UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La questione della freccia del tempo

Relatore

Prof. Giulio Peruzzi

Laureando

Gianmaria Freda Civico

Anno Accademico 2018/19

Indice

Introduzione

Il concetto di freccia del tempo è definibile in molti ambiti della fisica. È infatti possibile definire una direzione del tempo guardando l'espansione dell'universo, nel qual caso si parla di freccia del tempo cosmologica, la quale stabilisce che l'aumento del tempo avvenga nella direzione in cui l'universo si espande. È anche possibile guardare il comportamento delle onde elettromagnetiche, le quali definiscono la freccia del tempo elettromagnetica. Un altro esempio di freccia del tempo, in questo caso nell'ambito della psicologia, può essere la direzione che la nostra memoria associa al tempo, infatti noi ricordiamo ovviamente il passato e non il futuro. Tuttavia noi ci concentreremo sulla freccia del tempo definita dalla termodinamica, la quale definisce la direzione del tempo usando il concetto di entropia, che come è noto per il secondo principio tende sempre ad aumentare.

La freccia del tempo ci definisce quindi un verso in cui il tempo scorre.

È però noto che molti processi fisici sono descrivibili tramite equazioni che non distinguono il passato dal futuro. Queste equazioni, infatti, accettano soluzioni sia per tempi positivi che per tempi negativi. Ciò significa che i processi da esse descritti, se percorsi all'indietro nel tempo, sono ancora fisicamente legittimi. Per alcuni di questi processi è facile poter vedere questa invarianza tra tempo che scorre in avanti e tempo che scorre all'indietro, basti pensare al video di un pendolo che oscilla. Se si manda il video all'indietro sarà difficile trovare la differenza con il video riprodotto normalmente. Per altri processi è invece molto facile capire se il tempo stia scorrendo normalmente o no, si pensi ad esempio ad una miscela di liquidi che torna allo stato iniziale, ovvero con i liquidi separati, in quel caso sarebbe immediato capire che il tempo sta scorrendo all'indietro. Si può quindi dire che questi ultimi processi definiscono una freccia del tempo, ovvero una direzione in cui il tempo scorre.

Il problema quindi sorge quando si nota che le leggi che governano la fisica fondamentale sono tutte invarianti per inversione temporale. Com'è dunque possibile che alcuni processi definiscano una freccia del tempo se le leggi che descrivono il loro comportamento microscopico non fanno distinzione tra passato e futuro? È qui che nasce il problema della freccia del tempo: Da dove ha avuto origine questa differenza fra il passato e il futuro nel tempo reale? Perché ricordiamo il passato ma non il futuro.

Capitolo 1

Reversibilità

1.1 Leggi della meccanica

La legge fondamentale della meccanica classica, l'equazione di Newton è:

$$F = m \cdot a \tag{1.1}$$

Questa è un'equazione che lega la forza agente su un corpo all'accelerazione del corpo stesso moltiplicata per la sua massa.
Le trasformzioni di Galileo per passare da un sistema di riferimento inerziale S ad S', che si muove con velocità v lungo x relativa ad Sci dicono che:

in S:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{1.2}$$

Se quindi proviamo a ricavare l'equazione della meccanica (considerando dolo le componenti in x) nel nuovo sistema di riferimento troviamo per la velocità:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \tag{1.3}$$

e per l'accelerazione:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} = a' \tag{1.4}$$

L'equazione di Newton sarà quindi:

$$F' = ma' \tag{1.5}$$

Questa equazione è come si vede indipendente dal termine in cui appare la velocità relativa dei due sistemi di riferimento considerati.

Il fatto quindi che nell'equazione di Newton compaia l'accelerazione rende la formula invariante per inversione temporale. Invertire il tempo significa infatti mandare t in $-t$, ma come si è visto, l'accelerazione, e quindi la forza, non cambia per questo tipo di trsformazione.

Se i corpi sono molti il numero delle equazioni necessarie a descrivere il sistema aumenta ma la loro forma resta invariata: in presenza di N corpi abbiamo bisogno di $n = 3N$ numeri, ovvero 3 numeri per ogni coordinata x,y e z, che indichiamo con i vettori $(\bar{q_1}, ..., \bar{q_n})$ per determinare le posizioni, e di altrettanti vettori, indicati con $(\bar{v_1}, ..., \bar{v_n})$ per determinare le velocità. L'evoluzione del sistema è determinata univocamente da un sistema di n equazioni differenziali e da n posizioni e n velocità iniziali. In questo formalismo rientra anche l'esempio fatto all'inizio della miscela di liquidi, supponiamo ad esempio di avere 2 liquidi miscelati tra loro, qui i gradi di libertà, ovvero il numero di equazioni necessarie a descrivere il sistema, sono tantissimi, tre per ogni molecola di liquido, se le consideriamo puntiformi, ancora di più se teniamo conto anche della struttura tridimensionale delle molecole, in ogni caso un numero dell'ordine di 10^{23} . Se rimaniamo nell'ambito della fisica classica, quindi senza considerare regimi relativistici o effetti quantistici, ogni sistema fisico è risolvibile usando le equazioni di Newton, o almeno così si pensava.

Laplace sintetizzava in una frase celebre, divenuta emblema del determinismo:

"Un intelletto che ad un dato istante conoscesse tutte le forze che animano la Natura e la situazione di ogni singolo essere che questa comprende, se questo stesso intelletto fosse sufficientemente vasto per sottoporre ad analisi questi dati, potrebbe abbracciare in un'unica formula tanto il moto dei più corpi dell'universo, quanto quello dell'atomo più leggero: per tale intelletto nulla sarebbe incerto, e il futuro, così come il passato, sarebbero presenti davanti ai suoi occhi "[1]

La reversibilità delle equazioni di Newton ci dice quindi che, se le n funzioni $(q_1, ..., q_n)(t)$ rappresentano una possibile evoluzione di un certo sistema fisico, ossia costituiscono una soluzione del corrispondente sistema di equazioni differenziali, allora l'evoluzione per tempi negativi, descritta dalle n funzioni $(q_1, ..., q_n)(-t)$, è ancora un'evoluzione possibile, in quanto risolve il medesimo sistema di equazioni con le stesse posizioni iniziali e le velocità iniziali invertite. Secondo queste equazioni dunque, se potessimo intervenire sulle singole molecole, saremmo in grado di separare due liquidi miscelati tra loro. Come risolvere quindi questo apparente paradosso per cui, nonostante la reversibilità delle equazioni delle singole molecole, il sistema macroscopico ha una direzione temporale ben definita?

