



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

**Il Teorema dei Quattro Colori:
Storia e Dimostrazioni**

Candidato:

Riccardo Pilan

Matricola 1220520

Relatore:

Prof. Manuel Francesco Aprile

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Premessa	2
1.2	Breve storia del Teorema	2
1.3	Scopo e struttura della tesi	3
2	Storia del Teorema	4
2.1	Origine del Teorema	4
2.2	Le dimostrazioni errate	6
2.3	Sviluppi successivi	6
2.4	La dimostrazione di Appel e Haken	7
2.5	La dimostrazione di Robertson et al.	8
3	Teoria dei Grafi e Teorema dei Quattro Colori	10
3.1	Definizioni di base	10
3.2	Grafo duale di una mappa	17
3.3	Il Teorema dei Quattro Colori	19
4	Le dimostrazioni di Kempe e Heawood	20
4.1	La dimostrazione errata di Kempe	20
4.2	La dimostrazione del Teorema dei Cinque Colori	31
5	Dimostrazione del Teorema	34
5.1	Premessa	34
5.2	Triangolazioni e configurazioni	35
5.3	Riducibilità	45
5.4	Inevitabilità	52
6	Conclusioni	59
	Bibliografia	61

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Premessa

Il Teorema dei Quattro Colori rappresenta forse uno dei risultati più interessanti, rivoluzionari e controversi della storia della matematica.

L'enunciato del Teorema è in realtà piuttosto semplice: data una mappa geografica, o, in generale, una superficie piana suddivisa in regioni connesse, è sempre possibile colorarne le regioni utilizzando al massimo quattro colori diversi, ponendo come regola che due territori confinanti non condividano lo stesso colore.

Nonostante la semplicità della sua formulazione, il Teorema ha impegnato per oltre un secolo le menti di alcuni tra i più illustri matematici del diciannovesimo e ventesimo secolo, tra dimostrazioni rivelatesi errate, vari tentativi di approccio al problema utilizzando tecniche differenti e lo sviluppo di una vera e propria nuova branca della matematica, la Teoria dei grafi, fino a giungere a una delle dimostrazioni più controverse e divisive di sempre all'interno della comunità matematica.

1.2 Breve storia del Teorema

La prima formulazione del Teorema risale al 1852 ed è da attribuire a Francis Guthrie, ma è grazie a De Morgan e Cayley che la comunità matematica ne viene a conoscenza.

I primi contributi importanti nella ricerca di una soluzione sono datati 1879 e 1880 e consistono in due dimostrazioni, rivelatesi entrambe errate, da parte rispettivamente di Kempe e Tait, confutate da Heawood nel 1890 e da Petersen nel 1891, ma contenenti una serie di tecniche e risultati di grande rilevanza per gli sviluppi successivi.

Per quasi un secolo, nonostante le formulazioni alternative, lo sviluppo della Teoria dei grafi, i diversi approcci tentati e le nuove tecniche utilizzate, sono pochi i passi compiuti verso una vera e propria dimostrazione della Congettura; fino a giungere al 1976, quando Appel e Haken pubblicano una dimostrazione completamente diversa da qualunque ri-

sultato ottenuto precedentemente in ambito matematico, a causa di un uso estensivo del computer per l'analisi, caso per caso, di una serie di numerose configurazioni.

La dimostrazione scatenò grandi controversie e divise la comunità matematica per via dell'utilizzo della cosiddetta "forza bruta" e quindi per la sua scarsa eleganza, ma soprattutto per l'impossibilità di verificare manualmente che il computer non abbia commesso errori e che l'algoritmo utilizzato da esso funzioni correttamente.

Tuttavia, il metodo utilizzato per ottenere il risultato è rivoluzionario e sancisce l'inizio dell'era delle dimostrazioni assistite da computer, portando a una grande svolta nel mondo della matematica.

Inoltre, nel 1996, 4 matematici, a cui ci riferiremo come Robertson et al., pubblicano una nuova dimostrazione che risulta essere una versione più efficiente e meno controversa di quella di Appel e Haken, sarà infatti quella che verrà trattata in questa tesi.

1.3 Scopo e struttura della tesi

Questa tesi ha un duplice scopo, si propone di analizzare il Teorema dei Quattro Colori da due punti di vista ugualmente significativi: da un lato verrà approfondita la parte storica del Teorema, con particolare interesse verso le sue origini, le dimostrazioni tentate, lo sviluppo delle tecniche che hanno contribuito alla dimostrazione definitiva e le figure chiave coinvolte nella diffusione e nello studio del problema; dall'altro lato verrà esaminato il contenuto matematico del Teorema, nello specifico l'utilizzo della Teoria dei grafi per affrontare la Congettura, la serie di teoremi e risultati che hanno preceduto e ispirato Appel e Haken (e Robertson et al.), le tecniche da loro utilizzate nella dimostrazione finale e infine le generalizzazioni del Teorema e gli sviluppi più recenti.

In particolare, in seguito a questo primo capitolo introduttivo, il capitolo 2 ripercorrerà in modo più dettagliato la storia del Teorema, dalle sue origini alla sua dimostrazione finale.

Il capitolo 3 sarà dedicato alle basi matematiche necessarie per la comprensione della dimostrazione del Teorema: definizioni fondamentali di Teoria dei grafi, passaggio da mappe a grafi duali e riformulazione del Teorema in termini di grafi.

Il capitolo 4 conterrà invece una formulazione matematica dettagliata della dimostrazione errata di Kempe, dell'errore contenuto in essa e della dimostrazione del Teorema dei Cinque Colori formulata da Heawood.

Il capitolo 5 sarà quello dedicato alla vera e propria dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori, in questo caso specifico la dimostrazione successiva pubblicata da Robertson et al. e non quella di Appel e Haken.

Infine, il capitolo 6 sarà dedicato alle conclusioni, tra accenni a generalizzazioni del Teorema e problemi ancora aperti correlati ad esso, possibili evoluzioni della ricerca in questo campo e considerazioni finali sull'importanza e l'impatto rivestito dal Teorema nella storia della matematica.

