stringenti. In particolare per ottenere una forte dipendenza di scala occorrerebbe avere un parametro η_σ molto elevato, in contrasto con i constraints osservativi. In scenari con sorgenti multiple, però, si ha una maggiore flessibilità ed è quindi possibile aggirare questo problema.

Infatti, sempre in [56], gli autori propongono un semplice modello a due sorgenti che cerca di riprodurre l'anomalia HPA. In particolare considerano [56] un potenziale del tipo

$$V(\varphi, \sigma) = V_0 \left(1 + \frac{1}{2} \eta_\varphi \frac{\varphi^2}{M_{Pl}^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \eta_\sigma(N) \frac{\sigma^2}{M_{Pl}^2} \right), \quad (4.111)$$

dove $\eta_\sigma(N)$ viene parametrizzato come

$$\eta_\sigma(N) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \tanh\left(\frac{\sigma - \sigma_c}{\sigma_{step}}\right) + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2} \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\sigma - \sigma_c}{\sigma_{step}}\right) \right]. \quad (4.112)$$

Questo potenziale permette un'evoluzione del parametro η_σ da un certo valore fissato η_1 ad un altro valore fissato η_2 . I parametri σ_{step} e σ_c sono rispettivamente l'intervallo in cui avviene il passaggio $\eta_1 \rightarrow \eta_2$ ed il valore centrale dell'intervallo stesso. Dunque prendendo, ad esempio, un valore σ_{step} piccolo è possibile avere una transizione $\eta_1 \rightarrow \eta_2$ più rapida.

Per ottenere delle simulazioni numeriche a partire da questo modello occorre fissare i valori dei diversi parametri. In [56], poiché l'idea è che la fluttuazione $\delta\varphi$ domini la funzione di correlazione a due punti della ζ , viene scelto $\eta_\varphi = -0.02$ di modo da restituire un indice spettrale n_s in accordo con i dati osservativi. Inoltre η_1 viene fissato ad un valore iniziale pari a -0.25 , mentre η_2 viene fissato ad un valore di -0.08 . Le condizioni iniziali per $N = 0$ sono $\varphi_* = 0.01 M_{Pl}$ e $\sigma_* = 8.94427 \times 10^{-8} M_{Pl}$. Infine l'intervallo in cui avviene la transizione $\eta_1 \rightarrow \eta_2$ viene centrato in $\sigma_c = 3.445 \times 10^{-6} M_{Pl}$ con un'ampiezza $\sigma_{step} = 10^{-10} M_{Pl}$ [56].

Una volta impostati i parametri in [56] calcolano, numericamente, le funzioni di correlazione a due e tre punti per poi ottenere i valori finali di ρ_σ e ρ_φ tramite la (4.71). Il risultato finale è plottato nella Figura 4.3.

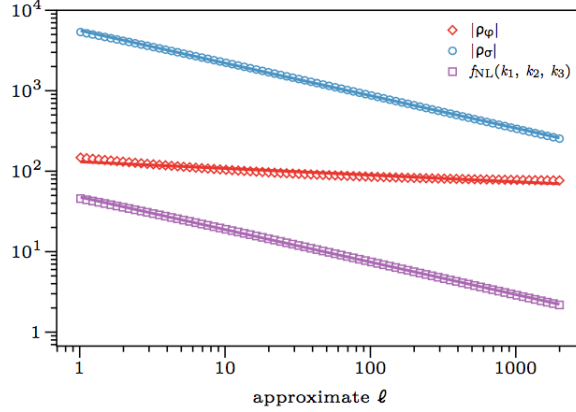


Figura 4.3: La figura mostra la funzione di risposta ρ_φ (in rosso), la funzione di risposta ρ_σ (in blu) ed il parametro $f_{NL}(k_1, k_2, k_3)$ (in viola) in funzione del multipolo $\ell = 14000$ kMpc, corrispondente al modo k definito nella (4.87) [56].

Nel risultato ottenuto la risposta dovuta alla presenza del campo φ risulta poco dipendente dalla scala, mentre la risposta ρ_σ presenta una forte dipendenza di scala. Quest'ultima può essere parametrizzata come [56]

$$\rho_\sigma(k) \simeq 5600 \left(\frac{k}{k_{\ell=1}} \right)^{-0.405}, \quad (4.113)$$

dove $k_{\ell=1} = 1/14000$ kMp⁻¹ corrisponde ad $\ell = 1$. L'equazione (4.113) risulta presentare una dipendenza di scala accettabile come descrizione della dipendenza di scala dell'ampiezza $A(k)$ [56]. Il parametro $f_{NL}(k, k, k_3)$ ottenuto per questo modello presenta un andamento simile alla ρ_σ con un indice spettrale pari a -0.404 [56].

Infine sono stati calcolati gli spettri di potenza per questo modello. In particolare per scale $\ell < 2000$ lo spettro di potenza della perturbazione ζ risulta ben approssimato da una legge a potenza con indice spettrale $n_s \simeq 0.94$ [56]. Per $500 < \ell < 1500$ il risultato che si ottiene mostra, invece, un indice spettrale $n_s \simeq 0.96$ [56].

4.3 Dissipazione primordiale

I modelli che coinvolgono la non-Gaussianità primordiale per cercare di spiegare l'origine delle anomalie non sono gli unici presentati in letteratura. Ad esempio il modello presentato da *G. D'Amico, R. Gobbetti, M. Kleban,*

M. Schillo ([25]) fornisce un “toy-model” per spiegare la HPA attraverso la produzione di particelle durante l’inflazione. In particolare, nel modello analizzato, il $\sim 90\%$ dello spettro di potenza proviene dalle fluttuazioni quantistiche dell’inflatone φ , mentre il restante $\sim 10\%$ risulta dovuto alla produzione di particelle. L’azione considerata è un’azione del tipo [25]

$$S = - \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} (\partial\mu)^2 + \frac{1}{2} m_\mu^2 \mu^2 + \sum_i \left[\frac{1}{2} (\partial\chi_i)^2 + \frac{g^2}{2} (\mu^2 + (\varphi - \varphi_i)^2) \chi_i^2 \right] \right\}, \quad (4.114)$$

dove $\varphi_i = i\Delta\varphi$ (con i intero) sono punti equamente spazati nello spazio dei valori di φ , φ è l’inflatone, μ e χ_i sono campi ausiliari.

Questa azione descrive il “lento rotolamento” dell’inflatone φ accoppiato con dei campi χ_i , ognuno dei quali assume massa minima quando $\varphi = \varphi_i$ (come si vede dall’ultimo termine della Eq.(4.114)). La massa delle particelle χ_i dipende dal tempo ed in particolare, quando $\varphi \simeq \varphi_i$, queste particelle possono essere prodotte spontaneamente. Dal termine quadratico $\mu^2 \chi_i^2$ presente nell’azione, è chiaro che il campo μ contribuisce alla massa dei campi χ_i e quindi può essere utilizzato come “modulatore” per controllare la quantità di particelle χ_i prodotte. Infatti se μ è “grande” allora la massa dei χ_i risulta “grande” (anche se $\varphi = \varphi_i$) il che implica che solo poche particelle vengano prodotte. Se $\mu = 0$, invece, le particelle χ_i diventano massless (per $\varphi = \varphi_i$) e questo ne facilita la produzione.

Poiché il modello presentato vuole riprodurre un’asimmetria tra gli emisferi, è possibile supporre che il campo μ , all’inizio dell’inflazione ($t = t_i$), abbia una struttura del tipo [25]

$$\mu(\mathbf{x}, t_i) = \mu_0 + \alpha (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{x} + R_{ls}), \quad (4.115)$$

dove R_{ls} è il raggio della superficie di ultimo scattering e $\hat{\mathbf{d}}$ è la direzione del gradiente. In questo modo la produzione di particelle sarà maggiormente soppressa in una direzione piuttosto che nell’altra. Questo ansatz produce una perturbazione nel campo di temperatura del CMB del tipo

$$\delta T(\hat{\mathbf{n}}) \sim (1 + A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \delta T^{iso}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.116)$$

dove il simbolo “ \sim ” deriva dal fatto che l’effetto del campo μ sullo spettro di potenza non è lineare e dal fatto che, in generale, il gradiente del campo evolve nel tempo.

Le equazioni del moto per i campi coinvolti possono essere ricavate a partire dall’azione (4.114), ottenendo come risultato [25]

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\varphi + m^2\varphi + g^2\sum_i(\varphi - \varphi_i)\chi_i^2 = 0 \quad (4.117)$$

$$\ddot{\mu} + 3H\dot{\mu} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\mu + m_\mu^2\mu + g^2\sum_i\mu\chi_i^2 = 0 \quad (4.118)$$

$$\ddot{\chi}_i + 3H\dot{\chi}_i - \frac{1}{a^2}\nabla^2\chi_i + g^2\left[\mu^2 + (\varphi - \varphi_i)^2\right]\chi_i = 0. \quad (4.119)$$

Come abbiamo già osservato in precedenza, quando φ si trova in un intorno di φ_i la massa delle particelle χ_i raggiunge un minimo e dunque le particelle in esame vengono prodotte con una densità comovente [25]

$$n_{\chi_i} = \frac{(g\dot{\varphi})^{3/2}}{(2\pi)^3}e^{-\pi g\mu^2/\dot{\varphi}}. \quad (4.120)$$

Si osservi che questa espressione è valida nel limite in cui l'intervallo temporale $\delta t \sim (g\dot{\varphi})^{-1/2} \ll H^{-1}$, ovvero se le interazioni che portano alla produzione delle particelle χ_i risultano efficaci. Inoltre è utile osservare che la produzione di particelle risulta esponenzialmente soppressa per $\mu > \mu_{crit}$, dove

$$\mu_{crit} \equiv \sqrt{\frac{\dot{\varphi}}{\pi g}}. \quad (4.121)$$

Per $\varphi > \varphi_i$, invece, la massa delle particelle χ_i aumenta linearmente con la differenza $(\varphi - \varphi_i)$ di modo che la densità di energia comovente associata risulti [25]

$$\rho_{\chi_i} = m_{\chi_i}n_{\chi_i} = g\sqrt{\mu^2 + (\varphi - \varphi_i)^2}n_{\chi_i}. \quad (4.122)$$

Si osservi che in questo caso, essendo $\varphi \neq \varphi_i$, le particelle χ_i non vengono più prodotte. Dunque, se le particelle in esame non vengono né prodotte né annichilate, la densità di energia comovente non varia. In questo modo la densità di energia fisica viene *redshiftata* come a^{-3} a partire dal momento in cui le particelle χ_i vengono prodotte.

Nel seguito del lavoro presentato in [25] viene trascurato il fatto che le particelle vengano prodotte in “blocchi” (ovvero ad intervalli temporali tali per cui $\varphi \simeq \varphi_i$) e viene considerato semplicemente un tempo medio nel quale la produzione risulta “continua”. Questa approssimazione è valida solo nel caso in cui il numero di collisioni (per tempo di Hubble) che porta alla produzione di particelle risulti elevato. In caso contrario, poiché le particelle vengono prodotte periodicamente, il contributo finale allo spettro di potenza sarebbe un contributo oscillante [25].

Detto ciò, l'equazione del moto di background del campo φ mediata nel tempo diviene [25]

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m^2\varphi = \bar{f}, \quad (4.123)$$

dove è stata definita una “forza” media [25]

$$\bar{f} = -\frac{\partial \bar{\rho}_\chi}{\partial \varphi} = -\frac{\dot{\varphi}}{3H\Delta\varphi} \frac{g^{5/2}\dot{\varphi}^{3/2}}{(2\pi)^3} e^{-\pi g\mu^2/\dot{\varphi}}. \quad (4.124)$$

La produzione di particelle, quindi, modifica la “traiettoria” del campo φ a causa della forzante \bar{f} . Inoltre, scegliendo per il campo μ la configurazione (4.115), la forzante varia da punto a punto nell’Universo in modo che l’inflazione duri più a lungo nelle regioni con maggiore produzione di particelle. Questo produce una variazione del campo di temperatura allineata con la direzione $\hat{\mathbf{d}}$ su grandi scale. Infatti possiamo andare a considerare l’equazione del moto perturbata [25]

$$\delta\ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\delta\varphi_{\mathbf{k}} = g\delta\bar{n}_{\mathbf{k}}, \quad (4.125)$$

dove $\delta\bar{n}_{\mathbf{k}}$ è la variazione spaziale (mediata nel tempo) della densità delle particelle prodotte. A questo punto, assumendo che la produzione di particelle sia un processo Poissoniano, abbiamo che [25]

$$\langle \delta\bar{n}_{\mathbf{k}}\delta\bar{n}_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\frac{\bar{n}_\chi}{a^3}, \quad (4.126)$$

dove

$$\bar{n}_\chi = \frac{\dot{\varphi}}{3H\Delta\varphi}n_\chi. \quad (4.127)$$

Assumendo che le particelle prodotte non siano correlate con le fluttuazioni dell’inflatone $\delta\varphi$ il risultato finale che si ottiene per lo spettro di potenza per la perturbazione di curvatura ζ totale è [25]

$$P_\zeta = P_\varphi + P_{pp} = \frac{H^4}{4\pi^2\dot{\varphi}^2} + \frac{g^2\bar{n}_\chi H}{9\pi\dot{\varphi}^2}, \quad (4.128)$$

dove P_φ è lo spettro di potenza associato alle fluttuazioni quantistiche dell’inflatone, mentre P_{pp} è lo spettro di potenza derivante dalla produzione di particelle. Ne segue che se μ varia da 0 a valori maggiori o uguali di μ_{crit} (dove quindi per quanto detto precedentemente $P_{pp} \sim 0$) si riesce a produrre un’asimmetria nello spettro di potenza descritta dalla relazione [25]

$$\frac{\Delta P_\zeta}{P_\zeta} = \frac{P_{pp}}{P_\varphi + P_{pp}} \simeq \frac{\dot{\varphi}}{H\Delta\varphi} \frac{g^{7/2}\dot{\varphi}^{3/2}}{54\pi^2 H^3}. \quad (4.129)$$

4.4 Velocità del suono primordiale e formalismo δN generalizzato

Come proposto da *Wang, Cai, Zhao e Zhang* in [46], è possibile considerare un modello che spieghi l'asimmetria tra gli emisferi mediante diverse velocità del suono primordiali. Per ottenere un tale risultato è possibile considerare un modello in cui l'inflazione è guidata da due campi scalari, χ e φ , in accoppiamento minimale con la gravità. In particolare è possibile considerare un campo φ con termine cinetico non standard, ovvero considerare una Lagrangiana del tipo³ [46]

$$\mathcal{L} = Q(X, \chi, \varphi) - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\varphi, \chi), \quad (4.130)$$

dove

$$X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi, \quad (4.131)$$

mentre

$$Q(X, \chi, \varphi) = \frac{1}{f(\varphi, \chi)} \left(1 - \sqrt{1 + f(\varphi, \chi) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi} \right). \quad (4.132)$$

La funzione $f(\varphi, \chi)$ introdotta risulta un fattore di deformazione del termine cinetico del campo φ [46].

