UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Mathematics

Numeri Surreali: costruzione ed applicazioni

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo

Laureando: Giovanni Zocco
Matricola: 2087678

Anno Accademico 2023/2024

19 Luglio 2024

Indice

Abstract

Quello dei numeri surreali è un campo che contiene sia i reali, che gli infinitesimi che gli infiniti nel senso di Cantor.

In questa tesi presenteremo una costruzione formale di tale campo: definiremo il concetto di numero surreale, introdurremo le definizioni di somma e prodotto e dimostreremo le principali proprietà di tali operazioni.

Dato che la teoria dei numeri surreali, sviluppata da Conway negli anni '70 del secolo scorso e resa nota in parte da Knuth tramite un libro scritto in forma dialogica nel 1974 (*Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned On to Pure Mathematics and Found Total Happiness*), è nata con lo scopo di essere applicata alla teoria dei giochi, l'ultima parte di questo elaborato sarà dedicata ad un breve accenno all'applicazione dei surreali a tale teoria.

Capitolo 1

Introduzione

Nella seconda metà dell' '800, in risposta alla scoperta delle geometrie non euclidee, i matematici sentirono la necessità di porre su basi più solide e rigorose le varie dottrine della matematica.
Nel 1899 David Hilbert pubblicò i suoi *Grundlagen der Geometrie* per assiomatizzare la geometria euclidea e in quello stesso periodo si assistette all'importante processo di fondazione noto con il nome di *Aritmetizzazione dell'analisi.* Assoluti protagonisti ne furono Cantor (1845-1918) e Dedekind (1831-1916).

Nel 1889 Giuseppe Peano (1858-1932) fornì un'assiomatizzazione dei numeri naturali basata su 3 idee primitive (quella di zero, numero e successore) e 5 proposizioni primitive:

1. zero è un numero
2. il successore di un numero è anch'esso un numero
3. se due numeri hanno lo stesso successore, allora sono uguali
4. zero non è successore di alcun numero
5. se un insieme di numeri naturali contiene lo zero e il successore di ogni numero che contiene, allora coincide con tutto l'insieme dei naturali
   equivalentemente
   se una proprietà vale per zero e per il successore di ogni numero per cui essa vale, allora vale per ogni numero (*principio di induzione*).

Trovato questo sistema di assiomi, si considerarono noti i numeri naturali e ci si dedicò alla costruzione dei numeri interi, razionali e reali.

Innanzitutto vennero definite le operazioni di somma e moltiplicazione sui naturali e si osservò che rispetto ad esse $\mathbb{N}$ è un insieme chiuso; successivamente ci si dedicò alla costruzione degli interi: si voleva infatti ottenere un insieme di numeri che fosse chiuso anche per la sottrazione (quello dei naturali non lo è).
Si partì quindi dal prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e si pose la seguente relazione d'equivalenza:

$$(m, n)\ R_1\ (m^{'}, n^{'}) \ \text{ se e solo se } \ m + n^{'} = m^{'} + n$$

In questo modo, per esempio, le infinite coppie $(n+3, n)$, tutte equivalenti tra loro, rappresentano l'intero 3 e, analogamente, le coppie del tipo $(n, n+3)$ rappresentano l'intero -3.
A questo punto si identificò $\mathbb{Z}$ con $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R_1$, eleggendo come rappresentanti delle varie classi di equivalenza le coppie con secondo elemento zero per quanto concerne i numeri positivi e le coppie con primo elemento zero in riferimento ai numeri negativi.
Su tale insieme è possibile definire la somma, la moltiplicazione e la sottrazione in modo tale che esso sia chiuso rispetto a quelle operazioni, ma non si può fare lo stesso con la divisione. Si costruì quindi l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali tramite un procedimento analogo al precedente: partendo dal prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definì $\mathbb{Q}$ come $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R_2$ con R_2 relazione d'equivalenza definita in questo modo:

$$(p, q)\ R_2\ (p^{'}, q^{'}) \ \text{ se e solo se } \ pq^{'} = p^{'}q$$

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è chiuso per somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione (con divisore $\neq 0$), ma non contiene, per esempio, numeri come π e $\sqrt{2}$.
Arrivati a questo punto ci si occupò della definizione formale dei reali.
Il metodo che utilizzò Dedekind per la costruzione di tali numeri ha preso il nome di *metodo delle sezioni*.
Esso consiste nel partizionare $\mathbb{Q}$ in due insiemi, S (insieme sinistro) e D (insieme destro), presi in modo tale che non esista alcuna coppia (x, y) con $x \in S$ e $y \in D$ tale che $x>y$.
In questo modo la coppia $(S|D)$ caratterizza una sezione e, qualora S non avesse estremo superiore in $\mathbb{Q}$ e D non avesse estremo inferiore in $\mathbb{Q}$, essa definirebbe un nuovo numero non razionale (ad esempio $(S|D)$ con $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \lor (x \geq 0 \;\&\; x^2 < 3)\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \;\&\; x^2 > 3\}$ definisce l'irrazionale $\sqrt{3}$).

Il passaggio successivo alla costruzione dei reali fu quello di definire l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ utilizzando l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali contenenti il primo elemento per la parte reale e il secondo per la parte immaginaria. Anche la costruzione di $\mathbb{C}$ fu significativa. In $\mathbb{C}$, per esempio, è possibile applicare la radice quadrata a numeri negativi e anche dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

Nel 1874 George Cantor si occupò dell'infinito attuale: introdusse i numeri ordinali e dimostrò che ci sono infiniti ordini di infinito (con ω il più piccolo di questi).
Utilizzando il linguaggio di Conway e Knuth possiamo dire che, applicando il metodo delle sezioni con insieme destro $D = \emptyset$, si possono costruire gli ordinali transfiniti partendo da $\omega = (\{0, 1, 2, 3, ...\}| \ )$, il nuovo numero più grande di tutti gli interi, e proseguendo con $\omega + 1 = (\{0, 1, 2, 3, ..., \omega\}| \ )$, $\omega + 2 = (\{0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1\}| \ )$ e così via.
Questo stesso metodo può essere utilizzato per costruire i naturali alla von Neumann ($0 = (\emptyset| \ )$, $1 = (\{0\}| \ )$, $2 = (\{0, 1\}| \ )$,...)

Riassumendo quindi possiamo dire che, mentre Dedekind era focalizzato sul colmare i "buchi" tra i razionali (utilizzando insieme destro e sinistro sempre $\neq \emptyset$), Cantor era intento a creare la serie degli ordinali spingendosi il "più avanti possibile" (si pensi all'utilizzo di coppie $(S|D)$ con D = $\emptyset$ sempre).

Negli anni '70 del secolo scorso il matematico britannico John Conway (Liverpool, 1937 - Princeton, 2020) utilizzò entrambi questi meccanismi per creare il campo dei cosiddetti ***numeri surreali***, campo contenente i reali, gli infinitesimi e gli infiniti nel senso di Cantor (vedremo che in questo campo i numeri corrispondenti agli ordinali avranno un'aritmetica differente da quella di Cantor).

Ora, prima di presentare la teoria di Conway, abbiamo bisogno di alcuni strumenti: il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel (teoria all'interno della quale costruiremo i numeri surreali), qualche nozione legata al concetto di numero ordinale e la definizione di induzione transfinita.
Nel prossimo capitolo verranno quindi presentati tali concetti.

Capitolo 2

Assiomi di Zermelo-Fraenkel, ordinali e induzione transfinita

L'ambiente in cui lavoreremo per costruire il campo dei numeri surreali è la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel. Nella nostra trattazione utilizzeremo inoltre i concetti di numero ordinale e induzione transfinita.
Questo capitolo sarà quindi dedicato alla trattazione di tali argomenti (tale trattazione trarrà in parte spunto da quanto contenuto in [3] e [4]).

2.1 Assiomatica di Zermelo-Fraenkel

Quella di Zermelo-Fraenkel è una teoria assiomatica sviluppata tra il 1908 e il 1922 che utilizza il linguaggio del primo ordine e che è stata introdotta con lo scopo di superare il celebre paradosso di Russell.
Facciamo un passo indietro: il logico tedesco Frege verso la fine dell' '800 voleva creare un fondamento assiomatico della matematica tale da poter inserire i risultati di Cantor sugli infiniti.
In questo suo tentativo utilizzò, tra gli altri, i seguenti due principi:

1. dati A e B insiemi, essi sono uguali se hanno gli stessi elementi
   (*principio di estensionalità*)

2. una proprietà definisce sempre un insieme, ovvero $X = \{x \mid P(x)\}$
   (*principio di comprensione*).

Tuttavia nel 1902 il filosofo, logico e matematico Bertrand Russell notò che se si fosse assunto tale principio di comprensione, si sarebbe giunti ad un paradosso: si sarebbe potuto infatti definire un insieme tramite la proprietà di "non appartenenza a se stesso". Proviamo a pensare a cosa accadrebbe se fosse lecito costruire l'insieme $X = \{x \mid x \notin X\}$. Se $x \in X$, allora, per come è definito l'insieme, avremmo che $x \notin X$ e ciò porterebbe ad una contraddizione. Se invece $x \notin X$, allora, sempre per la definizione di X, $x \in X$: ecco una nuova contraddizione. Se si potesse definire un tale insieme X si giungerebbe quindi ad un paradosso, il paradosso di Russell appunto.
Si cercò quindi di superare tale paradosso sostanzialmente in due modi:

- "modificando" il principio di comprensione affermando che una proprietà definisce sempre una classe, ma che solo alcune di queste vengono dette insiemi (approccio utilizzato in teoria delle classi)
- "indebolendo" notevolmente il principio di comprensione (approccio adottato da Zermelo nella sua teoria e dallo stesso Russell in teoria dei tipi)

Nella teoria di Zermelo-Fraenkel, quindi, non vale il principio di comprensione, ma si assume un principio più debole, detto assioma di separazione o isolamento.
Esso permette, come vedremo, di superare il paradosso di Russell.
Procediamo, però, per ordine e vediamo uno ad uno gli assiomi di questa teoria.

Assioma 1 (Estensionalità)

$$\forall A \forall B \quad [\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B]$$

Remark
In virtù di tale assunzione abbiamo, per esempio, che $\{a, a\} = \{a\}$. Un'ulteriore conseguenza di questo assioma è l'unicità dell'insieme vuoto (siamo autorizzati quindi ad utilizzare un unico simbolo, $\emptyset$).

Assioma 2 (Esistenza del vuoto)

$$\exists B \quad \forall x \ (x \notin B)$$

Remark
Vedremo che per poter costruire un insieme tramite il già accennato assioma di isolamento è necessario partire da un insieme già esistente. È necessario, quindi, assumere a priori l'esistenza di un insieme e questo assioma assicura l'esistenza dell'insieme vuoto.

Assioma 3 (**Coppia**)

$$\forall u \forall v\ \exists B\ \forall x\ (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

Remark

L'insieme B presente nell'enunciato non è altro che la coppia (non ordinata) $\{x, y\}$. Dagli assiomi 1 e 3 si può derivare l'unicità della coppia. Inoltre, per la commutatività della disgiunzione logica, si ha che $\{x, y\} = \{y, x\}$. Utilizzando quindi tale assioma in aggiunta ai precedenti, si può definire il singoletto $\{u\}$ come l'insieme coppia $\{u, u\}$.

Assioma 4 (Unione)

$$\forall A \exists B \forall x \quad [x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)\ x \in b]$$

Remark

L'insieme B è detto insieme unione (o semplicemente unione) di A e si indica con $\bigcup A$. Nello schema mentale in cui gli insiemi sono intuitivamente collezioni di oggetti si pensi ad A come ad una collezione di "sacchi" e ad $\bigcup A$ come la collezione ottenuta tagliando i sacchi e raccogliendone il contenuto. Si può vedere agevolmente che $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$.

Assioma 5 (Potenza)

$$\forall a \exists B \forall x \quad (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

Remark

L'insieme B di cui parla l'assioma è l'insieme potenza di a (detto anche insieme delle parti di a); è univocamente determinato da a e solitamente si indica con $P(a)$. Si osservi che per ogni insieme x vale che

$$x \in P(x),\ \emptyset \in P(x) \text{ e } \bigcup P(x) = x.$$

Si noti infine che

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\},\ P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ ...$$

Assioma 6 (Separazione)

Per ogni formula $\phi(x, ...)$ che non contiene B si assuma vero che
$$\forall c \exists B \forall x \quad (x \in B \ \leftrightarrow \ x \in c \quad \& \quad \phi(x, ...))$$

Remark

In questo caso non si tratta di un singolo assioma, ma di uno schema di assiomi. Questa teoria non ha infatti un numero finito di assiomi, ma tali assiomi possono essere raccolti in un numero finito di schemi.
In ogni caso questo assioma in aggiunta all'assioma 1, come già accennato, permette di costruire un insieme a partire da un altro già esistente: dato infatti un insieme c, esiste un unico insieme B i cui elementi sono gli $x \in c$ tali per cui vale ϕ, ovvero $B = \{x \in c \mid \phi\}$.
A dire la verità l'assioma 6 venne messo da parte a favore di un assioma più forte (che implica sia quest'ultimo che l'assioma della coppia), detto
assioma di rimpiazzamento:

Per ogni formula $\phi(x, y, ...)$ che non contiene B si assuma vero che
$$\forall A \ [(\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2 \ (\phi(x, y_1) \ \& \ \phi(x, y_2) \to \ y_1 = y_2) \to$$
$$\exists B \ \forall y \ (y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \ \phi(x, y))]$$

L'assioma di rimpiazzamento asserisce quindi che, data una funzione il cui dominio è un insieme, la totalità delle sue immagini forma ancora un insieme (ovvero che una funzione mappa insiemi in insiemi).

Ecco ora alcune conseguenze di questo schema di assiomi:

* dato x insieme, $\emptyset = \{z \in x \mid z \neq z\}$;
* dato x insieme, possiamo definire l'insieme intersezione $\bigcap x = \{z \in \bigcup x \mid \forall y \in x \ (z \in y) \ \}$. In questo modo abbiamo anche che $\bigcap\{a, b\} = a \cap b$;
* dati x e y insiemi, possiamo definire l'insieme differenza $x - y = \{z \in x \mid z \notin y\}$;
* non ci si può trovare nuovamente di fronte al paradosso di Russell. Infatti conseguenza di tale assioma è il fatto che non esiste l'insieme universale U, ovvero un insieme che contenga tutti gli insiemi. Se esistesse un tale U, potremmo costruire tramite l'assioma di separazione l'insieme $R = \{x \in U \mid x \notin x\}$. Avremmo quindi che $R \in R \leftrightarrow R \in U \ \& \ R \notin R$. Dato che $R \in U$ sempre (per definizione di U), questa espressione è equivalente a $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ e genera quindi un assurdo.

Assioma 7 (Regolarità)

$$\neg\exists x_1 ... \exists x_n \ (x_1 \in x_2 \in ... \in x_n \in x_1)$$

Remark
Tale schema di assiomi venne sostituito dal più forte ***assioma di fondazione***:

$$(\forall A \neq \emptyset)(\exists a \in A) \quad a \cap A = \emptyset$$

Questo assioma afferma che la relazione $\in$ è ben fondata, ovvero che ogni sottoinsieme non vuoto del suo campo ha un elemento minimale. Zermelo, seguendo un'idea di Hessenberg ripresa successivamente da Kuratowski, per dare la definizione di coppia ordinata evita l'utilizzo degli ordinamenti e sfrutta invece le inclusioni insiemistiche: in questo modo $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ e $(y, x) = \{\{y\}, \{y, x\}\}$ (il primo elemento della coppia è quello che appartiene all'insieme che tra i due risulta minimo rispetto all'inclusione). Si può dimostrare quindi che $(x, y) = (z, t) \leftrightarrow (x = z) \ \& \ (y = t)$. Inoltre, una volta definito il concetto di coppia ordinata, è possibile costruire il prodotto cartesiano in questo modo:

$$a \times b = \{z \in P(P(a \cup b)) \mid \exists x \in a, y \in b \quad z = (x, y)\}$$

Assioma 8 (Assioma di infinito)

$$\exists A \ [\ \emptyset \in A \ \& \ (\forall a \in A) \quad a \cup \{a\} \in A\ ]$$

Remark
Dato x insieme, si dice successore di x (e si scrive $S(x)$) l'insieme ottenuto in questo modo: $x \cup \{x\}$. Un insieme A si dice ereditario se $\emptyset \in A$ e $(\forall a \in A) \quad S(a) \in A$.
Questo assioma assicura l'esistenza di un insieme ereditario e si può dimostrare che, dati due insiemi ereditari x e y, $x \cup y$ è ancora un insieme ereditario.
Chiameremo ω il più piccolo insieme ereditario.

Assioma 9 (Scelta)

$$(\forall\ relazione\ R)\ (\exists\ funzione\ F)\ (F \subseteq R\ \&\ dom(F) = dom(R))$$

Remark

Dati a,b insiemi, R è una relazione (binaria) tra loro se e solo se $R \subseteq a \times b$. Chiamiamo dominio di R l'insieme $dom(R) = \{x \in a \mid \exists y \in b \quad (x, y) \in R\}$ e immagine l'insieme $Im(R) = \{y \in b \mid \exists x \in a \quad (x, y) \in R\}$.
Definiamo, invece, funzione una relazione F tale per cui vale che

$$\forall x \in dom(F) \quad \forall y, z\ ((x, y) \in F\ \&\ (x, z) \in F\ \rightarrow y = z)$$

L'assioma di scelta è logicamente equivalente al lemma di Zorn, al principio del buon ordinamento e al principio di tricotomia: proprio per questa ragione è stato molto discusso.
Tuttavia Gödel ha dimostrato che se il sistema di assiomi formato solamente dagli assiomi precedenti (detto ZF) è consistente, allora esso rimane consistente anche con l'aggiunta dell'assioma della scelta (in questo caso tale teoria assiomatica si indica con la sigla ZFC).
Per la nostra costruzione dei numeri surreali lavoreremo all'interno della teoria ZFC.

2.2 Gli ordinali e la loro aritmetica

Nei prossimi capitoli, al fine di provare i vari risultati sui numeri surreali, utilizzeremo una tecnica dimostrativa nota con il nome di induzione transfinita.
Inoltre vedremo che il campo dei surreali contiene dei numeri che corrispondono ai "classici" numeri ordinali. Tali "nuovi" numeri ordinali saranno tuttavia muniti, come vedremo, di un'aritmetica differente da quella "classica".

Per poter utilizzare al meglio l'induzione transfinita ed essere in grado di confrontare l'aritmetica dei "nuovi" ordinali con quella dei "classici" ordinali, in questa sezione parleremo dei "classici" numeri ordinali trattando in breve la loro costruzione in ZFC e la loro aritmetica.

Ricordiamo innanzitutto la definizione, già vista, di successore di un insieme:

Definizione 1

Dato x insieme, si dice *successore di x* (e si indica con $S(x)$) l'insieme $x \cup \{x\}$.

Ora, memori del fatto che l'assioma 2 ci garantisce l'esistenza dell'insieme vuoto, possiamo costruire in questo modo i numeri naturali:

$\emptyset = 0$

$S(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$

$S(S(\emptyset)) = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\} = 2$

$S(S(S(\emptyset))) = \{0, 1\} \cup \{\{0, 1\}\} = \{0, 1, 2\} = 3$

...

Una volta definiti i numeri naturali come particolari insiemi in ZFC, possiamo definire in questo modo la relazione di minoranza:

$\forall x, y$ numeri naturali

$$x < y \leftrightarrow x \in y$$

Procediamo ora passando alla definizione di numero ordinale:

Definizione 2

Un insieme α si dice *numero ordinale* se è transitivo (ovvero $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$, cioè $\forall x \in \alpha \quad x \subseteq \alpha$) ed è totalmente ordinato dalla relazione di appartenenza.

Sulla base di tale definizione è facile vedere che tutti i numeri naturali sono numeri ordinali. È invece immediato osservare che insiemi come, per esempio, $\{0, 2\}$ e $\{1, 2\}$ non sono numeri ordinali (essi infatti non sono transitivi perchè non contengono rispettivamente 1 e 0).

Creiamo ora l'insieme di tutti i numeri naturali e vediamo se esso è ancora un numero ordinale.

Dato un insieme ereditario x (sappiamo che ne esiste almeno uno per l'assioma 8) definiamo il seguente insieme:

$$\omega_x = \bigcap \{z \subseteq x \mid z \ ereditario\}$$

Dato che l'intersezione di insiemi ereditari è ancora un insieme ereditario (che è sottoinsieme degli insiemi di partenza), ω_x è un insieme ereditario. Inoltre si può dimostrare che

$$\forall x, y \text{ ereditari} \quad \omega_x = \omega_y$$

Quanto appena detto ci permette di affermare che esiste un insieme ereditario che è sottoinsieme di qualsiasi altro insieme ereditario. Dato che per ogni x abbiamo che ω_x non dipende da x, d'ora in poi per indicare tale insieme ereditario ometteremo il pedice.

ω è quindi un insieme ereditario che rispetto agli altri insiemi ereditari è "minimo" per l'inclusione insiemistica. ω contiene $\emptyset$ e tutta la catena di successori che parte da lui: $S(\emptyset), S(S(\emptyset)), ...$
In conclusione quindi l'insieme ω che abbiamo creato lo possiamo pensare come l'insieme che contiene tutti i naturali:

$$\omega = \{0, 1, 2, ...\}$$

Una rapida verifica dei prerequisiti imposti nella definizione 2 ci permette di osservare che ω è ancora un numero ordinale.

Remark
Avendo definito in questo modo ω, si può vedere che nella teoria di Zermelo-Fraenkel gli assiomi di Peano non sono più delle proposizioni primitive, ma diventano veri e propri teoremi:

1. $ZF \vdash \ 0 \in \omega$;
2. $ZF \vdash \ n \in \omega \rightarrow \ S(n) \in \omega$;
3. $ZF \vdash \ \forall n \in \omega \quad S(n) \neq 0$;
4. $ZF \vdash \ S(n) = S(m) \rightarrow \ \forall n, m \in \omega \ (n = m)$;
5. $ZF \vdash \ [\ W \subseteq \omega \ \& \ 0 \in W \ \& \ \forall n \in W \ (S(n) \in W)\ ] \ \rightarrow \ W = \omega$.

Fermiamoci un momento ad osservare alcuni utili risultati legati ai numeri ordinali:

* α ordinale $\rightarrow S(\alpha)$ ordinale

  Remark
  Ciò implica il fatto che sono numeri ordinali anche gli insiemi
  $S(\omega) = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, ..., \omega\}$
  $S(S(\omega)) = S(\omega) \cup \{S(\omega)\} = \{0, 1, 2, ..., \omega, S(\omega)\}$
  ...

* ogni elemento di un ordinale è un ordinale
* α ordinale $\rightarrow \alpha = \emptyset \ \vee \ \emptyset \in \alpha$
* $\forall \alpha, \beta$ ordinali $\alpha \in \beta \ \leftrightarrow \ \alpha \subsetneq \beta$
* $\forall \alpha, \beta$ ordinali $\alpha = \beta \ \vee \ \alpha \in \beta \ \vee \ \beta \in \alpha$
* un insieme non vuoto di ordinali (che non è quindi necessariamente un ordinale) ammette minimo
* a insieme di ordinali $\rightarrow \bigcup a$ ordinale

  Remark
  Nonostante un insieme a qualsiasi di ordinali in generale non sia un numero ordinale, $\bigcup a$ lo è. Per esempio $\{0, 2\} = \{0, \{0, 1\}\}$ non è un ordinale, ma $\bigcup a = \{0, 1\}$ è l'ordinale 2.

* $\forall a$ insieme $\neq \emptyset$ di ordinali $\quad \bigcup a$ è l'estremo superiore (eventualmente il massimo) di a

Infine tramite la seguente definizione siamo in grado di distinguere i numeri ordinali in tre categorie (si può dimostrare che sono le uniche possibili):

Definizione 3

Dato α numero ordinale:

$$\begin{cases} \alpha \textit{ si dice successore se } \exists \beta \textit{ ordinale tale che } \alpha = S(\beta) \\ \alpha \textit{ si dice ordinale limite se } \alpha \neq \emptyset \textit{ e non è successore di alcun ordinale} \end{cases}$$

Prima di presentare la tecnica dimostrativa dell'induzione transfinita, diamo ora una rapida occhiata all'aritmetica degli ordinali.

2.2.1 Addizione

Definizione 4

Dato α numero ordinale:

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta) \\ \alpha + \lambda = \bigcup\{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \lambda\} \quad \text{con } \lambda \text{ ordinale limite} \end{cases}$$

Una conseguenza diretta di questa definizione è il seguente risultato:

Proposizione A

$\forall n \in \omega$

$$n + \omega = \omega$$

$$n + S(\omega) = S(n + \omega) = S(\omega)$$

dimostrazione:
Per la definizione 4 abbiamo che
$\forall n \in \omega \quad n + \omega = \bigcup\{n + m \mid m \in \omega\} = \bigcup\{n, n+1, n+2, n+3, ...\} = \{0, 1, 2, ...\} = \omega$.
Inotre, applicando nuovamente la definizione e sapendo che $\forall n \in \omega \quad n + \omega = \omega$, si ha che
$\forall n \in \omega \quad n + S(\omega) = \bigcup\{n + m \mid m \in S(\omega) = \{0, 1, 2, ..., \omega\}\} = \bigcup\{n, n + 1, ..., \omega\} = \{0, 1, 2, ..., \omega\} = S(\omega)$.

□

Analizzando la definizione 4, si possono infine dimostrare i seguenti risultati:

* l'addizione di ordinali non è commutativa
(infatti, per la proposizione precedente, $1 + \omega = \omega$, ma dalla definizione 4 segue che $\omega + 1 = \omega + S(0) = S(\omega + 0) = S(\omega) \neq \omega$);

* l'addizione per ordinali è associativa, ovvero
$\forall \alpha, \beta, \gamma$ ordinali $\quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

* non vale la "proprietà di cancellazione"
(secondo la quale $a + b = c + b$ implica $a = c$).
Infatti, per esempio, $\omega = 0 + \omega = 1 + \omega = \omega$, ma $0 \neq 1$;

* $\omega+\omega = \bigcup \{\omega+n \mid n \in \omega\} = \bigcup \{\omega, \omega+1, ..., \omega+n, ...\} = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega+1, ..., \omega + n, ...\}$.