1.2 Risolvere le equazioni di Newton

Prima di vedere come Boltzmann ha spiegato questo apparente paradosso, dobbiamo chiarire cosa si intenda per risolvere le equazioni di Newton. Tranne che in casi molto particolari quali pochissimi gradi di libertà o forze dall'espressione semplice non è possibile risolvere in maniera esatta un sistema di equazioni differenziali. Né sarebbe particolarmente utile: se vogliamo capire il comportamento globale del sistema non ci basta conoscere la sua evoluzione a partire da una data condizione iniziale, ma vogliamo tenere in qualche modo conto di tutte le possibili condizioni iniziali. Per questo motivo è utile pensare alle equazioni di Newton in termini geometrici, introducendo lo spazio delle fasi. Uno stato del sistema è dato dai $2n$ numeri $q_1, q_2, ..., q_n, v_1, v_2, ..., v_n$, le posizioni e velocità di tutte le componenti del sistema, che come abbiamo visto determinano completamente l'evoluzione passata e futura. Così come due numeri individuano un punto sul piano bidimensionale e tre numeri ne individuano uno nello spazio tridimensionale, i $2n$ numeri $(q_1, q_2, ..., q_n, v_1, v_2, ..., v_n)$ possono essere pensati come coordinate di un punto in uno spazio con $2n$ dimensioni, lo spazio delle fasi. Quindi lo spazio delle fasi è lo spazio di tutti i possibili stati del sistema e la sua dimensione è pari al doppio del numero dei gradi di libertà. L'evoluzione del sistema può adesso essere pensata come al moto di un punto nello spazio delle fasi. Le equazioni di Newton determinano una famiglia di trasformazioni T_t, al variare di t tra tutti i numeri reali, dello spazio delle fasi in sé: l'immagine dello stato x tramite la trasformazione T_t è lo stato $(T_t)(x)$ che si ottiene risolvendo le equazioni di Newton a partire dalla condizione iniziale x dopo un intervallo di tempo t. Ovviamente la conoscenza esatta della trasformazione T_t è equivalente a saper risolvere le equazioni di Newton per tutte le condizioni iniziali, ma qui ci basta sapere che la trasformazione T_t è ben definita e poterne studiare le proprietà generali.

Un teorema importante, attribuito a Liouville, garantisce che le trasformazioni T_t conservano il volume dello spazio delle fasi . La definizione del volume nello spazio delle fasi 2n-dimensionale è analoga alla definizione dell'area nel piano bidimensionale e del volume nello spazio tridimensionale: il volume del cubo Q costituito dagli stati $(q_1, q_2, ..., q_n, v_1, v_2, ..., v_n)$ dove ciascuna delle variabili q_j e v_j varia in un intervallo di ampiezza L è L^{2n}, mentre il volume di una regione qualsiasi si definisce approssimandola con tanti piccoli cubi. Il teorema di Liouville ci dice che se facciamo evolvere per un tempo t il cubo Q otteniamo una regione che non sarà più un cubo, ma che avrà ancora volume L^{2n}. Ma torniamo al problema di risolvere le equazioni di Newton. Per buona parte dell'Ottocento questo voleva dire determinare n integrali del moto, cioè n funzioni definite sullo spazio delle fasi che si mantengano costanti lungo l'evoluzione temporale. L'effetto di ciascun integrale del moto è di ridurre di un'unità la dimensione della regione potenzialmente raggiungibile dall'evoluzione dei singoli stati. Se riusciamo a trovare n integrali del moto, tanti quanti sono i gradi di libertà, lo spazio delle fasi 2n-dimensionale viene suddiviso (matematicamente, foliato) in "superfici" di dimensione n, ciascuna delle quali è invariante per l'evoluzione. In effetti, la conoscenza di n integrali del moto permette anche di stabilire di che natura siano queste superfici e che aspetto qualitativo abbia il moto su di esse.

Alcuni integrali del moto sono evidenti, come l'energia, che si conserva in tutti i sistemi isolati dall'esterno, o la quantità di moto, o il momento angolare. Nell'Ottocento erano stati sviluppati vari metodi per trovare gli integrali del moto meno evidenti, per arrivare ai fatidici n che permettono una comprensione pressoché completa della dinamica. Questi metodi avevano permesso di studiare con successo due corpi che si attraggono tramite la forza gravitazionale, pendoli multipli, trottole ed altri sistemi relativamente semplici. Applicare gli stessi metodi a sistemi più complicati sembrava un'impresa difficile dal punto di vista algebrico, ma non impossibile. Tra i problemi più importanti che sembravano resistere ad ogni attacco, la descrizione del moto di tre o più corpi che si attraggono tramite la forza gravitazionale meritò di essere inclusa in un concorso internazionale di matematica, bandito da Re Oscar II di Svezia nel 1886. Ecco come il matematico Weierstrass enunciò il problema nel bando di concorso:

"Dato un sistema composto da un numero qualsiasi di punti materiali che si attirano mutuamente secondo la legge di Newton, si propone, nell'ipotesi che fra due punti non si verifichino mai urti, di rappresentare le coordinate di ciascun punto sotto forma di serie di potenze di funzioni continue nel tempo che siano uniformemente convergenti per tutti i valori reali della variabile."