Nel seguito vengono fatte due ipotesi sul modello presentato. La prima consiste nell'identificare il campo φ con l'inflatone. La seconda consiste nell'assumere che il campo χ non dia contributo alla dinamica di background. A questo punto, variando l'azione rispetto la metrica inversa $g^{\mu\nu}$, è possibile ottenere l'espressione del tensore energia-impulso. Il risultato è espresso dalla relazione seguente [46]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} (Q - V) + Q_{,X} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi, \quad (4.133)$$

dove

$$Q_{,X} = \frac{\partial Q}{\partial X}. \quad (4.134)$$

A partire dalla Lagrangiana (4.130), si ottiene che l'inflatone soddisfa l'equazione di Klein-Gordon generalizzata [46]

³Si osservi che per rimanere coerenti con la notazione utilizzata nel capitolo 1 la funzione $P(X, \chi, \varphi)$ definita in [46] è stata rinominata con $Q(X, \chi, \varphi)$.

$$\nabla_\mu (Q_{,X} \nabla^\mu \varphi) + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.135)$$

Considerando un Universo spazialmente piatto con metrica di FRW data da

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2, \quad (4.136)$$

dalla (4.133) segue che pressione e densità di energia per l'intero sistema possano essere scritte come [46]

$$\rho = -Q + V + \frac{\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1 - 2f(\varphi, \chi)X}}, \quad P = Q - V. \quad (4.137)$$

In questo modo è possibile introdurre la velocità del suono associata all'inflatone come [46]

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial P / \partial X}{\partial \rho / \partial X} = \frac{Q_{,X}}{Q_{,X} + 2XQ_{,XX}} = 1 - 2f(\chi, \varphi)X, \quad (4.138)$$

dove è stato sfruttato il fatto che pressione e densità di energia risultano funzioni della variabile X , ovvero

$$\begin{aligned} (i) \quad d\rho &= \frac{\partial \rho}{\partial X} dX \\ (ii) \quad dP &= \frac{\partial P}{\partial X} dX. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Utilizzando l'equazione 4.138 è possibile riscrivere la densità di energia totale come

$$\rho = V - Q + \frac{\dot{\varphi}^2}{c_s}. \quad (4.140)$$

Inoltre dalle equazioni di Friedmann (1.4) e (1.5) otteniamo [46]

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -\frac{1}{2M_{Pl}^2} (\rho + P) = -\frac{\dot{\varphi}^2}{2M_{Pl}^2 c_s}, \quad (4.141)$$

dove è stato sfruttato il fatto che $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$ e che [46]

$$\rho + P = \frac{\dot{\varphi}^2}{c_s}. \quad (4.142)$$

Per il seguito è utile introdurre i tre parametri di slow-roll [46]

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}, \quad s = \frac{\dot{c}_s}{Hc_s}, \quad (4.143)$$

i quali caratterizzano, rispettivamente, la variazione di H , ϵ e c_s per tempo di Hubble.

Arrivati a questo punto possiamo provare a generalizzare il formalismo δN studiato nella sezione 1.3.4. Infatti esistono alcuni parametri primordiali che variano spazialmente con l'evoluzione del background durante l'inflazione e che quindi possono influenzare il valore del numero di e-folding. Come suggerisce l'equazione (4.141) la velocità del suono c_s può essere uno di questi parametri. Allora possiamo pensare il numero di e-folding come una funzione del tipo [46]

$$N(\mathbf{x}, t) \equiv N(\varphi(\mathbf{x}), c_s(\mathbf{x}), t), \quad (4.144)$$

(si ricordi che per ipotesi il campo χ non influenza la dinamica di background) da cui segue che

$$\delta N = \frac{\partial N}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial N}{\partial c_s} \Delta c_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi^2} \delta \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial c_s^2} \Delta c_s^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi \partial c_s} \delta \varphi \Delta c_s + \dots, \quad (4.145)$$

dove le derivate del numero di e-folding rispetto φ o c_s sono valutate rispetto ai valori di background delle variabili considerate.

Dunque, considerando il caso in cui c_s vari spazialmente, possiamo decomporre la velocità del suono in un valore medio (isotropo) più una componente con dipendenza spaziale [46]

$$c_s(\mathbf{x}, t) = \bar{c}_s(t) + \Delta c_s(\mathbf{x}, t). \quad (4.146)$$

In accordo con la sua espressione esplicita (4.138), possiamo supporre che una modulazione di questo tipo si possa ottenere andando a considerare accoppiamenti con perturbazioni di grande lunghezza d'onda del campo χ [46]. In questo modo si ha che

$$\Delta c_s(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial c_s}{\partial \chi} \Delta \chi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial f / \partial X}{2f} \left(c_s - \frac{1}{c_s} \right) \Delta \chi(\mathbf{x}, t). \quad (4.147)$$

Assumendo che la perturbazione $\Delta \chi$ esista ad un dato numero d'onda fissato \mathbf{k}_L (tale per cui $\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_{ls} \ll 1$), possiamo parametrizzare tale perturbazione come [46]

$$\Delta \chi(\mathbf{x}, t) = B(t) \cos(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}). \quad (4.148)$$

Assumendo di trovarci ad $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, possiamo riscrivere

$$\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{k}_L \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (4.149)$$

e nel limite $\mathbf{k}_L \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \ll 1$ possiamo espandere l'equazione (4.148) ottenendo [46]

$$\Delta\chi(\mathbf{x}, t) = B(t) [\cos\theta - \sin\theta \mathbf{k}_L \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)], \quad (4.150)$$

dove $\theta = \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_0$. Ne segue che, ricordando l'espressione (1.53) per lo spettro di potenza relativo alle perturbazioni $\delta\varphi$, passando nello spazio di Fourier e considerando i campi χ e φ non correlati tra loro, lo spettro di potenza relativo alla perturbazione di curvatura ζ si può scrivere come [46]

$$P_\zeta(k, \mathbf{r}) = \left[\frac{\partial N}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi \partial c_s} \Delta c_s \right]^2 \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (4.151)$$

Si osservi che sono state trascurate anche le autocorrelazioni del campo $\Delta\chi$. Osservando inoltre che all'ordine lineare nello sviluppo perturbativo (e nel caso di singolo campo) si ha che (nella gauge spazialmente piatta)

$$\zeta = -H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}} \simeq \frac{\partial N}{\partial \varphi} \delta\varphi, \quad (4.152)$$

segue la relazione

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = -\frac{H}{\dot{\varphi}} = \frac{1}{M_{Pl}\sqrt{2\epsilon c_s}}, \quad (4.153)$$

dove è stata sfruttata la relazione (4.141) in aggiunta alle (4.143). Allora, sfruttando questa relazione in aggiunta al fatto che

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c_s} = \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{c}_s} = \frac{\epsilon \eta}{c_s s}, \quad (4.154)$$

è possibile ricavare la parte anisotropa dello spettro di potenza, ovvero

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \varphi \partial c_s} = \frac{1}{2M_{Pl}\sqrt{2\epsilon c_s}^{3/2}} \left(1 + \frac{\eta}{s} \right). \quad (4.155)$$

Infine, sostituendo quanto trovato, è possibile riscrivere l'ampiezza che modula l'asimmetria tra gli emisferi introdotta nell'equazione (3.12) come [46]

$$A(k) = k_L x_{ls} \left(1 + \frac{\eta}{s} \right) \frac{\partial f / \partial X}{4f} \left(1 - \frac{1}{c_s^2} \right) B(t) \sin\theta. \quad (4.156)$$

Si osservi che l'ampiezza così ottenuta non risulta legata alla non-Gaussianità locale primordiale il che rende il modello libero dai constraints attuali su f_{NL}^{loc} . Inoltre i limiti forniti da Planck [40] sul parametro di non-Gaussianità f_{NL}

per i modelli che presentano un termine cinetico analogo a quello introdotto nella (4.130) risultano

$$f_{NL}^{DBI} = 2.6 \pm 61.6, \quad c_s > 0.069, \quad (4.157)$$

dove [46]

$$f_{NL}^{DBI} = -\frac{35}{108} \left(\frac{1}{c_s^2} - 1 \right). \quad (4.158)$$

Questo significa che esiste un vasto range da esplorare in cui far variare i parametri nella (4.156).

Ad esempio, scegliendo $c_s \simeq 1$ ed $\eta/s \ll 1$ l'equazione (4.156) si riduce a [46]

$$|A(k)| = \frac{50}{70} \frac{\partial f / \partial X}{f} |f_{NL}^{DBI}| \frac{H}{2\pi} E, \quad (4.159)$$

dove

$$\frac{H}{2\pi} E = k_L x_{ls} B(t) \sin \theta. \quad (4.160)$$

Questo modello è stato ampiamente analizzato in [9] e simulazioni numeriche hanno mostrato un buon accordo con i constraints dettati dalle osservazioni del CMB.

In conclusione, quindi, un opportuna scelta dei parametri nella (4.156) può portare a modelli in grado di spiegare l'asimmetria tra gli emisferi.

Capitolo 5

Alla ricerca di un “toy-model”

Nel Capitolo 4 abbiamo avuto modo di vedere alcuni dei modelli proposti in letteratura per spiegare l’HPA. Eccezion fatta per quelli a singolo campo presentati nelle sezioni 4.1.1 e 4.2, per adesso è impossibile stabilire con certezza quale sia il reale meccanismo primordiale che ha portato alla formazione di questa anomalia.

Tutti i modelli presentati fino ad ora hanno come idea di base quella di riprodurre l’HPA parametrizzando il campo di temperatura con una modulazione di dipolo (si veda l’Eq. (3.12)). Questa, però, non è l’unica possibilità. Infatti è possibile parametrizzare il campo di temperatura come [41]

$$\delta T(\hat{\mathbf{n}}) = (1 + M(\hat{\mathbf{n}})) \delta T_{iso}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.1)$$

dove $M(\hat{\mathbf{n}})$ definisce il tipo di modulazione considerata. Per $M(\hat{\mathbf{n}}) = A\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ si ha modulazione di dipolo, ma non è esclusa la possibilità di considerare anche ordini superiori (come ad esempio una modulazione di quadrupolo, si veda la sezione A.1 in Appendice).

Seguendo l’idea di andare oltre la modulazione di dipolo per far fronte ad alcune delle diverse anomalie riscontrate, recentemente è stato preso in considerazione un diverso modello fenomenologico, proposto da *Frode K. Hansen et al* in [24]. Nella prossima sezione, quindi, introdurremo questo modello per poi andare a ricercare, nelle sezioni successive, un legame con dei possibili scenari primordiali.

5.1 Oltre la modulazione di dipolo

Come abbiamo accennato, il modello considerato in [24] si discosta dall’idea di base in cui il campo di temperatura stesso risulta modulato da un dipolo. Per ottenere un tale risultato viene utilizzato un campo che “mimi” la mappa isotropa originale del CMB, filtrandolo in modo da conservare l’infor-

mazione solo sulle scale $\ell \leq 1000$. In particolare, il modello fenomenologico considerato consiste nel seguente campo di temperatura [24]

$$T(\hat{\mathbf{n}}) = T_G(\hat{\mathbf{n}}) + \beta_1 T_G(\hat{\mathbf{n}}) T_F^2(\hat{\mathbf{n}}) + \beta_2 T_G(\hat{\mathbf{n}}) T_F^4(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.2)$$

dove $T_G(\hat{\mathbf{n}})$ è la mappa isotropa del campo di temperatura, mentre

$$T_F(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^F Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.3)$$

risulta essere la mappa $T_G(\hat{\mathbf{n}})$ filtrata. In particolare abbiamo che, differenzialmente dal caso generale presentato nella (2.20),

$$a_{\ell m}^F = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} \left(\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) \right)_G Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) W_\ell = a_{\ell m}^G W_\ell, \quad (5.4)$$

dove W_ℓ è un filtro Gaussiano che va a zero per $\ell > 50$. Va osservato che il campo di temperatura (5.2) risulta un campo di temperatura non-Gaussiano. Questo ci permette di restringere la nostra attenzione alla classe di modelli inflazionari che prevedono una non-Gaussianità primordiale (come ad esempio i modelli presentati nelle sezioni 4.1 e 4.2). Ovviamente questa restrizione resta vera solo se assumiamo che la non-Gaussianità che porta alla relazione (5.2) abbia origine primordiale.