Remark
Consideriamo la funzione $f : \omega \to Im(f)$ definita in questo modo:

$$\forall n \in \omega \quad f(n) = \omega + n$$

Per l'assioma di rimpiazzamento abbiamo che $Im(f) = \{\omega, \omega+1, ...\}$ è un insieme. Inoltre è immediato osservare che

$$\omega + \omega = \omega \cup Im(f)$$

Possiamo quindi concludere dicendo che $\omega+\omega$ è un numero ordinale (infatti sappiamo che $\{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, ..., \omega + n, ...\}$ è un *insieme* transitivo e totalmente ordinato dall'appartenenza).

2.2.2 Moltiplicazione

Definizione 5

Dato α numero ordinale:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda = \bigcup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in \lambda\} \quad \text{con } \lambda \text{ ordinale limite} \end{cases}$$

Abbiamo quindi che

$\omega \cdot 0 = 0$

$\omega \cdot 1 = \omega \cdot S(0) = \omega \cdot 0 + \omega = 0 + \omega = \omega$

$\omega \cdot 2 = \omega \cdot S(1) = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega$

$\omega \cdot 3 = \omega \cdot S(2) = \omega \cdot 2 + \omega = \omega + \omega + \omega$

...

$\omega \cdot \omega = \bigcup \{\omega \cdot n \mid n \in \omega\} = \bigcup \{0, \omega, \omega+\omega, \omega+\omega+\omega, ...\} = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, ..., \omega + \omega, ...\}$

$1 \cdot \omega = \bigcup \{1 \cdot n \mid n \in \omega\} = \bigcup \{0, 1, 2, ...\} = \omega$

$2 \cdot \omega = \bigcup \{2 \cdot n \mid n \in \omega\} = \bigcup \{0, 2, 4, ...\} = \omega$

...

Di conseguenza si possono provare i seguenti risultati:

* la moltiplicazione tra ordinali non è commutativa
  Basta, per esempio, osservare che $\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega = 2 \cdot \omega$)
* la proprietà distributiva vale solamente da una parte: abbiamo infatti che, in generale,

  $$(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

  Ad esempio $(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$

2.2.3 Potenza

Definizione 6

Dato α numero ordinale:

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1 & \text{con } \alpha \geq 1 \\ \alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha & \\ \alpha^\lambda = \bigcup\{\alpha^\gamma \mid \gamma \in \lambda\} & \text{con } \lambda \text{ ordinale limite} \end{cases}$$

Abbiamo quindi che:

$\omega^0 = 1$

$\omega^1 = \omega^{S(0)} = \omega^0 \cdot \omega = 1 \cdot \omega = \omega$

$\omega^2 = \omega^{S(1)} = \omega^1 \cdot \omega = \omega \cdot \omega$

$\omega^3 = \omega^{S(2)} = \omega^2 \cdot \omega = \omega \cdot \omega \cdot \omega$

...

$\omega^\omega = \bigcup \{\omega^n \mid n \in \omega\} = \bigcup \{1, \omega, \omega^2, ...\} = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, ..., \omega + \omega, \omega + \omega + 1, ..., \omega^2, ...\}$

Alcune conseguenze di questa definizione sono le seguenti proprietà:

* $\forall \gamma \quad 1^\gamma = 1$
* $\forall n \in \omega, n \geq 2 \qquad n^\omega = \omega$
  (per esempio $2^\omega = \bigcup \{2^n \mid n \in \omega\} = \bigcup \{1, 2, 2^2, 2^3, ...\} = \{0, 1, 2, ...\} = \omega$)
* $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$
* $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$
* In generale $(\alpha \cdot \beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$
  (per esempio $(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega$, ma $2^\omega \cdot 2^\omega = \omega \cdot \omega = \omega^2 \neq \omega$)

2.2.4 Induzione transfinita

Per costruire i numeri surreali e dimostrare molti risultati legati ad essi, nei prossimi capitoli faremo largo uso di una tecnica dimostrativa nota con il nome di induzione transfinita.
Tale metodo dimostrativo si basa sul seguente teorema:

Teorema di induzione transfinita

Data $P(x)$ proprietà ben definita sugli ordinali, se è vero che

1. vale $P(0)$
2. $\forall\alpha$ ordinale $\quad (P(\alpha) \rightarrow P(\alpha+1))$
3. $\forall X$ insieme di ordinali $\quad (\ \forall\beta \in X\ P(\beta) \rightarrow P(\bigcup X)\ )$

allora

$$\forall(x \text{ ordinale}) \quad P(x)$$

Remark
Il passo 2 sfrutta il ragionamento induttivo classico e copre il caso di tutti gli ordinali successore.
Il passo 3, invece, permette di trattare anche il caso degli ordinali limite in quanto sfrutta il fatto che un ordinale limite β è l'estremo superiore di tutti gli ordinali $\alpha < \beta$.

Capitolo 3

Numeri Surreali

In questo capitolo, dopo aver costruito i numeri surreali all'interno della teoria ZFC, definiremo su tali numeri le operazioni fondamentali di somma e prodotto dimostrandone le principali proprietà.
Infine proveremo che l'insieme dei numeri surreali munito di tali operazioni è proprio un campo. In questo caso si sono presi come spunto i libri [1] e [2].
Procediamo, però, per gradi partendo dalla costruzione dei numeri surreali.

3.1 Costruzione in ZFC

Per poter costruire all'interno della teoria degli insiemi ZFC quello che vedremo essere il campo dei numeri surreali, abbiamo bisogno di un metodo che ci consenta di dare una definizione di classe di equivalenza per relazioni (di equivalenza) su una classe propria.
A tal proposito presentiamo in breve il cosiddetto trucco di Scott (*Scott's trick*), un metodo basato sull'assioma di regolarità ma non su quello di scelta.

3.1.1 Scott's trick

Nella teoria di Zermelo-Fraenkel per definire le classi di equivalenza di una relazione $\sim$ su un insieme X basta prendere alcuni elementi dell'insieme potenza $P(X)$. L'insieme quoziente si può invece definire come un particolare sottoinsieme di $P(X)$. Tuttavia questo approccio non può essere applicato quando si hanno relazioni di equivalenza definite su classi anziché su insiemi (in ZFC, infatti, non è definita una "classe potenza" di una data classe).

Dana Scott nel 1955 trovò un metodo alternativo per definire le classi di equivalenza in ZF. Tale metodo ha preso il nome di trucco di Scott.

Lo Scott's trick si basa essenzialmente sull'assioma di regolarità (in realtà sul più forte assioma di fondazione), ma non su quello di scelta.
Prima di presentare il metodo appena citato, diamo la definizione (per induzione) di rango di un insieme, strumento importante della teoria degli insiemi che risulta necessario all'esposizione che segue:

Definizione 7

Dato un insieme A, si dice rango di A (e si indica con $rank(A)$) il più piccolo numero ordinale che sia maggiore del rango di tutti i suoi membri. Per definizione poniamo $rank(\emptyset) = 0$.

In teoria degli insiemi si usa il termine *gerarchia di von Neumann* per indicare la seguente successione definita per ricorsione:

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ \mathrm{V}_{\alpha+1} \;=\; P(V_\alpha) \\ \mathrm{V}_\lambda = \bigcup\{V_\gamma \mid \gamma \in \lambda\} \quad \text{con } \lambda \text{ ordinale limite} \end{cases}$$

Remark 1

Per ogni α ordinale V_α è un insieme

Remark 2

$VN = \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha \ ordinale\}$ non è un insieme, ma una classe propria.
Per di più si può dimostrare che assumere l'assioma di fondazione equivale ad affermare che $VN = V$ con V classe contenente tutti i possibili insiemi (V non è un insieme perché se lo fosse avremmo il paradosso di Russell e ciò andrebbe in contrasto con l'assioma di rimpiazzamento).

Remark 3

Dato un insieme A, possiamo quindi definire in questi altri due modi equivalenti il suo rango:

* $rank(A)$ è il più piccolo ordinale α tale che $A \subseteq V_\alpha$
* $rank(A) = \bigcup \{rank(a) + 1 \mid a \in A\}$ con $rank(\emptyset) = 0$

Memori della definizione di coppia data da Kuratowski, utilizzando quest'ultima definizione di rango è possibile dimostrare che il rango di una coppia ordinata (a, b) è il massimo tra i ranghi dei suoi elementi maggiorato di 2, ovvero $max\{rank(a), rank(b)\} + 2$.

Ricordando la costruzione "classica" in ZFC degli ordinali (con $0 = \emptyset,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\}, ...,\ \omega = \{0, 1, 2, ...\},\ \omega + 1 = \{0, 1, 2, ..., \omega\}, ...$) abbiamo quindi che:

$rank(0) = rank(\emptyset) = 0$

$rank(1) = \bigcup \{rank(0) + 1\} = \bigcup \{1\} = \{0\} = 1$

$rank(2) = \bigcup \{rank(0) + 1, rank(1) + 1\} = \bigcup \{1, 2\} = \{0, 1\} = 2$

...

$rank(\omega) = \bigcup \{1, 2, 3, ...\} = \omega$

$rank(\omega + 1) = \bigcup \{1, 2, 3, ..., \omega + 1\} = \omega + 1$

$rank(1, 2) = max\{rank(1), rank(2)\} + 2 = 4$

Osservazione

Si può dimostrare che per ogni α ordinale $rank(\alpha) = \alpha$

Data $\sim$ relazione di equivalenza tra insiemi ed a insieme (con classe di equivalenza $[a]$), consideriamo ora $V \cap [a]$.
Tale intersezione non è vuota in quanto $a \in V$ (a è un insieme) e $a \in [a]$ poiché ogni relazione di equivalenza, in quanto tale, è simmetrica.
Nelle prossime righe vedremo che è sempre possibile definire un insieme che rappresenti $[a]$ nella teoria ZFC, anche se $[a]$ è una classe propria.

Dato che nella teoria degli insiemi ZFC è assunto come valido l'assioma di fondazione, abbiamo che $V = VN = \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha \text{ } \mathit{ordinale}\}$.
In virtù del fatto che $V \cap [a] \neq \emptyset$, esiste quindi un ordinale minimo α tale che $V_\alpha \cap [a] \neq \emptyset$.
Dunque, essendo $V_\alpha \cap [a]$ un insieme (è infatti un sottoinsieme dell'insieme V_α che possiamo ottenere grazie all'assioma di separazione), siamo autorizzati a prenderlo in rappresentanza di $[a]$.

In conclusione, data una relazione di equivalenza, per ogni relativa classe di equivalenza si può sempre trovare un insieme che la sostituisca in ZFC.

3.1.2 Costruzione numeri surreali

È arrivato il momento di presentare la costruzione in ZFC dei numeri surreali. Tale costruzione sarà indicizzata dagli ordinali e farà uso di alcuni dei risultati visti in precedenza.
Partiremo dalla definizione di gioco, per poi passare a quella di pre-numero (accompagnata da alcuni importanti risultati) ed infine arrivare a quella di numero. A quel punto potremo procedere con la costruzione di tali numeri surreali.

Definizione 8

Chiamiamo *gioco* una qualsiasi coppia ordinata (L,R) con L ed R insiemi i cui elementi sono essi stessi giochi di rango minore.
$[\forall x \in L \cup R \quad$ (x è un gioco) & $\; rank(x) < rank((L,R))]$

Dopo aver dato in modo induttivo la definizione di *gioco*, introduciamo ancora una volta induttivamente le seguenti relazioni sui giochi:

Definizione 9

Per ogni coppia di giochi $x = (L, R),\ y = (L^{'}, R')$

$$(x \leq y) \quad \leftrightarrow \quad [\ (\neg\exists\ l \in L \ \ (l \geq y)) \quad \& \quad (\neg\exists\ r^{'} \in R^{'} \ (x \geq r^{'}))\ ]$$

Definizione 10

$\forall x, y$ giochi

$$x \doteq y \quad \leftrightarrow \quad [\ (x \leq y) \quad \& \quad (y \leq x)\ ]$$

Siamo ora in grado di definire induttivamente i pre-numeri:

Definizione 11

Si dice *pre-numero* un qualsiasi gioco (L, R) tale che

1. $\forall x \in L \cup R \quad x$ è un pre-numero
2. $\forall l \in L\ \forall r \in R \quad \neg(l \geq r)$

Il fatto che la definizione 11 (come d'altronde anche la definizione 10) sia di tipo induttivo implica che la costruzione dei pre-numeri avvenga in step successivi indicizzati sugli ordinali.
Possiamo quindi associare ad ogni pre-numero x il valore *step*(x) che indica a quale passo induttivo della costruzione esso è apparso per la prima volta.

In base alle definizioni date, il primo ed unico pre-numero che si può creare allo *step* 0 è $(\emptyset, \emptyset)$ (banalmente soddisfa le condizioni richieste dalle definizioni di gioco e, in particolare, di pre-numero).
Allo *step* 1 gli unici nuovi pre-numeri costruibili sono $(\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\})$ e $(\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$.

Remark

Anche $(\{(\emptyset, \emptyset)\}, \{(\emptyset, \emptyset)\})$ è una coppia formata da insiemi aventi pre-numeri come elementi, tuttavia esso non verifica la condizione 2 della definizione di pre-numero.
Per poterlo vedere abbiamo bisogno di un risultato propedeutico:

Proposizione (▲)

$$(\emptyset, \emptyset) \leq (\emptyset, \emptyset)$$

dimostrazione:

Questa disuguaglianza vale per la definizione 9: sono infatti banalmente verificate le seguenti affermazioni:

* $\neg\exists\ l \in \emptyset \quad (\ l \geq (\emptyset, \emptyset)\ )$
* $\neg\exists\ r' \in \emptyset \quad (\ (\emptyset, \emptyset) \geq r'\ )$ □

Osservazione:

È immediato vedere che vale anche il viceversa e quindi, per la definizione 10, possiamo affermare che:

$$(\emptyset, \emptyset) \doteq (\emptyset, \emptyset).$$

Ora che abbiamo provato questa proposizione, siamo in grado di ottenere il risultato che volevamo dimostrare:

Proposizione (■)

$$(\{(\emptyset, \emptyset)\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}) \text{ non è un pre-numero}$$

dimostrazione:

per la proposizione (▲) abbiamo che $(\emptyset, \emptyset) \geq (\emptyset, \emptyset)$, ma questo viola la condizione 2 della definizione 11 per la quale $\forall l \in L \ \forall r \in R \quad \neg(l \geq r)$.
□

Ricapitolando, allo step 1 abbiamo due nuovi pre-numeri per i quali si può dimostrare, utilizzando direttamente le definizioni (come fatto in precedenza), che:

1. $(\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\}) \ \leq \ \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$;
2. $\neg \ [\ \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \ \leq \ (\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\}) \ ]$
   (abbiamo infatti che $(\emptyset, \emptyset) \geq (\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\})$).

Abbiamo capito quindi come costruire via via i pre-numeri tramite questo processo induttivo (iterato sugli ordinali): prendendo coppie di insiemi (L, R) tali per cui gli elementi di L ed R sono pre-numeri già esistenti che rispettano la condizione 2 della definizione 11.

Vediamo ora alcuni importanti risultati che riguardano i pre-numeri:

Proposizione 1

Dati $x = (L, R),\ y = (L^{'}, R^{'}),\ z = (L^{''}, R^{''})$ pre-numeri

$$[\ (x \leq y)\ \&\ (y \leq z)\ ]\ \rightarrow\ (x \leq z)$$

dimostrazione:

Dall'ipotesi $(x \leq y)$ abbiamo in particolare che

$$\forall l \in L \quad \neg\ (l \geq y) \qquad (*)$$

Invece la seguente affermazione è diretta conseguenza dell'ipotesi $(y \leq z)$:

$$\forall r^{''} \in R^{''} \quad \neg\ (y \geq r^{''}) \qquad (**)$$

Per assurdo supponiamo che valga $\neg\ (x \leq z)$.
Abbiamo quindi 2 possibilità:

1. $\exists\ \tilde{l} \in L \quad (\tilde{l} \geq z)$
2. $\exists\ \tilde{r}^{''} \in R^{''} \quad (x \geq \tilde{r}^{''})$

Procediamo con una dimostrazione per induzione transfinita su
$n = \mathit{step}(x) + \mathit{step}(y) + \mathit{step}(z)$:

- se $n = 0$, abbiamo che $x = y = z = (\emptyset, \emptyset)$ e raggiungiamo immediatamente l'assurdo in quanto affermare che vale $\neg(x \leq z)$ è in contraddizione con quanto affermato nella proposizione (▲) (ovvero $(\emptyset, \emptyset) \leq (\emptyset, \emptyset)$).
- Sia l'enunciato valido per pre-numeri con somma degli step $n \leq \alpha$ (α ordinale) e supponiamo per assurdo che non valga per x, y, z tali che $\mathit{step}(x) + \mathit{step}(y) + \mathit{step}(z) = \alpha + 1$.

  Se siamo nel caso 1, allora $(y, z, \tilde{l})$ sono tre prenumeri tali che

  $$y \leq z, \quad z \leq \tilde{l} \quad \text{e} \quad \neg\ (y \leq \tilde{l})$$
  $$(\text{infatti } \tilde{l} \in L \text{ e vale } (*))$$

  Tuttavia, dato che $\mathit{step}(y) + \mathit{step}(z) + \mathit{step}(\tilde{l}) \leq \alpha$ ($\tilde{l}$ ha step minore di $x = (L, R)$ perchè è elemento di L), abbiamo l'assurdo per ipotesi induttiva.

Se siamo nel caso 2, analogamente $(\tilde{r}'', x, y)$ sono tre pre-numeri tali per cui

$$\tilde{r}'' \leq x, \quad x \leq y \quad \text{e} \quad \neg\,(\tilde{r}'' \leq y)$$
$$(\text{infatti } \tilde{r}'' \in R'' \text{ e vale } (**))$$

Questo tuttavia genera una contraddizione in quanto per $(\tilde{r}'', x, y)$ vale l'ipotesi induttiva (somma degli step è minore di α).

- ▶ Dato l'insieme di ordinali $X = [0, \beta[$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo valido l'enunciato con $n = \gamma\ \forall \gamma \in X$ e dimostriamo che esso vale anche per $n = \beta$.

  Supponendo per assurdo che

  $$x \leq y, \quad y \leq z \quad \text{e} \quad \neg\,(x \leq z) \qquad \text{con } n = \beta$$

  raggiungiamo un assurdo sia nel caso 1 che nel caso 2 in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Abbiamo infatti che la somma degli step di y, z, e $\tilde{l}$ nel caso 1 e di $\tilde{r}''$, x, e y nel caso 2 è $< \beta$ e quindi, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale che appartiene ad X. In questo modo, tramite il passo induttivo, si trova una contraddizione nello stesso modo in cui lo si è fatto nel punto precedente.

□

Lemma 1

$$\forall\ x \text{ pre-numero} \qquad x \doteq x$$

dimostrazione:

Per provare questo enunciato è sufficiente dimostrare che $\forall x$ pre-numero $x \leq x$ (l'altra disuguaglianza è identica).
Dimostriamo tale risultato per induzione transfinita su $n = step(x)$:

- ▶ se $n = 0$, abbiamo $x = (\emptyset, \emptyset)$ e possiamo concludere grazie alla proposizione (▲).
- ▶ Sia l'enunciato valido per i pre-numeri x con $n \leq \alpha$ (α ordinale) e supponiamo per assurdo che esista un pre-numero $y = (L, R)$ con $step(y) = \alpha + 1$ tale per cui $\neg\,(y \leq y)$.
  Abbiamo quindi due possibilità:
  1. $\exists\ \tilde{l} \in L \quad (\tilde{l} \geq y)$
  2. $\exists\ \tilde{r} \in R \quad (y \geq \tilde{r})$

Se siamo nel caso 1, come conseguenza di $(\tilde{l} \geq y)$, abbiamo che $\forall l \in L \quad \neg\, (l \geq \tilde{l})$. Ciò però implica la validità di $\neg\, (\tilde{l} \geq \tilde{l})$ in quanto $\tilde{l} \in L$. Questo tuttavia genera un assurdo a causa dell'ipotesi induttiva ($\tilde{l} \in L$ e quindi è un pre-numero con $step(\tilde{l})<step(y)$).

Se siamo nel caso 2, $(y \geq \tilde{r})$ implica che $\forall r \in R \quad \neg\, (\tilde{r} \geq r)$. Conseguenza di ciò è la validità di $\neg\, (\tilde{r} \geq \tilde{r})$, ma questo genera una contraddizione a causa dell'ipotesi induttiva ($step(\tilde{r})<step(y)$ dato che $\tilde{r} \in R$).

- Dato l'insieme di ordinali $X = [0, \beta[$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo valido l'enunciato con $n = \gamma\ \forall \gamma \in X$ e dimostriamo che esso vale anche per $n = \beta$.

  Supponendo per assurdo che esista $y = (L, R)$ con $step(y) = \beta$ tale per cui vale $\neg\, (y \leq y)$, in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente nel caso 1 otteniamo $\neg\, (\tilde{l} \geq \tilde{l})$ e nel caso 2 $\neg\, (\tilde{r} \geq \tilde{r})$ con $\tilde{l} \in L$ e $\tilde{r} \in R$. In entrambi i casi abbiamo una contraddizione per l'ipotesi induttiva ($step(\tilde{l})$ e $step(\tilde{r})$ sono $<\beta$ e, per la proprietà fondamentale del sup, sono ordinali che appartengono ad X).

$\square$

Lemma 2

$\forall x = (L, R)$ pre-numero:

$$\forall l \in L\ \forall r \in R \qquad l \leq x \leq r$$

dimostrazione:

Dimostriamo qui che $\forall l \in L\ (l \leq x)$. La dimostrazione di $\forall r \in R\ (x \leq r)$ è analoga. Per di più si osservi che tale catena di disequazioni è ben definita in quanto, per definizione di pre-numero, abbiamo che
$\forall l \in L\ \forall r \in R \quad \neg\, (l \geq r)$.

Dimostriamo questo lemma per induzione transfinita su $n = step(x)$:

- se $n = 0$ abbiamo che $x = (\emptyset, \emptyset)$ ed è quindi banalmente vera l'espressione $\forall l \in \emptyset \quad (l \leq x)$.
- Sia l'enunciato vero per i pre-numeri x con $n \leq \alpha$ (α ordinale) e per assurdo supponiamo che esista un pre-numero $y = (L, R)$ tale per cui $\exists\ \tilde{l} = (L', R') \in L \quad \neg\, (\tilde{l} \leq y)$.
  Abbiamo quindi due possibilità:
  1. $\exists\ \tilde{r} \in R \quad (\tilde{l} \geq \tilde{r})$
  2. $\exists\ l' \in L' \quad (l' \geq y)$

Nel caso 1 abbiamo un assurdo perché, per definizione di pre-numero, $\forall l \in L\ \forall r \in R \quad \neg\ (l \geq r)$.

Nel caso 2, unitamente al fatto che $l^{'} \geq y$ abbiamo, per ipotesi induttiva, che $l^{'} \leq \tilde{l}$ (infatti, essendo $\tilde{l} = (L^{'}, R^{'})$ e $l^{'} \in L^{'}$, $step(l^{'}) < step(\tilde{l})$). Applicando ora la proposizione 1 (transitività) abbiamo che $\tilde{l} \geq y$.
In particolare, quindi, abbiamo che $\forall l \in L \quad \neg\ (l \geq \tilde{l})$ e questo implica la validità di $\neg\ (\tilde{l} \geq \tilde{l})$ (infatti $\tilde{l} \in L$) e ciò è assurdo per il lemma 1.

- Dato l'insieme di ordinali $X = [0, \beta[$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo valido l'enunciato con $n = \gamma\ \forall \gamma \in X$ e dimostriamo che esso vale anche per $n = \beta$.

  Supponendo per assurdo che esista $y = (L, R)$ con $step(y) = \beta$ tale per cui $\exists\ \tilde{l} = (L^{'}, R^{'}) \in L \quad \neg\ (\tilde{l} \leq y)$, in modo analogo a quanto fatto precedentemente, nel caso 1 otteniamo un assurdo per definizione di pre-numero.
  Nel caso 2, essendo $l^{'} \in L^{'}$ con $\tilde{l} = (L^{'}, R^{'}) \in L$, abbiamo che $step(l^{'}) < step(\tilde{l}) < \beta$ e quindi possiamo utilizzare l'ipotesi induttiva affermando che $l^{'} \leq \tilde{l}$ (per la proprietà fondamentale del sup infatti $step(\tilde{l}) \in X$). A questo punto, procedendo in modo analogo a prima raggiungiamo l'assurdo (otteniamo $\neg\ (\tilde{l} \geq \tilde{l})$, che è in contrasto con il lemma 1).

$\square$

Proposizione 2

$$\forall x, y \text{ pre-numeri} \qquad [\ (x \leq y) \vee (y \leq x)\ ]$$

dimostrazione:

Per assurdo esistano due pre-numeri $x = (L, R)$ ed $y = (L^{'}, R^{'})$ tali che $\neg\ (x \leq y)\ \&\ \neg\ (y \leq x)$.

Dato che $\neg\ (x \leq y)$, allora abbiamo due possibili scenari:

1. $\exists\ l \in L \quad (l \geq y)$
2. $\exists\ r^{'} \in R^{'} \quad (x \geq r^{'})$

Nel caso 1, visto che sappiamo che, per il lemma 2, $x \geq l$, possiamo usare la transitività (proposizione 1) per concludere che $x \geq y$. Questo tuttavia è assurdo in virtù del fatto che $\neg\ (y \leq x)$.

Nel caso 2, dato che, per il lemma 2, $r^{'} \geq y$, per la proposizione 1 (transitività) abbiamo che $x \geq y$ e ciò è assurdo (vale infatti $\neg\ (y \leq x)$).

□

Remark

Conseguenza diretta di questa importante proposizione è il fatto che tutti i pre-numeri sono tra loro confrontabili tramite la relazione che abbiamo introdotto con la definizione 9.