Capitolo 2

Storia del Teorema dei Quattro Colori

In questo capitolo ripercorriamo la storia del Teorema dei Quattro Colori, facendo riferimento principalmente a [10] e [15].

2.1 Origine del Teorema (1852-1878)

Il Teorema viene enunciato per la prima volta sotto forma di Congettura dei Quattro Colori nel 1852, quando il giovane matematico britannico Francis Guthrie, intento a colorare una cartina delle contee d'Inghilterra, si rende conto che è possibile utilizzare soltanto quattro colori diversi per completarla, con la restrizione che due territori limitrofi presentino una colorazione differente.

Guthrie, dopo una serie di tentativi, ipotizza che sia possibile fare lo stesso per qualunque cartina geografica ed espone la sua congettura al fratello Frederick, studente presso lo University College di Londra del professor Augustus De Morgan, il quale, venuto a conoscenza del problema, lo porta all'attenzione dei suoi studenti e della comunità matematica, dando credito a Guthrie.

Non si verificano ulteriori sviluppi fino al 1878, quando Arthur Cayley si riferisce alla Congettura in uno scritto presentato presso la London Mathematical Society, affrontando un primo studio del problema e chiedendo ai propri colleghi se sia stata trovata una dimostrazione, scatenando definitivamente l'interesse dei matematici nella ricerca di una soluzione.

A questo punto è opportuno definire formalmente cosa si intenda per mappa, quando due regioni si considerano confinanti ed enunciare la Congettura nella sua forma originale.

Definizione 2.1.

1. Si dice **mappa planare** una partizione del piano in sottoinsiemi disgiunti e connessi, che chiameremo *regioni*, legate da rapporti di adiacenza.

2. Due regioni si dicono **adiacenti** o **confinanti** se condividono un segmento di confine.

Note:

1. Tutte le regioni devono essere connesse, perciò non è ammesso il caso di exclavi territoriali.
2. Date due regioni R_1 ed R_2 , se $\text{Frontiera}(R_1) \cap \text{Frontiera}(R_2) \neq \emptyset$, le due regioni non sono necessariamente confinanti, poiché le due frontiere potrebbero condividere un unico punto, mentre nella definizione che abbiamo fornito è richiesto che condividano un segmento.

Congettura dei Quattro Colori (Guthrie, 1852). Ogni mappa planare ammette una colorazione delle proprie regioni che prevede l'utilizzo di un massimo di 4 colori diversi, con la condizione che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore.

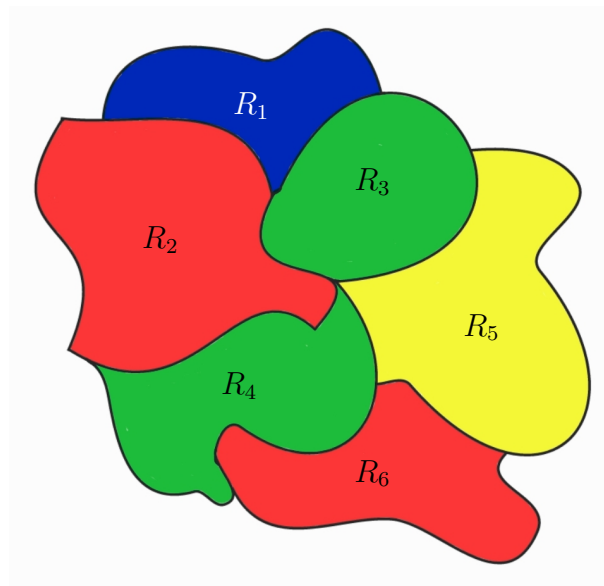


Figura 2.1: Esempio di mappa planare con 6 regioni colorata utilizzando 4 colori. Le regioni R_3 ed R_4 non sono confinanti, come spiegato nella Nota 2, quindi possono avere la stessa colorazione.

Quella appena enunciata è la formulazione della Congettura nella sua forma originale, con riferimento a mappe planari e senza accenni alla Teoria dei grafi.

Per molti anni i matematici che si sono dedicati allo studio della Congettura si sono serviti di mappe, ma la definizione di grafo duale di una mappa planare (che verrà data nel capitolo 3) ha costituito un punto di svolta fondamentale nella ricerca della dimostrazione.

2.2 Le dimostrazioni errate di Kempe e Tait (1879-1891)

Nel 1879, l'anno successivo allo scritto di Cayley, Alfred Bray Kempe annuncia di aver trovato una dimostrazione alla Congettura dei Quattro Colori [5].

La dimostrazione viene accolta con entusiasmo e clamore dalla comunità matematica e a Kempe vengono riconosciuti grandi meriti, tra cui l'ammissione alla Royal Society nel 1881.

Tuttavia 11 anni dopo, nel 1890, Percy John Heawood scopre un errore nel suddetto risultato, in quanto la dimostrazione di Kempe, che fornisce anche un algoritmo per la colorazione delle mappe, risulta non essere valida in alcuni casi particolari, trascurati dallo stesso Kempe.

Heawood, tuttavia, sfrutta le tecniche utilizzate per dimostrare un risultato più debole, il Teorema dei Cinque Colori, in particolare servendosi delle cosiddette *catene di Kempe* (*Kempe chains*), ideate dallo stesso Kempe.

Definiamo allora il Teorema dei Cinque Colori:

Teorema dei Cinque Colori (Heawood, 1890). Ogni mappa planare ammette una colorazione delle proprie regioni che prevede l'utilizzo di un massimo di 5 colori diversi, con la condizione che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore.

Il Teorema dei Cinque Colori verrà ripreso nel dettaglio e dimostrato nel capitolo 4. Ad appena un anno di distanza da quella di Kempe, nel 1880, anche Peter Guthrie Tait presenta una dimostrazione alla Congettura, indipendente dalla prima, ma basata su un'assunzione errata, come dimostrato da Julius Petersen nel 1891.

Anche in questo caso però la dimostrazione fornisce a Petersen gli strumenti per riformulare la Congettura dei Quattro Colori in due versioni differenti da quella originale, fornendo così spunti ad approcci differenti e possibili dimostrazioni alternative.