Prima di proseguire è necessario osservare che un modello come quello proposto nella (5.2) coinvolge all'ordine cubico e quinto il campo di temperatura e quindi, rispettivamente, un trispettro (ovvero una funzione a quattro punti) ed una funzione a sei punti. Questo potrebbe risultare problematico dal punto di vista della ricerca di modelli inflazionari, in quanto la trattazione di una funzione di correlazione a sei punti non è mai stata trattata in letteratura.

5.2 Legame tra i filtri e la perturbazione di curvatura ζ

Lo scopo del presente lavoro di tesi è quello di cercare di capire se esiste un possibile modello inflazionario capace di riprodurre il modello fenomenologico parametrizzato dalla relazione (5.2). Un primo passaggio cruciale è la ricerca di una corrispondenza uno ad uno tra il campo di temperatura e la perturbazione di curvatura su ipersuperfici di densità costante ζ che supponiamo sia stata prodotta durante l'inflazione (si veda la sezione 1.2). Così facendo, infatti, diviene possibile legare l'espressione fornita per il campo di temperatura, la quale risulta completamente fenomenologica, con la "forma" della ζ e quindi con i possibili modelli inflazionari. Questo è un passaggio indispensabile per poter pensare di mappare il modello fenomenologico

(5.2) con possibili modelli inflazionari. Come vedremo nel seguito, la sua realizzazione è meno banale di quanto a prima vista potrebbe sembrare.

Il nostro punto di partenza, quindi, è quello di utilizzare un'espressione del tutto generale per la ζ dimenticandoci, in prima approssimazione, del termine $\beta_2 T_G(\theta, \phi) T_F^4(\theta, \phi)$. La scelta fatta nel trascurare questo termine verrà in parte giustificata nella sezione 5.3. Prima di proseguire va osservato che l'espressione del campo di temperatura (5.2) presenta una potenza cubica del campo di temperatura. Questo significa che per caratterizzare il modello risulta indispensabile andare a considerare, oltre allo spettro di potenza, anche il trispettro. Dunque, se si vuole partire da modelli inflazionari che presentino una non-Gaussianità primordiale, non è più possibile restringersi al parametro di non-linearità f_{NL} . È necessario andare a considerare l'ordine cubico della non linearità, ovvero introdurre un ulteriore parametro adimensionale g_{NL} . Questo parametrizza il trispettro e può essere introdotto, assumendo l'ipotesi di località (come visto per f_{NL} nella sezione 4.1), mediante la relazione [4] [31] [33]

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + f_{NL} [\phi^2(\mathbf{x}) - \langle \phi^2(\mathbf{x}) \rangle] + g_{NL} [\phi^3(\mathbf{x}) - \langle \phi^3(\mathbf{x}) \rangle] + \dots, \quad (5.5)$$

dove Φ è il potenziale di Bardeen, mentre ϕ è un qualche campo Gaussiano.

Però, per quanto discusso nella sezione 4.2 e data la dipendenza di scala dell'HPA, risulta maggiormente conveniente introdurre una non-Gaussianità di tipo non-locale. Seguendo quanto proposto in [16] e [27], quindi, possiamo fornire un'espressione generale all'ordine g_{NL} del tipo

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}) = & \zeta_G(\mathbf{x}) + f_{NL} \prod_{j=1}^2 \int d^3 \mathbf{x}_j \mathcal{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \\ & + g_{NL} \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j \mathcal{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_3). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Andando nello spazio di Fourier l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{k}) = & \zeta_G(\mathbf{k}) + f_{NL} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \tilde{K}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}_1) \zeta_G(\mathbf{k}) \zeta_G(\tilde{\mathbf{k}}_1) \\ & + g_{NL} \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} \tilde{W}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (5.7)$$

con

$$\begin{aligned}
(i) \quad \tilde{\mathcal{K}}(\mathbf{k}_1, \tilde{\mathbf{k}}_1) &= \prod_{j=1}^2 \int d^3 \mathbf{x}_j \mathcal{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) e^{i\mathbf{x}_1 \cdot \tilde{\mathbf{k}}_1} e^{i\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{k}_1} \\
(ii) \quad \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}) &= \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j \mathcal{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} e^{i\mathbf{x}_3 \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{12}},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

dove abbiamo usato la notazione

$$\begin{aligned}
(i) \quad \tilde{\mathbf{k}}_1 &\equiv \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \\
(ii) \quad \tilde{\mathbf{k}}_{12} &\equiv \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Si osservi che nell'espressione (5.7) è possibile di fatti introdurre due parametri f_{NL} e g_{NL} dipendenti dalla scala, ovvero

$$f_{NL}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}_1) = f_{NL} \tilde{\mathcal{K}}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}_1) \tag{5.10}$$

$$g_{NL}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}) = g_{NL} \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}). \tag{5.11}$$

Le informazioni che otteniamo partendo dalla mappa (5.2) proposta in [24] risultano vincolate dalle osservabili che possiamo estrapolare dal CMB. Per ricollegarci a queste, come visto nel Capitolo 2, possiamo espandere il campo di temperatura in armoniche sferiche

$$\begin{aligned}
T(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) = T_G(\hat{\mathbf{n}}) + \beta_1 T_G(\hat{\mathbf{n}}) T_F^2(\hat{\mathbf{n}}) + \beta_2 T_G(\hat{\mathbf{n}}) T_F^4(\hat{\mathbf{n}}) \\
&= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^G Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) + \beta_1 \sum_{\ell m} c_{\ell m}^F Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) + \beta_2 \sum_{\ell m} q_{\ell m}^F Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

in modo da poter ricavare i coefficienti $a_{\ell m}$ direttamente legati allo spettro di potenza angolare (che abbiamo definito nell'Eq.(2.10)). Inoltre, partendo dalla (2.19), è possibile ottenere l'espansione armonica del campo di temperatura sfruttando l'espressione generale (5.7), ovvero

$$\begin{aligned}
a_{\ell m} &= -(4\pi) i^\ell \frac{3}{5} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_\ell(k) \zeta(\mathbf{k}) \\
&= -(4\pi) i^\ell \frac{3}{5} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_\ell(k) \left\{ \zeta_G(\mathbf{k}) + f_{NL} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{K}}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}_1) \zeta_G(\mathbf{k}) \zeta_G(\tilde{\mathbf{k}}_1) \right. \\
&\quad \left. + g_{NL} \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Risulta evidente, confrontando con l'espansione (5.12), che la corrispondenza uno ad uno ricercata tra i due formalismi non funziona conservando il termine proporzionale ad f_{NL} . Questa osservazione, in aggiunta alla scelta di non considerare il termine nella (5.2) proporzionale a β_2 , ci permette di ridefinire il coefficiente $a_{\ell m}$ totale come

$$\begin{aligned} a_{\ell m} &= a_{\ell m}^{\zeta_G} + c_{\ell m}^{\zeta} \\ &= a_{\ell m}^G + \beta_1 c_{\ell m}^F. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Si osservi che nello scrivere l'uguaglianza (5.14) sono stati definiti il termine lineare in ζ_G della (5.13)

$$a_{\ell m}^{\zeta_G} = -(4\pi)i^\ell \frac{3}{5} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_\ell(k) \zeta_G(\mathbf{k}), \quad (5.15)$$

ed il termine cubico in ζ_G della (5.13)

$$c_{\ell m}^{\zeta} = -i^\ell \frac{12\pi}{5} g_{NL} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_\ell(k) \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2). \quad (5.16)$$

L'uguaglianza (5.14) fornisce la corrispondenza uno ad uno tra i coefficienti presenti nell'espansione (5.12) in termini del filtro utilizzato ed i coefficienti $a_{\ell m}^{\zeta_G}$ e $c_{\ell m}^{\zeta}$ espressi in termini della (5.7). Dunque, per proseguire, è indispensabile andare ad esplicitare l'espressione per $c_{\ell m}^F$ in modo da poter legare i filtri utilizzati all'espressione del kernel integrale. Lo scopo di questo passaggio è, infatti, quello di ottenere un constraint sulla struttura della ζ proprio partendo dal modello fenomenologico considerato in [24].

Detto ciò, dall'espressione (5.12) possiamo ricavare $c_{\ell m}^F$ sfruttando la relazione di ortonormalità tra le armoniche sferiche ottenendo, quindi, l'uguaglianza

$$c_{\ell m}^F = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} T_G(\hat{\mathbf{n}}) T_F^2(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}). \quad (5.17)$$

Definiti

$$T_F^2(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^{2F} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.18)$$

e

$$T_G(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^G Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.19)$$

otteniamo, per sostituzione diretta,

$$c_{\ell m}^F = \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2}} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} a_{\ell_1 m_1}^G Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) a_{\ell_2 m_2}^{2F} Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}). \quad (5.20)$$

Arrivati a questo punto occorre determinare la relazione tra i coefficienti $a_{\ell m}^F$ e $a_{\ell m}^{2F}$. Per farlo osserviamo che, poiché vale

$$T_F^2(\hat{\mathbf{n}}) = T_F(\hat{\mathbf{n}})T_F(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2}} a_{\ell_1 m_1}^F a_{\ell_2 m_2}^F Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.21)$$

dalla (5.18) segue

$$a_{\ell m}^{2F} = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2}} a_{\ell_1 m_1}^F a_{\ell_2 m_2}^F Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (5.22)$$

Sostituendo quanto trovato nella (5.20) e sfruttando la relazione (5.4) in aggiunta alla condizione di ortonormalità tra le armoniche sferiche ed alla relazione

$$\sum_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}') Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta^{(3)}(\hat{\mathbf{n}}' - \hat{\mathbf{n}}), \quad (5.23)$$

è possibile ottenere, dopo pochi passaggi, l'espressione finale di $c_{\ell m}^F$ in termini della funzione finestra

$$\begin{aligned} c_{\ell m}^F &= \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} a_{\ell_1 m_1}^G a_{\ell_2 m_2}^G a_{\ell_3 m_3}^G W_{\ell_2} W_{\ell_3} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{\mathbf{n}}) \\ &= \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} a_{\ell_1 m_1}^G a_{\ell_2 m_2}^G a_{\ell_3 m_3}^G W_{\ell_2} W_{\ell_3} \mathcal{B}_{\ell m}^{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

dove

$$\mathcal{B}_{\ell m}^{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3} = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (5.25)$$

Ritorniamo adesso alla espressione (5.13) che invece parte dalla perturbazione inflazionaria ζ . In particolare sfruttando la relazione (5.16), l'uguaglianza (5.14) e ridefinendo gli indici nella sommatoria otteniamo la relazione

$$\begin{aligned}
c_{\ell m}^{\zeta} &= -g_{NL} \frac{12\pi i^{\ell}}{5} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_{\ell}(k) \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \\
&= \beta_1 \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} a_{\ell_1 m_1}^G a_{\ell_2 m_2}^G a_{\ell_3 m_3}^G W_{\ell_2} W_{\ell_3} \mathcal{B}_{\ell m}^{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3} \\
&= \beta_1 \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} a_{\ell_1 m_1}^G a_{\ell_2 m_2}^G a_{\ell_3 m_3}^G W_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3} \\
&= \beta_1 c_{\ell m}^F,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

dove, per semplicità di notazione, è stato definito

$$W_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3} = W_{\ell_2} W_{\ell_3} \mathcal{B}_{\ell m}^{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}. \tag{5.27}$$

Quello che vogliamo fare adesso è cercare di riesprimere i coefficienti $a_{\ell m}$ in termini della perturbazione ζ in “real-space”. Questo passaggio viene fatto principalmente per due motivi. Il primo è che, come vedremo, risulta più semplice trovare la relazione tra kernel integrale \mathcal{W} ed i filtri utilizzati. Il secondo motivo è che questo passaggio comporta un notevole vantaggio dal punto di vista computazionale nel caso di simulazioni numeriche [17]. In particolare, partendo dalla (2.19), possiamo osservare che

$$\begin{aligned}
a_{\ell m} &= -4\pi i^{\ell} \frac{3}{5} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_{\ell}(k) \zeta(\mathbf{k}) \\
&= -4\pi i^{\ell} \frac{3}{5} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) D_{\ell}(k) \int d^3 \mathbf{x} \zeta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}},
\end{aligned} \tag{5.28}$$

da cui, sviluppando l’onda piana in armoniche sferiche come nella (2.16), si ottiene

$$\begin{aligned}
a_{\ell m} &= -\frac{i^{\ell} 3(4\pi)^2}{5} \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 D_{\ell}(k) \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} \sum_{\ell' m'} (-i)^{\ell'} j_{\ell}(kr) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \zeta(\mathbf{x}) \\
&= -\frac{6}{5\pi} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^{\infty} dr r^2 \int_0^{\infty} dk k^2 j_{\ell}(kr) D_{\ell}(k) \zeta(r, \hat{\mathbf{n}}) \\
&= -\frac{6}{5\pi} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^{\infty} dr r^2 \Delta_{\ell}(r) \zeta(r, \hat{\mathbf{n}}).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Si osservi che nell’equazione ottenuta è stato effettuato il cambio da coordinate cartesiane a coordinate sferiche $\mathbf{x} = (r, \hat{\mathbf{n}})$ ed è stata definita, come in [17], la funzione di trasferimento nello spazio reale

$$\Delta_\ell(r) = \int_0^\infty dk k^2 j_\ell(kr) D_\ell(k). \quad (5.30)$$

Dalla relazione (5.29) è evidente il vantaggio computazionale. Infatti è possibile definire lo sviluppo armonico

$$\zeta(r, \mathbf{n}) = \sum_{\ell m} \zeta_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.31)$$

e, sfruttando l'ortogonalità delle armoniche sferiche, ottenere la relazione [17]

$$a_{\ell m} = -\frac{6}{5\pi} \int_0^\infty dr r^2 \Delta_\ell(r) \zeta_{\ell m}(r). \quad (5.32)$$

Generando da questa i coefficienti $a_{\ell m}$ per il campo di temperatura del CMB, è possibile calcolare ed immagazzinare tutte le funzioni Δ_ℓ per tutte le simulazioni caratterizzate dallo stesso modello cosmologico ed effettuare una trasformata di Fourier solo una volta. Lavorando in “Fourier-space”, invece, occorrerebbe passare dallo spazio di Fourier allo spazio reale più volte per ottenere una sola mappa del CMB.