Diamo ora questa naturale definizione per le disuguaglianze strette $<$ e $>$:

Definizione 12

$\forall\ x,\ y$ pre-numeri

$$x<y \ \leftrightarrow\ [\ (x \leq y)\ \&\ \neg\ (x \doteq y)\ ]$$

$$x>y \ \leftrightarrow\ [\ (x \geq y)\ \&\ \neg\ (x \doteq y)\ ]$$

Remark 1

Con questa nuova definizione il lemma 2 diventa:

$$\forall (x = (L, R) \text{ pre-numero}) \quad \forall l \in L\ \forall r \in R \quad (l < x < r)$$

Infatti, dato un pre-numero $x = (L, R)$, visto che $x \leq x$, per la definizione 9 abbiamo che

$$[\ \forall\ l \in L \quad (l < x)\ ]\ \&\ [\ \forall\ r \in R \quad (x < r)\ ]$$

Remark 2

Grazie a questa definizione possiamo considerare queste equivalenze:

* $\neg\ (x \leq y)\ \leftrightarrow\ (x>y)$

* $\neg\ (x>y)\ \leftrightarrow\ (x \leq y)$

Ora quindi possiamo provare i seguenti due corollari della proposizione 1:

Corollario 1

$$\forall x,\ y, \text{ pre-numeri} \quad [(x < y)\ \&\ (y \leq z)] \rightarrow (x < z)$$

dimostrazione:

Per assurdo supponiamo che $\neg\ (x < z)$.
Sulla base della definizione 12 abbiamo quindi che $x \geq z$, inoltre, dato che per ipotesi $y \leq z$, la proposizione 1 ci permette di concludere che $x \geq y$ e ciò è assurdo in quanto per ipotesi abbiamo che $x < y$.

□

Corollario 2

$$\forall x,\ y, \text{ pre-numeri} \quad [(x \leq y)\ \&\ (y < z)] \rightarrow (x < z)$$

dimostrazione:

Per assurdo supponiamo che $\neg\ (x < z)$.
Sulla base della definizione 12 abbiamo quindi che $x \geq z$, inoltre, dato che per ipotesi $x \leq y$, la proposizione 1 ci permette di concludere che $y \geq z$ e ciò è assurdo in quanto per ipotesi abbiamo che $y < z$.

□

Per poter dare la definizione di numero (surreale) abbiamo bisogno di un ulteriore tassello. Esso ci è fornito dal seguente risultato:

Proposizione 3

$$\doteq \quad \text{è una relazione d'equivalenza sui pre-numeri}$$

dimostrazione:

Per dimostrare che $\doteq$ è una relazione d'equivalenza basta mostrare che valgono riflessività (R), simmetria (S) e transitività (T).

(**R**) dimostrazione data dal lemma 1

(**S**) se $x \doteq y$ allora abbiamo che vale $(x \leq y)\ \&\ (y \leq x)$ e ciò equivale (per la commutatività dell'& logico) a dire $y \doteq x$

(**T**) dati $x \doteq y$ e $y \doteq z$, per la definizione 10, abbiamo in particolare che $x \leq z$ e $z \leq x$ e ciò è equivalente ad affermare che $x \doteq z$.

□

La nozione di pre-numero porta con sé, come abbiamo visto, moltissime delle proprietà che vorremmo che i numeri (surreali) avessero.
Tuttavia esistono un'infinità di pre-numeri che sono equivalenti tra loro tramite la relazione di equivalenza $\doteq$.
A riprova di questo si può dimostrare, per esempio, la seguente proposizione:

Proposizione 4

Sia $x = (L, R)$ un pre-numero.
Dati $L^{'}$ ed $R^{'}$ insiemi di pre-numeri t.c

$$\forall\ l^{'} \in L^{'}\ \forall\ r^{'} \in R^{'} \quad (l^{'} < x < r^{'})$$

allora

$$x \doteq (L \cup L^{'}, R \cup R^{'})$$

dimostrazione:

Posto $z = (L \cup L^{'}, R \cup R^{'})$, dobbiamo dimostrare che:

* $z \leq x$ ovvero $[\ \forall\ w \in L \cup L^{'} \quad (w < x)\ ]\ \&\ [\ \forall\ r \in R \quad (z < r)\ ]$
* $x \leq z$ ovvero $[\ \forall\ l \in L \quad (l < z)\ ]\ \&\ [\ \forall s \in R \cup R^{'} \quad (x < s)\ ]$

In definitiva basta dimostrare le due affermazioni seguenti:

1. $\forall\ w \in L \cup L^{'}\ \forall s \in R \cup R^{'} \quad (w < x < s)$
2. $\forall l \in L\ \forall r \in R \quad (l < z < r)$

Per quanto visto fin qui sappiamo che $\forall\ l \in L\ \forall r \in R \quad (l < x < r)$.
Unitamente a questo abbiamo l'ipotesi della proposizione, la quale afferma che $\forall\ l^{'} \in L^{'}\ \forall\ r^{'} \in R^{'} \quad (l^{'} < x < r^{'})$. A questo punto la dimostrazione del punto 1 segue banalmente dall'unione di questi due fatti.

Dato che $z = (L \cup L^{'}, R \cup R^{'})$, allora $\forall s \in R \cup R^{'} \quad (z < s)$ e $\forall w \in L \cup L^{'} \quad (w < s)$. A maggior ragione abbiamo quindi che $\forall r \in R \quad (z < r)$ e $\forall l \in L \quad (l < z)$ e ciò dimostra il punto 2.

$\square$

L'esistenza di infiniti pre-numeri distinti che siano equivalenti tra loro tramite $\doteq$ è il principale motivo per cui ora passeremo dal concetto di pre-numero a quello di numero (surreale).

Definizione 13

Per ogni dato pre-numero x, chiamiamo *numero* (surreale) $[x]$, ovvero l'insieme di tutti i pre-numeri y di rango minimo tali che $x \doteq y$.

Remark 1

Un numero non è nient'altro che un insieme di pre-numeri, i quali sono equivalenti tra loro e sono stati creati "il prima possibile" (quest'ultimo concetto nella definizione è espresso tramite la nozione di rango di un insieme).

Remark 2

L'insieme $[x]$ è ben definito in ZFC tramite lo Scott's trick di cui abbiamo parlato nella sezione precedente a questa.
Un numero diventa quindi un insieme piuttosto ristretto di coppie ordinate (L, R) che sono definite in accordo con la definizione di Kuratowski ($(L, R) = \{\{L\}, \{L, R\}\}$).

Remark 3

Le relazioni d'ordine $\leq$ e $<$ che abbiamo definito sui pre-numeri e tutti i risultati ad esse collegati che abbiamo dimostrato continuano a valere anche per i numeri. Basta infatti considerare tali relazioni sui rappresentanti degli insiemi di equivalenza, i quali sono pre-numeri.

Procediamo ora con la costruzione passo passo dei numeri surreali.
Tale costruzione, come già sottolineato, è iterata sugli ordinali.

Cominciamo presentando la prima parte della costruzione, quella ottenuta in un numero di step $< \omega$ (ovviamente le uguaglianze che seguono sono definizioni):

STEP 0

$$0 = [\ (\emptyset, \emptyset)\ ]$$

STEP 1

$$\begin{aligned} -1 &= [\ (\emptyset, \{0\})\ ] \\ 1 &= [\ (\{0\}, \emptyset)\ ] \end{aligned}$$

STEP 2

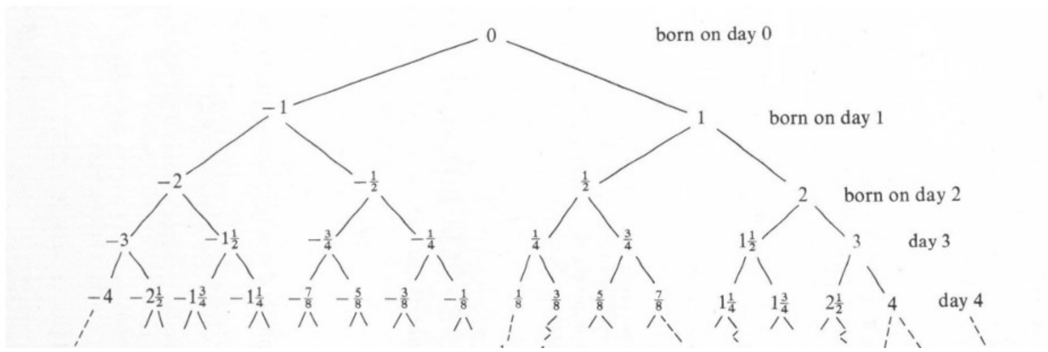
$$\begin{aligned} -2 &= [\ (\emptyset, \{-1\})\ ] \\ 2 &= [\ (\{1\}, \emptyset)\ ] \\ -\frac{1}{2} &= [\ (\{-1\}, \{0\})\ ] \\ \frac{1}{2} &= [\ (\{0\}, \{1\})\ ] \end{aligned}$$

STEP 3

$$\begin{aligned} -3 &= [\ (\emptyset, \{-2\})\ ] \\ 3 &= [\ (\{2\}, \emptyset)\ ] \\ -\frac{3}{2} &= [\ (\{-2\}, \{-1\})\ ] \\ \frac{3}{2} &= [\ (\{1\}, \{2\})\ ] \\ -\frac{3}{4} &= [\ (\{-1\}, \{-\frac{1}{2}\})\ ] \\ \frac{3}{4} &= [\ (\{\frac{1}{2}\}, \{1\})\ ] \\ -\frac{1}{4} &= [\ (\{-\frac{1}{2}\}, \{0\})\ ] \\ \frac{1}{4} &= [\ (\{0\}, \{\frac{1}{2}\})\ ] \end{aligned}$$

• • •

$$\vdots$$



Costruzione dei numeri surreali fatta negli step precedenti allo step ω [1]

Osservazione:

Come avvenuto in questa prima parte di costruzione, per semplicità di notazione, spesso capiterà di identificare un numero surreale con un pre-numero che sia un suo rappresentante.

Remark 1

Il nome assegnato ai numeri surreali che sono stati creati in questi step è coerente rispetto all'usuale ordinamento dei numeri reali.
Sappiamo infatti che $\forall x = (L, R)$ pre-numero vale che $\forall\, l \in L\, \forall\, r \in R \quad (l < x < r)$ e ciò ci permette di concludere che anche per i numeri surreali

$$... < \ -3 < \ -2 < \ -\tfrac{3}{2} < ... < \tfrac{3}{2} < 2 < 3 < ...$$

Remark 2

Se allo step n i numeri esistenti sono $x_1 < ... < x_m$, allo step successivo vengono creati dei nuovi numeri che facciamo corrispondere ai seguenti numeri reali:

* $x_1 - 1$ (ovvero $(\emptyset, \{x_1\})$)

* $x_m + 1$ (ovvero $(\{x_m\}, \emptyset\})$)

* $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ $\forall i = 1, 2, ..., m-1$ (ovvero $(\{x_i\}, \{x_{i+1}\})$)

Vediamo ora che ad ogni step questi sono gli unici nuovi numeri che possono essere creati:

Lemma 3

Se i numeri distinti creati fino allo step n (compreso) sono $[x_1] < [x_2] < ... < [x_m]$, allora allo step $n + 1$ i nuovi numeri che verranno a crearsi saranno esattamente $m + 1$: $[(\emptyset, \{x_1\})], [(\{x_1\}, \{x_2\})], ..., [(\{x_{m-1}\}, \{x_m\})], [(\{x_m\}, \emptyset)]$

Osservazione:

Fino allo step 2 (compreso) sono stati creati 7 numeri distinti ed, infatti, allo step 3 i nuovi numeri costruiti sono 8. Ci aspetteremo quindi che durante lo step 4 vengano creati altri 16 nuovi numeri distinti tra loro e dai precedenti (fino allo step 3 compreso abbiamo infatti 8+7 numeri distinti).

dimostrazione:

Dimostriamo che qualunque altro numero (rispetto a quelli già creati) si possa creare durante lo step (n+1)-esimo è equivalente ad uno di quelli dell'enunciato.

Analizziamo tutti i casi uno ad uno:

- Consideriamo $(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$ per ogni $2 \leq i \leq m - 1$

  Per ipotesi sappiamo che $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ e ciò, per la proposizione 4, implica che

  $$x_i \doteq (L_i \cup \{x_{i-1}\}, R_i \cup \{x_{i+1}\})$$

  Possiamo affermare inoltre che $\forall\, l_i \in L_i \quad (l_i \leq x_{i-1})$ (infatti l_i è un (pre)numero già esistente $< x_i$) e, analogamente, che $\forall\, r_i \in R_i \quad (r_i \geq x_{i+1})$.
  Abbiamo quindi che:

  $$\forall\, l_i \in L_i\ \forall\, r_i \in R_i \quad l_i \leq x_{i-1} < (\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}) < x_{i+1} \leq r_i$$

  Per la proposizione 4 vale allora quest'altra equivalenza:

  $$(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}) \doteq (L_i \cup \{x_{i-1}\}, R_i \cup \{x_{i+1}\})$$

  Per la proprietà transitiva concludiamo che

  $$(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}) \doteq x_i$$

- Focalizziamoci ora su $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\})$ per ogni $2 \leq i < j \leq m-1$

  Consideriamo i (pre)numeri $x_i < x_{i+1} < ... < x_j$. Tra quelli con step di creazione minimo ne prendiamo uno che chiamiamo $x = (L, R)$. Necessariamente L ed R non contengono nessuno degli altri (pre)numeri di tale lista. Abbiamo quindi che

  $$\forall\ l \in L\ \forall\ r \in R \qquad (l \leq x_{i-1})\ \&\ (r \geq x_{j+1})$$

  Ciò, per la proposizione 4, implica che

  1. $x = (L, R) \doteq (L \cup \{x_{i-1}\}, R \cup \{x_{j+1}\})$
  2. $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\}) \doteq (L \cup \{x_{i-1}\}, R \cup \{x_{j+1}\})$

  Possiamo tramite la transitività concludere affermando che

  $$(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\}) \doteq x$$

- Rimangono da esaminare gli ultimi due casi: $(\emptyset, \{x_{j+1}\})$ con $0 \leq j \leq m-1$ e $(\{x_{i-1}\}, \emptyset)$ con $1 \leq i \leq m+1$

  Consideriamo i (pre)numeri $x_1 < x_2 < ... < x_j$. Tra quelli con step di creazione minimo ne prendiamo uno che chiamiamo $x = (L, R)$. Necessariamente $L = \emptyset$ ed R non contiene nessuno degli altri (pre)numeri di tale lista. Abbiamo quindi che

  $$\forall r \in R \quad (r \geq x_{j+1})$$

  Per la proposizione 4 valgono le seguenti conseguenze:

  1. $x = (\emptyset, R) \doteq (\emptyset, R \cup \{x_{j+1}\})$
  2. $(\emptyset, \{x_{j+1}\}) \doteq (\emptyset, R \cup \{x_{j+1}\})$

  Ancora una volta per la transitività possiamo concludere che

  $$(\emptyset, \{x_{j+1}\}) \doteq x$$

  In modo analogo si dimostra che $(\{x_{i-1}\}, \emptyset)$ è equivalente al primo (pre)numero creato tra $x_i, x_{i+1}, ..., x_m$ (ricordando che, per ipotesi, $x_i < x_{i+1} < ... < x_m$)

$\square$

Conseguenza diretta di questo lemma è la seguente proposizione:

Proposizione 5

I numeri distinti esistenti allo step n-esimo (compreso) sono

$$2^{n+1} - 1$$

dimostrazione:

Per ogni $i = 0, 1, 2, ...$ chiamiamo m_i la quantità di numeri distinti esistenti all'istante $(i-1)$-esimo (compreso) e poniamo, per definizione, $m_0 = 0$.

Per il lemma precedente sappiamo che all'i-esimo step vengono creati esattamente $m_i + 1$ nuovi numeri distinti.
Abbiamo quindi che all'i-esimo step i numeri distinti esistenti sono $m_{i+1} = m_i + (m_i + 1) = 2m_i + 1$ [allo step 0 c'è un solo numero, allo step 1 i numeri sono 3, allo step 2 sono $2 \cdot 3 + 1 = 7$, allo step 3 sono $2 \cdot 7 + 1 = 15$, etc...].

Riassumendo abbiamo quindi che, detta m_i la quantità di numeri distinti esistenti all'istante $(i-1)$-esimo (compreso),

$$\begin{cases} \mathrm{m}_0 = 0 \\ \mathrm{m}_{i+1} = 2m_i + 1 \qquad \text{per } i \geq 0 \end{cases}$$

Allo step n-esimo i numeri distinti esistenti saranno quindi

$$2\ m_n + 1 = 2\ (2\ m_{n-1} + 1) + 1 = 2^3\ m_{n-2} + 2^2 + 2 + 1 = ...$$

$$= 2^n\ m_1 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^2 + 2 + 1 =$$

$$2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n + \frac{1-2^{(n-1)+1}}{1-2} = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

$\square$

Come abbiamo visto, se allo step n-esimo i numeri esistenti sono $x_1 < x_2 < ... < x_m$, i nuovi numeri allo step (n+1)-esimo sono quelli che noi associamo ai reali:

* $x_1 - 1$
* $x_m + 1$
* $\frac{x_i+x_{i+1}}{2} \quad \forall i = 1, 2, ..., m-1$

Procedendo in questa maniera otteniamo tutti gli interi e tutti i numeri del tipo $\frac{a}{2^b}$ con $a, b \in Z,\ b{>}0$ (detti numeri diadici, ovvero con rappresentazione binaria finita).

Vorremmo tuttavia costruire dei numeri surreali che corrispondano ai classici numeri razionali con rappresentazione binaria infinita (ad esempio $\frac{1}{3}$) ed agli irrazionali.

Questi e molti altri numeri verranno costruiti negli step ω e seguenti. Vediamo in che modo:

STEP ω

$$\begin{aligned} \omega &= [\ (\{0,1,2,...\}, \emptyset)\ ] \\ -\omega &= [\ \emptyset, (\{..., -2, -1, 0\})\ ] \\ \epsilon &= [\ (\{0\}, \{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, ...\})\ ] \\ &... \end{aligned}$$

STEP $\omega + 1$

$$\begin{aligned} \omega + 1 &= [\ (\{\omega\}, \emptyset)\ ] \\ \omega - 1 &= [\ (\{0,1,2,...\}, \{\omega\})\ ] \\ \frac{1}{3} &= (0.0101010101...)_2 = \end{aligned}$$

$$= [\ (\{(0.01)_2,\ (0.0101)_2,\ (0.010101)_2,\ ...\}, \{(0.1)_2,\ (0.011)_2,\ (0.01011)_2,\ ...\})\ ]$$

$$\pi = (11.00100100001111...)_2 =$$

$$= [\ (\{(11.001)_2,\ (11.001001)_2,\ (11.00100100001)_2,\ ...\}, \{(11.1)_2,\ (11.01)_2,\ (11.0011)_2,\ ...\})\ ]$$

$$...$$

STEP $\omega + 2$

$$\begin{aligned} \omega + 2 &= [\ (\{\omega + 1\}, \emptyset)\ ] \\ \omega + \frac{1}{2} &= [\ (\{\omega\}, \{\omega + 1\})\ ] \\ &... \end{aligned}$$

•••

STEP $\omega \cdot 2$

$$2\ \omega = \omega + \omega = \ [\ (\{\omega + 1, \omega + 2, ...\}, \emptyset)\ ]$$
$$\omega + \pi, \quad \omega + \epsilon, \quad \omega - \epsilon, ...$$
$$...$$

•••

STEP $\omega \cdot 3$

$$3\ \omega = \omega + \omega + \omega = \ [\ (\{2\ \omega + 1, 2\ \omega + 2, ...\}, \emptyset)\ ]$$
$$...$$

•••

STEP ω^2

$$\omega^2 = \ [\ (\{\omega, 2\ \omega, 3\ \omega, 4\ \omega, ...\}, \emptyset)\ ]$$
$$...$$

•••

.
.
.
.

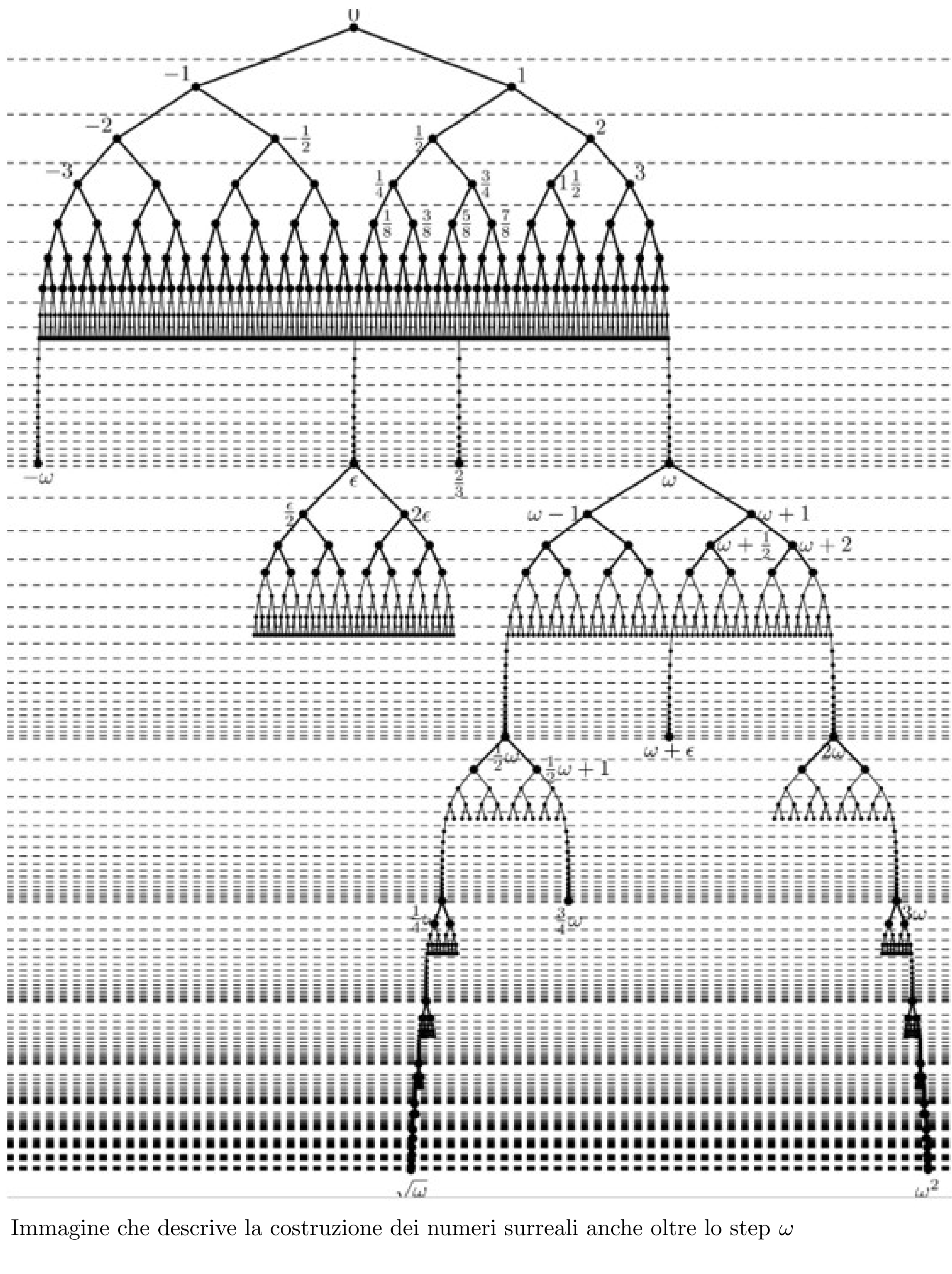


Immagine che descrive la costruzione dei numeri surreali anche oltre lo step ω

Remark 1

Allo step $\omega + 1$ otteniamo tutti gli irrazionali e tutti i razionali con rappresentazione binaria infinita.

Per costruirli basta prendere come insieme sinistro L e insieme destro R due insiemi infiniti di numeri diadici che tendono rispettivamente dal basso e dall'alto alla forma binaria infinita del numero che si vuole creare.

Si noti che stiamo prendendo come elementi dell'insieme destro e sinistro dei pre-numeri già creati negli step precedenti, ovvero numeri con rappresentazione binaria finita.
Abbiamo, quindi, per esempio che

$$\tfrac{1}{3} = [\ (\{(0.01)_2,\ (0.0101)_2, ...\}, \{(0.1)_2,\ (0.011)_2, ...\})\ ] =$$

$$[\ (\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16}, ...\}, \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}, ...\})\ ]$$

Remark 2

Durante lo step ω siamo riusciti a creare $\epsilon =\ [\ (\{0\}, \{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, ...\})\ ]$, un numero maggiore di zero che però è minore di ogni altro reale positivo.
Dunque, agendo in modo analogo, possiamo costruire anche dei numeri che siano infinitamente prossimi ai numeri che hanno rappresentazione binaria finita (ad esempio $[\ (\{1\}, \{1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{8}, ...\})\ ]$ è un numero infinitamente vicino ad 1).

In aggiunta a questo osserviamo che, come allo step $\omega+1$ è possibile costruire un nuovo numero che si trovi tra 0 ed ϵ, così allo step $\omega + 2$ sarà possibile costruirne un altro che si collochi tra 0 e quel numero e questo processo può essere continuamente reiterato.
L'insieme dei numeri surreali, oltre a contenere tutti i reali e gli infiniti nel senso di Cantor, contiene quindi anche gli infinitesimi.

Remark 3

Il metodo costruttivo adottato da Conway unisce il modo di agire che Cantor ha utilizzato nella costruzione degli ordinali a quello di cui si è servito Dedekind per costruire i reali. Infatti, utilizzando la notazione di cui ci siamo serviti fin qui, possiamo dire che Cantor si è occupato della costruzione di numeri del tipo $(L, \emptyset)$ (al fine di creare numeri "sempre più grandi"), mentre Dedekind si è focalizzato esclusivamente su coppie (L, R) con $L,\ R \neq \emptyset$ (il suo scopo era infatti quello di "colmare i buchi" tra i razionali).

Nelle prossime sezioni, per prima cosa, definiremo sui surreali le operazioni di somma e prodotto osservando che rispetto ad esse l'insieme dei numeri surreali è un campo totalmente ordinato.

In secondo luogo osserveremo che, mentre somma e prodotto si comportano sui "reali surreali" in modo analogo a quanto fanno le rispettive operazioni sui "reali classici", l'aritmetica degli ordinali subisce delle modifiche.

3.2 Operazioni con i numeri surreali

In questa sezione ci occuperemo delle operazioni di somma e prodotto di numeri surreali. Inizialmente le definiremo sui giochi e successivamente le applicheremo ai numeri surreali (tali numeri sono infatti classi di equivalenza di pre-numeri, i quali, per le definizione, non sono nient'altro che particolari giochi).