2.3 Sviluppi successivi (1892-1975)

In seguito alle due dimostrazioni fallite, la ricerca di una dimostrazione diretta del Teorema viene abbandonata e gli sforzi dei matematici si concentrano sulla ricerca di una dimostrazione per contraddizione.

La dimostrazione si sviluppa nel modo seguente: si suppone per assurdo che la Congettura dei Quattro Colori sia errata, di conseguenza deve esistere un controesempio ad essa, e in particolare si considera il minimo controesempio, ovvero la mappa planare con il minor numero possibile di regioni che sia colorabile utilizzando 5 colori, ma non 4. Si individuano poi una serie di caratteristiche del minimo controesempio che portano a una contraddizione, dimostrando così che non può esistere un minimo controesempio alla Congettura

(e di conseguenza nessun altro controesempio), provando così anche la validità della Congettura dei Quattro Colori.

Un gran numero di matematici si interessa al problema e si susseguono risultati parziali, generalizzazioni e nuove caratterizzazioni della Congettura dei Quattro Colori.

Nel 1898 il già citato Heawood trasforma la Congettura in una forma algebrica equivalente; similmente nel 1912 Oswald Veblen la riscrive in termini di geometria proiettiva.

Tra il 1912 e il 1913 George David Birkhoff introduce per la prima volta due concetti di grandissima rilevanza: il *polinomio cromatico*, che esprime il numero di colorazioni di una mappa (o grafo) in funzione del numero di colori disponibili, con successive applicazioni legate non soltanto al Teorema dei Quattro Colori, ma anche alla Teoria dei grafi e persino alla Fisica statistica; e la *riducibilità delle mappe* [3], idea fondamentale per giungere alla soluzione definitiva del problema, utilizzata da Appel e Haken nella dimostrazione finale. Nel 1931 Hassler Whitney, nella sua tesi di dottorato, sotto la supervisione dello stesso Birkhoff, definisce il *grafo duale* di una mappa planare; individua in questo modo la relazione che lega mappe e grafi, contribuendo in modo determinante allo sviluppo della Teoria dei Grafi anche come strumento per affrontare la Congettura dei Quattro Colori, ormai irrisolta da quasi 80 anni.

Tra il 1922 e il 1940 i matematici Philip Franklin, Alfred Errera, Clarence Reynolds e C. N. Winn pubblicano una serie di risultati riguardanti le caratteristiche di un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori, dimostrando dapprima che una tale mappa deve necessariamente essere costituita da almeno 26 regioni e successivamente portando il limite inferiore a 36 regioni, di cui almeno 15 pentagoni.

Al 1941 risale un importante risultato riguardante il numero cromatico di un grafo, ossia il numero minimo di colori necessari per colorarlo, il Teorema di Brooks, che deve il nome al matematico inglese Rowland Leonard Brooks e fornisce una relazione tra numero cromatico e grado di un grafo.

È datata invece 1943 la *Congettura di Hadwiger*, ideata da Hugo Hadwiger, una generalizzazione del Teorema dei Quattro Colori tuttora irrisolta, uno dei più importanti problemi aperti nella Teoria dei grafi, che riprenderemo anche nella parte finale della tesi.

Nel 1969 il tedesco Heinrich Heesch pubblica uno scritto [4] nel quale elabora per la prima volta un metodo per assegnare una carica ai vertici di un grafo e descrive il processo di *scarica* (*discharging*), un concetto che risulterà essenziale nella dimostrazione di Appel e Haken del 1976, tuttavia Heesch non riesce a giungere a una dimostrazione definitiva della Congettura perché non dispone di computer dotati di potenza di calcolo sufficiente.

2.4 La dimostrazione di Appel e Haken (1976)

A partire dall'inizio degli anni '70 del 1900 il matematico tedesco Wolfgang Haken e lo statunitense Kenneth Appel iniziano una collaborazione nello studio della Congettura che

si rivela cruciale per giungere alla soluzione ormai attesa da più di un secolo.

Haken inizia ad interessarsi alla Congettura dei Quattro Colori dopo aver assistito ad una lezione di Heesch nel 1949; Appel invece, in seguito ad un periodo di ricerca nell'ambito della crittografia, è un noto e accreditato programmatore e dispone quindi di competenze fondamentali nella realizzazione di un programma che possa finalmente portare alla dimostrazione tanto cercata.

Di conseguenza, quando i due matematici diventano professori e colleghi presso la University of Illinois, dove possono disporre della potenza computazionale richiesta, e grazie alle capacità di Appel, si giunge finalmente alla svolta cruciale.

I due matematici pubblicano la dimostrazione al Teorema dei Quattro Colori nel 1976 [1] e, come detto, la pubblicazione risulta estremamente controversa e divide la comunità matematica, in quanto non rispetta i criteri di quella che viene considerata una vera dimostrazione matematica: elegante, comprensibile, scritta a mano e senza ausilio di computer.

Al contrario, la dimostrazione di Appel e Haken fa utilizzo di una grande quantità di “forza bruta”, con 10.000 casi studiati manualmente e un insieme di 1476 “buone configurazioni”, la cui irriducibilità ed essenzialità viene verificata grazie a 1200 ore di esecuzione del programma al computer.

Inoltre, il grado di affidabilità del computer rappresenta un'incognita per i matematici del tempo, in quanto risulta impossibile verificare che lo stesso computer non abbia commesso errori, e addirittura gli stessi programmi, scritti in linguaggio assembly, non sono facilmente accessibili e comprensibili, perciò non appare facile verificare l'assenza di errori di programmazione.

2.5 La dimostrazione di Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1996)

Merita una menzione speciale la dimostrazione del 1996 di Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas [9].

I quattro matematici sfruttano gli stessi metodi utilizzati da Appel e Haken, ma riescono quasi totalmente a dissipare i dubbi della comunità matematica sulla validità del Teorema dei Quattro Colori, in quanto il loro risultato non si presenta come una riscrittura della dimostrazione precedente o una verifica della sua validità, ma come una vera e propria nuova dimostrazione.