Chiarito uno dei vantaggi nel passare in “real-space” possiamo tornare al nostro scopo principale, ovvero completare la corrispondenza tra il modello fenomenologico (5.2) e la perturbazione di curvatura ζ . Per farlo occorre ritornare alla relazione (5.29) e sfruttare la definizione della ζ generalizzata (5.6). Dunque, partendo dall'equazione (5.24), utilizzando l'uguaglianza (5.29) che esprime i coefficienti $a_{\ell m}$ in funzione della $\zeta(\mathbf{x})$, otteniamo

$$\begin{aligned} \beta_1 c_{\ell m}^F &= -\beta_1 \left(\frac{6}{5\pi} \right)^3 \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} W_{\ell_1 \dots \ell_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}_1} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \int_0^\infty dr_1 r_1^2 \Delta_{\ell_1}(r_1) \zeta_G(\mathbf{x}_1) \\ &\quad \times \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}_2} Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}_2) \int_0^\infty dr_2 r_2^2 \Delta_{\ell_2}(r_2) \zeta_G(\mathbf{x}_2) \\ &\quad \times \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}_3} Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_3) \int_0^\infty dr_3 r_3^2 \Delta_{\ell_3}(r_3) \zeta_G(\mathbf{x}_3) \\ &= -\beta_1 \left(\frac{6}{5\pi} \right)^3 \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} W_{\ell_1 \dots \ell_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3} \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \Delta_{\ell_1}(r_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}_2) \Delta_{\ell_2}(r_2) \\ &\quad \times Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_3) \Delta_{\ell_3}(r_3) \zeta_G(\mathbf{x}_1) \zeta_G(\mathbf{x}_2) \zeta_G(\mathbf{x}_3). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Arrivati a questo punto, inserendo la definizione (5.6) della $\zeta(\mathbf{x})$ nella relazione (5.29), è possibile ottenere l'espressione del termine cubico $c_{\ell m}^\zeta$ in termini della ζ in “real-space”. In particolare si ha

$$\begin{aligned}
a_{lm} = & -\frac{6}{5\pi} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^\infty dr r^2 \Delta_\ell(r) \left\{ \zeta_G(\mathbf{x}) + \right. \\
& \left. + g_{NL} \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j \mathcal{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \zeta_G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_3) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Ne segue, effettuando il cambio di coordinate $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i - \mathbf{x}$, che il termine cubico $c_{\ell m}^\zeta$ può essere scritto come

$$\begin{aligned}
c_{\ell m}^\zeta = & -g_{NL} \frac{6}{5\pi} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^\infty dr r^2 \Delta_\ell(r) \\
& \times \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j \mathcal{W}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3) \zeta_G(\mathbf{x}_1) \zeta_G(\mathbf{x}_2) \zeta_G(\mathbf{x}_3),
\end{aligned} \tag{5.35}$$

dove $\tilde{\mathbf{x}}_i \equiv \mathbf{x}_i - \mathbf{x}$. Ricordiamo che dall'uguaglianza (5.14) segue che

$$c_{\ell m}^\zeta = \beta_1 c_{\ell m}^F, \tag{5.36}$$

ovvero, sfruttando le relazioni (5.33) e (5.35)

$$\begin{aligned}
& -\beta_1 \left(\frac{6}{5\pi} \right)^3 \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} W_{\ell_1 \dots \ell_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3} \prod_{j,q=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j Y_{\ell_q m_q}^*(\hat{\mathbf{n}}_j) \Delta_{\ell_j}(r_j) \zeta_G(\mathbf{x}_j) = \\
& = -g_{NL} \frac{6}{5\pi} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^\infty dr r^2 \Delta_\ell(r) \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j \mathcal{W}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3) \zeta_G(\mathbf{x}_j).
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Confrontando i due lati dell'uguaglianza possiamo supporre¹ che il kernel integrale abbia la forma²

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3) = & \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \Delta_{\ell_1}(r_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}_2) \Delta_{\ell_2}(r_2) \\
& \times Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_3) \Delta_{\ell_3}(r_3) F^{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{5.38}$$

dove la funzione $F^{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}(\mathbf{x})$ introdotta è la parte del kernel legata al tipo di filtro che stiamo utilizzando. La relazione ottenuta è frutto dei limiti

¹L'espressione (5.38) risulta un guess in quanto non è detto che gli integrandi siano uguali, nonostante valga l'uguaglianza tra gli integrali.

²È chiaro che deve valere anche $g_{NL} = \beta_1 \left(\frac{6}{5\pi} \right)^2$.

imposti dal procedimento utilizzato in quanto siamo partiti dai coefficienti $a_{\ell m}$ del campo di temperatura fenomenologico, il quale risulta legato a ciò che osserviamo sulla superficie di ultimo scattering, per arrivare a dei coefficienti che coinvolgono un'espressione primordiale della perturbazione di curvatura $\zeta(\mathbf{x})$. Il risultato è che la convoluzione spaziale “primordiale” espressa dal kernel integrale \mathcal{W} si riduce ad una convoluzione angolare quando limitiamo le osservazioni ad una distanza fissata r . Questo spiega anche la presenza delle tre funzioni di trasferimento $\Delta_{\ell_i}(r_i)$ nell'espressione della ζ , in quanto, una volta fissata una distanza osservativa r , la fisica contenuta all'interno del kernel \mathcal{W} deve essere in qualche modo “trasferita” verso l'osservatore.

Detto ciò, allora, la relazione da soddisfare risulta

$$\int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^\infty dr r^2 \Delta_\ell(r) F^{\ell_1 \dots \ell_3}(\mathbf{x}) = W_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3}. \quad (5.39)$$

Espandendo la $F^{\ell_1 \dots \ell_3}(\mathbf{x})$ in armoniche sferiche, ovvero

$$F^{\ell_1 \dots \ell_3}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell_4 m_4} F_{\ell_4 m_4}^{\ell_1 \dots \ell_3}(r) Y_{\ell_4 m_4}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.40)$$

ed inserendo tale sviluppo nella (5.39) otteniamo

$$\int_0^\infty dr r^2 \Delta_\ell(r) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots \ell_3}(r) = W_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3}. \quad (5.41)$$

Questa relazione può essere “semplificata” utilizzando l'approssimazione di Sachs-Wolfe, ovvero utilizzando come funzione di trasferimento [2] [11]

$$D_\ell(k) = \frac{1}{3} j_\ell(kr_{dec}). \quad (5.42)$$

L'approssimazione utilizzata deriva dall'aver osservato che il contributo principale della funzione di trasferimento proviene proprio dalla superficie di ultimo scattering in quanto le anomalie studiate risultano presenti principalmente su grandi scale angolari (bassi ℓ). Detto ciò segue che, inserendo tale ipotesi nell'espressione (5.30), la funzione di trasferimento $\Delta_\ell(r)$ diviene

$$\begin{aligned} \Delta_\ell(r) &= \int_0^\infty dk k^2 j_\ell(kr) D_\ell(k) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty dk k^2 j_\ell(kr) j_\ell(kr_{dec}) \\ &= \frac{\pi}{6} \frac{1}{r^2} \delta(r - r_{dec}), \end{aligned} \quad (5.43)$$

dove è stata sfruttata la relazione tra le funzioni di Bessel sferiche

$$\int_0^\infty dk k^2 j_\ell(ka) j_\ell(kb) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a^2} \delta(a-b). \quad (5.44)$$

Segue per l'espressione (5.41) la forma

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 \Delta_\ell(r) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r) &= \frac{\pi}{6} \int_0^\infty dr \delta(r - r_{dec}) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r) \\ &= \frac{\pi}{6} F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r_{dec}), \end{aligned} \quad (5.45)$$

ovvero

$$F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r_{dec}) = \frac{6}{\pi} W_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3}. \quad (5.46)$$

L'espressione ottenuta sembra limitare le informazioni a nostra disposizione sulla perturbazione di curvatura ζ alla superficie di ultimo scattering. In realtà, però, questa non è una vera e propria limitazione. Infatti ricostruire la ζ sulla superficie di ultimo scattering è il risultato migliore che possiamo ottenere partendo dalle osservazioni del CMB. Questo è dovuto al fatto che le scale fuoriuscite dall'orizzonte cosmologico durante l'inflazione e che rientrano nell'Universo osservabile prima del disaccoppiamento lasciano un "impronta" sulla superficie di ultimo scattering. Successivamente, questa "impronta", deve essere trasferita verso l'osservatore. Allora, se come mostrato in [17] il contributo principale della funzione di trasferimento $\Delta_{\ell_i}(r_i)$ proviene dalla superficie di ultimo scattering, è chiaro che la relazione (5.46) risulta un ottimo punto di partenza per fornire dei constraints per i modelli inflazionari. Infatti, *M. Liguori, S. Matarrese e L. Moscardini* in [17] osservano che la forma di $\Delta_\ell(r)$ suggerisce di generare solo i multipoli $\zeta_{\ell m}(r)$ corrispondenti agli intervalli di ℓ ed r riferiti alla superficie di ultimo scattering. Dunque i risultati che stiamo ottenendo si muovono nella stessa direzione di [17]. Nonostante quanto osservato, però, è possibile comunque invocare le ipotesi di omogeneità ed isotropia statistica di modo da poter ragionevolmente estendere quanto ricavato ad una qualsiasi distanza r .

Fatte tali osservazioni, inserendo la relazione (5.46) all'interno della (5.38) valutata sulla superficie di ultimo scattering ed andando a sostituire quanto ottenuto nella (5.6) è possibile "ricostruire" la ζ sulla superficie di ultimo scattering. Il risultato di questi passaggi è espresso dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}')|_{\mathcal{O}(g_{NL})} &= g_{NL} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \Delta_{\ell_1}(r_1) \dots Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_3) \Delta_{\ell_3}(r_3) \\ &\quad \times F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{x}') \zeta_G(\mathbf{x}_1) \zeta_G(\mathbf{x}_2) \zeta_G(\mathbf{x}_3), \end{aligned} \quad (5.47)$$

dove l'apice ' indica che la parte radiale è valutata sulla superficie di ultimo scattering, ovvero $\mathbf{x}' \equiv (r_{dec}, \hat{\mathbf{n}})$. È utile osservare come questo termine di $\mathcal{O}(g_{NL})$ vada a zero per $\ell_2, \ell_3 > 50$ come conseguenza della presenza dei filtri W_{ℓ_2} ed W_{ℓ_3} nella (5.27). Dunque, espandendo nello spazio armonico $\zeta_G(\mathbf{x}_2)$ e $\zeta_G(\mathbf{x}_3)$ come nella (5.31) e sfruttando la relazione di ortonormalità delle armoniche sferiche, otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}')|_{\mathcal{O}(g_{NL})} = g_{NL} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} \int d^3 \mathbf{x}_1 Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \Delta_{\ell_1}(r_1) \prod_{j=2}^3 \int dr_j r_j^2 \Delta_{\ell_j}(r_j) \Delta_{\ell_3}(r_3) \\ \times F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{x}') \zeta_G(\mathbf{x}_1) \zeta_{\ell_2 m_2}^G(r_2) \zeta_{\ell_3 m_3}^G(r_3), \end{aligned} \quad (5.48)$$

la quale ci assicura che i contributi dovuti proprio a $\zeta_G(\mathbf{x}_2)$ e $\zeta_G(\mathbf{x}_3)$ svaniscono per $\ell_2, \ell_3 > 50$. Per quanto osservato prima, l'ipotesi di omogeneità ed isotropia statistica permette di assumere che i contributi primordiali dovuti alla convoluzione di $\zeta_G(\mathbf{x}_1)$ con $\zeta_G(\mathbf{x}_2)$ e $\zeta_G(\mathbf{x}_3)$ corrispondano ad una convoluzione tra due perturbazioni che (in una data shell sferica di raggio r) ricevono contributo solo da scale angolari grandi, con una perturbazione di curvatura che invece riceve contributi da tutte le scale angolari.

Per concludere questa parte si osservi ancora che

$$\begin{aligned} F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{x}') &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}} F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\ell m} i^\ell \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) j_\ell(r_{dec} k) F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\ell m} \frac{i^\ell}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 j_\ell(r_{dec} k) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(k) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \end{aligned} \quad (5.49)$$

ovvero

$$F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r_{dec}) = \frac{i^\ell}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 j_\ell(r_{dec} k) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(k). \quad (5.50)$$

In generale la relazione inversa di questa espressione è data da

$$F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(k) = (-i)^\ell \int_0^\infty dr r^2 j_\ell(rk) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r). \quad (5.51)$$

Si osservi che questa inversione per r_{dec} non risulta ben definita. Però, invocando le condizioni di omogeneità ed isotropia statistica, è possibile ricostruire $F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(k)$ partendo dall'espressione che lega $F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r_{dec})$ con le funzioni di filtro. Questa osservazione motiva anche la scelta di aver riespresso i coefficienti $a_{\ell m}$ in termini della ζ in "real-space".