Vinse il concorso il matematico francese Henri Poincaré, con una memoria in cui, tra vari altri risultati, forniva una risposta di tipo negativo al problema formulato da Weierstrass: se i corpi sono più di due, non esistono altri integrali del moto oltre a quelli già conosciuti. Più tardi dimostrerà che "genericamente" le equazioni di Newton non hanno integrali del moto diversi dall'energia. Dunque il metodo della ricerca degli integrali del moto non aveva la validità generale che gli si attribuiva e il comportamento di un sistema meccanico appariva improvvisamente molto più complesso di quanto si ritenesse. La frase di Laplace citata sopra rimaneva vera alla lettera, ma le capacità dell' "intelletto incaricato di sottoporre i dati ad analisi" dovevano essere ben superiori di quanto immaginasse Laplace .

1.3 Reversibilità microscopica

Consideriamo un sistema macroscopico isolato, come in figura, nella quale è rappresentato un gas che si espande. Come abbiamo già detto, sebbene guardando l'immagine è ovvio che lo stato A sia precedente allo stato B, le equazioni della dinamica accettano come soluzione anche quella che porta il sistema da B ad A. Guardiamo il sistema dal punto di vista della meccanica classica. Lo stato microscopico di un sistema a N particelle è rappresentato da un punto $X = (\bar{q_1}, \bar{v_1}, ..., \bar{q_n}, \bar{v_n})$ dello spazio delle fasi Γ , dove $\bar{q_i} = (q_{i,x}, q_{i,y}, q_{i,z})$ e $\bar{v_i} = (v_{i,x}, v_{i,y}, v_{i,z})$ sono i vettori posizione e velocità delle singole particelle. Nella figura sono però rappresentati 2 stati macroscopici che chiameremo $(U_A)(X)$ e $(U_B)(X)$, ai quali corrispondono una serie di stati microscopici che insieme formano il volume $\Gamma(U)$ nello spazio Γ totale. Consideriamo l'evoluzione temporale degli stati microscopici che compongono U . Essa è governata

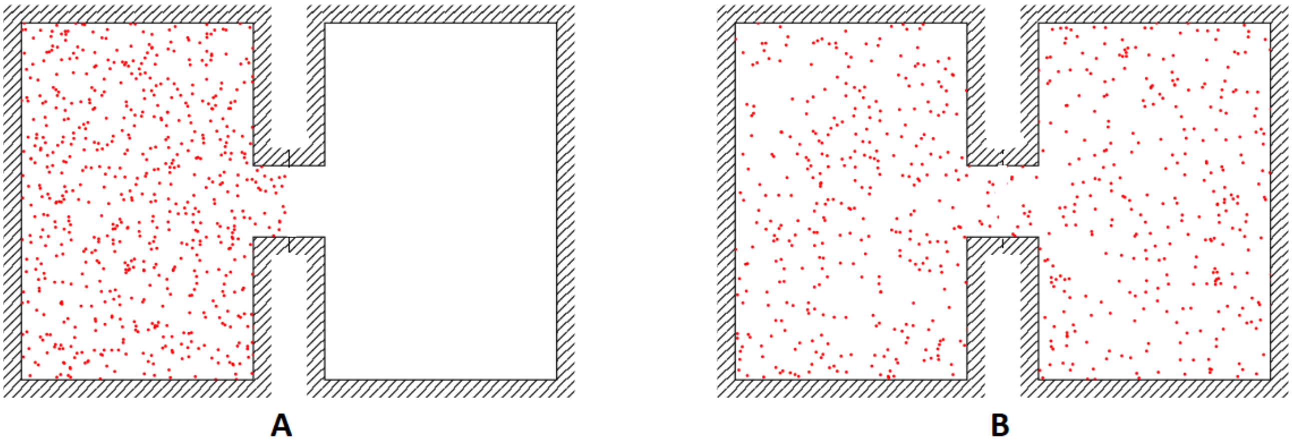

Figura 1

dalla dinamica Hamiltoniana, che ci permette di collegare uno stato $X(t_1)$ al tempo t_1, allo stato $X(t)$ al generico tempo t. Supponiamo di avere due microstati: $X(t_1)$ e $X(t_1+t_2)$ con $t_2>0$, se al tempo t_1+t_2 immaginassimo di invertire tutte le velocità e di far evolvere il sistema per un tempo t_2 , ciò che si otterrebbe è lo stato $X(t_1+2t_2)$, che corrisponderebbe allo stato $X(t_1)$. Siamo quindi partiti da uno stato $X(t_1)$ che supponiamo essere in U_A per poi arrivare in $X(t_1+t_2)$, il quale appartiene a U_B e poi ritornare in $X(t_1+2t_2)=X(t_1)$ sempre in U_A . È quindi evidente che le leggi della dinamica non ci dicono che A sia precedente a B o viceversa. Piuttosto questa informazione ci viene data dall'esperienza, non ci è mai capitato infatti di vedere un gas che si comprime spontaneamente andando ad occupare metà dello spazio disponibile.

1.4 Irreversibilità macroscopica

Ricorrenza di Poincarè

Un sistema presenta ricorrenza se un suo stato qualsiasi, se lasciato evolvere per un tempo sufficientemente lungo, torna nello stato di partenza, o a uno stato molto vicino a quello di partenza. Il teorema di Poincarè afferma che in uno spazio X di volume finito la cui dinamica conserva il volume, un generico stato di una qualunque regione A ritorna in A per tempi arbitrariamente grandi.

Irreversibilità

La termodinamica in genere prevede che:

1. Sistemi macroscopici, se lasciati evolvere, raggiungeranno uno stato di equilibrio caratterizzato solo dalle quantità conservate del sistema e da parametri imposti da fattori esterni ad esso. Una volta raggiunto l'equilibrio essi non cambieranno più stato macroscopico.

2. Due sistemi macroscopici all'equilibrio, se fatti interagire l'uno con l'altro, raggiungeranno uno stato di equilibrio intermedio. Il processo opposto non avverrà mai in maniera spontanea.

Vediamo dunque qui come la termodinamica sia in contrasto sia con la ricorrenza di Poincarè sia con la reversibilità temporale delle leggi microscopiche.