E' necessaria tuttavia una premessa: quando parleremo di operazioni tra numeri intenderemo sempre operazioni tra i loro rappresentanti (che sono pre-numeri). Il risultato di un'operazione tra numeri sarà quindi un numero (ovvero una classe di equivalenza) che avrà come rappresentante il risultato dell'operazione fatta tra i rappresentanti dei numeri di partenza.

3.2.1 Somma algebrica

Prima di cominciare soffermiamoci su una scelta di notazione che si ripeterà spesso durante la trattazione. Per semplificare la scrittura e facilitare la leggibilità di definizioni, teoremi e dimostrazioni, dati un insieme A ed un gioco b, indicheremo con $A + b$ l'insieme $\{a + b \mid a \in A\}$.

Fatta questa premessa partiamo ora con le definizioni di somma e differenza di giochi:

Definizione 14

Dati $x = (L_x,\ R_x), y = (L_y,\ R_y)$ giochi

$$x + y = (L_x + y \ \cup \ L_y + x,\ R_x + y \ \cup \ R_y + x)$$

Definizione 15

Dato un gioco $x = (L, R)$

$$\begin{cases} \text{-x} = \ (\emptyset,\ \emptyset) & \text{se } L = R = \emptyset \\ \text{-x} = \text{(-R, -L)} & \textit{con } \text{-L} = \ \{\text{-l} \mid \ l \in L\} \text{ e } -R \ = \ \{-r \ \mid \ r \in R\} \end{cases}$$

Remark

Questa definizione è coerente con i nomi che abbiamo assegnato ai numeri surreali nella costruzione della precedente sezione. Abbiamo, per esempio, che

$-0 = \ [\ -(\emptyset, \emptyset)\ ] = \ [\ (\emptyset, \emptyset)\ ] = 0$

$-1 = \ [\ -(\{0\}, \emptyset)\ ] = \ [\ (\emptyset, \{-0\})\ ] = \ [\ (\emptyset, \{0\})\ ]$

$-2 = \ [\ -(\{1\}, \emptyset)\ ] = \ [\ (\emptyset, \{-1\})\ ]$

$-\frac{1}{2} = \ [\ -(\{0\}, \{1\})\ ] = \ [\ (\{-1\}, \{0\})\ ]$

Definizione 16

Dati $x = (L_x,\ R_x),\ y = (L_y,\ R_y)$ giochi

$$x - y \ = \ x + (-y)$$

Procediamo ora dimostrando alcune importanti proprietà della somma algebrica che abbiamo appena definito.

Prima di farlo, però, osserviamo che la proposizione 1 ed il lemma 1 valgono anche per i giochi. Nella sezione precedente abbiamo infatti dimostrato questi risultati senza utilizzare la proprietà che distingue i pre-numeri dai giochi.

Abbiamo quindi che, dati $x,\ y,\ z$ giochi

* $[\ (x \leq y)\ \&\ (y \leq z)\ ]\ \rightarrow\ (x \leq z)$
* $x \doteq x$ e, in particolare, $x \leq x$

Adesso siamo pronti per dimostrare le proprietà fondamentali delle operazioni che abbiamo appena introdotto tramite le definizioni 14, 15 e 16.

Proposizione 6

Dati $x,\ y,\ z$ giochi

$$
\begin{array}{ll}
a) & x+y \;=\; y+x \\
b) & x+(\emptyset,\emptyset) \;=\; x \\
c) & (x+y)+z \;=\; x+(y+z)
\end{array}
$$

dimostrazione:

a) è conseguenza immediata della commutatività dell'unione insiemistica

b) dimostriamolo per induzione transfinita sul n, step di creazione del gioco x.

- se $n=0$, allora $x=(\emptyset,\emptyset)$ e l'enunciato è verificato immediatamente
- sia l'enunciato valido per giochi con step di creazione $\leq n-1$ e sia $x=(L,R)$ un gioco creato allo step n-esimo. Abbiamo quindi che

  $$x+(\emptyset,\emptyset) \;=\; (\{l+(\emptyset,\emptyset) \mid l\in L\} \;\cup\; \emptyset\;,\; \{r+(\emptyset,\emptyset) \mid r\in R\} \;\cup\; \emptyset)$$

  Dato che per ogni $l\in L$ ed $r\in R$ lo step di creazione di l e di r è $< n$, per ipotesi induttiva abbiamo che

  $$\forall l\in L\ \forall r\in R \quad (l+(\emptyset,\emptyset) \;=\; l)\ \&\ (r+(\emptyset,\emptyset) \;=\; r)$$

  Ciò infine implica che

  $$x+(\emptyset,\emptyset) \;=\; (L,R) \;=\; x$$
- Dato l'insieme di ordinali $X=[0,\beta[$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo valido l'enunciato con $n=\gamma\ \forall\gamma\in X$ e dimostriamo che esso vale anche per $n=\beta$.
  Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel caso precedente riusciamo a dimostrare tramite ipotesi induttiva l'enunciato (infatti siamo forti del fatto che, dato $x=(L,R)$, step (l) e step (r) sono ordinali $< n$ che appartengono a X per la proprietà fondamentale del sup.

c) Dati $x = (L_x, R_x),\ y = (L_y, R_y),\ z = (L_z, R_z)$, per la definizione 16 abbiamo che:

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z = (\ &((L_x+y)+z) \cup ((L_y+x)+z) \cup ((L_z+(x+y)) \ , \\
&((R_x+y)+z) \cup ((R_y+x)+z) \cup ((R_z+(x+y)) \ )
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) = (\ &(L_x+(y+z)) \cup ((L_y+z)+x) \cup ((L_z+y)+x)) \ , \\
&((R_x+(y+z)) \cup ((R_y+z)+x) \cup ((R_z+y)+x) \ )
\end{aligned}
$$

Dimostriamo ora l'enunciato per induzione transfinita su $n = step(x) + step(y) + step(z)$

- se $n = 0$, allora $x = y = z = (\emptyset, \emptyset)$. L'enunciato è allora conseguenza diretta del punto b) di questa proposizione.

- sia l'enunciato valido per giochi tali che la somma dei loro step di creazione sia $\leq n-1$. Consideriamo ora x, y, z tali che $step(x) + step(y) + step(z) = n$.
  Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$
\begin{aligned}
(L_x+y)+z &= L_x+(y+z) \\
(L_y+x)+z &= (L_y+z)+x \\
L_z+(x+y) &= (L_z+y)+x \\
(R_x+y)+z &= R_x+(y+z) \\
(R_y+x)+z &= (R_y+z)+x \\
R_z+(x+y) &= (R_z+y)+x
\end{aligned}
$$

  e ciò conclude la dimostrazione

- Dato l'insieme di ordinali $X = [0, \beta[$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo valido l'enunciato con $n = \gamma\ \forall \gamma \in X$. Per dimostrare che esso vale anche per $n = \beta$ si procede in modo analogo a quanto appena fatto sfruttando nello stesso modo l'ipotesi induttiva (ricordiamoci infatti della proprietà fondamentale del sup).

$\square$

Osservazione:

Tale risultato, valendo per i giochi, vale anche per i pre-numeri e per i numeri (ricordando che un'operazione tra numeri è un'operazione tra i loro rappresentanti).
Abbiamo quindi che il punto b) per i numeri diventa $x + 0 = x$.

Procediamo mostrando altri utili risultati legati all'operazione di somma che abbiamo definito.

Lemma 4

Dati $x,\ x^{'},\ y,\ y^{'}$ pre-numeri

$$(x \leq x^{'})\ \&\ (y \leq y^{'}) \ \rightarrow\ (x + y \leq x^{'} + y^{'})$$

Se almeno una delle due disuguaglianze è stretta, allora si ha

$$x + y < x^{'} + y^{'}$$

dimostrazione:

Dimostriamo questo risultato per induzione transfinita su $n = step(x) + step(x^{'}) + step(y) + step(y^{'})$.

- se $n = 0$, allora $x = x^{'} = y = y^{'} = (\emptyset, \emptyset)$. Grazie alla proposizione 6 punto b) e al lemma 1 si può quindi concludere.
- sia l'enunciato valido per quattro pre-numeri qualsiasi tali per cui la somma degli step sia $\leq n{-}1$. Siano $x = (L_x, R_x),\ x^{'} = (L_{x'}, R_{x'}),\ y = (L_y, R_y),\ y^{'} = (L_{y'}, R_{y'})$ pre-numeri tali per cui la somma degli step di creazione sia esattamente n.
  Supponiamo per assurdo che

  $$\neg\ (x^{'} + y^{'} \geq x + y)$$

  Per la definizione 9 abbiamo queste possibilità:
  - * $\exists s \in L_x + y\ \cup\ L_y + x$ tale che $s \geq x^{'} + y^{'}$
  - * $\exists w \in R_{x'} + y^{'}\ \cup\ R_{y'} + x^{'}$ tale che $x + y \geq w$

  Ci sono quindi 4 alternative:
  1. $\exists s \in L_x + y$ tale che $s \geq x^{'} + y^{'}$
  2. $\exists s \in L_y + x$ tale che $s \geq x^{'} + y^{'}$
  3. $\exists w \in R_{x'} + y^{'}$ tale che $x + y \geq w$
  4. $\exists w \in R_{y'} + x^{'}$ tale che $x + y \geq w$

  Supponiamo valga il caso 1.
  Per ipotesi abbiamo che $x \leq x^{'}$ e ciò, in particolare, implica che $\forall l_x \in L_x \quad l_x < x^{'}$. Sempre per ipotesi, sappiamo che $y \leq y^{'}$. Per ipotesi induttiva possiamo dire che $\forall l_x \in L_x \quad l_x + y < x^{'} + y^{'}$, ma questo genera un assurdo.

Supponiamo ora valido il caso 2.
Per ipotesi $y \leq y^{'}$ e quindi, in particolare, $\forall l_y \in L_y \quad l_y < y^{'}$. Per ipotesi abbiamo inoltre che $x \leq x^{'}$. Per ipotesi induttiva ciò implica che $\forall l_y \in L_y \quad x + l_y < x^{'} + y^{'}$ e questo genera una contraddizione.

Supponiamo di trovarci nel caso 3.
Per ipotesi abbiamo che $x \leq x^{'}$ e ciò, in particolare, implica che $\forall r_{x'} \in R_{x'} \quad x < r_{x'}$. Sempre per ipotesi, sappiamo che $y \leq y^{'}$. Per ipotesi induttiva possiamo dire che $\forall r_{x'} \in R_{x'} \quad x + y < y^{'} + r_{x'}$, ma questo genera un assurdo.

Supponiamo infine valido il caso 4.
Per ipotesi $y \leq y^{'}$ e quindi, in particolare, $\forall r_{y'} \in R_{y'} \quad y < r_{y'}$. Per ipotesi abbiamo inoltre che $x \leq x^{'}$. Per ipotesi induttiva ciò implica che $\forall r_{y'} \in R_{y'} \quad x + y < x^{'} + r_{y'}$ e questo genera una contraddizione.

- Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo che l'enunciato valga con $n = \gamma \quad \forall \gamma \in X$ e dimostriamo che allora vale anche con $n = \beta$.
  Ragionando in modo analogo, sfruttiamo il fatto che

$$\begin{aligned} step(l_x) + step(y) + step(y^{'}) + step(x^{'}) &< \beta \\ step(x) + step(l_y) + step(y^{'}) + step(x^{'}) &< \beta \\ step(x) + step(y) + step(r_{y'}) + step(x^{'}) &< \beta \\ step(x) + step(y) + step(y^{'}) + step(r_{x'}) &< \beta \end{aligned}$$

  per trovare l'assurdo tramite l'ipotesi induttiva (sappiamo infatti che $step(l_x) + step(y) + step(y^{'}) + step(x^{'})$, $step(x) + step(l_y) + step(y^{'}) + step(x^{'})$, $step(x) + step(y) + step(r_{y'}) + step(x^{'})$, $step(x) + step(y) + step(y^{'}) + step(r_{x'})$ sono ordinali appartenenti ad X per la proprietà fondamentale del sup).

□

Remark

Dati $x, x^{'}, y, y^{'}$ pre-numeri tali che $x \doteq x^{'}$ e $y \doteq y^{'}$ (ovvero $x \leq x^{'}$, $x^{'} \leq x$, $y \leq y^{'}$ e $y^{'} \leq y$), abbiamo quindi che

$$x + y \doteq x^{'} + y^{'}$$

Grazie a questo fatto, quando stiamo eseguendo una somma algebrica tra numeri surreali siamo autorizzati ad identificare questi ultimi con i propri rappresentanti.

Corollario 3

Dati $x,\ y,\ z$ pre-numeri

$$x \doteq y \ \rightarrow \ x + z \doteq y + z$$

dimostrazione:

Dato che, per ipotesi, $x \doteq y$, in particolare abbiamo che

1. $x \leq y$
2. $y \leq x$

Visto che, per il lemma 1, $z \leq z$, utilizziamo il lemma 4 in entrambe le situazioni e otteniamo

1. $x + z \leq y + z$
2. $y + z \leq x + z$

Per la definizione 10 abbiamo quindi che $x + z \doteq y + z$

$\square$

Proposizione 7

Dato x gioco

$$-\,(-\,x) \ = \ x$$

dimostrazione:

Dimostriamo questo risultato per induzione transfinita su $n = \ step(x)$.

- se $n = 0$, allora $x = (\emptyset, \emptyset)$ e la proposizione è dimostrata immediatamente tramite la definizione 15.
- sia tale enunciato valido per giochi con step di creazione $\leq n - 1$ e consideriamo $x = (L, R)$ gioco tale che $step(x) = n$.

  $$-\,(-x) = -\,(-R,\ -L) = (-(-L),\ -(-R)) = (L, R) = x$$

  [gli elementi di L ed R infatti hanno step di creazione $< n$ e quindi, per ipotesi induttiva, $\forall l \in L \quad -(-l) = l$ e $\forall r \in R \quad -(-r) = r$]

- Dato l'insieme di ordinali $X = [\,0, \beta\,[$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo che l'enunciato valga con $n = \gamma \quad \forall \gamma \in X$ e dimostriamo che allora vale anche con $n = \beta$.

  Dato che lo step di creazione degli elementi di L ed R, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X, usiamo l'ipotesi induttiva per concludere la dimostrazione nello stesso modo in cui lo abbiamo fatto nel punto precedente.

$\square$

Proposizione 8

Dati $x,\ y$ giochi

$$-\,(x+y) = (-x) + (-y)$$

dimostrazione:

Dimostriamo l'enunciato per induzione transfinita su $n = \ step(x)+step(y)$

- se $n = 0$, abbiamo che

$$-\,((\emptyset,\emptyset)+(\emptyset,\emptyset)) = -(\emptyset,\emptyset) = (\emptyset,\emptyset)$$
$$(-\,(\emptyset,\emptyset)) + -\,((\emptyset,\emptyset)) = -(\emptyset,\emptyset) + (\emptyset,\emptyset) = (\emptyset,\emptyset)$$

- supponiamo l'enunciato valido per ogni coppia di giochi tali per cui la somma degli step di creazione è $\leq n-1$. Siano $x = (L_x, R_x)$ ed $y = (L_y, R_y)$ due giochi con $step(x) + step(y) = n$. Abbiamo allora che

  $$-\,(x+y) = -\,(L_x + y\ \cup\ L_y + x,\ R_x + y\ \cup\ R_y + x)$$

  Ciò, per ipotesi induttiva (gli step di creazione degli elementi di $L_x,\ R_x$ e di $L_y,\ R_y$ sono rispettivamente $<$di $step(x)$ e $step(y)$), è uguale a

  $$(-R_x + (-y)\ \cup\ -R_y + (-x),\ -L_x + (-y)\ \cup\ -L_y + (-x))$$

  D'altra parte abbiamo che

  $(-x)+(-y) = (-R_x,\ -L_x)+(-R_y,\ -L_y) = (-R_x+(-y)\ \cup\ -R_y + (-x),\ -L_x + (-y)\ \cup\ -L_y + (-x))$

  Possiamo concludere affermando che

  $$-\,(x+y) = (-x) + (-y)$$

- Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo che l'enunciato valga con $n = \gamma \quad \forall \gamma \in X$ e dimostriamo che allora vale anche con $n = \beta$.

  Per farlo utilizziamo le stesse argomentazioni di cui ci siamo serviti nel punto precedente: lo possiamo fare in quanto, per la proprietà fondamentale del sup, gli step degli elementi di $L_x,\ R_x,\ L_y,\ R_y$ sono numeri ordinali appartenenti ad X (si può quindi utilizzare l'ipotesi induttiva).

$\square$

Proposizione 9

Dato x pre-numero

$$x - x = (\emptyset, \emptyset)$$

dimostrazione:

Dimostriamo tale risultato per induzione transfinita su $n = step(x)$

- se $n = 0$, $x = (\emptyset, \emptyset)$ e abbiamo quindi

  $$(\emptyset, \emptyset) - (\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, \emptyset) + (-(\emptyset, \emptyset)) = (\emptyset, \emptyset) + (\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$$

- sia l'enunciato valido per tutti i pre-numeri tali per cui lo step di creazione sia $\leq n - 1$ e consideriamo $x = (L, R)$ pre-numero con $step(x) = n$.
  Abbiamo quindi che

  $$x - x = x + (-x) = (L, R) + (-R, -L) =$$
  $$(L + (-x)\ \cup\ (-R) + x,\ R + (-x)\ \cup\ (-L) + x)$$

  In generale, dato un pre-numero $y = (L^{'}, R^{'})$, abbiamo che $y \doteq (\emptyset, \emptyset)$ se e solo se $[\ y \leq (\emptyset, \emptyset)\ ]\ \&\ [\ y \geq (\emptyset, \emptyset)\ ]$, ovvero se e solo se $[\ \forall l^{'} \in L^{'} \quad l^{'} < (\emptyset, \emptyset)\ ]\ \&\ [\ \forall r^{'} \in R^{'} \quad (\emptyset, \emptyset) < r^{'}\ ]$.

  Per ottenere la tesi dobbiamo quindi dimostrare che $\forall l \in L\ \forall r \in R$

  1. $l + (-x) < (\emptyset, \emptyset)$
  2. $-r + x < (\emptyset, \emptyset)$
  3. $r + (-x) > (\emptyset, \emptyset)$
  4. $-l + x > (\emptyset, \emptyset)$

1) se per assurdo fosse $l + (-x) \geq (\emptyset, \emptyset)$ (con $l = (L_l, R_l)$), allora avrei che $\forall w \in R_l + (-x) \ \cup \ (-L) + l \quad w > (\emptyset, \emptyset)$. Ciò a sua volta implica che $\forall \tilde{l} \in L \quad -\tilde{l} + l > (\emptyset, \emptyset)$. Visto che $l \in L$, abbiamo in particolare che $-l + l > (\emptyset, \emptyset)$. Per ipotesi induttiva giungiamo quindi ad un assurdo $((\emptyset, \emptyset) > (\emptyset, \emptyset))$.

2) se per assurdo fosse $-r + x \geq (\emptyset, \emptyset)$ (con $r = (L_r, R_r)$), allora avrei che $\forall w \in -L_r + x \ \cup \ R + (-r) \quad w > (\emptyset, \emptyset)$. Ciò a sua volta implica che $\forall \tilde{r} \in R \quad \tilde{r} - r > (\emptyset, \emptyset)$. Visto che $r \in R$, abbiamo in particolare che $r - r > (\emptyset, \emptyset)$. Per ipotesi induttiva giungiamo quindi ad un assurdo $((\emptyset, \emptyset) > (\emptyset, \emptyset))$.

3) se per assurdo fosse $r + (-x) \leq (\emptyset, \emptyset)$ (con $r = (L_r, R_r)$), allora avrei che $\forall s \in L_r + (-x) \ \cup \ (-R) + r \quad s < (\emptyset, \emptyset)$. Ciò a sua volta implica che $\forall t \in (-R) \quad r + t < (\emptyset, \emptyset)$. Visto che $-r \in (-R)$, abbiamo in particolare che $r - r < (\emptyset, \emptyset)$. Per ipotesi induttiva giungiamo quindi ad un assurdo $((\emptyset, \emptyset) < (\emptyset, \emptyset))$.

4) se per assurdo fosse $-l + x \leq (\emptyset, \emptyset)$ (con $l = (L_l, R_l)$), allora avrei che $\forall s \in R_l + x \ \cup \ L + (-l) \quad s < (\emptyset, \emptyset)$. Ciò a sua volta implica che $\forall \tilde{l} \in L \quad -l + \tilde{l} < (\emptyset, \emptyset)$. Visto che $l \in L$, abbiamo in particolare che $-l + l < (\emptyset, \emptyset)$. Per ipotesi induttiva giungiamo quindi ad un assurdo $((\emptyset, \emptyset) < (\emptyset, \emptyset))$.

▶ Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo che l'enunciato valga con $n = \gamma \quad \forall \gamma \in X$ e dimostriamo che allora vale anche con $n = \beta$.

Per farlo basta procedere in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente (abbiamo infatti la possibilità di utilizzare l'ipotesi induttiva in quanto gli step di creazione degli elementi di L ed R sono ordinali appartenenti ad X per la proprietà fondamentale del sup).

□

Osservazione:

Questo risultato, valendo per i pre-numeri, è valido anche per i numeri (si ricordi che un'operazione tra numeri può essere sempre ricondotta ad un'operazione tra i rappresentanti dei numeri stessi).
Abbiamo quindi che per i numeri l'enunciato diventa $x - x = 0$.

Proposizione 10

Dati $x,\ y$ pre-numeri

$$x \leq y \ \rightarrow\ -y \leq -x$$

dimostrazione:

Dalle ipotesi sappiamo che $x \leq y$. Visto che, per il lemma 1, $-y \leq -y$, sfruttando il lemma 4 e la proposizione 9 possiamo dire che

$$x + (-y) \leq y + (-y) = y - y = (\emptyset, \emptyset)$$

Applicando nuovamente il lemma 4 ($x + (-y) \leq (\emptyset, \emptyset)$ e $-x \leq -x$) otteniamo

$$x + (-y) + (-x) \leq (\emptyset, \emptyset) + (-x)$$

Utilizzando i punti a), b) e c) della proposizione 6, abbiamo quindi che

$$-y \leq -x$$

□

Remark

Si osservi che in questa dimostrazione abbiamo utilizzato il fatto che, dato un pre-numero x, anche $-x$ è un pre-numero. Tale risultato è valido: lo enunceremo con la proposizione 12 e ovviamente lo dimostreremo senza l'utilizzo della proposizione 10 né di alcuna proposizione derivante da essa.

Lemma 5

Dati $x,\ y,\ x^{'},\ y^{'}$ pre-numeri

$$(x + y \geq x^{'} + y^{'})\ \&\ (y \leq y^{'}) \rightarrow\ x \geq x^{'}$$

dimostrazione:

Consideriamo $x = (L_x, R_x),\ y = (L_y, R_y),\ x^{'} = (L_{x'}, R_{x'}),\ y^{'} = (L_{y'}, R_{y'})$ pre-numeri che soddisfino le ipotesi del lemma.

Per assurdo supponiamo $\neg\ (x \geq x^{'})$.

Abbiamo quindi 2 possibilità:

1. $\exists\ \tilde{l}_{x'} \in L_{x'} \qquad \tilde{l}_{x'} \geq x$
2. $\exists\ \tilde{r}_x \in R_x \qquad \tilde{r}_x \leq x^{'}$

Per ipotesi abbiamo che

$$x + y\ \geq\ x^{'} + y^{'} \qquad \text{con}$$

$$\begin{aligned} x + y &= (L_x + y\ \cup\ L_y + x,\ R_x + y\ \cup\ R_y + x) \\ x^{'} + y^{'} &= (L_{x'} + y^{'}\ \cup\ L_{y'} + x^{'},\ R_{x'} + y^{'}\ \cup\ R_{y'} + x^{'}) \end{aligned}$$

Ciò, in particolare, implica che

$$\begin{array}{lll} \forall\ l_{x'} \in L_{x'} & \neg\ (l_{x'} + y^{'} \geq x + y) & (*) \\ \forall\ r_x \in R_x & \neg\ (x^{'} + y^{'} \geq r_x + y) & (**) \end{array}$$

Se siamo nel caso 1, dato che $y \leq y^{'}$ (per ipotesi) e $\tilde{l}_{x'} \geq x$ (caso 1), per il lemma 4 possiamo concludere che $x + y \leq \tilde{l}_{x'} + y^{'}$, ma ciò è assurdo per $(*)$.

Se siamo invece nel caso 2, visto che $y \leq y^{'}$ (per ipotesi) e $\tilde{r}_x \leq x^{'}$ (caso 2), per il lemma 4 abbiamo che $\tilde{r}_x + y \leq x^{'} + y^{'}$, ma ciò è assurdo per $(**)$.

□

È arrivato il momento di dimostrare due proposizioni particolarmente importanti. Vedremo ora infatti che, dati due numeri qualsiasi x, y anche $-x$ e $x+y$ sono numeri.

Per provare questi risultati, dato che, come detto, le operazioni sui numeri non sono altro che operazioni sui rappresentanti, è sufficiente dimostrare che essi valgono per i pre-numeri.
Se, per esempio, dimostriamo che la somma di due pre-numeri è ancora un pre-numero, allora possiamo concludere che la somma di due numeri, che è una classe di equivalenza che ha come rappresentante la somma dei rappresentanti, è ancora un numero. Tale somma infatti risulta essere una classe di equivalenza di pre-numeri.

Proposizione 11

$$x,\ y \ \text{ numeri } \ \rightarrow \ x+y \ \text{ numero}$$

dimostrazione:

Come già detto, ci basta dimostrare che, dati $x = (L_x, R_x), y = (L_y, R_y)$ pre-numeri, $x + y$ è ancora un pre-numero.

Dato che, sulla base delle definizioni di gioco e somma, si dimostra facilmente che somma di giochi è ancora un gioco (si può tranquillamente fare per induzione transfinita sulla somma degli step di creazione), sappiamo per certo che somma di pre-numeri è un gioco. Ci resta quindi da dimostrare che tale somma è anche un pre-numero.

Dimostriamo ciò per induzione transfinita su $n = \mathit{step}(x) + \mathit{step}(y)$.

- se $n = 0$, allora $x = y = (\emptyset, \emptyset)$ e quindi $x + y = (\emptyset, \emptyset)$, che è un pre-numero.