Essa risulta essere più semplice e comprensibile, il numero di “buone configurazioni” viene ridotto da 1476 a 633 e quello delle regole di “scarica” dei grafi da 487 a 32, inoltre si serve di due programmi diversi e indipendenti tra loro per ridurre la probabilità di errore e presenta un algoritmo con complessità temporale quadratica, a differenza di quella di

ordine quarto di Appel e Haken, infine la parte manuale della prima dimostrazione viene riscritta in modo più rigoroso e formale e può essere facilmente verificata da un computer in pochi minuti.

Capitolo 3

Teoria dei Grafi e Teorema dei Quattro Colori

3.1 Definizioni di base

Per avviarcì a una comprensione concreta del Teorema dei Quattro colori e della sua dimostrazione è opportuno servirci della Teoria dei grafi, anziché continuare a limitarci all'utilizzo delle mappe planari.

È quindi necessario enunciare una serie di definizioni fondamentali, che saranno essenziali in seguito e verranno date per note (si vedano [2], [7], [10]).

Cominciamo chiarendo innanzitutto la definizione formale di *grafo* e quali siano i grafi che ci saranno utili nel seguito.

Definizione 3.1. Si dice **grafo** una coppia ordinata $G = (V, E)$, con:

- V un insieme finito di *vertici* o *nodi* e $|V|$ *ordine* del grafo.
- E un insieme di coppie non ordinate di nodi, dette *archi*.

Se $e = (u, v)$, e si dice arco di estremi u e v .

u e v si dicono *adiacenti*, e si dice *incidente* a u e v .

Indicheremo quindi un grafo con G o con $G = (V, E)$, riferendoci all'insieme dei suoi nodi e dei suoi archi, che chiameremo anche $V(G)$ ed $E(G)$.

In generale, un grafo G può contenere archi con estremi coincidenti, chiamati *cappi*, oppure due o più archi con gli stessi estremi, chiamati *archi paralleli*.

In tal caso, G è detto anche *multigrafo*: un esempio in tal senso è il grafo rappresentato nella figura sottostante.

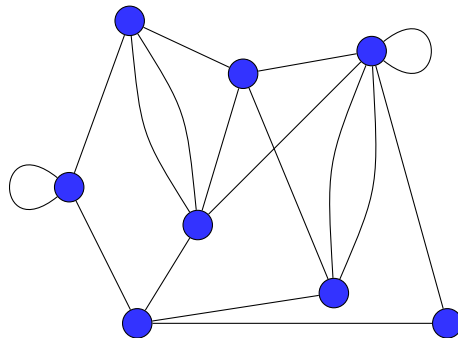


Figura 3.1: Esempio di grafo (non semplice e non planare).

Per quanto riguarda la trattazione di questa tesi, l'unica tipologia di grafi che prenderemo in considerazione è quella dei *grafi semplici* e *planari*, perciò chiariamo il significato di queste due proprietà.

Definizione 3.2. Un grafo si dice **semplice** se non contiene cappi, cioè archi del tipo $e = (u, u)$, ovvero con due estremi coincidenti, e archi paralleli, ovvero due o più archi con gli stessi estremi.

Un grafo $G = (V, E)$ si dice **planare** se può essere rappresentato sul piano in modo che:

- ogni vertice $v \in V$ sia un punto nel piano
- ogni arco $e = (u, v) \in E$ sia una curva semplice che collega i due nodi u e v
- curve corrispondenti ad archi distinti non si intersechino, a parte nei vertici a cui sono incidenti.

In altre parole, un grafo è planare se può essere rappresentato sul piano in modo che i suoi archi non si intersechino tra loro.

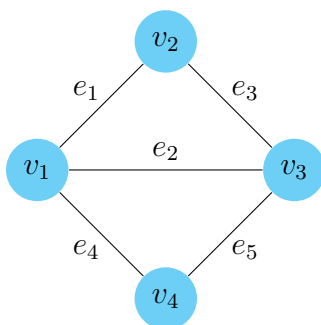


Figura 3.2: Esempio di grafo $G = (V, E)$, con insieme dei nodi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e insieme degli archi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, dove $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_3)$, $e_4 = (v_1, v_4)$, $e_5 = (v_3, v_4)$.

Il grafo è planare, poiché non presenta intersezioni tra archi, e inoltre è semplice, poiché non contiene cappi o archi paralleli.

Nel capitolo 4 verrà introdotto il concetto di *riducibilità* di un grafo, a tale scopo è necessario chiarire cosa sia un *sottografo*.

Definizione 3.3. Un **sottografo** di un grafo $G = (V, E)$ è un grafo $G' = (V', E')$ tale che $V' \subseteq V$ ed $E' \subseteq E$.

In altre parole, un sottografo G' di G è costituito da un sottoinsieme dei vertici e un sottoinsieme degli archi del grafo originale.

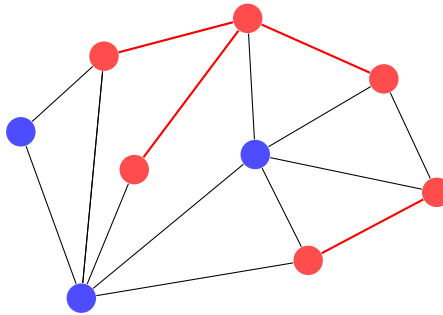


Figura 3.3: Un grafo planare G con un sottografo G' (rappresentato in rosso).

Introduciamo ora una caratterizzazione della planarità di un grafo, il *Teorema di Kuratowski*.

Teorema di Kuratowski. Un grafo è planare se e solo se non contiene un sottografo che è una suddivisione di K_5 o $K_{3,3}$.