5.3 Aggiunta di un ulteriore filtro g_ℓ

Fino a questo punto non abbiamo mai considerato il termine $\beta_2 T_G(\hat{\mathbf{n}}) T_F^4(\hat{\mathbf{n}})$ nella (5.2). Come abbiamo già osservato, in termini di perturbazione di curvatura, questo termine corrisponde ad una funzione di correlazione a 6-punti il che rende complicato trovare un “matching” tra il modello fenomenologico presentato ed un possibile “toy-model” inflazionario. Per ovviare al problema è stato osservato che, inserendo un ulteriore filtro nell’espressione di $c_{\ell m}^F$, è possibile ottenere delle mappe di temperatura che riproducono in ottimo accordo i dati osservativi relativi alle anomalie [24]. In particolare si ha che l’uguaglianza (5.26) diviene

$$c_{\ell m}^\zeta = \beta_1 c_{\ell m}^F g_\ell, \quad (5.52)$$

dove $c_{\ell m}^F$ è il coefficiente dell’espansione armonica già ricavato nella (5.24), mentre g_ℓ è un secondo filtro “irregolare” che va a zero per $\ell \gtrsim 1000$. Questo implica che la relazione (5.27) debba essere sostituita dalla

$$\bar{W}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3} = g_\ell W_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3}, \quad (5.53)$$

in modo da ottenere, ripetendo gli stessi passaggi fatti nella sezione precedente, la relazione

$$F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r_{dec}) = \frac{6}{\pi} \bar{W}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3}^{\ell m \ell_2 \ell_3}. \quad (5.54)$$

La relazione ottenuta ci dice che il termine di $\mathcal{O}(g_{NL})$ va a zero sia quando $\ell_2, \ell_3 > 50$ sia quando $\ell \gtrsim 1000$. In particolare è utile osservare che, ricostruendo il kernel come nella (5.38) e usando la (5.40)), le funzioni di trasferimento Δ_{ℓ_2} e Δ_{ℓ_3} si riducono a delle delta di Dirac, valendo l’approssimazione di SW.

Infine possiamo osservare che dalla (5.6) e dalla (5.38) segue

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k})|_{\mathcal{O}(g_{NL})} &= g_{NL} \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j d^3 \mathbf{x} \prod_{q=1}^3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_q}{(2\pi)^3} \mathcal{W}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \\
&\quad \times e^{i\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{k}_3} e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k}_3) \\
&= g_{NL} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j d^3 \mathbf{x} \prod_{q=1}^3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} e^{i\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{k}_3} e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{x}) \\
&\quad \times Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \Delta_{\ell_1}(r_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}_2) \Delta_{\ell_2}(r_2) Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_3) \Delta_{\ell_3}(r_3) \\
&\quad \times \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k}_3) \\
&= g_{NL} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} \sum_{\substack{L_i M_i \\ i=1,2,3}} i^{L_1+L_2+L_3} \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j \prod_{q=1}^3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_q}{(2\pi)^3} F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{k}) \\
&\quad \times Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \Delta_{\ell_1}(r_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}_2) \Delta_{\ell_2}(r_2) Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_3) \Delta_{\ell_3}(r_3) \\
&\quad \times Y_{L_1 M_1}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) Y_{L_1 M_1}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{L_2 M_2}^*(\hat{\mathbf{k}}_2) Y_{L_2 M_2}(\hat{\mathbf{n}}_2) Y_{L_3 M_3}^*(\hat{\mathbf{k}}_3) Y_{L_3 M_3}(\hat{\mathbf{n}}_3) \\
&\quad \times j_{L_1}(k_1 r_1) j_{L_2}(k_2 r_2) j_{L_3}(k_3 r_3) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k}_3), \tag{5.55}
\end{aligned}$$

ovvero, sfruttando l'ortonormalità tra le armoniche sferiche, la definizione (5.30) di Δ_{ℓ_i} e la relazione (5.44),

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k})|_{\mathcal{O}(g_{NL})} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 g_{NL} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} i^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} \prod_{q=1}^3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_q}{(2\pi)^3} F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{k}) \zeta_G(\mathbf{k}_q) \\
&\quad \times Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) D_{\ell_1}(k_1) \cdots Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{k}}_3) D_{\ell_3}(k_3). \tag{5.56}
\end{aligned}$$

È utile osservare che

$$\begin{aligned}
F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{k}) &= \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\ell m} (-i)^\ell \int d^3 \mathbf{x} j_\ell(rk) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\ell m} (-i)^\ell \int_0^\infty dr r^2 j_\ell(rk) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(r) \\
&= \sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(k), \tag{5.57}
\end{aligned}$$

e che in approssimazione SW

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k})|_{\mathcal{O}(g_{NL})} &= \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 g_{NL} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} i^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} \prod_{q=1}^3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_q}{(2\pi)^3} F^{\ell_1 \dots m_3}(\mathbf{k}) \zeta_G(\mathbf{k}_q) \\
&\quad \times Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) j_{\ell_1}(r_{dec} k_1) \cdots Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{k}}_3) j_{\ell_3}(r_{dec} k_3). \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Va osservato che la trasformata di Fourier del kernel integrale, partendo dalla relazione

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k})|_{\mathcal{O}(g_{NL})} &= g_{NL} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} \prod_{j=1}^3 \int d^3\mathbf{x}_j \mathcal{W}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}) \\
&\quad \times \prod_{q=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{k}_q}{(2\pi)^3} e^{i\sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{k}_j} \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k}_3) \quad (5.59) \\
&= g_{NL} \prod_{q=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{k}_q}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k}_3),
\end{aligned}$$

risulta

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} \prod_{j=1}^3 \int d^3\mathbf{x}_j e^{i\sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{k}_j} \mathcal{W}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3). \quad (5.60)$$

Sfruttando la relazione (5.58), si ottiene

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i=1,2,3}} \sum_{\ell m} i^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} F_{\ell m}^{\ell_1 \dots m_3}(k) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad \times Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) D_{\ell_1}(k_1) \cdots Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{k}}_3) D_{\ell_3}(k_3). \quad (5.61)
\end{aligned}$$

5.4 Perturbazione di curvatura ζ_G filtrata

Nel paragrafo precedente abbiamo affrontato un metodo per cercare di ricostruire la perturbazione di curvatura ζ partendo dalla mappa fenomenologica del campo di temperatura (5.2). Il procedimento seguito, come abbiamo più volte puntualizzato, ha delle “limitazioni” intrinseche. Infatti, partendo dai coefficienti $a_{\ell m}$ del campo di temperatura filtrato, risulta indispensabile imporre che ciò che osserviamo sia “trasferito” dalla superficie di ultimo scattering all’osservatore.

In questa sezione quello che vogliamo fare, invece, è ricostruire la perturbazione ζ riscalandola direttamente in “Fourier-space”. Questo procedimento, differentemente dal precedente, ci permette di aggirare il “problema” di dover valutare l’espressione finale sulla superficie di ultimo scattering. Per ottenere un tale risultato possiamo definire due filtri analoghi ai filtri W_ℓ e g_ℓ incontrati precedentemente, però questa volta tali da riscaldare la ζ_G (e non T_G) in “Fourier-space” (e non nello spazio armonico). Dunque partendo da $\zeta_G(\mathbf{k})$ possiamo definire un $\zeta_G^{F_1}(\mathbf{k})$ come

$$\zeta_{F_1}(\mathbf{k}) = W(k)\zeta_G(\mathbf{k}), \quad (5.62)$$

dove $W(k)$ filtra le piccole scale³. Ritornando nello spazio reale, quindi, otteniamo

$$\zeta_{F_1}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \zeta_G(\mathbf{k}) W(k). \quad (5.63)$$

Per “mimare” quanto fatto nella sezione precedente con gli $a_{\ell m}$ dobbiamo prendere il campo (5.63), quadrarlo, moltiplicarlo per $\zeta_G(\mathbf{x})$, ottenendo $\zeta_G \zeta_{F_1}^2$. Poi si deve ritronare nello spazio di Fourier e moltiplicare per un secondo filtro $G(k)$ che amplifica il contributo dovuto alle grandi scale⁴. Formalizzando quanto detto otteniamo

$$\begin{aligned} \zeta_{F_1}^{(3)}(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} \zeta_G(\mathbf{x}) \zeta_{F_1}^2(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} \prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{x}} W(k_1) W(k_2) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k}_3) \\ &= \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} W(k_1) W(k_2) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Arrivati a questo punto occorre moltiplicare quanto ottenuto per il secondo filtro $G(k)$ e quindi riscrivere

$$G(k) \zeta_{F_1}^{(3)}(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} W(k_1) W(k_2) G(k) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2) \zeta_G(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (5.65)$$

Confrontando questa espressione moltiplicata per g_{NL} con la (5.7), che riportiamo per completezza

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta_G(\mathbf{k}) + g_{NL} \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}_j}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\tilde{\mathbf{k}}_{12}) \zeta_G(\mathbf{k}_1) \zeta_G(\mathbf{k}_2), \quad (5.66)$$

otteniamo che in questo caso il kernel integrale assume la forma

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \equiv W(k_1) W(k_2) G(k). \quad (5.67)$$

³Questo filtro sarebbe l'equivalente del filtro W_ℓ introdotto precedentemente.

⁴Questo filtro sarebbe l'analogo del filtro g_ℓ introdotto precedentemente.

D'altronde noi conosciamo l'azione dei filtri e quindi sarebbe possibile dare un'interpretazione fisica a quanto trovato osservando che, rispetto all'espressione generale (5.7), in questo caso $G(k)$ amplifica il contributo delle grandi scale, mentre $W(k)$ filtra le piccole scale. Quindi filtrando direttamente la perturbazione di curvatura ζ_G siamo in grado di semplificare la forma del kernel integrale.

Dunque, in tutto questo capitolo, lo scopo principale è stato quello di trovare una corrispondenza “uno ad uno” tra la parte cubica della mappa del campo di temperatura (5.2) e la perturbazione di curvatura su ipersuperfici a densità uniforme ζ . Per raggiungere questo risultato è stato effettuato uno sviluppo integrale della ζ di modo da ottenere un'espressione generale della perturbazione di curvatura, in principio valida per qualunque modello inflazionario. Infatti, procedendo in questo modo, un generico modello inflazionario può essere ottenuto andando a selezionare un'opportuna “forma” per il kernel.

Nel caso particolare del modello presentato in [24], quanto trovato sembra indirizzare la ricerca di un possibile modello inflazionario che riproduca il campo di temperatura (5.2) verso quei modelli che presentano una non-Gaussianità di tipo non-locale. In particolare questo tipo di non-Gaussianità primordiale deve essere espressa mediante la convoluzione di tre perturbazioni di curvatura ζ , quindi all'ordine g_{NL} , i cui modi d'onda k devono avere una relazione tra loro ben precisa, come espresso dall'equazione (5.67). Il risultato principale, però, è stato quello di riuscire ad ottenere il legame tra filtri e kernel integrale attraverso la relazione (5.54). Questa relazione rappresenta un ottimo risultato in quanto, conoscendo l'azione dei filtri (quindi la loro struttura) è possibile risalire al tipo di convoluzione presente tra le perturbazioni di curvatura ζ_G , ovvero al tipo di non-Gaussianità primordiale. Dunque sia la relazione (5.54) che la relazione (5.67) rappresentano il primo passo verso la comprensione delle condizioni necessarie affinché un modello inflazionario riesca a riprodurre il modello fenomenologico proposto in [24].

Conclusioni

Il modello Λ CDM è in grado di spiegare, in ottimo accordo con i dati osservativi, lo stato attuale e l'evoluzione del nostro Universo. Tuttavia, come abbiamo visto nel Capitolo 1, per riprodurre l'Universo osservabile occorre imporre delle condizioni iniziali (*i.e.* perturbazioni di densità primordiali) con delle proprietà ben precise. Nonostante il modello Λ CDM non spieghi l'origine di queste condizioni iniziali esso risulta comunque il tassello fondamentale sulla quale si basa la cosmologia moderna.

Il “problema” delle condizioni iniziali è elegantemente risolto introducendo una fase primordiale inflazionaria. In questa fase, come abbiamo visto nella sezione 1.2, l'Universo subisce un'espansione accelerata guidata da un qualche campo primordiale (nei modelli più semplici a singolo campo scalare, il cosiddetto “inflaton”). Inoltre l'inflazione fornisce anche le condizioni necessarie per risolvere i “problemi” relativi al modello dell'Hot-Big-Bang, quali, per esempio, il “problema dell'orizzonte” ed il “problema della piattezza”. Proprio i successi dei modelli inflazionari nel comprendere e prevedere le condizioni iniziali dell'Universo primordiale hanno reso l'inflazione un ingrediente fondamentale per il Modello Cosmologico Standard, il cosiddetto modello Inflazione+ Λ CDM.

Nonostante i successi di tale modello, recentemente, sono stati rivelati alcuni comportamenti anomali nelle fluttuazioni del campo di temperatura del CMB [13] [38] [39]. Infatti l'analisi dei dati rilevati sia dal satellite WMAP che dal satellite Planck ha evidenziato la presenza di misure non statisticamente consistenti (circa 3σ) con il best-fit basato sul modello Λ CDM. Benché la natura “a posteriori” della statistica renda difficile l'interpretazione, le anomalie osservate risultano abbastanza significative da meritare attenzione. Infatti l'origine di natura sistematica sembrerebbe essere esclusa (benché la cosa non si possa escludere a priori) in quanto queste anomalie sono state rilevate da due satelliti diversi (e quindi aventi sistematiche differenti). Inoltre a bordo del satellite Planck sono presenti, a sua volta, due strumenti differenti, HFI e LFI, il che estende la rivelazione delle anomalie a ben tre strumentazioni differenti. Dunque, nel Capitolo 3, abbiamo soffermato l'attenzione sulle anomalie principali presentando il tipo di statistica effettuata per rivelarle.

La prima analizzata è stata la cosiddetta *asimmetria tra gli emisferi* (HPA).