Come già detto infatti per la termodinamica ogni sistema evolve verso uno stato di equilibrio. Ma se chiamiamo $f(t)$ la sequenza di stati che soddisfa le leggi di evoluzione del sistema, allora anche $f(-t)$ sarà soluzione di quelle equazioni. Una delle due si sta però allontanando dall'equilibrio e dal punto di vista macroscopico le due sequenze di stati sono indistinguibili. Non può quindi essere vero che un sistema evolve fino a raggiungere l'equilibrio e vi rimane.

Per quanto riguarda la ricorrenza invece: i sistemi termodinamici sono di solito confinati in volumi finiti. Ciò significa che la dinamica alla base di questi sistemi presenti una ricorrenza. Se così fosse il principio della termodinamica per il quale un sistema all'equilibrio non cambia più il suo stato macroscopico non sarebbe rispettato: quel sistema tornerebbe infatti prima o poi in uno stato vicino allo stato di non equilibrio di partenza.

Ma c'è anche un'altro tipo di irreversibilità che si incontra nella fisica dei sistemi macroscopici: Le equazioni che descrivono la fisica macroscopica sono spesso irreversibili.
Queste equazioni descrivono processi come ad esempio dissipazione, decadimenti radioattivi, reazioni chimiche e cinetica dei gas. Queste equazioni generalmente prevedono l'esistenza di uno stato a cui il sistema tende nel tempo. Ed ecco che ritorna quindi il contrasto con inversione temporale e ricorrenza. In questo caso è importante capire come nascono queste equazioni. Spesso infatti non sono ricavate da dati empirici, ma sono ricavate a partire dalle equazioni microscopiche con le quali sono in contrasto. Tipicamente per arrivare a queste equazioni si usa il formalismo di Mori-Zwanzig, il quale permette di scomporre la dinamica di un sistema in una parte "rilevante", e una "irrilevante". Per ricavare le formule macroscopiche quindi si ignorano i gradi di libertà irrilevanti del sistema e si tiene conto solo della parte rilevante. A questo punto si può costruire uno stato del sistema che tiene conto della parte rilevante e irrilevante in maniera diversa. Applicando poi le leggi della dinamica microscopica allo stato appena creato si arriva a formulare l'equazione che descrive il comportamento macroscopico del sistema. Lo stato descritto da queste equazioni non è quindi quello "vero" del sistema, ma ci si avvicina abbastanza da far funzionare bene le formule ricavate.

1.5 Reversibilità e irreversibilità

Se un sistema isolato in un volume finito dimostra sia ricorrenza che invarianza per inversione temporale, non è possibile derivare logicamente un motivo per il quale tale sistema manifesti un comportamento irreversibile. L'irreversibilità osservata in natura deve quindi essere conseguenza di qualche assunzione errata che abbiamo fatto sul sistema[2]:

1. Il sistema considerato non può effettivamente essere trattato come isolato e posto in un volume finito.
2. La dinamica microscopica del sistema in questione non è veramente reversibile.
3. Necessità di più informazioni sulle condizioni iniziali del sistema.

Sistemi isolati in volumi finiti

Fisicamente un sistema reale non si potrà mai dire isolato. Anche la più piccola interazione col mondo esterno avrà infatti un impatto più o meno indifferente sulle variabili del sistema. In particolare, un'interazione col mondo esterno può introdurre una relazione di correlazione con il sistema. Vi sono quindi dei problemi nell'analizzare un sistema non isolato. Per ovviare a ciò si può allargare il nostro sistema così da includere l'ambiente da cui proviene l'interazione. Il nuovo sistema non sarà però a sua volta isolato. Si finisce quindi per avere come sistema l'intero universo.

Le leggi della dinamica non sono reversibili

Nella fisica contemporanea alcune interazione fondamentali, chiamate interazioni deboli, in particolare quelle tra leptoni e quarks, presentano un carattere non invariante per inversione temporale. Le interazioni che presentano questo comportamento irreversibile sono però molto deboli ed è inoltre difficile vedere una connessione tra queste e l'irreversibilità dei sistemi macroscopici.[2]

Inoltre la stessa fisica contemporanea è invariante per la simmetria CPT, che cambia tempo, parità e carica delle particelle. Ci aspettiamo dunque che, se veramente la violazioni di T delle interazioni deboli è la causa dell'irreversibilità dei sistemi macroscopici, l'antimateria dimostri di avere un comportamento antitermodinamico per inversione temporale. E per ora non si sono trovati dati a supporto di quest'ipotesi

Condizioni iniziali

Cosa ci impedisce di invertire la freccia del tempo con una scelta di condizioni iniziali opportune?

In effetti, considerando le leggi che governano la dinamica microscopica reversibili, le due direzioni di evoluzione temporale dovrebbero essere equivalenti. Supponiamo di poter partire come prima da uno stato appartenente ad A, l'insieme degli stati che descrivono il gas concentrato in metà recipiente ma senza barriera tra le due zone. Trascorso un certo periodo di tempo, lo stato del sistema è passato dalla regione iniziale A ad una certa regione B, che si ottiene facendo evolvere tutti gli stati di A, e che sappiamo avere stesso volume. Se riuscissimo a portare lo stato del sistema nella regione C, ottenuta a partire dagli stati della regione B invertendo tutte le velocità, vedremmo un gas che si concentra e va ad occupare metà del contenitore: avremmo così invertito la freccia del tempo. La regione C ha ancora lo stesso volume di B, quindi lo stesso volume di A. Eppure mentre portare lo stato nella regione A è semplice (basta usare un pistone), portare il sistema in C sembra impossibile, perchè? Il motivo sta nell'alta sensibilità alle condizioni iniziali. La regione A è regolare: ha volume piccolo e occupa una porzione piccola dello spazio delle fasi. Dopo un tempo di evoluzione gli stati di A sono andati ad invadere tutto lo spazio delle fasi, pur conservando il piccolo volume che aveva A. Ciò vuol dire che l'insieme B risulta molto rarefatto. L'insieme C è ottenuto invertendo tutte le velocità in B, e quindi continua ad avere la stessa geometria. Anche ammesso di riuscire ad invertire tutte le velocità ad un certo istante, a causa dei pur minimi errori ciò che si otterrà è uno stato vicino. Impostando lo stato iniziale all'interno della regione A , lo stato vicino prodotto starà ancora in A. Invece, impostandolo su uno stato di C, lo stato prodotto starà quasi certamente fuori da C e non evolverà verso A. Servirebbe infatti una precisione enorme per tornare indietro allo stato iniziale poiché, sebbene l'evoluzione temporale di un sistema con microstato Y in B, ottenuto da un microstato X in A, sia stabile nonostante piccole perturbazioni dello stato iniziale, diventa molto instabile una volta che si definisce il suo passato, in quanto una ricostruzione delle traiettorie richiederebbe una precisione infinita.