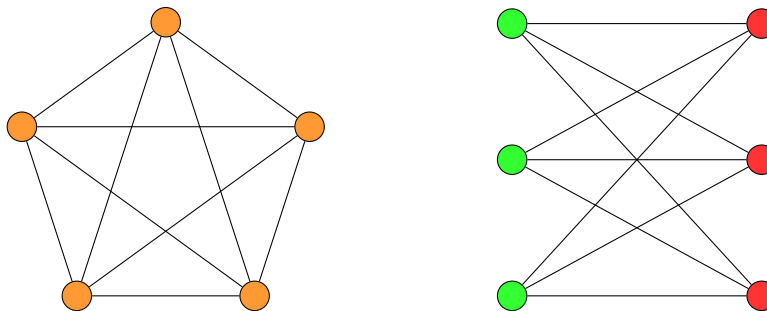


Figura 3.4: A sinistra il grafo completo K_5 e a destra il grafo bipartito completo $K_{3,3}$

Chiariamo il significato di *suddivisione*, *grafo completo* e *grafo bipartito*:

- Una **suddivisione** di un grafo si ottiene tramite l'inserimento di nuovi nodi all'interno degli archi già presenti.
- Un **grafo completo** è un grafo in cui ogni coppia di nodi distinti è collegata da un arco. Quindi in un grafo completo di ordine n , indicato con K_n , ogni nodo ha $n - 1$ archi incidenti.

- Un **grafo bipartito** è un grafo $G = (V, E)$ tale che $V = A \cup B$, con A e B disgiunti, ed $E = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

In particolare, un grafo bipartito è *completo* se è presente un arco tra ogni nodo di A e ogni nodo di B .

Evidentemente, la rappresentazione geometrica dei grafi ha diverse similitudini con quella delle mappe planari, poiché anche in questo caso il piano viene suddiviso dagli archi in regioni, che chiameremo *facce*.

Definizione 3.4. In un grafo semplice planare, le **facce** sono le regioni connesse disgiunte in cui il piano viene suddiviso dagli archi del grafo. Ogni faccia corrisponde a una componente connessa del piano delimitata dagli archi del grafo.

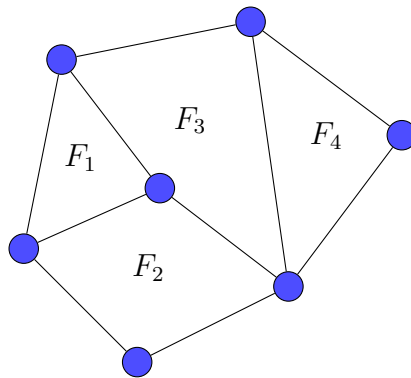


Figura 3.5: Nel grafo rappresentato sono presenti 4 facce: F_1 , F_2 , F_3 ed F_4 .

Abbiamo quindi individuato una similitudine tra le regioni di una mappa planare e le facce di un grafo planare, perciò il Teorema dei Quattro Colori potrebbe essere considerato un problema di colorazione delle facce di un grafo planare.

Tuttavia, è opportuno definire il concetto di *grafo duale* e di colorazione dei vertici e rielaborare il Teorema utilizzando questi nuovi strumenti.

Definizione 3.5. Il **grafo duale** G^* di un grafo planare G è un grafo costruito come segue:

- Ogni faccia del grafo G corrisponde a un vertice di G^* (anche la faccia illimitata).
- Due vertici di G^* sono connessi da un arco se le rispettive facce in G sono adiacenti, ossia condividono un lato comune.

Con questo metodo, le facce del grafo originale vengono trasformate in vertici del grafo duale, perciò il nostro obiettivo sarà quello di ricercare una colorazione ottimale dei vertici e non più delle facce o regioni.

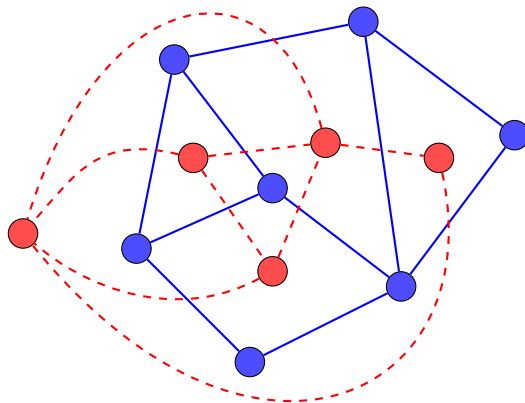


Figura 3.6: Il grafo presentato nella Figura 3.5 (in blu) con il suo grafo duale (in rosso).

Definiamo allora cosa si intende per *colorazione (propria)* dei vertici di un grafo.

Definizione 3.6. Dato un grafo $G = (V, E)$, una **colorazione propria** dei vertici di G con k colori è una funzione $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, tale che $\forall u, v \in V$, $c(u) \neq c(v)$ se $(u, v) \in E$.

Un grafo si dice *k-colorabile* se esiste una colorazione dei suoi vertici con k colori distinti.

Quindi, una colorazione propria assegna un colore scelto tra i k disponibili ad ogni vertice, in modo che due vertici adiacenti abbiano colori diversi. Nel seguito nella tesi, quando si parlerà di colorazione ci si riferirà sempre a una colorazione propria.

Se un grafo è k -colorabile, esso sarà sicuramente anche $(k+1)$ -colorabile: basterà sostituire in una k -colorazione del grafo il colore di un vertice che sia utilizzato almeno due volte con un $(k+1)$ -esimo colore diverso dai k già utilizzati.

Di conseguenza, il grafo sarà anche $(k+2)$ -colorabile e così via, fino a giungere al numero massimo di colori utilizzabili, che sarà ovviamente $|V|$ (è sufficiente colorare ogni vertice con un colore diverso, senza ripeterne alcuno).

Naturalmente, per quanto riguarda lo scopo della nostra tesi, l'interesse non è quello di aumentare il numero di colori utilizzati, ma è quello di determinare il numero minimo di colori necessari per una colorazione propria.

Definiamo perciò questo numero, che chiameremo *numero cromatico*.

Definizione 3.7. Il **numero cromatico** di un grafo G , denotato $\chi(G)$, è il numero minimo di colori necessari per ottenere una colorazione propria dei suoi vertici.

Di conseguenza, se un grafo G ha numero cromatico $\chi(G)$, esso è $\chi(G)$ -colorabile, ma non $(\chi(G)-1)$ -colorabile.

Per i grafi semplici planari, il *Teorema dei Quattro Colori* afferma quindi che $\chi(G) \leq 4$.