- sia l'enunciato valido per coppie di pre-numeri che abbiano somma degli step di creazione $\leq n-1$ e consideriamo $x = (L_x, R_x)$ ed $y = (L_y, R_y)$ pre-numeri tali che $\mathit{step}(x) + \mathit{step}(y) = n$.

  Supponiamo per assurdo che

  $$x + y = (L_x + y \ \cup \ L_y + x,\ R_x + y \ \cup \ R_y + x)$$

  non sia un pre-numero.

Dato che per ipotesi induttiva abbiamo che gli elementi dell'insieme destro e quelli dell'insieme sinistro di $x+y$ sono pre-numeri con step di creazione minore di quello di $x+y$, necessariamente

$$\exists\ s \in (L_x + y\ \cup\ L_y + x)\ \exists w \in (R_x + y\ \cup\ R_y + x) \qquad s \geq w$$

Ci sono quindi 4 diverse casistiche:

1. $\exists\ l_x \in L_x\ \exists r_x \in R_x \qquad l_x + y \geq r_x + y$
2. $\exists\ l_x \in L_x\ \exists r_y \in R_y \qquad l_x + y \geq r_y + x$
3. $\exists\ l_y \in L_y\ \exists r_x \in R_x \qquad l_y + x \geq r_x + y$
4. $\exists\ l_y \in L_y\ \exists r_y \in R_y \qquad l_y + x \geq r_y + x$

1) $l_x + y \geq r_x + y$ e, per lemma 1, $y \leq y$. Grazie al lemma 5 abbiamo quindi che $l_x \geq r_x$ e ciò è assurdo poiché x è un pre-numero.

2) $l_x + y \geq r_y + x$ e, dato che per ipotesi y è un pre-numero, $y<r_y$. Grazie al lemma 5 abbiamo quindi che $l_x>r_x$ e ciò è assurdo poiché x è un pre-numero.

3) $l_y + x \geq r_x + y$ e, visto che per ipotesi y è un pre-numero, $l_y<y$. Grazie al lemma 5 abbiamo quindi che $x>r_x$ e ciò è assurdo poiché x è un pre-numero.

4) $l_y + x \geq r_y + x$ e, per lemma 1, $x \leq x$. Grazie al lemma 5 abbiamo quindi che $l_y \geq r_y$ e ciò è assurdo poiché y è un pre-numero.

- ▶ Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

  Per farlo basta agire in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Siamo autorizzati ad utilizzare l'ipotesi induttiva perché di volta in volta la somma degli step è $< n = \beta$ e quindi, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X.

$\square$

Proposizione 12

$$x \text{ numero } \rightarrow -x \text{ numero}$$

dimostrazione:

Come abbiamo già detto, basta dimostrare l'enunciato con x pre-numero qualsiasi.

Si dimostra facilmente per induzione transfinita sullo step di creazione che, dato x gioco, $-x$ è ancora un gioco. In particolare abbiamo quindi che, dato x pre-numero, sicuramente $-x$ è un gioco. Ci resta dunque da dimostrare che $-x$ è anche pre-numero.

Dimostriamolo per induzione transfinita su $n = step(x)$

- se $n = 0$, allora $x = (\emptyset, \emptyset)$ e quindi $-x = (\emptyset, \emptyset)$, che è un pre-numero.

- sia l'enunciato valido per ogni pre-numero che abbia step di creazione $\leq n - 1$ e consideriamo il pre-numero $x = (L, R)$ tale per cui $step(x) = n$.
  Supponiamo per assurdo che
  $$-x = (-R,\ -L)$$
  non sia un pre-numero.

  Per ipotesi induttiva abbiamo che gli elementi dell'insieme destro e quelli dell'insieme sinistro di $-x$ sono pre-numeri con step di creazione minore di quello di $-x$. Di conseguenza abbiamo necessariamente che
  $$\exists\ r \in R\ \exists\ l \in L \qquad -r \geq -l$$

  Dato che, per il lemma 1, $l \geq l$, possiamo usare il lemma 4 per affermare che
  $$l - r \geq -l + l$$
  e ciò equivale, per la proposizione 6, ad affermare che
  $$l - r \geq (\emptyset, \emptyset)$$
  Visto che (sempre per il lemma 1) $r \geq r$, possiamo usare nuovamente il lemma 4 per scrivere
  $$(l - r) + r \geq (\emptyset, \emptyset) + r$$

e ciò, ancora per la proposizione 6, equivale a

$$l \geq r$$

Sappiamo tuttavia che, essendo $x = (L, R)$ un pre-numero, $\forall\ l \in L\ \forall r \in R \quad \neg\,(l \geq r)$. Abbiamo quindi raggiunto una contraddizione.

► Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta \ = \ sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

Per farlo basta agire in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Siamo autorizzati ad utilizzare l'ipotesi induttiva perché di volta in volta gli step di creazione sono $< n = \beta$ e quindi, per la proprietà fondamentale del sup, sono ordinali appartenenti ad X.

□

Remark

Abbiamo già osservato che tutti i risultati precedentemente dimostrati per la somma di giochi valgono anche per la somma di pre-numeri e numeri. In particolare quindi i numeri surreali sono dotati delle seguenti proprietà:

* $x + (y + z) = (x + y) + z$

* 0 è elemento neutro della somma ($x + 0 = 0 + x = x$)

* $x + (-x) = 0$ (esistenza dell'opposto)

* x numero $\rightarrow$ $-x$ numero

* $x,\ y$ numeri $\rightarrow$ $x + y$ numero

Abbiamo quindi che l'insieme dei numeri surreali dotato dell'operazione di somma che abbiamo definito è un gruppo totalmente ordinato (il totale ordinamento è conseguenza diretta della proposizione 2).
Per di più abbiamo dimostrato che vale anche la commutatività (proposizione 6 a)):

$$x + y = y + x$$

L'insieme dei numeri surreali dotato della somma è quindi un gruppo totalmente ordinato e abeliano.

Prima di procedere con la definizione di prodotto di numeri surreali e con la dimostrazione delle sue proprietà, utilizziamo definizione di somma che abbiamo dato per fare qualche esempio.
Come già detto, in alcuni casi, per evitare un'eccessiva difficoltà di lettura, abuseremo della notazione identificando i numeri con i pre-numeri che gli fanno da rappresentanti.

$1 + 1 = (\{0 + 1\},\ \emptyset) = (\{1\}, \emptyset) = 2$

$\frac{1}{2} - 1 = (\{0\}, \{1\}) + (\emptyset, \{0\}) = (\{0-1\}, \{1-1\} \cup \{0+\frac{1}{2}\}) = (\{-1\}, \{0, \frac{1}{2}\}) \doteq$

$(\{-1\}, \{0\}) = -\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} - 1 = (\{\frac{1}{2}\}, \{1\}) + (\emptyset, \{0\}) = (\{\frac{1}{2} - 1\}, \{0 + \frac{3}{4}\} \cup \{1-1\}) = (\{-\frac{1}{2}\}, \{0, \frac{3}{4}\}) \doteq$

$(\{-\frac{1}{2}\}, \{0\}) = -\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = (\{\frac{1}{2}\}, \{1\}) + (\{-1\}, \{0\}) = (\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\} \cup \{-1 + \frac{3}{4}\}, \{1 - \frac{1}{2}\} \cup \{0 + \frac{3}{4}\}) =$

$(\{0, \frac{-1}{4}\}, \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}) \doteq (\{0\}, \{\frac{1}{2}\}) = \frac{1}{4}$

$\omega + 1 = (\{0, 1, 2, ...\}, \emptyset) + (\{0\}, \emptyset) = (\{1, 2, 3, ...\} \cup \{0 + \omega\}, \emptyset) = (\{1, 2, 3, ..., \omega\}, \emptyset)$

$1 + \omega = (\{0\}, \emptyset) + (\{0, 1, 2, ...\}, \emptyset) = (\{0 + \omega\} \cup \{1, 2, 3, ...\}, \emptyset) = (\{1, 2, 3, ..., \omega\}, \emptyset)$

$\omega + \omega = (\{0, 1, 2, ...\}, \emptyset) + (\{0, 1, 2, ...\}, \emptyset) = (\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\}, \emptyset)$

$\pi + \omega = (L_\pi, R_\pi) + (\{0, 1, 2, ...\}, \emptyset) = (\{0, 1, 2, ...\} + \pi \cup \omega + L_\pi, \omega + R_\pi) \doteq$
$(\omega + L_\pi, \omega + R_\pi)$

Remark

Si nota immediatamente che l'operazione di somma algebrica che abbiamo definito agisce in modo coerente con l'aritmetica dei reali che noi tutti conosciamo (commutatività, associatività,...).
Tuttavia per quanto riguarda i numeri surreali corrispondenti agli ordinali "classici" la situazione cambia. Abbiamo infatti che l'aritmetica degli ordinali "surreali" differisce da quella degli ordinali "classici". Basti pensare al fatto che, mentre classicamente non vale la proprietà commutativa per gli ordinali, nel mondo surreale essa vale. Abbiamo, per esempio, che $\omega + 1 = 1 + \omega$, fatto non valido per ω e 1 ordinali "classici".

3.2.2 Prodotto

In questa sezione ci dedicheremo alla definizione, all'applicazione e allo studio delle principali proprietà del prodotto di numeri surreali. Per prima cosa definiremo tale operazione sui giochi e, in secondo luogo, ne dimostreremo le principali proprietà, alcune valide in generale per i giochi, altre solo per pre-numeri e numeri.
In modo analogo a quanto fatto nella sezione precedente, quando parleremo di prodotto di numeri surreali faremo riferimento a tale operazione sui rappresentanti dei fattori coinvolti (i quali sono pre-numeri).

Definizione 17

Dati $x = (L_x,\ R_x),\ y = (L_y,\ R_y)$ giochi

$$x \cdot y =$$
$$(\{l_x y + x l_y - l_x l_y \mid l_x \in L_x,\ l_y \in L_y\} \cup \{r_x y + x r_y - r_x r_y \mid r_x \in R_x,\ r_y \in R_y\}\ ,$$
$$\{l_x y + x r_y - l_x r_y \mid l_x \in L_x,\ r_y \in R_y\} \cup \{r_x y + x l_y - r_x l_y \mid r_x \in R_x,\ l_y \in L_y\})$$

Remark

La seguente formula, equivalente a quella della definizione, puó risultare utile per fare alcuni calcoli

$$xy = (\{xy - (x - L_x)\ (y - L_y)\} \ \cup\ \{xy - (R_x - x)\ (R_y - y)\}\ ,$$
$$\{\ \mathrm{xy} + (\mathrm{x} - \mathrm{L}_x)\ (R_y - y)\} \ \cup\ \{xy + (R_x - x)\ (y - L_y)\})$$

Mostriamo ora un paio di esempi che possono risultare utili per una miglior comprensione di tale definizione.
Per avere una notazione più snella, spesso capiterà di identificare i numeri con i pre-numeri che gli fanno da rappresentanti.

$x \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = (\{0\}, \emptyset) \cdot (\{0\}, \emptyset) = (\{0\}, \emptyset) \doteq 1$

$\frac{1}{2} \cdot 1 = (\{0\}, \{1\}) \cdot (\{0\}, \emptyset) = (\{0\}, \{1\}) \doteq \frac{1}{2}$

$1 \cdot 2 = (\{0\}, \emptyset) \cdot (\{1\}, \emptyset) = (\{1\}, \emptyset) \doteq 2$

$\frac{1}{2} \cdot 2 = (\{0\}, \{1\}) \cdot (\{1\}, \emptyset) = (\{0 + \frac{1}{2} \cdot 1\},\ \{1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot 1\}) = (\{\frac{1}{2}\}, \{\frac{3}{2}\}) \doteq 1$

...

$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = (\{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}\}) \cdot (\{\frac{1}{2}\}, \{1\}) \doteq (\{-1, \frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{2}, 1\}) \cdot (\{-2, \frac{1}{2}\}, \{1, 2\}) =$
$(\{-\frac{7}{2}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\} \ \cup\ \{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\},\ \{\frac{5}{8}, 2, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}\} \ \cup\ \{\frac{5}{8}, \frac{5}{16}, 2, \frac{7}{16}\}) \doteq$
$(\{\frac{1}{4}\}, \{\frac{5}{16}\}) \doteq \frac{9}{32}$

Remark

L'ultimo esempio presentato utilizza un risultato molto importante:

Dati $x, x^{'}, y, y^{'}$ pre-numeri tali che $x \doteq x^{'}$ e $y \doteq y^{'}$,

$$x \cdot y \doteq x^{'} \cdot y^{'}$$

(ciò si dimostra in modo rapido tramite induzione transfinita sulla somma degli step di creazione dei pre-numeri utilizzando l'ipotesi induttiva e il fatto che, dati tali pre-numeri, $x + y \doteq x^{'} + y^{'}$)

Questo risultato è fondamentale in quanto, dato un prodotto di due numeri surreali, ci permette di operare direttamente sui rappresentanti di questi ultimi.

Ora che abbiamo definito il prodotto, proseguiamo dimostrandone alcune fondamentali proprietà.

Proposizione 13

Dati x, y giochi

$$xy = yx$$

dimostrazione:

La dimostrazione deriva direttamente dalla definizione 17 invertendo il ruolo di x e quello di y.

$\square$

Proposizione 14

Dato $x = (L_x, R_x)$ gioco

$$\text{a)} \quad x \cdot (\emptyset, \emptyset) \doteq (\emptyset, \emptyset)$$

$$\text{b)} \; x \cdot (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \doteq x$$

dimostrazione:

La dimostrazione di a) deriva direttamente dalla definizione 17.
Dimostriamo ora il punto b) per induzione transfinita su $n = step(x)$, lo step di creazione di x.

- se $n = 0$, allora $x = (\emptyset, \emptyset)$ e per il punto a) e la proposizione 13 abbiamo concluso.
- supponiamo l'enunciato valga per giochi con step di creazione $\leq n-1$ e consideriamo x con step di creazione n.

$$x \; \cdot \; (\; \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) =$$

$$\begin{gathered}(\; \{l_x \cdot (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \; + \; x \cdot (\emptyset, \emptyset) \; - \; l_x \cdot (\emptyset, \emptyset)\} \; , \\ \{r_x \cdot (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \; + \; x \cdot (\emptyset, \emptyset) \; - \; r_x \cdot (\emptyset, \emptyset)\} \;)\end{gathered}$$

Ciò, per il punto a), la proposizione 13 e l'ipotesi induttiva, equivale a

$$(\{l_x \mid l_x \in L_x\}, \{r_x \mid r_x \in R_x\}) = (L_x, R_x) = x$$

- Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

  Per farlo basta procedere in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Possiamo infatti usare il punto a), la proposizione 13 e anche l'ipotesi induttiva perché gli step di creazione di l_x ed r_x, per la proprietà fondamentale del sup, sono ordinali appartenenti ad X (sono infatti $< \beta$).

$\square$

Remark

Nel caso in cui stessimo lavorando con numeri, anziché con giochi, potremmo scrivere $x \cdot 0 \doteq 0$ e $x \cdot 1 \doteq x$

Proposizione 15

Dati $x = (L_x, R_x), y = (L_y, R_y)$ giochi

$$-(xy) = (-x)y$$

dimostrazione:

Dimostriamo questa proposizione per induzione transfinita su $n = step(x) + step(y)$.

- se $n = 0$, allora $x = y = (\emptyset, \emptyset)$ e abbiamo concluso grazie alla proposizione 14.
- supponiamo che l'enunciato valga per coppie di giochi con somma degli step di creazione $\leq n-1$ e consideriamo x e y tali che $step(x) + step(y) = n$.

$$-(xy) =$$

$$(\ \{-(l_x y + x r_y - l_x r_y)\} \ \cup \ \{-(r_x y + x l_y - r_x l_y)\}\ ,$$
$$\{-(l_x y + x l_y - l_x l_y)\} \ \cup \ \{-(r_x y + x r_y - r_x r_y)\}\ )$$

Ciò, per le proposizioni 7 e 8 equivale a

$(\{-(l_x y) - (x r_y) + l_x r_y)\} \ \cup \ \{-(r_x y) - (x l_y) + r_x l_y)\}$,
$\{-(l_x y) - (x l_y) + l_x l_y)\} \ \cup \ \{-(r_x y) - (x r_y) + r_x r_y)\} \ ) \quad (*)$

D'altra parte abbiamo che

$$(-x)y =$$

$$(\ \{(-r_x)y + (-x)l_y - (-r_x)l_y)\} \cup \{(-l_x)y + (-x)r_y - (-l_x)r_y)\} \ ,$$
$$\{(-r_x)y + (-x)r_y - (-r_x)r_y)\} \cup \{(-l_x)y + (-x)l_y - (-l_x)l_y)\} \ ) \quad (**)$$

Per ipotesi induttiva $(*)$ e $(**)$ sono equivalenti e quindi $-(xy) = (-x)y$

- Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

  Per farlo basta procedere in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Possiamo utilizzare l'ipotesi induttiva perché la somma degli step dei fattori dei prodotti che via via incontriamo, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X.

$\square$

Proposizione 16

Dati $x = (L_x, R_x), y = (L_y, R_y), z = (L_z, R_z)$ pre-numeri
$$(x + y) \cdot z = xz + yz$$

dimostrazione:

Dimostriamo la seguente proposizione per induzione transfinita su $n = step(x) + step(y) + step(z)$.

- se $n = 0$, allora $x = y = z = (\emptyset, \emptyset)$ e si conclude subito.

- l'enunciato valga per gruppi di tre pre-numeri con somma degli step di creazione $\leq n - 1$. Consideriamo x, y, z tali che la somma dei loro step di creazione sia n.

$$(x+y)\cdot z =$$

$$\begin{gathered}
(\ \{(l_x+y)\cdot z+(x+y)\cdot l_z-(l_x+y)l_z\}\\
\cup\,\{(l_y+x)\cdot z+(x+y)\cdot l_z-(l_y+x)l_z\}\\
\cup\,\{(r_x+y)\cdot z+(x+y)\cdot r_z-(r_x+y)r_z\}\\
\cup\,\{(r_y+x)\cdot z+(x+y)\cdot r_z-(r_y+x)r_z\}\ ,\\
\{(l_x+y)\cdot z+(x+y)\cdot r_z-(l_x+y)r_z\}\\
\cup\,\{(l_y+x)\cdot z+(x+y)\cdot r_z-(l_y+x)r_z\}\\
\cup\,\{(r_x+y)\cdot z+(x+y)\cdot l_z-(r_x+y)l_z\}\\
\cup\,\{(r_y+x)\cdot z+(x+y)\cdot l_z-(r_y+x)l_z\}\ )
\end{gathered}$$

D'altra parte abbiamo

$$xz+yz=$$

$$\begin{gathered}
(\ \{(l_xz+xl_z-l_xl_z)+yz\}\ \cup\ \{(r_xz+xr_z-r_xr_z)+yz\}\\
\cup\,\{(l_yz+yl_z-l_yl_z)+xz\}\ \cup\ \{(r_yz+yr_z-r_yr_z)+xz\}\ ,\\
\{(l_xz+xr_z-l_xr_z)+yz\}\ \cup\ \{(r_xz+xl_z-r_xl_z)+yz\}\\
\cup\,\{(l_yz+yr_z-l_yr_z)+xz\}\ \cup\ \{(r_yz+yl_z-r_yl_z)+xz\}\ )
\end{gathered}$$

Grazie all'ipotesi induttiva e alle proposizioni 7, 8, 9, 13 e 15 riusciamo immediatamente a dimostrare che $(x+y)\cdot z = xz+yz$.
Per esempio tramite l'ipotesi induttiva e le proposizioni appena citate si mostra che

$$\begin{gathered}
(l_x+y)\cdot z+(x+y)\cdot l_z-(l_x+y)l_z=\\
l_xz+yz+xl-z+yl_z-l_xl_z-yl_z=l_xz+yz+xl-z-l_xl_z
\end{gathered}$$

Analogamente si mostrano le altre uguaglianze.

▶ Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0,\beta\ [$ con $\beta\ =\ sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n=\gamma$ per ogni $\gamma\in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n=\beta$.

Per farlo basta procedere in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Oltre alle proposizioni necessarie, possiamo utilizzare l'ipotesi induttiva perché di volta in volta la somma degli step, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X.

□

Proposizione 17

Dati $x = (L_x, R_x), y = (L_y, R_y), z = (L_z, R_z)$ pre-numeri

$$(xy)z = x(yz)$$

dimostrazione:

Dimostriamo la seguente proposizione per induzione transfinita su $n = step(x) + step(y) + step(z)$.

- se $n = 0$, allora $x = y = z = (\emptyset, \emptyset)$ e si conclude immediatamente grazie al punto a) della proposizione 14.

- sia l'enunciato valido per gruppi di tre pre-numeri con somma degli step di creazione $\leq n-1$. Consideriamo x, y, z tali che la somma dei loro step di creazione sia n.

$$(xy)z =$$

$$\begin{aligned}
&(\ \{(l_x y + x l_y - l_x l_y) \cdot z + (xy) \cdot l_z - (l_x y + x l_y - l_x l_y) l_z\} \\
&\cup \{(r_x y + x r_y - r_x r_y) \cdot z + (xy) \cdot l_z - (r_x y + x r_y - r_x r_y) l_z\} \\
&\cup \{(l_x y + x r_y - l_x r_y) \cdot z + (xy) \cdot r_z - (l_x y + x r_y - l_x r_y) r_z\} \\
&\cup \{(r_x y + x l_y - r_x l_y) \cdot z + (xy) \cdot r_z - (r_x y + x l_y - r_x l_y) r_z\}\ , \\
&\{(l_x y + x l_y - l_x l_y) \cdot z + (xy) \cdot r_z - (l_x y + x l_y - l_x l_y) r_z\} \\
&\cup \{(r_x y + x r_y - r_x r_y) \cdot z + (xy) \cdot r_z - (r_x y + x r_y - r_x r_y) r_z\} \\
&\cup \{(l_x y + x r_y - l_x r_y) \cdot z + (xy) \cdot l_z - (l_x y + x r_y - l_x r_y) l_z\} \\
&\cup \{(r_x y + x l_y - r_x l_y) \cdot z + (xy) \cdot l_z - (r_x y + x l_y - r_x l_y) l_z\}\ )
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$x(yz) =$$

$$\begin{aligned}
(\ &\{l_x(yz) + x(l_y z + y l_z - l_y l_z) - l_x(l_y z + y l_z - l_y l_z)\} \\
\cup\ &\{l_x(yz) + x(r_y z + y r_z - r_y r_z) - l_x(r_y z + y r_z - r_y r_z)\} \\
\cup\ &\{r_x(yz) + x(l_y z + y r_z - l_y r_z) - r_x(l_y z + y r_z - l_y r_z)\} \\
\cup\ &\{r_x(yz) + x(r_y z + y l_z - r_y l_z) - r_x(r_y z + y l_z - r_y l_z)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{l_x(yz) + x(l_y z + y r_z - l_y r_z) - l_x(l_y z + y r_z - l_y r_z)\} \\
\cup\ &\{l_x(yz) + x(r_y z + y l_z - r_y l_z) - l_x(r_y z + y l_z - r_y l_z)\} \\
\cup\ &\{r_x(yz) + x(l_y z + y l_z - l_y l_z) - r_x(l_y z + y l_z - l_y l_z)\} \\
\cup\ &\{r_x(yz) + x(r_y z + y r_z - r_y r_z) - r_x(r_y z + y r_z - r_y r_z)\} \ )
\end{aligned}$$

Grazie all'ipotesi induttiva e alle proposizioni 7, 13, 15 e 16 riusciamo immediatamente a dimostrare che $(xy)z = x(yz)$.
Per esempio tramite l'ipotesi induttiva e le proposizioni appena citate si mostra che

$$\begin{aligned}
(l_x y + x l_y - l_x l_y) \cdot z + (xy) \cdot l_z - (l_x y + x l_y - l_x l_y) l_z &= \\
(l_x y) z + (x l_y) z - (l_x l_y) z + (xy) l_z - (l_x y) l_z - (x l_y) l_z + (l_x l_y) l_z &= \\
l_x(yz) + x(l_y z) - l_x(l_y z) + x(y l_z) - y(l_x l_z) - x(l_y l_z) + l_x(l_y l_z) &= \\
l_x(yz) + x(l_y z + y l_z - l_y l_z) - l_x(l_y z + y l_z - l_y l_z)&.
\end{aligned}$$

Analogamente si mostrano le altre uguaglianze.

► Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

Per farlo basta agire in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Oltre alle proposizioni necessarie, possiamo utilizzare l'ipotesi induttiva perché di volta in volta la somma degli step, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X.

$\square$

Proposizione 18

$$x = (L_x, R_x), y = (L_y, R_y) \text{ giochi } \rightarrow \ xy \ \text{ gioco}$$

dimostrazione:

Procediamo per induzione transfinita su $n = step(x) + step(y)$.

- se $n = 0$, allora $x = y = (\emptyset, \emptyset)$ e quindi $xy = (\emptyset, \emptyset)$, che è un gioco.

- supponiamo l'enunciato vero per ogni coppia di giochi con somma degli step di creazione $\leq n-1$ e consideriamo x e y tali che $step(x)+step(y) = n$.

$$\begin{gathered} xy = \\ (\ \{l_x y + x l_y - l_x l_y\} \ \cup \ \{r_x y + x r_y - r_x r_y\}\ , \\ \{l_x y + x r_y - l_x r_y\} \ \cup \ \{r_x y + x l_y - r_x l_y\}\ ) \end{gathered}$$

  Gli elementi dell'insieme destro e dell'insieme sinistro di xy sono giochi (per ipotesi induttiva e perché somma di giochi è un gioco) con step di creazione minore di quello di xy.

- Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

  Per farlo basta agire in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Siamo autorizzati ad utilizzare l'ipotesi induttiva perché di volta in volta la somma degli step è $< n = \beta$ e quindi, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X.

$\square$

Per riuscire a dimostrare che il prodotto di due numeri surreali è ancora un numero surreale abbiamo bisogno di un paio di risultati preliminari.
Iniziamo mostrando tali propedeutici risultati e procediamo fornendo l'attesa dimostrazione del fatto che prodotto di numeri è ancora un numero.