1.6 Irreversibilità e tempo

Come spiegare dunque l'esistenza di un unico verso in cui il tempo si muove se le leggi che descrivono i processi microscopici alla base dei comportamenti macroscopici sono invarianti per inversione temporale? In altre parole, se le leggi fondamentali della fisica non distinguono tra tempo che scorre in avanti o all'indietro, perché non si osserva mai una pianta che torna ad essere seme? O una miscela di liquidi che si separa e torna allo stato iniziale con i liquidi divisi?

È importante sottolineare che l'irreversibilità di alcuni processi macroscopici è solo apparentemente in contraddizione con la reversibilità delle leggi fondamentali. Queste leggi infatti, non possono descrivere da sole l'evoluzione di un sistema. È necessaria la presenza delle condizioni iniziali in cui il sistema si trova per spiegare perché il sistema si è evoluto in un determinato modo piuttosto che in un altro. Le leggi fisiche sono compatibili, ad esempio, con un universo nel quale non esistono Terra, Sole o umani.

Nulla di tutto ciò contraddirebbe le leggi della fisica. Ma perché allora il nostro universo si è evoluto proprio in questo modo? Perché il Sole e la Terra e gli esseri umani esistono? La risposta sta nelle condizioni iniziali in cui il sistema si trovava. È la presenza di quelle specifiche condizioni iniziali che ha fatto sì che l'universo sia quello che oggi conosciamo. Entrambi gli sviluppi di un sistema, avanti e indietro nel tempo, sono quindi compatibili con le leggi fisiche, ma quali dei due si verifica e perché è da ricercare nelle condizioni iniziali in cui il sistema si trovava. Non si parla quindi di "equivalenza" tra evoluzione del sistema in avanti o all'indietro del tempo, d'altronde nessuno sano di mente sosterrebbe mai una tesi del genere. Bensì di compatibilità con le equazioni che le descrivono. È quindi possibile spiegare il comportamento irreversibile dei fenomeni macroscopici tramite equazioni reversibili. Ciò fu fatto da Boltzmann, il quale introdusse una visione probabilistica del problema e spiegò l'irreversibilità attribuendo a condizioni iniziali specifiche una bassissima probabilità

Capitolo 2

La risposta di Boltzmann

2.1 Entropia di Boltzmann

La soluzione che Boltzmann dà a questa apparente contraddizione tra reversibilità microscopica e irreversibilità macroscopica sta nella definizione di entropia. Consideriamo uno stato macroscopico U, a cui associamo uno spazio delle fasi Γ_U. Boltzmann associa ad ogni stato macroscopico U , e dunque ad ogni stato microscopico X in Γ_U una funzione detta entropia:

$$S_B(U(X)) = klog|\Gamma_{U(X)}| \tag{2.1}$$

dove k è la costante di Boltzmann e $\Gamma_{(U(X))}$ è il volume dello spazio delle fasi associato al macrostato U . Boltzmann vide una connessione tra la sua funzione e l'entropia di Clausius S_{eq} , la quale è una proprietà macroscopica dei sistemi in equilibrio. Boltzmann dimostrò che per un sistema avente N particelle, volume V ed energia E:

$$S_{eq}(E, V, N) = S_B(U_{eq}) \tag{2.2}$$

dove U_{eq} è lo stato macroscopico all'equilibrio. Va notato però che entrambe le entropie sono definite a meno di una costante, dunque l'uguaglianza tra le due è verificata quando N è molto grande. Dopodiché Boltzmann usò la sua $S_B(U(X))$ per definire l'entropia dei sistemi non all'equilibrio trovando una corrispondenza tra un incremento dell'entropia di Clausius e un incremento del volume della regione dello spazio delle fasi corrispondente $\Gamma_{(U(X))}$. Boltzmann riuscì così a spiegare la naturale tendenza di un sistema macroscopico isolato ad evolvere verso stati con entropia maggiore. Tornando all'esempio della figura 1 infatti , Quando viene tolta la barriera che separa le zone A e B, il volume dello spazio delle fasi disponibile aumenta considerevolmente. Il rapporto P tra il volume dello spazio delle fasi della zona A e il volume totale per un contenitore da 1 litro contenente 1 mole di gas è dell'ordine di 2^N. Nel caso della figura quindi:

$$P = \frac{|\Gamma_{U_{A+B}}|}{|\Gamma_{U_A}|} \tag{2.3}$$

Ci aspettiamo dunque che quando la barriera viene rimossa, il punto dello spazio delle fasi X avrà un'altissima probabilità di muoversi verso la nuova regione disponibile, così da rendere Γ_U maggiore. Ciò avverrà fino a che il sistema non avrà raggiunto l'equilibrio. Una volta all'equilibrio potremo osservare solo piccole oscillazioni del sistema rispetto al punto di equilibrio, a meno che non volessimo aspettare un tempo di molto più grande dell'età dell'universo.