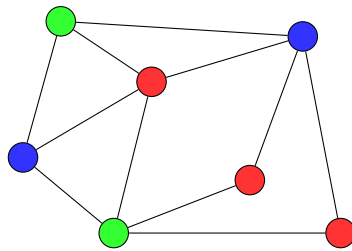


Figura 3.7: Un grafo semplice planare G , con numero cromatico $\chi(G) = 3$, e una sua 3-colorazione.

Esistono naturalmente casi in cui dimostrare che il numero cromatico di un grafo sia minore o uguale a 4 è molto semplice, come ad esempio i casi in cui nessun vertice del grafo possiede più di 3 archi incidenti.

Tratteremo nel dettaglio questi casi nel capitolo successivo, a tale scopo introduciamo il concetto di *grado* di un vertice.

Definizione 3.8. Dato un grafo $G = (V, E)$, il **grado** di un vertice $v \in V$ è il numero di archi incidenti a v o, equivalentemente, il numero di vertici adiacenti a v . Formalmente, il grado di un vertice v si denota $\deg(v)$ e $\deg(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$.

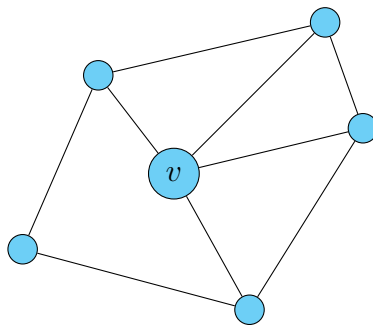


Figura 3.8: Il vertice v ha $\deg(v) = 4$ perché ha 4 archi incidenti (e quindi è adiacente a 4 vertici).

Il grado di un vertice è quindi il numero dei vertici che gli sono adiacenti, questa è quindi una caratteristica fondamentale di un grafo quando si tratta di ricercarne il numero cromatico.

In una colorazione propria di un grafo G , se, ad esempio, un vertice v ha $\deg(v) = 2$, esso avrà 2 vertici adiacenti colorati con, al massimo, 2 colori diversi e potrà sempre essere colorato utilizzando un terzo colore. Allo stesso modo, se $\deg(v) = 3$ i 3 vertici adiacenti potranno avere al massimo 3 colori diversi e per v può essere scelto un quarto colore.

Nell'interesse di questa tesi, i vertici che possiamo considerare problematici sono quindi quelli con grado maggiore di 3, poiché in linea di principio potrebbero essere adiacenti a vertici colorati con 4 o più colori differenti. La domanda che ci possiamo porre è quindi la

seguinte: è sempre possibile modificare una colorazione propria in modo che ogni vertice sia circondato da altri vertici colorati utilizzando al massimo 3 colori diversi, rendendo quindi possibile utilizzare per esso un quarto colore?

La domanda precedente è quella a cui credeva di aver definitivamente risposto in modo affermativo Alfred Kempe nel 1879, tramite la dimostrazione errata che riprenderemo in modo più dettagliato nel capitolo successivo.

Per poter comprendere il metodo utilizzato da Kempe, sfruttando le cosiddette *catene di Kempe*, è necessario definire cosa sia un *cammino* all'interno di un grafo.

Definizione 3.9. Dato un grafo $G = (V, E)$, un **cammino** di lunghezza n nel grafo è un percorso costituito da una sequenza di vertici $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$, non necessariamente distinti, e dalla sequenza $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n) \in E$ degli archi che li collegano, a due a due distinti tra loro.

La lunghezza n del cammino è la cardinalità dell'insieme degli archi che lo compongono. v_0 e v_n sono detti *estremi* del cammino.

Un **ciclo** in un grafo è un cammino in cui gli estremi coincidono.

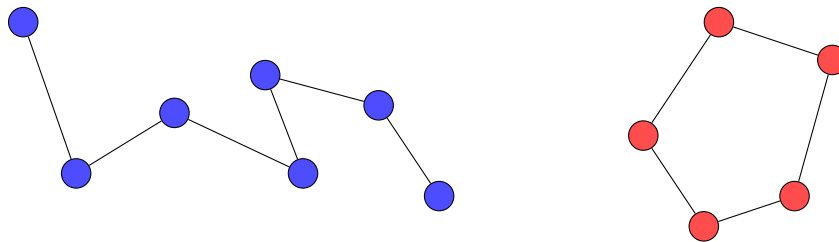


Figura 3.9: Un cammino di lunghezza 6 (in blu) e un ciclo di lunghezza 5 (in rosso).

I cicli sono dunque percorsi chiusi che delimitano le facce nei grafi planari.

Inoltre, come già accennato, le *catene di Kempe* che tratteremo in seguito sono particolari tipologie di sottografi che contengono cammini con delle proprietà fondamentali.

Inoltre, un concetto che sfrutta la definizione di cammino e che verrà utilizzato nel capitolo 5 è quello di *connessione*.

Definizione 3.10. Un grafo $G = (V, E)$ si dice **connesso** se per ogni coppia di nodi $u, v \in V$ esiste un cammino in G con estremi u e v .

Si dice **componente connessa** di un grafo $G = (V, E)$ un sottografo $G' = (V', E')$ che sia connesso e per il quale l'aggiunta di un vertice $v \in V \setminus V'$ ne provochi la disconnessione. Inoltre, dato un grafo $G = (V, E)$, esso si dice **k -connesso** se, per ogni insieme di vertici $X \subseteq V$ con $|X| < k$, il grafo $G \setminus X$, generato dalla rimozione di tutti i vertici di X e degli archi ad essi incidenti, è connesso.

Chiaramente, un grafo connesso possiede un'unica componente connessa: il grafo intero. Inoltre, la definizione di connessione coincide con quella di 1-connessione.