Questa asimmetria consiste nel ritrovare, nel range di multipoli $\ell = 2-40$ uno spettro di potenza calcolato per un emisfero, centrato in $(l, b) = (237^\circ, -20^\circ)$ in coordinate Galattiche, maggiore rispetto a quello calcolato nell'emisfero opposto [39].

La seconda anomalia analizzata è stata la cosiddetta *asimmetria angolare nella distribuzione dello spettro di potenza*. Per visualizzare questa anomalia è stato suddiviso il cielo in diverse regioni e per ognuna di queste è stato calcolato il corrispettivo spettro di potenza. Quello che si trova a seguito di tale operazione è una certa correlazione angolare tra diversi dipoli ottenuti dai diversi spettri di potenza associati alle regioni considerate. L'asimmetria angolare risulta maggiormente evidente quando si considera come multipolo massimo $\ell_{max} \sim 600$ [39].

Infine è stata analizzata la cosiddetta *modulazione di dipolo* (DM). Questa consiste nel riuscire a parametrizzare la mappa del campo di temperatura con una modulazione di dipolo, ovvero

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = (1 + A\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}) \left. \frac{\Delta T}{T} \right|_{iso}(\hat{\mathbf{n}}),$$

dove A è l'ampiezza del dipolo, $\Delta T/T(\hat{\mathbf{n}})|_{iso}$ è la componente isotropa del campo di temperatura e \mathbf{p} è la direzione del dipolo. Infatti, effettuando un fit dei dati della CMB con un campo di temperatura di questo tipo, il risultato dell'operazione mostra un'ampiezza per la modulazione pari a $A = 0.066 \pm 0.021$ su grandi scale angolari con direzionalità $(l, b) \simeq (212^\circ, -13^\circ)$ e range di validità statistica di 3.3σ [39].

L'osservazione di queste diverse anomalie risulta essere in conflitto con le ipotesi di omogeneità ed isotropia statistica. Però l'analisi dati effettuata per rivelarle non fornisce alcuna spiegazione sulla loro natura, la quale potrebbe essere di origine cosmologica o astrofisica (o, anche se appare ormai difficile, potrebbe essere ancora di natura sistematica-strumentale). In questo lavoro di tesi ci siamo soffermati ad analizzare quella che sembrerebbe essere la più intrigante, ovvero un'origine di natura cosmologica comune a tutte le anomalie. In particolare, nel Capitolo 4, abbiamo soffermato la nostra attenzione su quei modelli che tentano di darne una spiegazione partendo dalla fase inflazionaria attraversata dall'Universo.

La prima classe di modelli considerata è stata quella che fornisce una spiegazione alle anomalie partendo da una non-Gaussianità primordiale. In una prima sezione introduttiva, la 4.1, abbiamo mostrato come ottenere la HPA partendo da una non-Gaussianità primordiale di tipo locale [26]. Successivamente abbiamo considerato modelli concreti che producano questo tipo di non-Gaussianità. In particolare nella sezione 4.1.1 abbiamo presentato il modello più semplice basato solo sulla presenza dell'inflatone durante l'inflazione [6]. La non-Gaussianità in questo modello deriva dall'accoppiamento delle perturbazioni nell'inflatone con perturbazioni aventi lunghezza

d’onda maggiore del raggio di Hubble oggi. Il risultato ottenuto, però, è l’impossibilità di ottenere una HPA consistente con le osservazioni utilizzando come singolo campo l’inflatone. Come conseguenza abbiamo presentato, in un sottoparagrafo della sezione 4.1.1, i modelli inflazionari a due campi, l’inflatone ed il curvatone [6]. Successivamente, poiché l’ampiezza della HPA sembra mostrare una dipendenza di scala, nelle sezioni 4.1.2 e 4.2 abbiamo presentato i modelli aventi una non-Gaussianità primordiale non-locale. In particolare nella sezione 4.2 abbiamo presentato il modello analizzato in [56] dove l’idea base è vedere come “risponde” lo spettro di potenza alla presenza di perturbazioni di grande lunghezza d’onda. Nel dettaglio è stata ricollegata la risposta dello spettro di potenza al bispettro inflazionario avente dipendenza di scala. Successivamente è stata ricavata la relazione che lega la risposta dello spettro di potenza con l’ampiezza della modulazione di dipolo del campo di temperatura. Il risultato ottenuto mostra come, anche in questa classe di modelli, l’inflazione a singolo campo (solo l’inflatone o solo il curvatone) non riproduca l’asimmetria desiderata [56]. Dunque, proprio per far fronte a questo risultato, nella sezione 4.2.2 è stato presentato il “toy-model” a due campi proposto in [56] basato sulla stessa idea del precedente.

I modelli che coinvolgono una non-Gaussianità primordiale, però, non sono gli unici proposti in letteratura per spiegare l’HPA. Infatti una possibile spiegazione a questa anomalia la si può trovare in [25] ed è riportata nella sezione 4.3. Qui l’idea base è che l’HPA derivi dalla produzione di particelle durante l’inflazione. In particolare la produzione di queste particelle viene modulata da un ulteriore campo avente una modulazione di dipolo orientata lungo la stessa direzione della DM. In questo modo si ottiene una diversa quantità di particelle prodotta nei due emisferi, il che spiega come lo spettro di potenza sia maggiore in un emisfero piuttosto che nell’altro.

Infine, nella sezione 4.4, è stato presentato il lavoro [46]. In questo modello l’inflazione viene guidata da due campi scalari accoppiati. In particolare uno dei due (quello identificato con l’inflatone) presenta un termine cinetico non standard. A causa della struttura di questo termine cinetico il modello presenta una velocità del suono che varia spazialmente con l’evoluzione del background. È questo risultato che spinge gli autori in [46] a considerare un formalismo δN generalizzato in cui compare la velocità del suono. Utilizzando questo formalismo e calcolando lo spettro di potenza è possibile ottenere un’espressione per l’ampiezza della DM in termini della velocità del suono e di alcuni parametri di slow-roll.

Nel Capitolo 5 conclusivo, invece, abbiamo preso in considerazione un diverso modello fenomenologico che cerca di riprodurre alcune delle diverse anomalie riscontrate parametrizzando il campo di temperatura con una modulazione diversa da quella di dipolo [24]. In particolare, la mappa fenomenologica del campo di temperatura è stata costruita filtrando, nello spazio armonico, la sua parte Gaussiana di modo da considerare solo le scale corrispondenti a $\ell < 50$. Successivamente questa mappa filtrata è stata utilizzata

per costruire termini del terzo e del quinto ordine da aggiungere alla componente Gaussiana del campo di temperatura originario. Una volta presentato il modello, nella sezione 5.2 siamo andati alla ricerca di un legame tra il campo di temperatura alla base del modello fenomenologico e la perturbazione di curvatura ζ che viene generata durante l'inflazione. Questo passaggio è stato essenziale. Infatti occorre, in prima istanza, capire se esiste un possibile modello inflazionario capace di riprodurre il modello fenomenologico presentato in [24]. Allora è indispensabile trovare la corrispondenza uno ad uno tra l'osservabile e la perturbazione di curvatura ζ stessa. Solo in questo modo è possibile proporre dei modelli inflazionari specifici che portino alle predizioni del modello fenomenologico proposto, e poterli quindi vincolare con le osservazioni. Per raggiungere un tale risultato abbiamo effettuato uno sviluppo integrale della perturbazione di curvatura ζ arrestandoci all'ordine di non-Gaussianità primordiale g_{NL} corrispondente a non-linearità cubiche nella perturbazione di curvatura. In questo modo abbiamo ottenuto la perturbazione di curvatura più generale possibile che presenti una non-Gaussianità di tipo non-locale. La generalità della ζ è dettata dalla generalità del kernel integrale che compare nello sviluppo. Procedendo in questo modo abbiamo ottenuto un'espressione che lega il kernel alle funzioni di filtro utilizzate nel modello fenomenologico presentato in [24]. Questa relazione rappresenta un ottimo risultato in quanto, conoscendo l'azione dei filtri (quindi la loro struttura) è possibile risalire al tipo di non-Gaussianità primordiale. Dunque la relazione trovata rappresenta il primo passo verso la comprensione delle condizioni necessarie affinché un modello inflazionario riesca a riprodurre il modello fenomenologico proposto in [24]. Quello che bisognerebbe fare, in futuro, è entrare nel dettaglio di un modello inflazionario che generi il kernel della perturbazione di curvatura ζ soggetto ai vincoli dettati dalla relazione che abbiamo trovato nel presente lavoro.

Appendice A

A.1 Direzione primordiale privilegiata

Il modello proposto da *L. Ackerman, S. M. Carroll e M. B. Wise* ([19]) consiste nel considerare una possibile rottura della simmetria per rotazioni durante il periodo inflazionario. Questa rottura di simmetria può essere ottenuta considerando la presenza di un vettore che punti nella direzione “privilegiata” $\hat{\mathbf{n}}$ durante l’inflazione stessa. In particolare, assumendo la simmetria per parità $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, all’ordine più basso la non invarianza per rotazioni ha come effetto quello di cambiare lo spettro di potenza conferendogli una dipendenza del tipo $P(k) \rightarrow P(\mathbf{k})$, dove [19]

$$P(\mathbf{k}) = P(k) \left[1 + g(k) \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.1})$$

Si osservi che la relazione (A.1) risulta la naturale estensione della classe di modelli statisticamente anisotropi considerata fino ad ora. Infatti il tipo di modulazione presentata nello spettro di potenza risulta una modulazione di quadrupolo. Dunque riuscire a determinare dei limiti sui possibili valori dell’ampiezza $g(k)$ permette di fornire dei constraints sui modelli inflazionari statisticamente anisotropi [39].

Per produrre l’effetto desiderato possiamo supporre che durante l’inflazione l’invarianza per rotazioni venga rotta dalla presenza di un quadrivettore di *tipo-spazio* u^μ avente lunghezza invariante

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2. \quad (\text{A.2})$$

Possiamo supporre che il vettore u^μ sia non nullo solo durante l’inflazione, ovvero nell’intervallo temporale $0 < t < t_f$, dove t_f caratterizza la fine dell’inflazione. Inoltre, per semplicità, possiamo trascurare l’accoppiamento tra u^μ ed altri campi. In questo modo la dinamica è completamente caratterizzata dall’azione [19]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R - \rho_\Lambda + \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_\chi \right), \quad (\text{A.3})$$

dove l'espressione esplicita delle due Lagrangiane è

$$\mathcal{L}_\chi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{L}_u = -\beta_1\nabla^\mu u^\sigma\nabla_\mu u_\sigma - \beta_2(\nabla_\mu u^\mu)^2 - \beta_3\nabla^\mu u^\sigma\nabla_\sigma u_\mu + \lambda(u^\mu u_\mu - m^2). \quad (\text{A.5})$$

Si osservi che il parametro λ presente nella (A.5) costituisce un moltiplicatore di Lagrange utilizzato per imporre il vincolo dettato dall'equazione (A.2). Inoltre la densità di energia dell'inflatone nell'azione (A.3) è stata approssimata ad una costante ρ_Λ di modo da poter trattare gli effetti dovuti alla presenza dell'inflatone come una costante cosmologica. Infine il campo scalare massless χ è scelto in modo tale che le sue fluttuazioni quantistiche dominino la densità di energia, di modo da dover calcolare solo i contributi dovuti al campo χ senza doverci preoccupare dei contributi dovuti all'inflatone [19].

L'elemento di linea dello spazio tempo durante l'inflazione è stato scelto della forma [19]

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}_\perp^2 + b(t)^2 dz, \quad (\text{A.6})$$

in quanto è stato scelto il vettore u^μ allineato lungo l'asse z , ovvero

$$u^0 = 0, \quad u^x = 0, \quad u^y = 0, \quad u^z = \frac{m}{b(t)}. \quad (\text{A.7})$$

L'espressione generale del tensore energia-impulso per u^μ ottenuto a partire dalla Lagrangiana (A.5) ha l'espressione [19]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(u)} &= 2\beta_1(\nabla_\mu u^\rho\nabla_\nu u_\rho - \nabla^\rho u_\mu\nabla_\rho u_\nu) \\ &\quad - 2[\nabla_\rho(u_{(\mu}J_{\nu)}^\rho) + \nabla_\rho(u^\rho J_{(\mu\nu)}) - \nabla_\rho(u_{(\mu}J_{\nu)}^\rho)] \\ &\quad + 2m^{-2}u_\sigma\nabla_\rho J^{\rho\sigma}u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_u, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

dove J_σ^μ è la corrente della forma

$$J_\sigma^\mu = -\beta_1\nabla^\mu u_\sigma - \beta_2\delta_\sigma^\mu\nabla_\rho u^\rho - \beta_3\nabla_\sigma u^\mu. \quad (\text{A.9})$$

Ne segue che, date le relazioni (A.7) per le componenti del quadrivettore u^μ , le uniche componenti non nulle del tensore energia-impulso (A.8) risultano [19]

$$\begin{aligned}
(i) \quad T_{00}^{(u)} &= \beta_1 m^2 \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 \\
(ii) \quad T_{xx}^{(u)} = T_{yy}^{(u)} &= \beta_1 m^2 a^2 \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 \\
(iii) \quad T_{zz}^{(u)} &= \beta_1 m^2 \left(\dot{b}^2 - 2\ddot{b}b - 4\frac{\dot{a}\dot{b}b}{a} \right).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Dunque, note le espressioni per il tensore metrico (A.6) e per il tensore energia-impulso (A.10), è possibile risolvere le equazioni di Einstein nell'intervallo temporale $0 < t < t_f$ ottenendo [19]

$$a(t) = e^{H_a t}, \quad b(t) = e^{H_b t}, \tag{A.11}$$

dove sono state imposte le condizioni iniziali $a(0) = 1$ e $b(0) = 1$, mentre

$$\begin{aligned}
(i) \quad H_a &= \frac{\dot{a}}{a} = H_b (1 + 16\pi G \beta_1 m^2) \\
(ii) \quad H_b &= \frac{\dot{b}}{b} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{(1 + 8\pi G \beta_1 m^2)(3 + 32\pi G \beta_1 m^2)}}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Nel seguito risulta conveniente definire una metrica isotropa “fittizia” [19]

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + \bar{a}(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{A.13}$$

nella quale il fattore di scala risulta

$$\bar{a}(t) = e^{\bar{H}t}, \tag{A.14}$$

dove è stato definito il parametro di Hubble “medio”

$$\bar{H} = \frac{1}{3} (2H_a + H_b). \tag{A.15}$$

Definito il parametro di Hubble medio è possibile parametrizzare la deviazione dall'isotropia come [19]

$$\epsilon_H = \frac{2}{3} \left(\frac{H_b - H_a}{\bar{H}} \right). \tag{A.16}$$

Si osservi che nel lavoro presentato in [19] è imposto il limite

$$N_f |\epsilon_H| \ll 1, \quad (\text{A.17})$$

dove $N_f = \bar{H}t_f$ è il numero di e-folding durante il tempo in cui il vettore u^μ è diverso da zero. Questo assicura che la non invarianza per rotazioni causata dall'espansione anisotropa possa essere trattata come una piccola perturbazione.