Dunque la frazione di tempo che lo stato del sistema trascorre dentro A è $\frac{1}{2^N}$, un numero incredibilmente piccolo. La conclusione di Boltzmann è quindi che un comportamento irreversibile non è una conseguenza inevitabile delle equazioni della meccanica, ma ne è una conseguenza altamente probabile, e per sistemi con molti gradi di libertà questa probabilità è talmente grande da diventare, a tutti gli effetti pratici, una certezza.

2.2 L'ipotesi ergodica

Il termine "ergodico" fu introdotto da Boltzmann per indicare sistemi che assumevano tutti i possibili stati microscopici associati al loro stato macroscopico. Successivamente Gibbs diede al termine "ergodico" il significato che è oggi più conosciuto, formulando la cosiddetta "ipotesi ergodica" per un sistema dinamico: l'ipotesi che per una proprietà osservabile del sistema la media temporale calcolata lungo ogni orbita coincida con la media spaziale calcolata su tutti i possibili stati del sistema. L'ipotesi ergodica ci dice quindi che: l'evoluzione di un generico stato invade tutto lo spazio X trascorrendo pari frazioni di tempo in regioni di pari volume. Qua generico sta a significare che chiediamo che questa proprietà valga per tutti gli stati tranne che per eventuali stati eccezionali, che si richiede formino un insieme di volume nullo.

2.3 Probabilità

L'analisi di Boltzmann per spiegare l'irreversibilità implica quindi una connessione tra il volume dello spazio delle fasi e la probabilità. Egli infatti identifica una piccola porzione del volume dello spazio delle fasi con una bassa probabilità di trovare il sistema in tale stato. Questa associazione sta alla base dell'assunzione che un sistema isolato macroscopico deve essere trovato in uno stato macroscopico U per un tempo pari al rapporto tra Γ_U e il volume totale Γ . Queste ipotesi sono tutte consistenti con ciò che si osserva in natura. Boltzmann dimostrò anche che per uno stato macroscopico, la frazione di volume dei microstati la cui evoluzione porterebbe ad un aumento dell'entropia è talmente vicina a 1 che il sistema si deve praticamente comportare sempre così. Cioè la probabilità che lo sviluppo del sistema lo porti ad uno stato con entropia maggiore è talmente alta che si può dire essere inevitabile.

Capitolo 3

Problemi con la risposta di Boltzmann

Uno dei principali oppositori delle idee di Boltzmann fu Zermelo, il quale criticò l'approccio di Boltzmann in base al teorema di ricorrenza di Poincaré. Secondo Zermelo questo fatto esclude la possibilità di dedurre un comportamento irreversibile da un modello meccanico come quello studiato da Boltzmann.

Boltzmann rispose a ciò mostrando che nei sistemi da lui considerati il tempo di ricorrenza previsto dal teorema di Poincaré è enorme. In effetti il tempo di ricorrenza per la regione A è inversamente proporzionale al volume di A e cresce all'aumentare delle proprietà ergodiche del sistema. Perciò un gran numero di gradi di libertà , responsabile della piccolezza dei volumi delle regioni dove il sistema è lontano dall'equilibrio , unito ad una buona ergodicità annullano per scale di tempo fisicamente ragionevoli gli effetti della ricorrenza.

Nonostante ciò è ancora presente un problema di natura matematica. Se si prova infatti a derivare un'equazione irreversibile che descriva il sistema macroscopico partendo da equazioni microscopiche con determinate condizioni iniziali, il tempo di ricorrenza di Poincarè pone un limite all'intervallo di tempo nel quale questa derivazione può essere effettuata. Per questo motivo questo tipo di derivazioni vengono spesso discusse per limiti nei quali il tempo di Poincarè va a infinito (ad esempio quando il numero di gradi di libertà del sistema va a infinito). È importante però non confondere il limite usato per convenienza matematica con la ragione per cui si osserva irreversibilità. Ci sono infatti diverse scale temporali, una per cui il sistema raggiunge l'equilibrio, e un'altra molto più grande nella quale si ha la ricorrenza di Poincarè e il sistema torna eventualmente allo stato iniziale. Tuttavia i fenomeni da noi osservabili avvengono solo nella prima delle due scale temporali, in quanto la seconda è, come già detto, maggiore dell'età dell'universo. Se un sistema è confinato in un volume finito presenta quindi sia ricorrenza che reversibilità al livello microscopico. Per quanto riguarda la ricorrenza come abbiamo visto basta notare che il tempo per cui essa possa avvenire è troppo grande per essere preso in considerazione. Rimane quindi il problema dell'irreversibilità delle equazioni macroscopiche.

Naturalmente altri contemporanei condividevano le idee di Boltzmann sul ruolo della probabilità nelle scienze esatte. Tra tutti spicca Poincarè che scrisse:

"Mi chiedete di prevedere i fenomeni che stanno per verificarsi. Se per disgrazia conoscessi le leggi di questi fenomeni, non sarei in grado di farlo se non a prezzo di calcoli inestricabili e dovrei rinunciare a rispondervi; ma siccome ho la fortuna di ignorarle, vi risponderò immediatamente. E quel che vi è di più straordinario in tutto ciò è che la mia risposta sarà corretta " [7] .

Altre critiche ed incomprensioni derivarono invece da ciò che è oggi riconosciuto come un altro dei grandi meriti dello scienziato austriaco: l'uso della probabilità nello studio dei sistemi deterministici. Il comportamento irreversibile del gas nel recipiente diviso in due parti può essere spiegato in maniera molto semplice ricorrendo a modelli probabilistici, come quello che Erhenfest propose per illustrare le idee di Boltzmann: si immagina che gli N atomi siano numerati, che ad ogni istante venga estratto a sorte un numero da 1 a N e che l'atomo corrispondente venga spostato dalla metà del recipiente in cui si trova nell'altra. Se all'inizio gli atomi sono tutti a sinistra, la prima estrazione comporterà lo spostamento di uno degli atomi a destra. Al secondo istante sarà molto improbabile che venga estratto lo stesso numero, quindi sarà molto probabile che un secondo atomo da sinistra si sposti a destra. Finché a destra non vi è un numero di atomi paragonabile a quello degli atomi presenti a sinistra, sarà molto probabile che l'atomo sorteggiato stia da quest'ultima parte e si osserverà un flusso di atomi da sinistra a destra. Una volta raggiunto l'equilibrio gli spostamenti da sinistra a destra e da destra a sinistra saranno ugualmente probabili e l'equilibrio si manterrà. Questo modello descrive abbastanza bene il comportamento di un gas, però a prima vista appare molto lontano dalle equazioni deterministiche che sappiamo regolare il moto degli atomi. Eppure le idee di Boltzmann permettono di dimostrare che un sistema che obbedisce a queste equazioni esibisce un comportamento analogo a quello del modello probabilistico di Erhenfest.