Lemma 6

Dati x_1, x_2, y_1, y_2 pre-numeri

$$[\ (x_1 < x_2)\ \&\ (y_1 < y_2)\ ]\ \rightarrow\ x_1y_2 + x_2y_1 < x_1y_1 + x_2y_2$$

Inoltre se almeno una delle due disuguaglianze non è stretta, allora

$$x_1y_2 + x_2y_1 \leq x_1y_1 + x_2y_2$$

dimostrazione:

Siano $x_1 = (L_{x_1}, R_{x_1}), x_2 = (L_{x_2}, R_{x_2}), y_1 = (L_{y_1}, R_{y_1}), y_2 = (L_{y_2}, R_{y_2})$ pre-numeri tali che $(x_1{<}x_2)\ \&\ (y_1{<}y_2)$ (la dimostrazione del caso in cui ci sia almeno una disuguaglianza larga è analoga).
Dimostriamo questo lemma per induzione transfinita su $n = step(x_1) + step(x_2) + step(y_1) + step(y_2)$.

- se $n = 2$ (con $n = 0$ oppure $n = 1$ non avremmo le disuguaglianze strette delle ipotesi), allora le possibilità compatibili con le ipotesi sono le seguenti:

  1. $x_1 = y_1 = (\emptyset, \emptyset)$ e $x_2 = y_2 = (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$
  2. $x_2 = y_1 = (\emptyset, \emptyset)$, $y_2 = (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ e $x_1 = (\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\})$
  3. $x_1 = y_1 = (\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\})$ e $x_2 = y_2 = (\emptyset, \emptyset)$

  Nel caso 1 e nel caso 3 otteniamo $(\emptyset, \emptyset){<}(\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ mentre nel caso 2 l'enunciato diventa $(\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\}){<}(\emptyset, \emptyset)$.
  In tutti e tre i casi abbiamo quindi che il lemma è valido.

- supponiamo che l'enunciato valga per gruppi di quattro pre-numeri con somma degli step di creazione $\leq n{-}1$ e consideriamo x_1, x_2, y_1, y_2 con $step(x_1) + step(x_2) + step(y_1) + step(y_2) = n$.

  x_1 e x_2 sono due pre-numero quindi abbiamo che $\forall r_{x_1} \in R_{x_1}$ e $\forall l_{x_2} \in L_{x_2}$ $\quad x_1{<}r_{x_1}$ e $l_{x_2}{<}x_2$, inoltre, per ipotesi, $y_1{<}y_2$.
  Visto che la somma degli step di questi quattro pre-numeri è $< n$, per ipotesi induttiva abbiamo che per ogni r_{x_1}, l_{x_2}

  $$x_1y_2 + r_{x_1}y_1 < x_1y_1 + r_{x_1}y_2 \qquad (*)$$

  $$l_{x_2}y_2 + x_2y_1 < l_{x_2}y_1 + x_2y_2 \qquad (**)$$

Per ipotesi $x_1 < x_2$, ovvero $\neg(x_2 \leq x_1)$, e quindi ci sono 2 possibilità:

1. $\exists \tilde{r}_{x_1} \in R_{x_1} \quad \tilde{r}_{x_1} \leq x_2$
2. $\exists \tilde{l}_{x_2} \in L_{x_2} \quad \tilde{l}_{x_2} \geq x_1$

Nel caso 1, dato che per ipotesi $y_1 < y_2$, per ipotesi induttiva abbiamo che

$$\tilde{r}_{x_1} y_2 + x_2 y_1 \leq \tilde{r}_{x_1} y_1 + x_2 y_2$$

Ciò, unito a $(*)$ presa con $\tilde{r}_{x_1}$, per il lemma 4 implica che

$$x_1 y_2 + \tilde{r}_{x_1} y_1 + \tilde{r}_{x_1} y_2 + x_2 y_1 < x_1 y_1 + \tilde{r}_{x_1} y_2 + \tilde{r}_{x_1} y_1 + x_2 y_2$$

Otteniamo quindi quel che volevamo:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 < x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Nel caso 2, visto che per ipotesi $y_1 < y_2$, per l'ipotesi induttiva abbiamo che

$$x_1 y_2 + \tilde{l}_{x_2} y_1 \leq x_1 y_1 + \tilde{l}_{x_2} y_2$$

Ciò, unito a $(**)$ presa con $\tilde{l}_{x_2}$, per il lemma 4 implica che

$$x_1 y_2 + \tilde{l}_{x_2} y_1 + \tilde{l}_{x_2} y_2 + x_2 y_1 < x_1 y_1 + \tilde{l}_{x_2} y_2 + \tilde{l}_{x_2} y_1 + x_2 y_2$$

Otteniamo quindi quel che volevamo:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 < x_1 y_1 + x_2 y_2$$

► Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

Per farlo basta agire in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Siamo autorizzati ad utilizzare l'ipotesi induttiva perché di volta in volta la somma degli step è $< n = \beta$ e quindi, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X.

□

Remark

Due conseguenze dirette di questo lemma sono le seguenti:

* $[(\emptyset,\emptyset) < y \ \text{ e } \ (\emptyset,\emptyset) < x] \ \rightarrow \ (\emptyset,\emptyset) < xy$

* $[x < y \ \text{ e } \ (\emptyset,\emptyset) < z] \ \rightarrow \ xz < yz$

Proposizione 19

Dati $x, x^{'}, y, y^{'}$ pre-numeri

$$[\ (x > x^{'}) \ \& \ (y > y^{'})\ ] \ \rightarrow \ (x - x^{'})\ (y - y^{'}) > 0$$

dimostrazione:

Consideriamo $(x - x^{'})\ (y - y^{'})$ con $x, x^{'}, y, y^{'}$ pre-numeri che soddisfano le ipotesi della proposizione.

Per le proposizioni 7, 13, 15 e 16 abbiamo che

$$(x - x^{'})\ (y - y^{'}) = (x - x^{'})\ y - (x - x^{'})\ y^{'} = xy - x^{'}y - xy^{'} + x^{'}y^{'}$$

Se per assurdo $(x - x^{'})\ (y - y^{'}) \leq 0$, allora

$$xy + x^{'}y^{'} \leq xy^{'} + x^{'}y$$

Ciò, dato che, per ipotesi, $x > x^{'}$ e $y > y^{'}$, è assurdo per il lemma 6.

□

Proposizione 20

$$x, \ y \ \text{ numeri } \ \rightarrow \ xy \ \text{ numero}$$

dimostrazione:

Come abbiamo già detto, è sufficiente dimostrare l'enunciato per x, y pre-numeri.

Per la proposizione 18 sappiamo che, dati x e y pre-numeri (quindi, in particolare, giochi), xy sicuramente è un gioco. Resta da dimostrare che esso è, più precisamente, un pre-numero.

Procediamo fornendo una dimostrazione per induzione transfinita su $n = step(x) + step(y)$

- se $n = 0$, allora $x = y = (\emptyset, \emptyset)$ e quindi $xy = (\emptyset, \emptyset)$, che è un pre-numero.

- sia l'enunciato valido per ogni coppia di pre-numeri tali per cui la somma degli step di creazione è $\leq n - 1$ e consideriamo due pre-numeri x ed y con $step(x) + step(y) = n$.

  Grazie all'ipotesi induttiva e al fatto che somma di pre-numeri è ancora un pre-numero, abbiamo che gli elementi dell'insieme destro e quelli dell'insieme sinistro di xy sono pre-numeri con step di creazione minore di quello di xy. Ci resta quindi da mostrare che

  $$\forall\, l \in L_{xy}\ \forall\, r \in R_{xy} \quad (l < r)$$

  Ricordando che

  $$xy = (\{l_x y + x l_y - l_x l_y\} \cup \{r_x y + x r_y - r_x r_y\}\ , \{l_x y + x r_y - l_x r_y\} \cup \{r_x y + x l_y - r_x l_y\})$$

  basta mostrare che

  1. $l_x y + x l_y - l_x l_y < l_x y + x r_y - l_x r_y$ per ogni l_x, l_y, r_x, r_y
  2. $l_x y + x l_y - l_x l_y < r_x y + x l_y - r_x l_y$ per ogni l_x, l_y, r_x, r_y
  3. $r_x y + x r_y - r_x r_y < l_x y + x r_y - l_x r_y$ per ogni l_x, l_y, r_x, r_y
  4. $r_x y + x r_y - r_x r_y < r_x y + x l_y - r_x l_y$ per ogni l_x, l_y, r_x, r_y

  Applicando il lemma 5 e le proposizioni 13, 15 e 16 otteniamo

  1. $(x - l_x)(r_y - l_y) > 0$
  2. $(y - l_y)(r_x - l_x) > 0$
  3. $(r_y - y)(r_x - l_x) > 0$
  4. $(r_x - x)(r_y - l_y) > 0$

  Tutte queste disuguaglianze, per la proposizione 19, sono vere in quanto, essendo x e y pre-numeri, $l_x < x < r_x$ e $l_y < y < r_y$.

- ▶ Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta = sup(X)$ ordinale limite, supponiamo l'enunciato valido con $n = \gamma$ per ogni $\gamma \in X$ e dimostriamone la validità anche nel caso di $n = \beta$.

  Per farlo basta agire in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Siamo autorizzati ad utilizzare l'ipotesi induttiva perché di volta in volta la somma degli step è $< n = \beta$ e quindi, per la proprietà fondamentale del sup, è un ordinale appartenente ad X.

$\square$

Procediamo ora definendo il reciproco di un numero surreale.
Prima di farlo soffermiamoci su questo risultato che ci sarà utile per la trattazione.

Proposizione 21

$(\forall x > (\emptyset, \emptyset)$ pre-numero$)$ $(\ \exists\, y = (\{(\emptyset, \emptyset)\} \cup L, R)$ con $l > (\emptyset, \emptyset) \quad \forall\, l \in L\ )$

tale che

$$x \doteq y$$

dimostrazione:

Sia $x = (L_x, R_x)$ un pre-numero tale che $x > (\emptyset, \emptyset)$.

Prendo come L ed R i seguenti insiemi

$$L = \{l_x \in L_x \mid l_x > (\emptyset, \emptyset)\} \quad \text{e} \quad R = R_x$$

e considero il pre-numero

$$y = (\{(\emptyset, \emptyset)\} \ \cup\ L,\ R_x)$$

Abbiamo sia che $x \leq y$ (per ogni $l_x \in L_x \quad (l_x < y)$ e per ogni $r_x \in R_x \quad (x < r_x)$), che $y \leq x$ (per ogni $l \in L \quad (l < x)$, $(0 < x)$ per ipotesi e per ogni $r_x \in R_x \quad (y < r_x)$).
In conclusione, quindi, $x \doteq y$.

$\square$

Remark

Dato un numero $[\ x\ ] = [\ (L_x, R_x)\ ] > 0$, è sempre possibile prendere come "rappresentante" $(\ \{(\emptyset,\emptyset)\}\ \cup\ L\ ,\ R_x\ )$ con $L = \{l_x \in L_x \mid l_x > 0\}$.

Siamo pronti ora per dare la definizione di reciproco

Definizione 18

Dato il numero $[\ x\ ] = [\ (L_x, R_x)\ ] > 0$, consideriamo come suo rappresentante $(\ \{(\emptyset,\emptyset)\}\ \cup\ L\ ,\ R_x\ )$ con $L = \{l_x \in L_x \mid l_x > 0\}$ e chiamiamo *reciproco* di x il seguente numero

$$[\ y\ ]\ =\ [\ (\ \{\ (\emptyset,\emptyset),\ \tfrac{1+(r_x-x)l_y}{r_x},\ \tfrac{1+(l-x)r_y}{l}\ \}\ ,\ \{\ \tfrac{1+(l-x)l_y}{l},\ \tfrac{1+(r_x-x)r_y}{r_x}\ \}\ )\ ]$$

Remark 1

La definizione 18 fornisce il concetto di reciproco di un numero > 0. Per ottenere il reciproco di un numero negativo agiamo in questo modo: dato $x < 0$, usiamo $\tilde{x}$ reciproco di $-x$ (il quale è > 0) per ottenere $-\tilde{x}$, il reciproco di z. Ovviamente per $x = 0$ il reciproco non è definito.

Remark 2

Grazie a questa definizione siamo in grado di definire la divisione fra numeri surreali come il prodotto tra il dividendo e il reciproco del divisore

Per vedere meglio come funziona la definizione 18 facciamo ora un esempio pratico del calcolo di un reciproco. Per semplicità di notazione utilizziamo i simboli che abbiamo riservato ai numeri per indicare i pre-numeri che sono loro "rappresentanti" e viceversa.

Prendiamo $x = (\ \{2\}, \emptyset\ ) = 3.$

Consideriamo ora la forma di x richiesta dalla definizione

$$x \doteq (\ \{0, 2\}, \emptyset\ )$$

Applicando la formula otteniamo quindi

$$y = (\ \{\ 0,\ \tfrac{1+(2-3)r_y}{2}\}\ ,\ \{\ \tfrac{1+(2-3)l_y}{2}\}\ ) = (\ \{\ 0,\ \tfrac{1-r_y}{2}\}\ ,\ \{\ \tfrac{1-l_y}{2}\}\ )$$

Dato che $0 \in L_y$, allora

$$\tfrac{1-0}{2} = \tfrac{1}{2} \in R_y$$

Di conseguenza abbiamo che

$$\tfrac{1-\frac{1}{2}}{2} = \tfrac{1}{4} \in L_y$$

Ciò implica il fatto che

$$\tfrac{1-\frac{1}{4}}{2} = \tfrac{3}{8} \in R_y$$

Proseguendo in questo modo otteniamo

$$y = (\{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{16}, ...\}\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{8}, ...\} \doteq \tfrac{1}{3}$$

Proseguiamo ora dimostrando lemmi e proposizioni che ci condurranno al seguente risultato: il reciproco di un numero $x \neq 0$ è l'unico numero y tale per cui $xy \doteq 1$. Dimostreremo tali risultati per $x > 0$. Agiamo in questo modo perché, come abbiamo già osservato, c'è un modo semplice per ricondursi ai reciproci di numeri negativi.

Lemma 7

Dati $x > 0$ numero e $y = (L_y, R_y)$ suo reciproco

$$x\ l_y < 1 < x\ r_y \qquad \forall l_y \in L_y, r_y \in R_y$$

dimostrazione:

Come sappiamo, è sufficiente dimostrare il lemma i pre-numeri.
Siano quindi

$x \doteq (\ \{(\emptyset,\emptyset)\}\ \cup\ L\ ,\ R_x\ )\quad$ con $\ L = \{l_x \in L_x \mid l_x > 0\}\ $ e

$y = (\ \{\ (\emptyset,\emptyset),\ \frac{1+(r_x-x)l_y}{r_x}, \frac{1+(l-x)r_y}{l}\ \}\ ,\ \{\ \frac{1+(l-x)l_y}{l}, \frac{1+(r_x-x)r_y}{r_x}\ \}\ )\ .$

Per come è definito y, si può dimostrare per induzione transfinita sulla somma degli step di creazione che esso è sicuramente un gioco (grazie all'ipotesi induttiva e al fatto che la somma algebrica e il prodotto di giochi è ancora un gioco). Valgono quindi per y tutti i risultati dimostrati per i giochi.

Dato che la definizione 18 costruisce y ponendo $(\emptyset,\emptyset)$ come elemento di L_y e inserendo via via in modo ricorsivo nuovi elementi in R_y e in L_y, dimostriamo questo lemma per induzione sull'istante in cui ogni elemento "compare" in $L_y\ \cup\ R_y$.

- il primo elemento "comparso" in $L_y\ \cup\ R_y$ è $(\emptyset,\emptyset)$.
  Esso appartiene a L_y e abbiamo che $x\ (\emptyset,\emptyset) = (\emptyset,\emptyset) < (\{(\emptyset,\emptyset)\},\emptyset)$.
  L'enunciato è quindi soddisfatto.

- supponiamo che l'enunciato valga per tutti gli elementi di $L_y \cup R_y$ che sono "comparsi" fino all'istante n-esimo e consideriamo $y^{''} \in L_y \cup R_y$ "comparso" all'istante (n+1)-esimo.

  Osserviamo che, per la definizione 18, $y^{''}$ ha la seguente forma

  $$y^{''} = \frac{1 + (x^{'} - x)\ y^{'}}{x^{'}}$$

  con $y^{'}$ elemento di $L_y\ \cup\ R_y$ "comparso" prima di $y^{''}$ e $x^{'}$ elemento di $L\ \cup\ R_x$

  Tale formula può essere scritta anche in questo modo

  $$1 - xy^{''} = (1 - xy^{'})\ \frac{x^{'} - x}{x^{'}}$$

  Se siamo nel caso in cui $y^{''} \in L_y$, allora ci sono due possibilità

  1. $(x^{'} = r_x \quad \exists r_x \in R_x)$ & $(y^{'} = l_y \quad \exists l_y \in L_y)$
  2. $(x^{'} = l \quad \exists l \in L)$ & $(y^{'} = r_y \quad \exists r_y \in R_y)$

Per quanto riguarda 1) abbiamo che

$$1 - xy^{''} = (1 - xl_y)\ \frac{r_x - x}{r_x} > 0$$

Abbiamo infatti che il primo fattore è >0 per ipotesi induttiva e il secondo lo è poiché x è un pre-numero >0 .

Per quanto riguarda 2) abbiamo invece la seguente situazione

$$1 - xy^{''} = (1 - xr_y)\ \frac{l - x}{l} > 0$$

Abbiamo infatti che il primo fattore è <0 per ipotesi induttiva e il secondo lo è poiché x è un pre-numero e $\forall l \in L \quad l > 0$.

Se siamo nel caso in cui $y^{''} \in L_y$ abbiamo quindi che $xy^{''} < 1$

Se siamo nel caso in cui $y^{''} \in R_y$, allora ci sono due possibilità

1. $(x^{'} = l \quad \exists l \in L)$ & $(y^{'} = l_y \quad \exists l_y \in L_y)$
2. $(x^{'} = r_x \quad \exists r_x \in R_x)$ & $(y^{'} = r_y \quad \exists r_y \in R_y)$

Per quanto riguarda 1) abbiamo che

$$1 - xy^{''} = (1 - xl_y)\ \frac{l - x}{l} < 0$$

Abbiamo infatti che il primo fattore è >0 per ipotesi induttiva e il secondo è <0 poiché x è un pre-numero e $\forall l \in L \quad l > 0$.

Per quanto riguarda 2) abbiamo invece la seguente situazione

$$1 - xy^{''} = (1 - xr_y)\ \frac{r_x - x}{r_x} < 0$$

Abbiamo infatti che il primo fattore è <0 per ipotesi induttiva e il secondo è >0 poiché x è un pre-numero >0 .

Se siamo nel caso in cui $y^{''} \in R_y$ abbiamo quindi che $xy^{''} > 1$

$\square$

Proposizione 22

Dati $x > 0$ numero e $y = (L_y, R_y)$ suo reciproco

y è un numero

dimostrazione:

Come già osservato, è sufficiente dimostrare tale enunciato per i pre-numeri.
Siano quindi

$$x \doteq (\ \{(\emptyset,\emptyset)\} \ \cup\ L\ ,\ R_x\ ) \qquad \text{con}\ \ L = \{l_x \in L_x \mid l_x > 0\}\ \ \text{e}$$

$$y = (\ \{\ (\emptyset,\emptyset),\ \tfrac{1+(r_x-x)l_y}{r_x}, \tfrac{1+(l-x)r_y}{l}\ \}\ ,\ \{\ \tfrac{1+(l-x)l_y}{l}, \tfrac{1+(r_x-x)r_y}{r_x}\ \}\ )\ .$$

Si può dimostrare per induzione transfinita sulla somma degli step di creazione che y è sicuramente un gioco (grazie all'ipotesi induttiva e al fatto che somma algebrica e prodotto di giochi è ancora un gioco).

Dimostriamo ora per induzione transfinita su $n = step(x)$ che y, reciproco di x, è un pre-numero

- ▶ se $n = 1$, allora $x = (\{(\emptyset,\emptyset)\}, \emptyset\ )$ e di conseguenza $y = (\{(\emptyset,\emptyset)\}, \emptyset\ )$, il quale è un pre-numero.

- ▶ supponiamo che per ogni pre-numero con step di creazione $\leq n-1$ il reciproco corrispondente sia ancora un pre numero e consideriamo x pre-numero con $step(x) = n$.

  Vanno dimostrate quindi due cose:

  1. ogni elemento di $L_y\ \cup\ R_y$ è un pre-numero
  2. $\forall l_y \in L_y\ \forall r_y \in R_y \qquad l_y < r_y$

  1) Dato che la definizione 18 costruisce y ponendo $(\emptyset,\emptyset)$ come elemento di L_y e inserendo via via in modo ricorsivo nuovi elementi in R_y e in L_y, dimostriamo che ogni elemento di $L_y\ \cup\ R_y$ è un pre-numero per induzione sull'istante in cui tale elemento compare in $L_y\ \cup\ R_y$.

  * il primo elemento che "compare" in $L_y\ \cup\ R_y$ è $(\emptyset,\emptyset)$, che è un pre-numero.

* siano pre-numeri tutti gli $y^{'} \in L_y \cup R_y$ che abbiano "comparsa" precedente a quella di $y^{''} \in L_y \ \cup \ R_y$, il quale, come abbiamo già osservato nella dimostrazione del lemma precedente, ha la seguente forma

$$y^{''} = \frac{1 + (x^{'} - x)\ y^{'}}{x^{'}}$$

con $x^{'}$ elemento di $L \ \cup \ R_x$

Per come abbiamo definito la divisione,

$$y^{''} = [\ 1 + (x^{'} - x)\ y^{'}\ ]\ z^{'}$$

con $z^{'}$ reciproco di $x^{'}$

Visto che $x^{'}$ ha step di creazione $< n = step(x)$, per ipotesi induttiva transfinita $z^{'}$ è un pre-numero.
Dato che somma algebrica e prodotto di pre-numeri è ancora un pre-numero, abbiamo quindi che $y^{''}$ è un pre-numero.

2) Supponiamo per assurdo che $\exists l_y \in L_y\ \exists r_y \in R_y \quad l_y \geq r_y$.

Dato che $x > (\emptyset, \emptyset)$, per il lemma 6 abbiamo che

$$x\ l_y \geq x\ r_y$$

e ciò è assurdo per il lemma 7.

► Dato l'insieme di ordinali $X = [\ 0, \beta\ [$ con $\beta \ = \ sup(X)$ ordinale limite, supponiamo che per ogni $\gamma \in X$ tutti i pre-numeri con step di creazione γ abbiano il reciproco che è un pre-numero. Dimostriamo che ciò vale anche nel caso in cui x abbia step di creazione β.

Per farlo basta agire in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente. Siamo autorizzati ad utilizzare l'ipotesi induttiva perché gli $x^{'}$ sono stati creati prima di x e quindi, per la proprietà fondamentale del sup, hanno step di creazione che appartengono ad X.

□

Lemma 8

Dati $x > 0$ numero e $y = (L_y, R_y)$ suo reciproco

$$l_{xy} < 1 < r_{xy} \qquad \forall l_{xy} \in L_{xy},\ r_{xy} \in R_{xy}$$

dimostrazione:

Come detto anche in precedenza, è sufficiente dimostrare il lemma per i pre-numeri.

Dati $x \doteq (\{(\emptyset, \emptyset)\} \ \cup \ L, R_x)$ con $L = \{l_x \in L_x \mid l_x > 0\}$ pre-numero e $y = (L_y, R_y)$ suo reciproco, dalla definizione di prodotto abbiamo che

$$xy \doteq$$
$$(\{l\, y + x l_y - l\, l_y\} \cup \{r_x y + x r_y - r_x r_y\}\ ,\ \{l\, y + x r_y - l\, r_y\} \cup \{r_x y + x l_y - r_x l_y\})$$

Abbiamo quindi che un elemento qualsiasi di $L_{xy} \ \cup \ R_{xy}$ ha la seguente forma

$$x^{'} y + x y^{'} - x^{'} y^{'}$$

con $x^{'} \in L \ \cup \ R_x$ e $y^{'} \in L_y \ \cup \ R_y$

Tale espressione può essere scritta equivalentemente in questo modo

$$1 + x^{'} \ (y - y^{''}) \qquad (\blacktriangle)$$

con $y^{''} = \dfrac{1 + (x^{'} - x)\ y^{'}}{x^{'}}$ elemento di $L_y \ \cup \ R_y$ che "compare" dopo $y^{'}$.

- Se $y^{''} \in L_y$, allora abbiamo due possibilità

  1. $\exists r_x \in R_x \ \exists l_y \in L_y \quad (x^{'} = r_x)\ \&\ (y^{'} = l_y)$
  2. $\exists l \in L \ \exists r_y \in R_y \quad (x^{'} = l)\ \&\ (y^{'} = r_y)$

In entrambi i casi abbiamo che

$$x^{'}y + xy^{'} - x^{'}y^{'} \in R_{xy}$$

e, guardando (▲), che

$$x^{'}y + xy^{'} - x^{'}y^{'} > 1$$

▶ Se $y^{''} \in R_y$, allora abbiamo due possibilità

1. $\exists l \in L \; \exists l_y \in L_y \quad (x^{'} = l) \;\&\; (y^{'} = l_y)$
2. $\exists r_x \in R_x \; \exists r_y \in R_y \quad (x^{'} = r_x) \;\&\; (y^{'} = r_y)$

In entrambi i casi abbiamo che

$$x^{'}y + xy^{'} - x^{'}y^{'} \in L_{xy}$$

e, considerando (▲), che

$$x^{'}y + xy^{'} - x^{'}y^{'} < 1$$

□

Proposizione 23

Dati $x > 0$ numero e $y = (L_y, R_y)$ suo reciproco

$$xy = 1$$

dimostrazione:

E' sufficiente dimostrare che, dati $x > (\emptyset, \emptyset)$ pre-numero e y suo reciproco,

$$xy \doteq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$$

Sia $z = xy$. Per il lemma 8 abbiamo che

$$\forall l_z \in L_z \; \forall r_z \in R_z \quad (l_z < (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) < r_z)$$

Sappiamo che $z \leq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ se e solo se $\forall l_z \in L_z \quad l_z < (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ e ciò, come abbiamo appena visto, è verificato.

D'altra parte abbiamo che $z \geq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ se e solo se $(\emptyset, \emptyset) < z$ e $\forall r_z \in R_z \quad (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) < r_z$.

La prima condizione è soddisfatta poiché z è prodotto di termini $> (\emptyset, \emptyset)$, mentre la seconda è verificata direttamente dal lemma 8.