Ricordando che il nostro scopo finale è quello di calcolare lo spettro di potenza ed osservando che per costruzione i contributi dominanti provengono dalla presenza del campo scalare χ , per proseguire occorre andare a calcolare la funzione di correlazione $\langle \chi(\mathbf{x}, t)\chi(\mathbf{y}, t) \rangle$ ottenendo [19]

$$\langle \chi(\mathbf{x}, t)\chi(\mathbf{y}, t) \rangle \simeq \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[P(k) + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n})^2 \Delta P(k) \right], \quad (\text{A.18})$$

dove è stato sfruttato il fatto che lo scopo ultimo è quello di ricavare un'espressione per lo spettro di potenza analoga a quanto espresso nella (A.1).

Arrivati a questo punto possiamo considerare, per esempio, quei modi χ_k tali per cui $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$, ovvero allineati con la direzione primordiale privilegiata. Questi obbediscono all'equazione differenziale [19]

$$\frac{d^2\chi_k}{dt^2} + 3\bar{H}\frac{d\chi_k}{dt} + \frac{k^2}{b(t)^2}\chi_k = 0. \quad (\text{A.19})$$

Le condizioni di commutazione canonica implicano la normalizzazione [19]

$$\left(\frac{d\chi_k(\tau)}{d\tau} \right) \chi_k^*(\tau) - \left(\frac{d\chi_k^*(\tau)}{d\tau} \right) \chi_k(\tau) = -i (\tau\bar{H})^2, \quad (\text{A.20})$$

dove è stato introdotto il tempo conforme

$$\tau = -\frac{1}{\bar{H}}e^{-\bar{H}t}. \quad (\text{A.21})$$

Segue la soluzione per l'equazione (A.19) [19]

$$\chi_k(\tau) = \frac{\bar{H}\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}{2\sqrt{1+\epsilon_H}} H_\nu^{(2)} \left(\frac{(k/\bar{H})^{-\epsilon_H} (k\tau)^{1+\epsilon_H}}{1+\epsilon_H} \right), \quad (\text{A.22})$$

dove $H_\nu^{(2)}$ è la funzione di Hankel, mentre

$$\nu = \frac{3}{2+2\epsilon_H}. \quad (\text{A.23})$$

Passando nello spazio di Fourier ed assumendo che i modi k di nostro interesse abbiano lunghezza d'onda molto più piccola del raggio di Hubble all'inizio

dell'inflazione abbiamo che $k \gg \bar{H}$. Dunque nel limite $|k\tau| \ll 1$, per piccoli ϵ_H , ritroviamo [19]

$$|\chi_k(\tau)|^2 \simeq \frac{\bar{H}}{2k^3} (1 + 3\epsilon_H \log(k/\bar{H})). \quad (\text{A.24})$$

Si osservi che per ottenere l'espressione (A.24) sono stati trascurati i termini lineari in ϵ_H non moltiplicati per il logaritmo di k/\bar{H} (infatti, valendo la relazione $k/\bar{H} \gg 1$, gli addendi moltiplicati per $\log(k/\bar{H})$ danno un contributo maggiore).

Per $t = t_f$ la metrica diviene quella di un Universo di FRW (ovvero la non invarianza per rotazioni dovuta alla differenza tra $a(t)$ e $b(t)$ scompare), seguono i riscalamanti per le coordinate [19]

$$\begin{aligned} (i) \quad z &\rightarrow \frac{\bar{a}(t_f)}{b(t_f)} z \\ (ii) \quad \mathbf{x}_\perp &\rightarrow \frac{\bar{a}(t_f)}{a(t_f)} \mathbf{x}_\perp. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Dunque la funzione $g(k)$ che esprime la non invarianza per rotazioni dello spettro di potenza delle perturbazioni primordiali assume la forma [19]

$$g(k) = \frac{9}{2} \epsilon_H \log\left(\frac{q(t_f)}{\bar{H}}\right), \quad (\text{A.26})$$

dove $q(t_f) = k/\bar{a}(t_f)$ è il numero d'onda fisico associato ad i modi di interesse alla fine dell'inflazione.

In questo modo abbiamo visto come relazionare un “semplice” toy-model inflazionario con la funzione $g(k)$ che determina la non invarianza per rotazioni dello spettro di potenza. Ne segue che, partendo dai dati osservativi ed imponendo dei constraints sui possibili valori di $g(k)$ è possibile “limitare” la classe di modelli inflazionari che prevedono una rottura primordiale dell'isotropia statistica.

A.2 Funzione di correlazione a quattro punti angolare

Partendo dal modello presentato nel capitolo 5 possiamo andare a calcolare la funzione di correlazione angolare a quattro punti tenendo conto dell'espressione (5.26). In particolare, seguendo [17] e [2], abbiamo che

$$\begin{aligned}
\langle a_{\ell_1 m_1}^{\zeta_G} a_{\ell_2 m_2}^{\zeta_G} a_{\ell_3 m_3}^{\zeta_G} c_{\ell_4 m_4}^{\zeta} \rangle &= g_{NL} \left(\frac{6}{5\pi} \right)^4 \sum_{\substack{L_i M_i \\ i=1,2,3}} F_{\ell_4 m_4}^{L_1 \dots M_3}(r_{dec}) \\
&\times \prod_{j=1}^3 \int d^3 \mathbf{x}_j Y_{L_1 M_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \Delta_{L_1}(r_1) \cdots Y_{L_3 M_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_3) \Delta_{L_3}(r_3) \\
&\times \prod_{q=4}^6 \int d^3 \mathbf{x}_q Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{n}}_4) \Delta_{\ell_1}(r_4) \cdots Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{n}}_6) \Delta_{\ell_3}(r_6) \\
&\times \langle \zeta_G(\mathbf{x}_4) \zeta_G(\mathbf{x}_5) \zeta_G(\mathbf{x}_6) \zeta_G(\mathbf{x}_1) \zeta_G(\mathbf{x}_2) \zeta_G(\mathbf{x}_3) \rangle.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Poiché utilizzando il teorema di Wick è possibile esprimere $\langle \zeta_G(\mathbf{x}_1) \cdots \zeta_G(\mathbf{x}_6) \rangle$ in termini della funzione a correlazione a due punti e poiché possiamo decomporre la ζ_G come

$$\zeta_G(\mathbf{x}) = \sum_{\ell m} \zeta_{\ell m}^G(r) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \tag{A.28}$$

possiamo riscrivere la (A.27) come

$$\begin{aligned}
\langle a_{\ell_1 m_1}^{\zeta_G} a_{\ell_2 m_2}^{\zeta_G} a_{\ell_3 m_3}^{\zeta_G} c_{\ell_4 m_4}^{\zeta} \rangle &= g_{NL} \left(\frac{6}{5\pi} \right)^4 \sum_{\substack{L_i M_i \\ i=1,2,3}} F_{\ell_4 m_4}^{L_1 \dots M_3}(r_{dec}) \prod_{j=1}^6 \int dr_j r_j^2 \Delta_{L_1}(r_1) \cdots \Delta_{L_3}(r_3) \\
&\times \Delta_{\ell_1}(r_4) \cdots \Delta_{\ell_3}(r_6) \langle \zeta_{\ell_1 m_1}^G(r_4) \zeta_{\ell_2 m_2}^G(r_5) \rangle \\
&\times \langle \zeta_{\ell_3 m_3}^G(r_6) \zeta_{L_1 M_1}^G(r_1) \rangle \langle \zeta_{L_2 M_2}^G(r_2) \zeta_{L_3 M_3}^G(r_3) \rangle + \text{perm.}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Essendo, infine,

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_{\ell_i m_i}^G(r_q) \zeta_{\ell_j m_j}^G(r_d) \rangle &= \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}_q} d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}_d} Y_{\ell_i m_i}^*(\hat{\mathbf{n}}_q) Y_{\ell_j m_j}^*(\hat{\mathbf{n}}_d) \langle \zeta^G(\mathbf{x}_q) \zeta^G(\mathbf{x}_d) \rangle \\
&= \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}_q} d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}_d} Y_{\ell_i m_i}^*(\hat{\mathbf{n}}_q) Y_{\ell_j m_j}^*(\hat{\mathbf{n}}_d) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_d)} P_{\zeta}(k) \\
&= \frac{i^{\ell_i - \ell_j}}{(2\pi)^3} (-1)^{m_j} \delta_{m_i}^{-m_j} \delta_{\ell_i}^{\ell_j} \int_0^{\infty} dk k^2 j_{\ell_i}(r_q k) j_{\ell_j}(r_d k) P_{\zeta}(k),
\end{aligned} \tag{A.30}$$

per sostituzione diretta, si ottiene

$$\begin{aligned}
\langle a_{\ell_1 m_1}^{\zeta_G} a_{\ell_2 m_2}^{\zeta_G} a_{\ell_3 m_3}^{\zeta_G} c_{\ell_4 m_4}^{\zeta} \rangle &= \frac{g_{NL}}{(2\pi)^9} \left(\frac{6}{5\pi} \right)^4 \sum_{\substack{L_i M_i \\ i=1,2,3}} i^{\ell_1+\ell_3+L_2} (-i)^{\ell_2+L_1+L_3} F_{\ell_4 m_4}^{L_1 \dots M_3}(r_{dec}) \\
&\times (-1)^{m_2+m_3+M_3} \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{-m_2} \delta_{\ell_3}^{L_1} \delta_{m_3}^{-M_1} \delta_{L_2}^{L_3} \delta_{M_2}^{-M_3} \\
&\times \prod_{j=1}^6 \int dr_j r_j^2 \Delta_{L_1}(r_1) \dots \Delta_{L_3}(r_3) \Delta_{\ell_1}(r_4) \dots \Delta_{\ell_3}(r_6) \\
&\times b_{\ell_1 \ell_2}(r_{45}) b_{\ell_3 L_1}(r_{61}) b_{L_2 L_3}(r_{23}) + \text{perm}, \tag{A.31}
\end{aligned}$$

dove

$$b_{\ell_i \ell_j}(r_{qd}) = \int_0^\infty dk k^2 j_{\ell_i}(r_q k) j_{\ell_j}(r_d k) P_\zeta(k) \tag{A.32}$$

Segue

$$\begin{aligned}
\langle a_{\ell_1 m_1}^{\zeta_G} a_{\ell_2 m_2}^{\zeta_G} a_{\ell_3 m_3}^{\zeta_G} c_{\ell_4 m_4}^{\zeta} \rangle &= \frac{g_{NL}}{(2\pi)^9} \left(\frac{6}{5\pi} \right)^4 \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{-m_2} i^{\ell_1-\ell_2} \\
&\times \sum_{L_2 M_2} (-1)^{m_2+m_3-M_2} F_{\ell_4 m_4}^{\ell_3 m_3 L_2 M_2 L_2-M_2}(r_{dec}) \\
&\times \prod_{j=1}^6 \int dr_j r_j^2 \Delta_{\ell_1}(r_1) \Delta_{L_2}(r_2) \Delta_{L_2}(r_3) \Delta_{\ell_1}(r_4) \Delta_{\ell_3}(r_5) \Delta_{\ell_3}(r_6) \\
&\times b_{\ell_1 \ell_2}(r_{45}) b_{\ell_3 \ell_3}(r_{61}) b_{L_2 L_2}(r_{23}) + \text{perm}, \tag{A.33}
\end{aligned}$$

Si osservi che nella (A.33) abbiamo che

$$F_{\ell_4 m_4}^{\ell_3 m_3 L_2 M_2 L_2-M_2}(r_{dec}) = \frac{6}{\pi} g_{\ell_4} W_{L_2}^2 \mathcal{B}_{\ell_4 m_4}^{\ell_3 m_3 L_2 M_2 L_2-M_2}, \tag{A.34}$$

il che ci dice che la somma su L_2 in realtà si arresta ad $L_2 = 50$ come conseguenza della definizione del filtro W_ℓ data nel capitolo 5.