3.1 Stato iniziale dell'universo

Abbiamo visto quindi che l'irreversibilità è causata principalmente dall'eccezionalità delle condizioni iniziali e dal numero di gradi di libertà. L'eccezionalità delle condizioni iniziali è essenziale. Nell'evoluzione di gas, liquidi ed altri sistemi complessi l'irreversibilità si manifesta se possiamo partire da condizioni iniziali eccezionali, lontane dall'equilibrio e corrispondenti a regioni di volume piccolissimo nello spazio delle fasi, in altre parole se possiamo partire da stati iniziali di bassa entropia.

A questo punto nasce però un problema: come abbiamo detto per spiegare l'irreversibilità è necessario che il sistema si trovi in uno stato iniziale a bassa entropia. Questo stato è però estremamente improbabile, il problema sta infatti non nel capire come un sistema si muova verso l'equilibrio, bensì perché quel sistema si trovasse in uno stato di non equilibrio. Per usare un esempio di Penrose: la Terra non ottiene energia dal Sole, ma bassa entropia. Il Sole manda fotoni molto energetici alla terra, i quali vengono assorbiti ed emessi nuovamente ad energia più bassa. In termini di spazio delle fasi, i fotoni a bassa energia occupano un volume maggiore dei fotoni iniziali ad alta energia [4] . Così il sistema solare si muove verso una zona maggiore del suo spazio delle fasi bruciando carburante. È ovvio che per fare ciò il Sole deve trovarsi in uno stato lontano dall'equilibrio, e doveva esserlo ancora di più in passato. Questo tipo di evoluzione si osserva non solo nel sistema solare, ma anche in qualsiasi essere vivente. Andando così a ritroso si conclude che l'universo doveva trovarsi all'inizio in uno stato estremamente lontano dall'equilibrio, uno stato altamente improbabile come direbbe Boltzmann.

Il problema con l'irreversibilità a questo punto non è dunque spiegare il comportamento irreversibile dell'evoluzione di un sistema, ma capire perché il sistema si trovasse in uno stato iniziale così improbabile.

Boltzmann provò a rispondere a questo quesito dicendo che in un universo infinito ed eterno globalmente in equilibrio, prima o poi ogni tipo di fluttuazione avrà modo di accadere. L'universo che noi conosciamo è quindi il risultato di una gigantesca fluttuazione che torna verso l'equilibrio.

3.2 Soggettività e reversibilità

Una delle critiche più comuni alle idee di Boltzmann fu quella di etichettarle come "soggettive".

L'obiezione è: se le equazioni del mondo microscopico sono reversibili e l'irreversibilità del sistema si manifesta solo quando "scegliamo" di concentrarci su variabili macroscopiche, allora la spiegazione che daremo all'irreversibilità sarà soggettiva. Quando ci concentriamo sul macroscopico introduciamo infatti un'ignoranza sul sistema. Come detto prima le equazioni macroscopiche sono ricavate a partire da una "selezione" dei gradi di libertà del sistema microscopico, dei quali quindi si considera solo una parte. Si potrebbe pensare quindi che l'irreversibilità sia legata alla scelta che effettuiamo per decidere quali variabili siano rilevanti e quali non per giungere alla descrizione del sistema macroscopico. In effetti quando ci concentriamo sulle variabili macroscopiche stiamo facendo proprio questo: stiamo decidendo di "ignorare", o comunque di dare un peso minore, ad alcune delle variabili microscopiche del sistema.

Per rispondere a ciò Prigogine scrive:" Nella visione classica, l'irreversibilità era dovuta alle nostre approssimazioni, alla nostra ignoranza. Ma grazie all'esistenza dei sistemi dinamici instabili, "la nozione di probabilità introdotta da Boltzmann per esprimere la freccia del tempo non corrisponde alla nostra ignoranza e acquisisce un significato oggettivo." [8]

L'irreversibilità non è infatti un fenomeno soggettivo, anche se a primo impatto potrebbe sembrare il contrario. L'evoluzione del sistema macroscopico è determinato oggettivamente dalle leggi microscopiche, le quali descrivono il comportamento del sistema senza essere influenzate da dove noi decidiamo di porre la nostra attenzione. In questo senso esse sono completamente oggettive. Questo concetto di soggettività dell'irreversibilità fu molto discusso.

Heisenberg scrive:" Gibbs è stato il primo a introdurre un concetto fisico che ha senso applicare solo quando la nostra conoscenza sull'oggetto al quale lo stiamo applicando è incompleta. Se ad esempio potessimo conoscere il moto e la posizione di ogni molecola di un gas, sarebbe inutile continuare a parlare della temperatura del gas stesso."[9]

Max Born anche scrive:" L'irreversibilità è dunque una conseguenza dell'introduzione della nostra ignoranza nelle leggi fondamentali."[10]

Popper infine scrive:" sarebbe assurdo credere che un penny cade o che le molecole collidono in maniera casuale perché noi non conosciamo le condizioni iniziali, e che se invece ci fosse un diavoletto che ci fornisce le informazioni necessarie a conoscerle si comporterebbero diversamente[11]"

La confusione è dovuta all'uso che si fa della parola "conoscenza". Ci sono infatti due modi per conoscere le variabili del sistema.[5]

Il mondo si comporta come si comporta indifferentemente dal livello della nostra ignoranza. Anche se conoscessimo tutti gli stati microscopici iniziali l'evoluzione del sistema sarebbe ovviamente la stessa. In questo caso la nostra conoscenza delle variabili del sistema è indifferente al sistema. Ciò che si può immaginare sono situazioni in cui noi siamo in grado di controllare le variabili del sistema, e quindi di conoscerle. Quando ad esempio un gas viene costretto in una porzione ridotta della scatola da un pistone, gli stati microscopici sono di meno rispetto a quando non c'è il pistone, e ciò ci fornisce informazioni in più sulle condizioni iniziali. Bisogna quindi che noi consideriamo queste informazioni in più che abbiamo sul sistema.