Avendo quindi che $z \leq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ e $z \geq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$, possiamo concludere affermando che

$$xy \doteq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$$

$\square$

Siamo ora in grado di dimostrare questo importante risultato: il reciproco y di un numero surreale x è l'unico numero surreale tale per cui $xy = 1$.

Proposizione 24

Dati $x > 0$ numero e y suo reciproco

$$\neg \, \exists \, (z \;\; \text{numero} \;\; \neq y \,) \qquad xz = 1$$

dimostrazione:

Dalla proposizione 23 sappiamo che $xy = 1$.

Basta quindi dimostrare che, dati x pre-numero e y suo reciproco, non esiste alcun pre-numero z tale per cui $xz \doteq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ & $\neg(z \doteq y)$.

Supponiamo per assurdo che esista uno z pre-numero tale che

$$xz \doteq (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \quad \& \quad \neg\, (z \doteq y)$$

Dato che per il lemma 1 $y \doteq y$, allora

$$y\ (xz) \doteq y\ (\{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$$

Per le proposizioni 13, 14, 17 e 23 ciò equivale ad affermare che

$$z \doteq y$$

Siamo arrivati ad una contraddizione: avevamo considerato infatti z tale per cui $\neg(z \doteq y)$.

$\square$

Remark

Alla fine della scorsa sezione abbiamo osservato che l'insieme dei numeri surreali dotato dell'operazione di somma algebrica è un gruppo abeliano.

In questa sezione abbiamo invece dimostrato i seguenti risultati relativi al prodotto di surreali:

* $(xy)\ z = x\ (yz)$
* 1 è elemento neutro del prodotto ($x \cdot 1 = \ 1 \cdot x = x$)
* Dato y reciproco di $x \neq 0 \quad xy = 1$ (esistenza dell'inverso)
* $xy = yx$
* $x \neq 0$ numero $\rightarrow$ y (reciproco di x) numero
* $x,\ y$ numeri $\rightarrow$ xy numero

Abbiamo quindi che l'insieme dei numeri surreali privato dello 0 e dotato dell'operazione di prodotto è un gruppo abeliano.

In aggiunta a ciò abbiamo dimostrato anche la distributività del prodotto rispetto alla somma algebrica:

$$(x + y)\ z = xz + yz$$

In conclusione possiamo affermare quindi che l'insieme dei surreali dotato delle operazioni di somma algebrica e prodotto è un campo totalmente ordinato.

Soffermiamoci un istante ad analizzare qualche esempio di prodotto che coinvolga gli ordinali "surreali". In questo modo potremo confrontare l'aritmetica di quest'ultimi con quella degli ordinali "classici".
Come già fatto notare, in alcuni casi, per evitare un'eccessiva difficoltà di lettura, abuseremo della notazione identificando i numeri con i pre-numeri che gli fanno da rappresentanti.

$\omega \cdot 2 = (\{0, 1, 2, ...\}, \emptyset) \cdot (\{1\}, \emptyset) = (\{\omega, 2+\omega-1, 4+\omega-2, 6+\omega-3, ...\}, \emptyset) = (\{\omega, \omega+1, \omega+2, ...\}, \emptyset)$

$2 \cdot \omega = (\{\omega, \omega+2-1, \omega+4-2, \omega+6-3, ...\}, \emptyset) = (\{\omega, \omega+1, \omega+2, ...\}, \emptyset)$

$(1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = (\{\omega, \omega+1, \omega+2, ...\}, \emptyset)$

$1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega = (\{\omega, \omega+1, \omega+2, ...\}, \emptyset)$

$\frac{1}{2} \cdot \omega \doteq (\{0\}, \{1\}) \cdot (\{0, 2, 4, ...\}, \emptyset) \doteq (\{0, 1, 2, ...\}, \{\omega-1, \omega-2, ...\})$

$\omega \cdot \omega \doteq (\{\omega, 2\ \omega, 3\ \omega, ...\}, \emptyset)$

Remark

L'aritmetica degli ordinali surreali differisce da quella degli ordinali classici. Abbiamo infatti che, mentre classicamente per esempio $\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega = 2 \cdot \omega$, per gli ordinali surreali vale invece la commutatività.
Le due aritmetiche differiscono anche per un altro aspetto: per gli ordinali "classici" in generale non vale $(\alpha+\beta) \cdot \gamma \neq \alpha\gamma + \beta\gamma$, mentre per gli ordinali surreali il prodotto è distributivo rispetto alla somma algebrica.

Prima di concludere il capitolo mostriamo che ϵ è il reciproco di ω, ovvero che $\omega\ \epsilon \doteq 1$.
Per farlo innanzitutto notiamo che $\omega \doteq (\{1, 2, 4, 8, ...\}, \emptyset)$ e poi richiamiamo alla memoria la formula per il prodotto equivalente a quella data dalla definizione 17:

$$xy = (\{xy - (x - L_x)\ (y - L_y)\}\ \cup\ \{xy - (R_x - x)\ (R_y - y)\}\ ,$$
$$\{\ \mathrm{xy} + (\mathrm{x} - \mathrm{L}_x)\ (R_y - y)\}\ \cup\ \{xy + (R_x - x)\ (y - L_y)\})$$

Abbiamo quindi che

$$\epsilon{\cdot}\omega = (\{\epsilon\ \omega{-}\epsilon\ (\omega{-}\{1, 2, 4, 8, ...\})\}\ ,\ \{\epsilon\ \omega{+}(\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, ...\}{-}\epsilon)\ (\omega{-}\{1, 2, 4, 8, ...\})\})$$

* Per prima cosa dimostriamo che $\epsilon \cdot \omega \leq 1$.

Per definizione ciò avviene se e solo se $\forall l_{\epsilon\omega} \in L_{\epsilon\omega} \quad (l_{\epsilon\omega} < 1)$.

$L_{\epsilon\omega} = \{\epsilon, 2\ \epsilon, 3\ \epsilon, ...\}$, quindi si tratta di dimostrare che

$$n\ \epsilon < 1 \qquad \text{con}\ \ n = 2^k$$

Questo è vero se e solo se (moltiplicando da entrambe le parti per il reciproco di n)

$$\epsilon < \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{2^k} \qquad \exists\tilde{k}$$

Ciò è verificato poiché $\forall k \quad \frac{1}{2^k} \in R_\epsilon$.

* Resta da dimostrare che $\epsilon \cdot \omega \geq 1$.

Per definizione ciò avviene se e solo se

1. $(\emptyset, \emptyset) < \epsilon\ \omega$
2. $\forall r_{\epsilon\omega} \in R_{\epsilon\omega} \quad r_{\epsilon\omega} > 1$

Dato che $\epsilon,\ \omega > (\emptyset, \emptyset)$, abbiamo che 1) è verificata.

Per quanto riguarda il punto 2), osserviamo che gli elementi di $R_{\epsilon\omega}$ hanno la seguente forma

$$\epsilon\ \omega + (\tfrac{1}{N} - \epsilon)\ (\omega - n) \qquad \text{con } n,\ N \in \{1, 2, 4, ...\}$$

che è equivalente quest'altra

$$\tfrac{1}{N}\ \omega - \tfrac{n}{N} + \epsilon\ n \qquad \text{con } n,\ N \in \{1, 2, 4, ...\}$$

la quale è > 1 in quanto $\epsilon \cdot n$ è prodotto di termini > 0 e $\frac{\omega - n}{N} > 1$ per ogni $n,\ N \in \{1, 2, 4, ...\}$.

In questo capitolo siamo riusciti quindi a costruire il campo totalmente ordinato dei numeri surreali all'interno della teoria degli insiemi ZFC e abbiamo potuto osservare che tale campo contiene i reali, gli infinitesimi e anche gli infiniti di Cantor. Analizzando quel che abbiamo ottenuto, possiamo affermare che lavorare con i numeri surreali fornisce, tra gli altri, questi significativi vantaggi:

- disporre di un campo totalmente ordinato molto vasto che, oltre ai reali, comprende anche gli infiniti e gli infinitesimi;
- avere un'aritmetica degli ordinali (surreali) più "intuitiva" di quella classica;
- poter dimostrare le proprietà delle operazioni una sola volta per tutti i numeri surreali (non è necessario fornire una dimostrazione per i razionali, una per i reali, una per gli ordinali e una per gli infinitesimi poiché essi sono tutti numeri surreali).

Uno svantaggio di tale costruzione è invece quello di mettere in maggior risalto i numeri diadici rispetto a quelli irrazionali e quelli razionali con forma binaria infinita.

Nel prossimo capitolo accenneremo ad alcune possibili applicazioni di giochi, pre-numeri e numeri surreali alla Game Theory. La teoria dei numeri surreali di Conway è nata infatti con lo scopo di essere applicata proprio alla teoria dei giochi.

Capitolo 4

Applicazioni alla teoria dei giochi

La teoria dei numeri surreali che abbiamo visto al capitolo precedente è nata con lo scopo di essere applicata alla teoria dei giochi: in un primo momento è stato introdotto il concetto di Gioco e successivamente si è passati in modo graduale alla definizione di numero surreale.

John Conway, volendo studiare le battute finali delle partite del gioco Go, ha associato ad ogni posizione del tabellone la coppia (L, R) formata da L, R insiemi i cui elementi erano rispettivamente le posizioni che i due ipotetici giocatori Left e Right avrebbero potuto raggiungere da quella stessa posizione compiendo una mossa consentita dal regolamento.
Dato che nelle fasi finali di Go e di alcuni giochi simili spesso capita che il tabellone si scomponga in "più campi da gioco" tra loro indipendenti, il matematico britannico ha pensato che sarebbe stato utile avere un modo per combinare l'analisi di giochi che tra loro non interagiscano. Proprio per questa ragione egli prima ha introdotto il concetto di Gioco e poi le nozioni di addizione, negazione e confronto tra Giochi.

In seguito, proseguendo con il suo lavoro, Conway ha notato che alcuni Giochi erano dotati di proprietà interessanti ed ha introdotto quindi la definizione di numero surreale. In ultima istanza ha definito il prodotto e ha scoperto che i numeri surreali formano un campo che al suo interno contiene i reali, gli infinitesimi e gli ordinali.

In questo capitolo, basandoci soprattutto su [1], faremo qualche accenno all'applicazione della teoria dei surreali ai giochi: in un primo momento tratteremo alcuni concetti di base per avere un'idea di come Conway abbia impostato il lavoro, successivamente daremo una rapida occhiata ad un interessante esempio: l'Hackenbush ristretto (gioco per due giocatori inventato dallo stesso Conway).

Prima di proseguire facciamo una piccola sottolineatura notazionale: come fatto anche in questo incipit, nelle prossime pagine scriveremo "gioco" per alludere ad una "partita" o ad un gioco inteso come scacchi, Go,... , utilizzeremo invece "Gioco" in riferimento al concetto introdotto tramite la definizione 8.

4.1 Introduzione

I giochi di cui ci occupiamo in queste ultime pagine sono quelli

- con 2 giocatori che si alternano nel fare la propria mossa;
- di tipo deterministico (ovvero tutto dipende dalle scelte dei giocatori e non da fattori casuali);
- che non hanno nessuna informazione nascosta, come per esempio delle carte visibili solamente al singolo giocatore.

Adottiamo inoltre questa convenzione, la quale definisce il momento in cui viene decretata la fine del gioco:

Un giocatore vince quando l'altro
non ha più mosse a sua disposizione

Ora che abbiamo definito la tipologia di gioco che andremo a trattare, parliamo della rappresentabilità tramite alberi dei giochi appena descritti.

Come abbiamo già detto, ad ogni posizione P del "tabellone di gioco" corrisponde la coppia di insiemi (L_P, R_P) con L_P ed R_P aventi gli elementi che sono rispettivamente le posizioni raggiungibili dal giocatore Left e dal giocatore Right in un singolo turno di gioco iniziato nella posizione P.

Dato che siamo interessati alla struttura astratta dei giochi possiamo pensare che ogni posizione P sia completamente determinata da (L_P, R_P). Siamo perciò autorizzati a scrivere $P = (L_P, R_P)$.

Ora, dato che ogni gioco G ha la propria posizione di partenza e che per ogni posizione P di G possiamo ottenere un gioco più corto prendendo P come posizione iniziale, siamo in grado di rappresentare questi giochi tramite alberi: le posizioni sono i nodi (la posizione iniziale sarà quindi la radice, ovvero il nodo più basso) e le mosse consentite sono i rami.

Per di più possiamo sempre rappresentare questi alberi con i rami obliqui che salgono verso sinistra per indicare le mosse di Left e che salgono verso destra per indicare le mosse di Right (gli alberi vanno "letti" dal basso verso l'alto).

Facciamo qualche semplice esempio di albero per poter meglio comprendere ciò di cui stiamo parlando.

$0 = (\emptyset, \emptyset)$ $1 = (\{0\}, \emptyset)$ $-1 = (\emptyset, \{0\})$ $* = (\{0\}, \{0\})$

Il gioco più semplice che si può trovare è quello descritto da $0 = (\emptyset, \emptyset)$, il quale spesso viene chiamato *Endgame*: il giocatore che ha l'onere della prima

mossa perde poiché non ne ha nessuna a disposizione.
$1 = (\{0\}, \emptyset)$ descrive invece una posizione nella quale, sia che inizi Left sia che cominci Right, a vincere è sempre Left: se inizia Right, vince Left poiché il primo non ha mosse a disposizione, se comincia Left, ci si trova nella posizione $0 = (\emptyset, \emptyset)$ con il pallino del gioco in mano a Right, il quale non ha più nulla da fare.
Al contrario possiamo osservare che $-1 = (\emptyset, \{0\})$ descrive una situazione in cui vince sempre Right.
Per concludere l'analisi di questi semplici esempi soffermiamoci su $* = (\{0\}, \{0\})$ e ragioniamo in modo analogo: in questa posizione a vincere è sempre il primo giocatore che muove.

Remark

Le coppie $(\emptyset, \emptyset)$, $(\{0\}, \emptyset)$, $(\emptyset, \{0\})$ sono veri e propri numeri surreali (in particolare 0, 1 e -1), mentre $(\{0\}, \{0\})$ è solamente un Gioco e per questo motivo lo chiamiamo *.

Ragionando in modo analogo si possono dimostrare le seguenti relazioni, le quali descrivono ciò che abbiamo intuito da questi esempi di base:

dato $G = (L, R)$ Gioco

$G > 0$ (G positivo) se esiste una strategia vincente per Left;

$G < 0$ (G negativo) se esiste una strategia vincente per Right;

$G = 0$ se esiste una strategia vincente per il giocatore che muove per secondo;

$G \mid\mid 0$ (G "fuzzy") se esiste una strategia vincente per il giocatore che muove per primo.

Remark

Si può dimostrare che ogni gioco di quelli che abbiamo preso in considerazione è descritto da un Gioco $G = (L, R)$ che appartiene ad una delle classi descritte nella definizione appena data.

Abbiamo appena visto che ogni gioco (di quelli che abbiamo preso in esame) può essere descritto tramite un Gioco (che talvolta è proprio un numero surreale). Possiamo quindi definire il confronto, la negazione e la somma di giochi in modo pressoché analogo a quanto fatto nel capitolo 3.

Definizione 19

Dati i Giochi $G = (L_G, R_G)$ e $H = (L_H, G_H)$

- ▷ $G \geq H$ se e solo se $\neg\ \exists\ r_G \in R_G \quad (r_G \leq H)$ e $\neg\ \exists\ l_H \in L_H \quad (l_H \geq G)$
- ▷ $G \leq H$ se e solo se $H \geq G$
- ▷ $G \mid\mid H$ se e solo se $\neg(G \leq H)\ \&\ \neg(G \geq H)$
- ▷ $-G = (-R_G, -L_G)$
- ▷ Se G ed H rappresentano due giochi che fanno parte di un gioco "più grande" nel quale ogni giocatore nel proprio turno può muovere in una sola delle due partite (ad esempio si pensi ad una sfida a scacchi fatta in contemporanea su due scacchiere differenti oppure ad una partita di Go in cui nelle fasi finali il tabellone è composto di due zone indipendenti)

  $$G + H = (L_G + H\ \cup\ G + L_H, R_G + H\ \cup\ G + R_H)$$

Remark

La somma appena definita prende il nome di somma disgiuntiva, ma potrebbe capitare che essa talvolta venga chiamata semplicemente "somma".

Ora che abbiamo gettato le basi di questa teoria dei giochi, prima di procedere con qualche esempio esplicativo, diamo un'ultima definizione assegnando un nome particolare ad un paio di Giochi che sono abbastanza comuni.

Definizione 20

$$\uparrow = (\{0\}, *)$$

$$\downarrow = (*, \{0\})$$

Remark

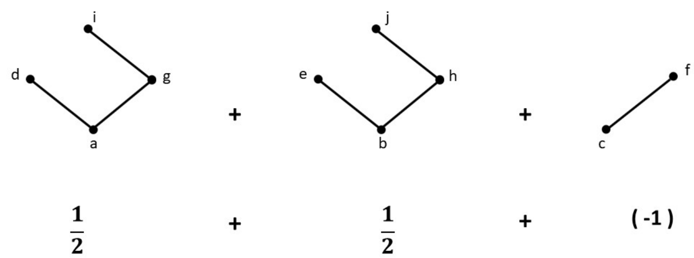
Osserviamo immediatamente che:

1. $\downarrow \; = \; -\uparrow$
2. Dato che Left vince sia se muove per primo sia se lo fa per secondo, allora $\uparrow$ è positivo.

Procederemo ora in questo modo: per prima cosa faremo un paio di esempi che possano fare chiarezza su quanto visto fin qui, in un secondo momento apriremo una piccola parentesi sul gioco dei domino di Andersson ed infine ci soffermeremo un attimo ad analizzare uno dei tanti giochi che sono stati inventati da Conway, l'Hackenbush ristretto.

Cominciamo quindi con un paio di esempi: per prima cosa verifichiamo che $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ sia effettivamente 1 e poi mostriamo che $\uparrow + \uparrow + * = (\{0\}, \uparrow)$.

Per dimostrare che $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ mostriamo che la somma dei giochi associati a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e -1 dà $(\emptyset, \emptyset)$. Ci basta cioè dimostrare che c'è sempre una strategia vincente per il giocatore che muove per secondo.
Siano a, b e c le posizioni iniziali.



- Se inizia Left, egli ha 2 possibilità per partire:
  1. muovere da a a d
  2. muovere da b ad e

  Se siamo nel caso 1), a Right basta muovere da b ad h per costringere l'avversario a spostarsi da h a j e trovarsi a fare la decisiva mossa $c \rightarrow f$.

  Se siamo invece nel caso 2), Right può fare la mossa $a \rightarrow g$ per costringere Left a $g \rightarrow i$ e vincere grazie alla mossa $c \rightarrow f$.

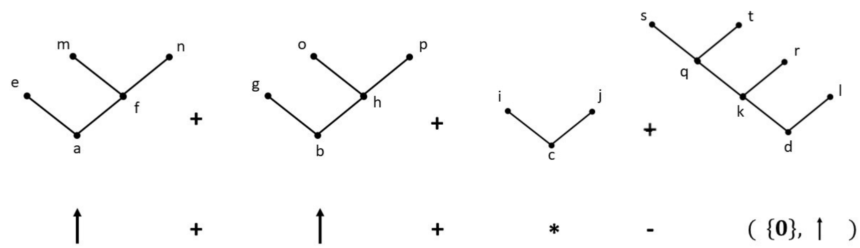
- Se a cominciare è invece Right, egli ha 3 possibilità per iniziare la partita:
  1. muovere da a a g
  2. muovere da b ad h
  3. muovere da c ad f

  Se siamo nel caso 1), a Left basta muovere da b ad e per costringere l'avversario a spostarsi da c ad f e trovarsi a fare la decisiva mossa $g \rightarrow i$.

  Se siamo invece nel caso 2), Left può fare la mossa $a \rightarrow d$ per costringere Right a $c \rightarrow f$ e vincere grazie alla mossa $h \rightarrow j$.

  Per concludere, se siamo nel caso 3), a Left basta muovere da b ad e per costringere l'avversario ad andare da a ad g. In questo modo la mossa $g \rightarrow i$ decreta Left vincitore.

Come ultimo esempio mostriamo che $\uparrow + \uparrow + * = (\{0\}, \uparrow)$. Anche in questo caso basta mostrare che $\uparrow + \uparrow + \; * - (\{0\}, \uparrow)$, ovvero $\uparrow + \uparrow + \; * + (\{0\}, \downarrow)$, dà $(\emptyset, \emptyset)$. Mostriamo quindi che il Gioco formato dalla somma disgiuntiva di quei quattro Giochi è tale per cui vince sempre il giocatore che muove per secondo.



- Se inizia Left, egli ha 4 possibilità per partire:

    1. muovere da a ad e
    2. muovere da b a g
    3. muovere da c a i
    4. muovere da d a k

Se siamo nel caso 1) (o analogamente nel caso 2)), a Right basta muovere da b ad h (rispettivamente da a ad f) per trovarsi in una situazione equivalente a $* \; + \; * \; + (\downarrow, \{0\})$.
A questo punto, se Left fa la mossa $h \rightarrow o$ oppure quella $c \rightarrow i$, allora Right, rispondendo con $c \rightarrow j$ o rispettivamente con $h \rightarrow p$, costringe l'avversario a fare la mossa $d \rightarrow k$ e ciò gli permette di vincere tramite $k \rightarrow r$.
Se Left invece compie la mossa $d \rightarrow k$, allora a Right basta andare da h a p per arrivare ad una situazione equivalente a quella descritta da $* + \downarrow$. Anche in questo caso quindi, essendo quest'ultimo un Gioco negativo, vince Right.

Se siamo nel caso 3), Right può fare la mossa $a \rightarrow f$.
A questo punto se Left compie la mossa $f \rightarrow m$, Right può andare da b

ad h lasciando all'avversario solamente due possibilità: $h \rightarrow o$ e $d \rightarrow k$. Nel primo caso Right muove da d ad l e vince, nel secondo muove da h a p costringendo l'avversario a compiere $k \rightarrow q$ e vince grazie a $q \rightarrow t$.

Se Left opta per $b \rightarrow g$, Right fa la mossa $f \rightarrow n$. Il primo giocatore è quindi costretto alla mossa $d \rightarrow k$, a seguito della quale Right vince grazie a $k \rightarrow r$.

Se invece Left decide di muoversi da d a k, allora Right può compiere la mossa $b \rightarrow h$. Ci si ritrova quindi in una situazione equivalente a quella descritta da $* + * + \downarrow < 0$. Di conseguenza abbiamo una strategia vincente per Right.

Se siamo invece nel caso 4), a Right basta muovere da b ad h per trovarsi in una situazione equivalente a $\uparrow + * + * + \downarrow = (*, *)$.
Dopo la mossa di Left il gioco si troverà nella posizione * e sarà il turno di Right: ciò significherà quindi vittoria per quest'ultimo.

- Se a cominciare è invece Right, egli ha 4 possibilità per iniziare la partita:
  1. muovere da a a f
  2. muovere da b ad h
  3. muovere da c a j
  4. muovere da d a l

Se siamo nel caso 1), a Left basta muovere da d a k per trovarsi in una situazione equivalente a $* + \uparrow + * + \downarrow$.
A questo punto, per vincere al secondo giocatore (Left) basta "copiare" le mosse del primo.
(Il caso 2) è analogo)

Se siamo invece nel caso 3), a Left basta muovere da d a k per trovarsi in una situazione equivalente a $\uparrow + \uparrow + \downarrow = \uparrow > 0$.
Abbiamo quindi una strategia vincente per Left.

Per concludere, se siamo nel caso 4), a Left basta muovere da c ad i per trovarsi in una situazione equivalente a $\uparrow + \uparrow > 0$.
Abbiamo quindi una strategia vincente per Left anche in questo caso.

4.1.1 Gioco con i domino di Andersson

Apriamo qui una piccola parentesi riguardante il gioco con i domino di Göran Andersson. Le regole sono le seguenti:

- si gioca su un tabellone rettangolare diviso in caselle quadrate. Su di esso vanno disposti i domino, tessere che occupano due caselle adiacenti;

- i due giocatori, Left e Right, si alternano nel posizionare i domino sul tabellone (una tessera per turno);

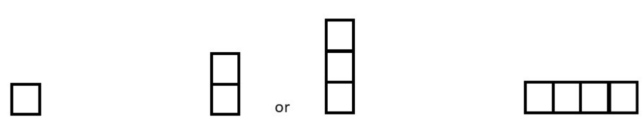
- Left può posizionare i domino solo in verticale, mentre Right può farlo solo in orizzontale;

- le tessere non possono essere sovrapposte, nemmeno parzialmente, con quelle che stanno già sul tabellone;

- il primo giocatore che non ha più mosse a disposizione perde.

Questo gioco è assolutamente in linea con i giochi che abbiamo analizzato fini qui. Proprio per questo motivo associamo ad ogni posizione sgombra da tessere un Gioco che abbia come elementi dell'insieme sinistro i Giochi che rappresentano le posizioni nelle quali ci si può trovare dopo una mossa di Left e come elementi dell'insieme destro quelli che descrivono le situazioni che si verrebbero a creare dopo una mossa di Right.

Diamo un'occhiata prima di tutto a qualche esempio di base:



$0 = (\emptyset, \emptyset)$ $\qquad 1 = (\{0\}, \emptyset)$ $\qquad -2 \doteq (\emptyset, \{0, -1\})$

Nel primo caso non ci sono mosse a disposizione né per Left né per Right. Siamo quindi nella posizione $(\emptyset, \emptyset)$ e il giocatore che avrà l'onere di cominciare la partita perderà.

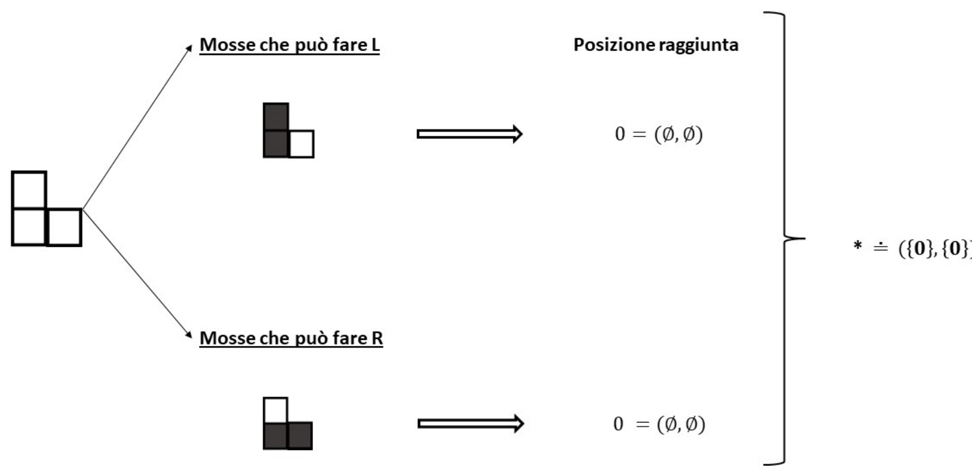
Nel secondo caso solo Left può fare una mossa che porta a non avere più caselle libere o ad averne una soltanto: questa situazione viene quindi descritta da $1 = (\{0\}, \emptyset)$.