Bibliografia

- [1] G. Hinshaw, A.J. Banday, C.L. Bennett, K.M. Gorski, A. Kogut, C.H. Lineweaver, G.F. Smoot, E.L. Wright, *2-Point Correlations in the COBE DMR 4-Year Anisotropy Maps*, *Astrophys. J.* 464:L25-L28 (1996), arXiv:9601061v [astro-ph.CO]
- [2] Eiichiro Komatsu, David N. Spergel, *Acoustic Signatures in the Primary Microwave Background Bispectrum*, *Phys.Rev. D* 63 063002 (2001) arXiv:0005036v2 [astro-ph.CO]
- [3] K. Enqvist and M. S. Sloth, *Adiabatic CMB perturbations in pre - big bang string cosmology*, *Nucl. Phys. B* 626 (2002) 395, arXiv:0109214 [hep-ph]
- [4] N. Kogo, E. Komatsu, *Angular Trispectrum of CMB Temperature Anisotropy from Primordial Non-Gaussianity with the Full Radiation Transfer Function*, *Phys.Rev. D* 73 (2006) 083007, arXiv:0602099v2 [astro-ph]
- [5] H. K. Eriksen, F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, P. B. Lilje, *Asymmetries in the CMB anisotropy field*, *Astrophys. J.* 605:14-20 (2004), arXiv:0307507v4 [astro-ph.CO]
- [6] Adrienne L. Erickcek, Marc Kamionkowski, Sean M. Carroll, *A Hemispherical Power Asymmetry from Inflation*, *Phys. Rev. D* 78 123520 (2008), arXiv:0806.0377 [astro-ph.CO]
- [7] Takeshi Kobayashi, Marina Cortês, Andrew R. Liddle, *A separate universe view of the asymmetric sky*, *JCAP* 05 (2015) 029, arXiv:1501.05864 [astro-ph.CO]
- [8] Fabian Schmidt, Lam Hui, *CMB Power Asymmetry from Non-Gaussian Modulation*, *Phys. Rev. Lett.* 110 011301 (2013), arXiv:1210.2965v2 [astro-ph.CO]
- [9] Yi-Fu Cai, Wen Zhao, Yang Zhang, *CMB Power Asymmetry from Primordial Sound Speed Parameter*, *Phys. Rev. D* 89 023005 (2014), arXiv:1307.4090 [astro-ph.CO]

- [10] Andrew R Liddle, Marina Cort es, *Cosmic microwave background anomalies in an open universe*, Physical Review Letters 111, 111302 (2013), arXiv:1306.5698 [astro-ph.CO]
- [11] Chung-Pei Ma, Edmund Bertschinger, *Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges*, Astrophys. J. 455 (1995) 7-25 , arXiv:9506072 [astro-ph.CO]
- [12] T. Moroi and T. Takahashi, *Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background*, Phys. Lett. B 522 (2001) 215
- [13] C. L. Bennett et al, *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*, Astrophys. J. Suppl.148 (2003), arXiv:0302207v3 [astro-ph.CO]
- [14] James M. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D22 (1980) 1882-1905
- [15] Maria Chiara Guzzetti, Nicola Bartolo, Michele Liguori, Sabino Matarrese, *Gravitational waves from inflation*, Rivista del Nuovo Cimento, Vol. 39, Issue 9 (2016), 399-495, arXiv:1605.01615v3 [astro-ph.CO]
- [16] Fabian Schmidt, Marc Kamionkowski, *Halo Clustering with Non-Local Non-Gaussianity*, Phys. Rev. D 82:103002 (2010), arXiv:1008.0638v3 [astro-ph.CO]
- [17] M. Liguori, S. Matarrese, and L. Moscardini, *High-Resolution Simulations of Non-Gaussian Cosmic Microwave Background Maps in Spherical Coordinates*, Astrophys.J. 597 (2003) 57-65, arXiv:0306248v1 [astro-ph.CO]
- [18] Christian T. Byrnes, Donough Regan, David Seery, Ewan R. M. Tarrant, *Implications of the CMB power asymmetry for the early universe*, Phys. Rev. D 93, 123003 (2016), arXiv:1601.01970 [astro-ph.CO]
- [19] Lotty Ackerman, Sean M. Carroll, Mark B. Wise, *Imprints of a Primordial Preferred Direction on the Microwave Background*, Phys. Rev. D 75 083502 (2007), arXiv:0701357v5 [astro-ph.CO]
- [20] J. Hoftuft, H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski, F. K. Hansen and P. B. Lilje, *Increasing evidence for hemispherical power asymmetry in the five-year WMAP data*, Astrophys. J. 699:985-989 (2009), arXiv:0903.1229 [astro-ph.CO]
- [21] Yi-Fu Cai, Hai-Ying Xia, *Inflation with multiple sound speeds: a model of multiple DBI type actions and non-Gaussianities*, Phys. Lett. B 677:226-234 (2009), arXiv:0904.0062 [hep-th]

- [22] S. Mollerach, *Isocurvature Baryon Perturbations and Inflation*, Phys. Rev. D 42 (1990) 313
- [23] Michele Cicoli, Sean Downes, Bhaskar Dutta, Francisco G. Pedro, Alexander Westphal, *Just enough inflation: power spectrum modifications at large scales*, JCAP 1412 (2014) no.12, 030, arXiv:1407.1048 [hep-th]
- [24] Frode K. Hansen et al, *In preparation* (2017)
- [25] Guido D'Amico, Roberto Gobbetti, Matthew Kleban, Marjorie Schillo, *Large-scale anomalies from primordial dissipation*, JCAP 1311 (2013) 013, arXiv:1306.6872 [astro-ph.CO]
- [26] Saroj Adhikari, Sarah Shandera, Adrienne L. Erickcek, *Large-scale anomalies in the cosmic microwave background as signatures of non-Gaussianity*, Phys. Rev. D 93, 023524 (2016), arXiv:1508.06489 [astro-ph.CO]
- [27] Roman Scoccimarro, Lam Hui, Marc Manera, K. C. Chan, *Large-scale Bias and Efficient Generation of Initial Conditions for Non-Local Primordial Non-Gaussianity*, Phys. Rev. D 85 083002 (2012), arXiv:1108.5512v2 [astro-ph.CO]
- [28] Jaiseung Kim, Eiichiro Komatsu, *Limits on anisotropic inflation from the Planck data*, PRD 88, 101301(R) (2013), arXiv:1310.1605 [astro-ph.CO]
- [29] George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, FIFTH EDITION, ACADEMIC PRESS, 2001
- [30] Scott Dodelson, *Modern Cosmology*, ACADEMIC PRESS 2003
- [31] N. Bartolo, S. Matarrese, A. Riotto, *Non-Gaussianity and the Cosmic Microwave Background Anisotropies*, Adv.Astron. 2010 (2010) 157079, arXiv:1001.3957 [astro-ph.CO]
- [32] D. H. Lyth and D. Wands, *Generating the curvature perturbation without an inflaton*, Phys. Lett. B 524 (2002) 5-14, arXiv:1504.05736 [astro-ph.CO]
- [33] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, A. Riotto, *Non-Gaussianity from Inflation: Theory and Observations*, Phys.Rept. 402 (2004) 103-266, arXiv:0406398v2 [astro-ph.CO]
- [34] Bekir Baytas, Aruna Kesavan, Elliot Nelson, Sohyun Park, Sarah Shandera, *Non-local bispectra from super cosmic variance*, Phys. Rev. D 91, 083518 (2015), arXiv:1502.01009v1 [astro-ph.CO]

- [35] Planck Collaboration I, *Planck 2015 results I. Overview of products and scientific results*, Astron.Astrophys. 594 (2016) A1, arXiv:1502.01582v2 [astro-ph.CO]
- [36] Planck Collaboration XIII, *Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters*, Astron.Astrophys. 594 (2016) A13, arXiv:1502.01589v3 [astro-ph.CO]
- [37] Planck Collaboration XV, *Planck 2015 results XV. Gravitational lensing*, Astron.Astrophys. 594 (2016) A15, arXiv:1502.01591 [astro-ph.CO]
- [38] Planck Collaboration XXIII, *Planck 2013 results XVI. Isotropy and statistics of the CMB*, Astron.Astrophys. 571 (2014) A23, arXiv:1303.5083v3 [astro-ph.CO]
- [39] Planck Collaboration XVI, *Planck 2015 results XVI. Isotropy and statistics of the CMB*, Astron.Astrophys. 594 (2016) A16, arXiv:1506.07135v2 [astro-ph.CO]
- [40] Planck Collaboration XVII, *Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity*, Astron.Astrophys. 594 (2016) A17, arXiv:1502.01592 [astro-ph.CO]
- [41] Planck Collaboration XX, *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*, Astron.Astrophys. 594 (2016) A20, arXiv:1502.02114 [astro-ph.CO]
- [42] Planck Collaboration XXI, *Planck 2015 results. XXI. The integrated Sachs-Wolfe effect*, Astron.Astrophys. 594 (2016) A21, arXiv:1502.01595 [astro-ph.CO]
- [43] A. Rassat, J.-L. Starck, P. Paykari, F. Sureau, J. Bobin, *Planck CMB Anomalies: Astrophysical and Cosmological Secondary Effects and the Curse of Masking*, JCAP 1408 (2014) 006, arXiv:1405.1844 [astro-ph.CO]
- [44] F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, H. K. Eriksen, P. B. Lilje, *Power Asymmetry in Cosmic Microwave Background Fluctuations from Full Sky to Sub-degree Scales: Is the Universe Isotropic?*, Astrophys.J. 704 (2009) 1448-1458, arXiv:0812.3795v1 [astro-ph.CO]
- [45] Alejandra Kandus, Kerstin E. Kunze, Christos G. Tsagas, *Primordial magnetogenesis*, Phys.Rept. 505 (2011) 1-58, arXiv:1007.3891 [astro-ph.CO]
- [46] Dong-Gang Wang, Yi-Fu Cai, Wen Zhao, Yang Zhang, *Scale-dependent CMB power asymmetry from primordial speed of sound and a generalized*

- δN formalism, JCAP 1602 (2016) no.02, 019, arxiv:1509.02541 [astro-ph.CO]
- [47] C. L. Bennett, R. S. Hill, G. Hinshaw, D. Larson, K. M. Smith, J. Dunkley, B. Gold, M. Halpern, N. Jarosik, A. Kogut, E. Komatsu, M. Limon, S. S. Meyer, M. R. Nolta, N. Odegard, L. Page, D. N. Spergel, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Are There Cosmic Microwave Background Anomalies?*, Astrophys.J.Suppl. 192 (2011) 17, arXiv:1001.4758v2 [astro-ph.CO]
- [48] Christopher Gordon, Wayne Hu, Dragan Huterer, Tom Crawford, *Spontaneous Isotropy Breaking - A Mechanism for CMB Multipole Alignments*, Phys.Rev. D72 (2005) 103002, arXiv:0509301 [astro-ph.CO]
- [49] Adrienne L. Erickcek, Sean M. Carroll, Marc Kamionkowski, *Superhorizon Perturbations and the Cosmic Microwave Background*, Phys.Rev. D78 (2008) 083012, arXiv:0808.1570 [astro-ph.CO]
- [50] Cora Dvorkin, Hiranya V. Peiris, Wayne Hu, *Testable polarization predictions for models of CMB isotropy anomalies*, Phys.Rev. D77 (2008) 063008, arXiv:0711.2321 [astro-ph.CO]
- [51] D. Contreras, J. P. Zibin, D. Scott, A. J. Banday, K. M. Górski, *Testing physical models for dipolar asymmetry with CMB polarization*, arXiv:1704.03143 [astro-ph.CO]
- [52] Nicola Bartolo, Sabino Matarrese, Marco Peloso, Angelo Ricciardone, *The anisotropic power spectrum and bispectrum in the $f(\phi) F^2$ mechanism*, Phys.Rev. D87 (2013) no.2, 023504, arXiv:1210.3257 [astro-ph.CO]
- [53] David H. Lyth, *The CMB asymmetry from inflation*, JCAP 1308 (2013) 007, arXiv:1304.1270 [astro-ph.CO]
- [54] Ruth Durrer, *The Cosmic Microwave Background*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2008)
- [55] Edward Kolb, Michael Stanley Turner, *The Early Universe*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY (1990)
- [56] Christian T. Byrnes, Donough Regan, David Seery, Ewan R. M. Tarrant, *The hemispherical asymmetry from a scale-dependent inflationary bispectrum*, JCAP 1606 (2016) no.06, 025, arXiv:1511.03129 [astro-ph.CO]
- [57] A. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D 23, 347 (1981)

- [58] Guido Walter Pettinari, *The intrinsic bispectrum of the Cosmic Microwave Background*, arXiv:1405.2280v2 [astro-ph.CO]
- [59] Liang Dai, Donghui Jeong, Marc Kamionkowski, Jens Chluba, *The Pesky Power Asymmetry*, Phys.Rev. D87 (2013) no.12, 123005, arXiv:1303.6949 [astro-ph.CO]
- [60] D. H. Lyth, C. Ungarelli and D. Wands, *The Primordial density perturbation in the curvaton scenario*, Phys. Rev. D 67 (2003) 023503, arXiv:0208055 [astro-ph]
- [61] David H. Lyth, Andrew R. Liddle, *The Primordial Density Perturbation - Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2009)
- [62] David H. Lyth, Carlo Ungarelli, David Wands, *The primordial density perturbation in the curvaton scenario*, Phys.Rev. D67 (2003) 023503, arXiv:0208055 [astro-ph.CO]
- [63] Angelica de Oliveira-Costa, Max Tegmark, Matias Zaldarriaga, Andrew Hamilton, *The significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP*, Phys.Rev. D69 (2004) 063516, arXiv:0307282 [astro-ph.CO]
- [64] N Bartolo, Andrew R Liddle, *The simplest curvaton model*, Phys.Rev. D65 (2002) 121301, arXiv:0203076v2 [astro-ph.CO]
- [65] Gemma J. Anderson, David J. Mulryne, David Seery, *Transport equations for the inflationary trispectrum*, JCAP 1210 (2012) 019, arXiv:1205.0024v2 [astro-ph.CO]