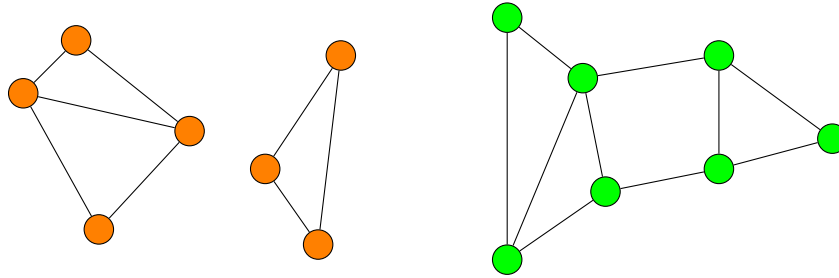


Figura 3.10: A sinistra un grafo disconnesso con due componenti connesse. A destra un grafo 2-connesso: la rimozione di qualunque coppia di vertici scelti tra i 4 centrali provoca la disconnessione del grafo.

3.2 Grafo duale di una mappa

Il concetto più importante tra quelli trattati nella sezione precedente è probabilmente quello di grafo duale, che permette di trasformare la Congettura dei Quattro colori da problema di colorazione delle regioni di una mappa planare a un equivalente problema di colorazione dei vertici di un grafo, consentendo così di utilizzare gli strumenti offerti dalla Teoria dei Grafi per un approccio più efficace al problema.

Vediamo allora nel dettaglio come si può costruire il grafo duale di una mappa planare, per poter passare da una trattazione del Teorema dei Quattro colori basata sullo studio delle mappe alla sua formulazione equivalente in Teoria dei grafi.

Innanzitutto qualunque mappa \mathcal{M} può essere interpretata come grafo G considerando le seguenti corrispondenze:

- i lati delle regioni della mappa \mathcal{M} sono archi nel grafo G corrispondente, in quanto la forma delle curve che costituiscono gli archi non incide sui rapporti di adiacenza tra le facce
- i vertici delle regioni, ossia gli estremi dei lati, sono nodi del grafo G
- le regioni sono facce del grafo G .

A questo punto, il Teorema dei Quattro Colori potrebbe essere considerato un teorema sulla colorazione delle facce di un grafo, tuttavia è comodo e opportuno trasformare il grafo appena costruito nel proprio *grafo duale* G^* utilizzando la tecnica vista nella sezione 3.1:

- ogni faccia di G genera un nodo di G^*
- due facce confinanti in G generano un arco tra i due nodi corrispondenti in G^* , due facce non confinanti in G non generano archi in G^* .

Consideriamo ad esempio la mappa \mathcal{M} raffigurata nella Figura 2.1 e costruiamo il grafo G corrispondente.

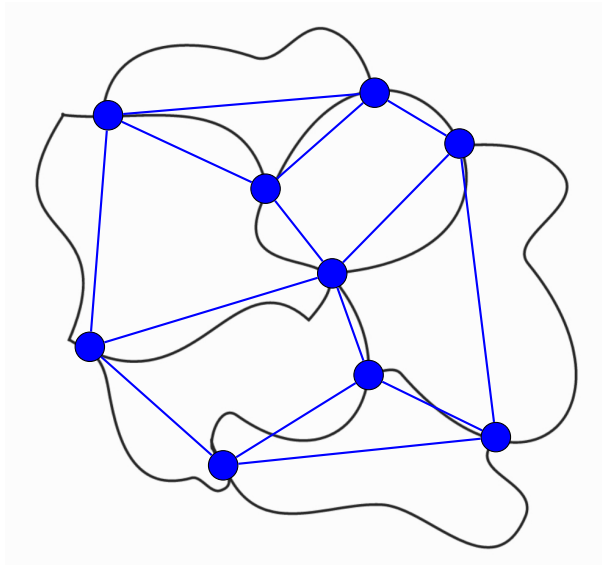


Figura 3.11: Nel grafo G (rappresentato in blu) ogni vertice corrisponde a un punto di intersezione tra le frontiere delle regioni di \mathcal{M} e gli archi sostituiscono i lati delle regioni.

A questo punto, possiamo costruire il grafo G^* come duale di G .

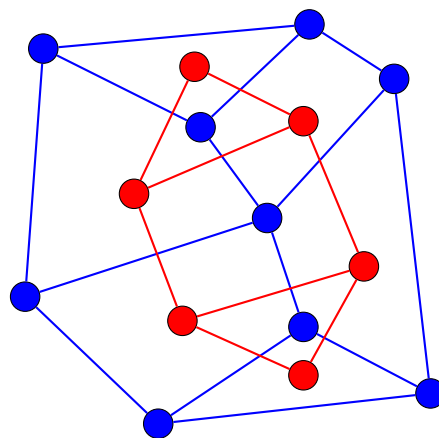


Figura 3.12: Il grafo G^* (rappresentato in rosso) è il duale di G (e quindi di \mathcal{M}). In questo caso non è rappresentato il nodo corrispondente alla faccia illimitata, poiché solitamente la colorazione riguarda soltanto le facce interne. Qualora non fosse così, sarebbe sufficiente aggiungere un altro nodo adiacente ai 6 già rappresentati.

Note: La mappa di partenza \mathcal{M} è una mappa planare, di conseguenza anche il grafo duale G^* sarà planare.

Inoltre, G^* non può contenere cappi, in quanto una regione non può confinare con sé stessa, e nemmeno archi paralleli, poiché una relazione di adiacenza tra due regioni produce un unico arco tra i nodi corrispondenti, di conseguenza G^* è anche semplice.

3.3 Il Teorema dei Quattro Colori

Giunti a questo punto della tesi, dopo aver affrontato la storia del Teorema e aver fornito le definizioni necessarie, abbiamo tutti gli strumenti fondamentali per poter formulare il Teorema dei Quattro Colori utilizzando la Teoria dei Grafi e comprenderne la dimostrazione, trattata nel capitolo 5.

Teorema dei Quattro Colori (Appel e Haken, 1976). Dato un grafo G semplice e planare, $\chi(G) \leq 4$.

In altre parole, il numero cromatico di un grafo semplice planare $\chi(G)$ è sempre minore o uguale a 4, perciò tutti i grafi di questo tipo sono 4-colorabili.