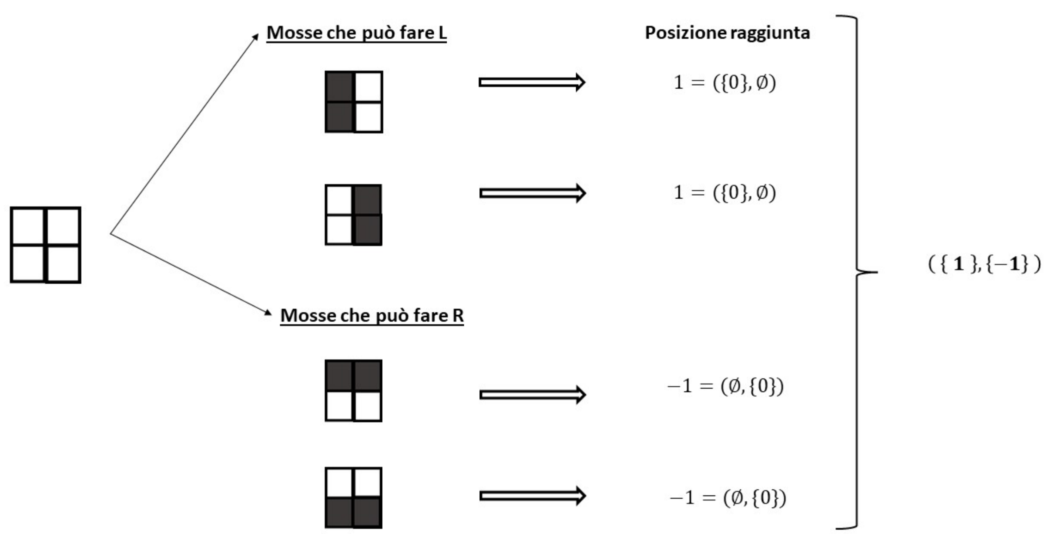
Infine nel terzo caso solo Right riesce a giocare il turno. Se posiziona la tessera sulle prime due caselle oppure sulle ultime due, allora si pone in una situazione che gli dà la possibilità di avere a disposizione un'altra mossa ($-1 = (\emptyset, \{0\})$), se invece la posiziona sulla seconda e terza casella, allora nessuno avrà più mosse a disposizione. Questa situazione di gioco viene per questo descritta da $-2 = (\emptyset, \{0, -1\})$.

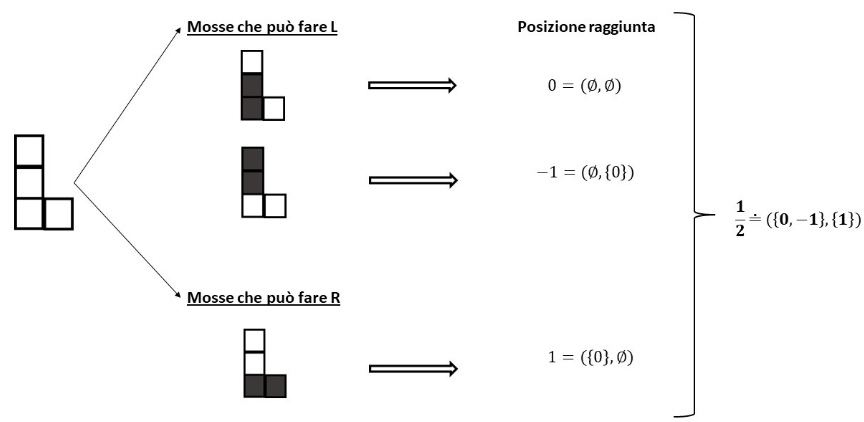
Remark

In generale si nota che se durante una fase della partita non ci sono mosse disponibili per Left, ma ce ne sono n successive per Right, allora il valore associato a quella posizione è $-n$. Se invece Right non può fare nulla mentre Left può compiere n mosse successive il valore che abbiamo è n.

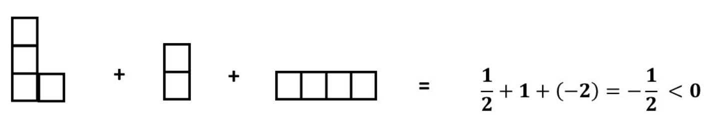
Di seguito elenchiamo qualche esempio leggermente meno standard rispetto a quelli base che abbiamo appena commentato. Si tratta delle posizioni descritte dai Giochi $(\{0\},\{0\})$, $(\{1\},\{-1\})$ e $\frac{1}{2}$.







Prima di chiudere questa parentesi legata al gioco del domino di Andersson soffermiamoci un attimo sul concetto di somma. Anche in questa tipologia di gioco è facile trovarsi nella situazione in cui le caselle libere del tabellone formano dei "campi di gioco indipendenti". dato che ognuno di essi può essere descritto da un Gioco possiamo anche in questo caso applicare la somma disgiuntiva che abbiamo introdotto poco prima di questa trattazione sui domino.
Facciamo un esempio. Supponiamo di trovarci ad analizzare una partita del gioco di Andersson in corso d'opera. Le caselle ancora vuote si trovino in queste tre zone indipendenti tra loro:



Allora possiamo dire che, per come si è messa, questa partita può essere vinta da Right indipendentemente da chi muove per primo ($-\frac{1}{2} < 0$), esiste cioè una strategia vincente per Right.

4.2 Hackenbush Ristretto

In quest'ultima sezione parleremo in breve di un gioco creato da Conway, l'Hackenbush ristretto.
Una particolarità di tale gioco è il fatto che le posizioni che vengono assunte durante la partita sono tutte rappresentabili da numeri surreali.
Per poter analizzare il suddetto gioco di Conway, abbiamo tuttavia bisogno di conoscere le principali caratteristiche della sign expansion, una costruzione dei numeri surreali alternativa a quella che abbiamo visto nel capitolo precedente.
Prima di cominciare facciamo quindi degli accenni a tale costruzione.

4.2.1 Sign expansion

Per ogni ordinale α possiamo definire l'insieme

$$M_\alpha = \{x = (L_x, R_x) \text{ numero surreale} \mid \forall\ y \in L_x \ \cup \ R_x \quad y \in \bigcup_{\beta\ <\ \alpha} M_\beta\}$$

Esso non è altro che l'insieme dei numeri surreali che sono nati o durante lo step α o prima.

Se chiamiamo quindi

$$O_\alpha = \bigcup_{\beta\ <\ \alpha} M_\beta$$

l'insieme dei surreali costruiti prima dello step α, possiamo definire l'insieme di quelli che sono apparsi per la prima volta allo step α in questo modo:

$$N_\alpha = M_\alpha - O_\alpha$$

Per ogni numero surreale $x \in N_\alpha \quad x$ definisce la seguente sezione di Dedekind di O_α

$$(\ L = \{y \in O_\alpha \mid y < x\} \mid R = \{y \in O_\alpha \mid y > x\}\ )$$

e si può dimostrare che $x = (L, R)$.

Dato $x \in N_\alpha$ abbiamo quindi che x definisce per ogni $\beta < \alpha$ una sezione in O_β, che a sua volta è definita da un unico $x_\beta \in N_\beta$. Di volta in volta tale x_β prende il nome di approssimazione β-esima di x. Tale definizione si estende facilmente ponendo $x_\beta = x \quad \forall \beta \geq \alpha$.

Visto che si può dimostrare che per ogni numero surreale x esiste un unico N_α tale per cui $x \in N_\alpha$, chiamiamo α lo step di creazione di x.

Dato $x \in N_\alpha$, per ogni $\beta < \alpha$ definiamo

$$\begin{cases} s_\beta = + & se\ x - x_\beta > 0 \\ s_\beta = - & se\ x - x_\beta < 0 \end{cases}$$

e poniamo $s_\beta = 0 \quad \forall \beta \geq \alpha$.

In questo modo possiamo associare ad ogni numero surreale x una sequenza di segni + e - sotto un certo ordinale (ordinale 0 escluso).
Tale sequenza è detta *sign expansion* di x.

Si può dimostrare che c'è una corrispondenza biunivoca che rispetta l'ordine tra i numeri surreali e la loro sign expansion.
Riassumendo, quindi, un numero surreale può essere identificato con la propria sign expansion.

Nella rapida esposizione fatta fin qui abbiamo visto come associare ad ogni numero surreale la propria sign expansion, ma non abbiamo detto come fare il passaggio inverso. Esiste una semplice regola, dovuta a Elwyn Berlekamp, grazie alla quale è possibile conoscere il valore di un numero reale data la sua sign expansion:

> Supponiamo che la sign expansion cominci con un + (altrimenti cambiamo tutti i segni dell'espansione e prendiamo come risultato l'opposto del numero che ricaviamo con la regola che segue)
>
> - se l'espansione è composta solamente da n segni +, allora il numero a lei associato è proprio n;
> - se l'espansione presenta almeno un segno - ,
>   1. racchiudere tra parentesi tonde il primo segno - che compare con il segno + precedente;
>   2. valutare in questo modo la sequenza: il numero di + prima della parentesi definisce la parte intera, i segni dopo la parentesi danno l'espansione binaria ordinaria della parte frazionaria ponendo 1 per i + e 0 per i - e aggiungendo un 1 finale quando l'espansione è finita.

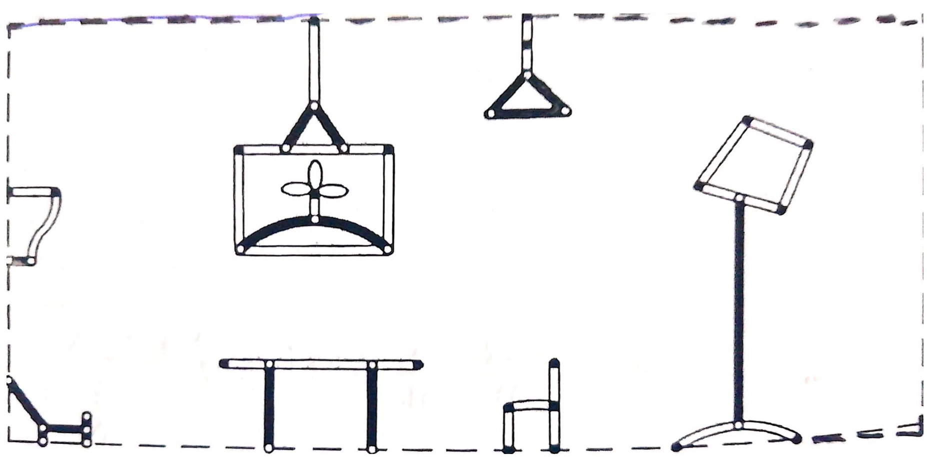
Per concludere facciamo un esempio pratico:

$$+ + + + - + - - \ = + + + (+ -) + - - \ = 3 + (0.1001)_2 = 3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{57}{16}$$

4.2.2 Hackenbush Ristretto

L'Hackenbush è un gioco per due giocatori inventato da Conway. La versione che prendiamo in esame in questa sezione è quella denominata Hackenbush ristretto. Tale variante si gioca su figure formate da sequenze di segmenti di due colori differenti (noi useremo il bianco e il nero). I segmenti sono legati uno all'altro da nodi ed è necessario che ciascun nodo sia legato tramite una catena di segmenti ad una linea tratteggiata chiamata "pavimento" (o in alcuni casi "parete" o "soffitto"). Due nodi possono essere uniti da più di un segmento e può succedere che un segmento unisca un nodo a se stesso.

Il giocatore di turno deve decidere quale segmento "tagliare" tra quelli del proprio colore (Left può recidere quelli neri e Right quelli bianchi).
Una volta tagliato il segmento, esso scompare e con lui scompaiono tutti i segmenti e i nodi che, dopo questa mossa, non sono più collegati al pavimento da alcuna catena di segmenti.
Il primo giocatore che non è in grado di giocare un turno (perché non ha più mosse a disposizione) perde.



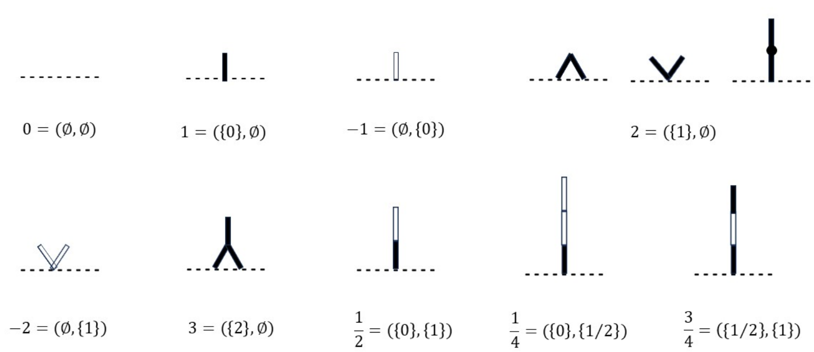
Stanza di Hackenbush ristretto, esempio che Conway fa in [1] a pagina 86

Remark

Nella versione originale tutti i segmenti hanno lo stesso colore e possono essere tagliati sia da Left che da Right.
Esiste anche un'ulteriore variante del gioco nella quale, oltre ai segmenti dei due colori assegnati a Left e Right, ci sono segmenti di un terzo colore che possono essere tagliati da entrambi i giocatori.
È interessante trattare il caso dell'Hackenbush ristretto perché tutte le sue posizioni sono descritte da numeri surreali a differenza di quanto accade, per esempio, nella versione a tre colori (alcune fasi di gioco sono associate a Giochi che non sono numeri surreali).

Il gioco che stiamo analizzando è della tipologia di quelli che abbiamo visto fin qui. Possiamo quindi agire in modo analogo a quanto fatto in precedenza assegnando ad ogni posizione di gioco un Gioco (in questo caso proprio un numero surreale) che abbia come elementi degli insiemi sinistro e destro le situazioni che si possono presentare dopo che una mossa è stata compiuta rispettivamente da Left o da Right.

Iniziamo con alcuni esempi di base che possono rivelarsi molto utili per capire ciò che abbiamo appena detto:



Consideriamo per un attimo l'ultimo esempio rappresentato nell'immagine qui sopra. In questa situazione l'unica cosa che può fare Right è quella di tagliare il segmento centrale (l'unico bianco). In quel caso si arriverebbe alla posizione descritta da 1. Left ha invece due possibiltà: tagliare il segmento più alto e arrivare alla posizione $\frac{1}{2}$, oppure tagliare il più basso e trovarsi in 0. Il numero che descrive la situazione è quindi

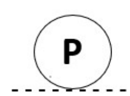
$$(\{0, \tfrac{1}{2}\}, \{1\}) \doteq (\{\tfrac{1}{2}\}, \{1\}) = \tfrac{3}{4}$$

Remark

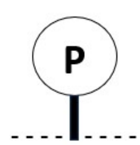
Da notare che, come nel caso del domino e dei giochi fin qui considerati, se il numero che descrive la situazione di gioco è positivo, allora esiste una strategia vincente per Left, se è negativo, vuol dire che ne esiste una per Right e se invece è 0, significa che a vincere sarà colui che gioca per secondo.

Non abbiamo nessuna regola generale semplice che ci permetta di calcolare i numeri associati alle posizioni che si ottengono giocando con un disegno qualsiasi, tuttavia esiste una teoria legata agli alberi.

Se abbiamo una determinata posizione P



il valore della posizione

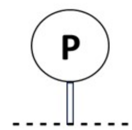


dipende solamente dal valore di P: se P è descritta dal numero reale x, il valore della posizione nella quale abbiamo un segmento nero che "sorregge" P è dato dal valore $1 \star x$.

Definizione 21

Dato x numero reale, $1 \star x$ corrisponde al primo valore della successione $(\frac{x+n}{2^{n-1}})_{n \geq 1}$ per cui $x + n > 1$.

Il valore della posizione seguente

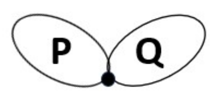


è dato invece da $(-1) \star x$.

Definizione 22

Dato x numero reale, $(-1) \star x$ corrisponde al primo valore della successione $(\frac{x-n}{2^{n-1}})_{n \geq 1}$ per cui $x - n < -1$.

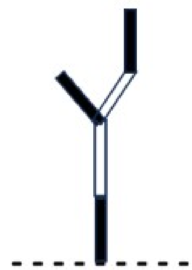
Abbiamo anche un risultato legato alla somma di due situazioni di gioco: date due posizioni P e Q descritte dai valori x e y abbiamo che



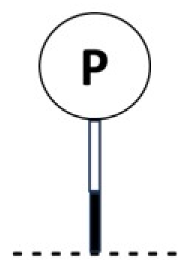
è una situazione descritta dal valore numerico $x + y$.

È arrivato il momento di fare qualche esempio: per prima cosa calcoliamo il valore di un paio di figure e successivamente ci concentriamo su un esempio che contiene anche la somma.

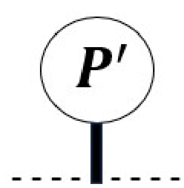
Cominciamo con il primo esempio:



In base alle regole sulla teoria degli alberi che abbiamo appena visto possiamo dire che la figura precedente è equivalente a quella che segue presa con P di valore $1 + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$



Ci possiamo ricondurre ancora una volta ad una più semplice immagine:



Visto che in questo caso la posizione $P^{'}$ ha valore

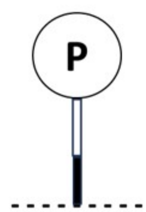
$$(-1) \star \tfrac{1}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\tfrac{3}{4},$$

l'intero disegno iniziale ha valore

$$1 \star (-\tfrac{3}{4}) = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \tfrac{5}{8}$$

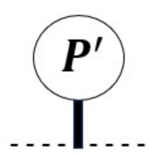
Passiamo al secondo esempio:

Come fatto nell'esempio precedente possiamo facilmente ricondurci a



con P di valore $(-1) \star \frac{1}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$.

Agendo in modo analogo otteniamo quindi

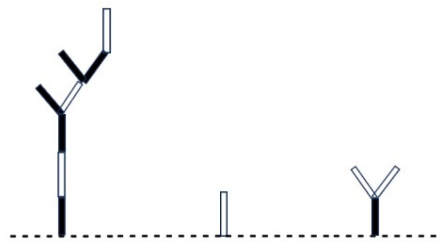


con $P^{'}$ di valore $(-1) \star (-\frac{3}{4}) = \frac{-\frac{7}{4}}{1} = -\frac{7}{4}$.

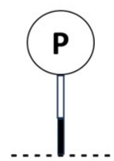
In conclusione abbiamo quindi che l'immagine iniziale è descritta dal valore

$$1 \star (-\frac{7}{4}) = \frac{\frac{5}{4}}{4} = \frac{5}{16}$$

Come ultimo esempio analizziamo una cosiddetta “foresta di Hackenbush ristretto”. Per calcolare il valore di tale gioco bisogna utilizzare, oltre alle regole usate nei primi due esempi, anche quella relativa alla somma.

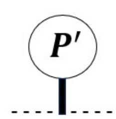


Il secondo e il terzo albero partendo da sinistra hanno valore rispettivamente -1 e $(1 \star (-2)) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
Per quanto riguarda il primo albero ci possiamo ricondurre alla seguente figura equivalente



$$\text{con P di valore } 1 \star [\ 1 + (-1) \star (1 + \tfrac{1}{2})\ ] = 1 \star [\ 1 + (-\tfrac{3}{8})] = \tfrac{13}{8}$$

Questa situazione equivale all’albero



$$\text{con } P^{'} \text{ di valore } (-1) \star \tfrac{13}{8} = \frac{-\frac{11}{8}}{4} = -\tfrac{11}{32}.$$

Abbiamo quindi che il primo albero ha valore $1 \star (-\frac{11}{32}) = \frac{\frac{53}{32}}{2} = \frac{53}{64}$ e di conseguenza la foresta iniziale ha valore totale

$$\tfrac{53}{64} + (-1) + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{64} > 0$$

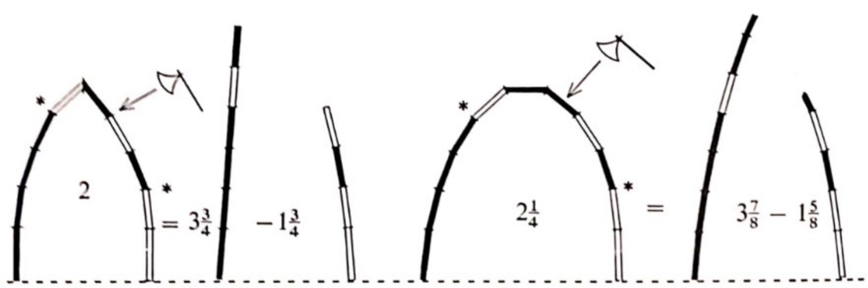
Ciò significa che in questa fase della partita Left è in vantaggio ed esiste una strategia vincente per lui indipendentemente dal fatto che sia il primo o il secondo a giocare.

Manca solamente un ultimo aspetto da chiarire, ovvero quello legato alla valutazione dei cicli che si possono trovare nell'Hackenbush ristretto. Per poterli valutare ci serviamo della sign expansion e della regola di Berlenkamp (li possiamo utilizzare perché in questa versione del gioco tutte le posizioni sono descritte da numeri e nessuna di esse è associata a semplici Giochi).

Prima di tutto forniamo un metodo per associare ad una catena di segmenti la propria sign expansion (si può dimostrare infatti tramite le regole degli alberi che la sign expansion di una catena si può "leggere" direttamente dalla figura): partendo dal pavimento e via via salendo associamo ad ogni segmento nero il segno + e ad ogni segmento bianco il segno - .

Ora che sappiamo come associare ad ogni catena di segmenti la propria sign expansion, vediamo come valutare i cicli dell'Hackenbush ristretto: si separa il circuito nel nodo o nel punto medio del bordo che sta a metà tra i due cambiamenti di segno (o colore) più vicini al suolo da ciascun lato e si trova il valore cercato sommando i valori delle due parti in cui lo abbiamo separato.
Se si recide il ciclo nel punto medio di un segmento, bisogna considerare il rispettivo segno (+ o -) in entrambe le parti che si ottengono tramite la separazione.

Concludiamo la trattazione calcolando i valori associati ai due cicli che vengono rappresentati nell'immagine seguente:



Esempi di applicazione della regola di Berlekamp per i cicli che troviamo in [1] alla pagina 90 [1]

[1]In questa immagine troviamo scritte come, per esempio, $2\frac{1}{4}$.
Tale scrittura non indica $2 \cdot \frac{1}{4}$, bensì $2 + \frac{1}{4}$, ovvero "due e un quarto", per l'appunto quindi $\frac{9}{4}$. I numeri scritti in questa maniera vengono detti "numeri misti". Non si tratta di qualcosa che ha a che vedere con dei particolari numeri, ma solamente di una notazione adottata spesso nei Paesi anglosassoni.

In entrambi i disegni i due cambiamenti di segno più vicini al suolo sono indicati con degli asterischi. La regola che abbiamo visto ci impone quindi di recidere il ciclo nel primo caso su un nodo, nel secondo sul punto medio di un segmento.

Nella prima figura il ciclo viene spezzato in due catene che hanno le seguenti sign expansion

$+ + + + - + = + + + (+ -) + = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$
$- - + - = -[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}] = -\frac{7}{4}$

Per questo motivo il primo ciclo ha valore

$$\frac{15}{4} + (-\frac{7}{4}) = \frac{8}{4} = 2$$

Nella seconda figura invece il ciclo viene spezzato in due catene che hanno queste altre sign expansion

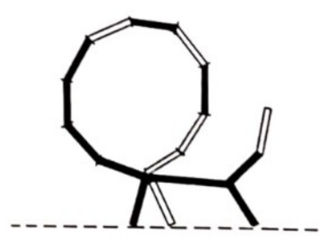
$+ + + + - + + = + + + (+ -) + + = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{31}{8}$
$- - + - + = -[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}] = -\frac{13}{8}$

Il secondo ciclo è associato quindi al valore

$$\frac{31}{8} + (-\frac{13}{8}) = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Remark

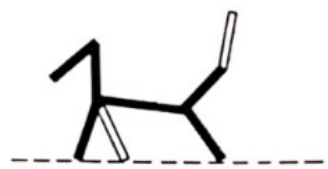
La regola appena illustrata può essere applicata anche a cicli che si trovano ad una certa distanza dal pavimento.
Consideriamo per esempio la seguente situazione di gioco:



Utilizzando la regola precedente per calcolare il valore del ciclo:

$$[\ +\ +\ +(+\ -)+\ ]\ +\ [\ -\ -\ +\ -\ ] = \frac{15}{4} - \frac{7}{4} = 2$$

possiamo ricondurci immediatamente a questa immagine equivalente



Le applicazioni della teoria di Conway ai giochi sono molteplici e sono tutte molto interessanti.
Scopo di quest'ultimo capitolo non era certo quello di farne una trattazione esaustiva e completa, si puntava invece a "stuzzicare" la curiosità del lettore mostrandogli la reale possibilità di applicare alla teoria dei giochi le nozioni introdotte al capitolo 3.
A chi volesse approfondire ulteriormente questo argomento si potrebbe certamente consigliare la lettura di [1].

Bibliografia

[1] J. H Conway, *On Numbers and Games*, London : Academic press, 1976;

[2] Donald Knuth, *Numeri surreali - Come due ex studenti scoprirono la matematica pura e trovarono la vera felicità* (Edizione italiana a cura di Francesco Olivieri) , FrancoAngeli, ristampa del 2024;

[3] Alessandro Berarducci, *Elementi di Teoria degli Insiemi*, 2015-16

[4] Gabriele Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, Torino, Bollati Boringhieri, 1994;