Capitolo 4

Sistemi irreversibili stabili

Se l'origine dei comportamenti irreversibili ci è chiara, cosa dire di quei sistemi dove l'irreversibilità non si presenta? Al pendolo certamente mancano i requisiti fondamentali: si tratta di un sistema completamente integrabile con pochi gradi di libertà. Però come mai sistemi complessi come i sistemi planetari o le galassie seguono moti che ci appaiono reversibili? Il nostro sistema solare contiene una miriade di asteroidi, concentrati essenzialmente tra le orbite di Marte e di Giove. Perché le interazioni tra loro e quelle con i pianeti non fanno sì che gli asteroidi si distribuiscano per tutto il sistema solare? Un altro esempio nasce da una delle prime simulazioni al computer, quella che Fermi, Pasta e Ulam realizzarono nell'estate del 1953 con il MANIAC, uno dei primi computer mai costruiti. I tre scienziati simularono l'evoluzione di un sistema costituito da un gran numero di oscillatori armonici, accoppiati da deboli forze non lineari. Gli accoppiamenti, ancorché deboli, distruggono la completa integrabilità del sistema disaccoppiato e visto il gran numero di gradi di libertà ci si aspettava di assistere ad una rapida equipartizione dell'energia: eccitando inizialmente solo alcuni dei pendoli, la loro energia doveva trasmettersi agli altri in modo da raggiungere presto un equilibrio in cui tutti gli oscillatori hanno pressappoco la stessa energia. Invece nella simulazione di Fermi, Pasta e Ulam questa convergenza all'equilibrio non sembrava manifestarsi. Nel 1954 il matematico russo Kolmogorov scoprì un nuovo aspetto dei sistemi meccanici che poteva spiegare questi fenomeni. I suoi risultati furono migliorati da Arnold e Moser nel decennio successivo, andando a formare quella che adesso si chiama teoria KAM, dalle iniziali dei tre matematici. La teoria KAM riguarda sistemi che possono essere visti come piccole perturbazioni di sistemi completamente integrabili: sono di questo tipo tanto il sistema studiato da Fermi, Pasta e Ulam quanto i sistemi planetari, dato che la grande differenza fra le masse in gioco fa sì che le interazioni tra i corpi in orbita siano di gran lunga più deboli delle loro interazioni con la stella centrale, e dato che il sistema in cui si considerano solo queste ultime è completamente integrabile.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi si è quindi provato a dare una risposta alla domanda: Perchè il tempo scorre "in avanti" e non "all'indietro"? Si è prima analizzata la risposta di Boltzmann al problema, la quale ha contribuito a rompere il paradigma del determinismo presente all'epoca dello scienziato. Nella sua definizione di entropia infatti, si assegna una probabilità a una regione dello spazio delle fasi di un sistema. Così facendo configurazioni che occupano un piccolo volume nello spazio delle fasi vengono definite da Boltzmann come poco probabili. La direzione "in avanti" del tempo sarebbe dunque solo una conseguenza del fatto che i sistemi tendono ad occupare una zona più grande, e quindi più probabile, dello spazo delle fasi. Si sono infine viste alcune critiche rivolte verso la visione dello scienziato, in particolare quelle legate al teorema di ricorrenza di Poincarè, mosse principalmente da Zermelo e quelle che contrastavano la risposta di Boltzmann al problema del tempo accusandola di introdurre un concetto di irreversibilità soggettivo. Il problema della freccia del tempo è stato quindi risolto, nel contesto classico, introducendo un limite alla conoscenza che possiamo avere su un sistema fisico.
Oggi ancora si prova a dare una spiegazione al verso del tempo in un contesto quantistico, ma nessuna delle risposte date finora riesce a soddisfare pienamente la comunità scientifica.

Bibliografia

1. Pierre Simon de Laplace, Essai philosophique sur les probabilités, 1825 (trad. it. S. Oliva, Laterza 1951).
2. D. Wallace, The Arrow of time in Physics, in “A companion to the philosophy of time” (2013), cap. 16
3. R. Penrose, The Emperor's New Mind, Oxford U. P. New York, 1990, ch. 7. See also, On the Second Law of thermodynamics, J. Stat. Phys. 77, 217 (1994).
4. J. Bricmont, Science in chaos or chaos in science?, in "The flight from science and reason", Annals of the New York Academy of Science 79 (1996).
5. Henri Poincaré, Le hasard, Revue du mois, 1907. Riprodotto in traduzione italiana nella raccolta di scritti di Poincaré Geometria e Caso, Bollati Boringhieri 1995 .
6. P.S. Laplace, A Philosophical Essay on Probabilities, Transl. by F. W. Truscott and F. L. Emory, Dover Pub., New York, 1951.
7. I. Prigogine, I. Stengers, Entre le temps et l'eternite, Fayard, Paris, 1988.
8. I. Prigogine, Les Lois du Chaos, Flammarion, Paris, 1994.
9. M. Born, Natural Philosophy of Cause and Chance, Clarendon Press, Oxford, 1949.
10. W. Heisenberg, The Physicist's Conception of Nature, Hutchinson, London, 1958.
11. K. R. Popper, Quantum Theory and the Schism in Physics, Rowman e Littlefield, Totowa (N.J.), 1956.