Naturalmente, l'enunciato è equivalente a quello fornito nella sezione 2.1, poiché ogni grafo semplice planare può essere considerato il duale di una mappa planare e una 4-colorazione dei nodi del grafo corrisponde a una 4-colorazione delle regioni della mappa. È possibile passare in modo semplice da una mappa planare al proprio grafo duale, come visto nella sezione 3.2, e allo stesso modo passare da un grafo semplice planare alla propria mappa duale, seguendo il metodo inverso, ossia trasformando i nodi in regioni e gli archi in lati di confine.

Prima di affrontare la dimostrazione del Teorema, chiariamo che esistono naturalmente grafi con numero cromatico 1, 2 o 3, quindi colorabili con meno di 4 colori ed evidentemente non tra i casi "critici", che possano mettere in dubbio la validità del Teorema.

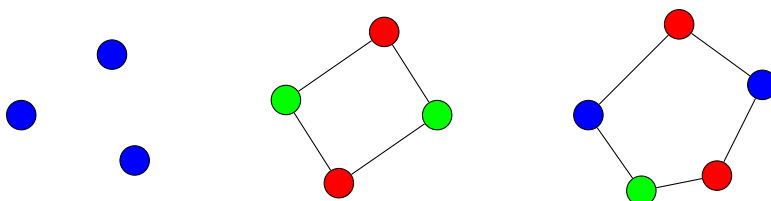


Figura 3.13: 3 grafi G_1 , G_2 e G_3 , con $\chi(G_1) = 1$, $\chi(G_2) = 2$ e $\chi(G_3) = 3$.

Proviamo con due semplici esempi che tuttavia esistono effettivamente grafi che sono 4-colorabili, ma non 3-colorabili, e che di conseguenza non può esistere un "Teorema dei Tre Colori" poiché i colori utilizzati in questi controesempi devono essere almeno 4.

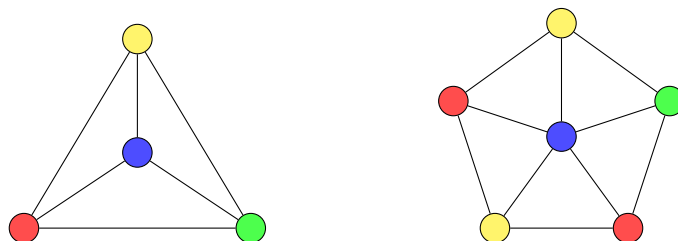


Figura 3.14: I due esempi minimi di grafi 4-colorabili, ma non 3-colorabili.

Capitolo 4

Le dimostrazioni di Kempe e Heawood

In questo capitolo ripercorriamo in modo dettagliato la dimostrazione errata del Teorema dei Quattro Colori pubblicata da Kempe e la dimostrazione del Teorema dei Cinque Colori individuata da Heawood.

4.1 La dimostrazione errata di Kempe

La "dimostrazione" del Teorema dei Quattro Colori di Kempe ([5] e [11]) è una dimostrazione per induzione sul numero dei nodi e fornisce un algoritmo ricorsivo per la colorazione dei vertici.

Kempe si propone di dimostrare che se ogni grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$ nodi è 4-colorabile, allora lo è anche ogni grafo con $n + 1$ nodi.

Per comprendere la dimostrazione di Kempe è fondamentale introdurre una formula, nota come Formula di Eulero, che fornisce una relazione tra il numero di nodi, archi e facce in un grafo planare connesso.

Formula di Eulero. Se G è un grafo planare connesso, allora vale la relazione $|V| - |E| + |F| = 2$, dove

- V è l'insieme dei nodi di G
- E è l'insieme degli archi di G
- F è l'insieme delle facce di G .

Dimostrazione. Utilizziamo per comodità V , E ed F al posto di $|V|$, $|E|$, ed $|F|$ e dimostriamo la formula per induzione sul numero di archi E :

(*Caso base*) Sia $E = 0$.

Allora il grafo G ha un solo vertice (altrimenti sarebbe vuoto) e una sola faccia, costituita da tutto il piano, perciò $V = 1$ e $F = 1$.

Di conseguenza $V - E + F = 1 - 0 + 1 = 2$ e la Formula di Eulero è verificata.

(Passo induttivo) Supponiamo che la Formula sia valida per $E = n$.

Sia $E = n + 1$. Ci sono due possibili casi:

1. G contiene un vertice v di grado 1.

Eliminiamo il vertice v e l'unico arco incidente ad esso, ottenendo un grafo $G' = G \setminus v$ con $V' = V - 1$, $E' = E - 1 = n$, $F' = F$.

Per ipotesi vale quindi $V' - E' + F' = 2$, perciò $V - 1 - E + 1 + F = V - E + F = 2$.

2. G non contiene vertici di grado 1.

Ogni arco fa necessariamente parte del perimetro di una faccia (non quella esterna), scegliamo un arco, che chiamiamo e , lo rimuoviamo e otteniamo un grafo $G' = G \setminus e$ con $V' = V$, $E' = E - 1 = n$, $F' = F - 1$.

Per ipotesi vale $V' - E' + F' = 2$, perciò $V - E + 1 + F - 1 = V - E + F = 2$. \square

Sappiamo dunque che, per ogni grafo G , vale $V - E + F = 2$ per la Formula di Eulero, inoltre ogni faccia del grafo è delimitata da almeno 3 archi, ciascuno dei quali appartiene al perimetro di due facce, vale dunque la relazione $3F \leq 2E$, perciò $F \leq \frac{2E}{3}$.

Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} F \leq \frac{2E}{3} \\ V - E + F = 2 \end{cases}$$

e otteniamo $2 = V - E + F \leq V - E + \frac{2E}{3}$.

Perciò $V - \frac{E}{3} \geq 2$, da cui si ottiene $E \leq 3V - 6$.

Questa formula è valida per ogni grafo planare e può essere sfruttata per dimostrare il seguente Lemma, fondamentale nello sviluppo successivo della dimostrazione di Kempe:

Lemma 4.1. Ogni grafo planare contiene almeno un vertice v tale che $\deg(v) \leq 5$.

Dimostrazione (Lemma 4.1). Dato che in un grafo ogni arco è incidente a due vertici, vale la relazione

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2E.$$

Ma come abbiamo appena visto, vale anche $E \leq 3V - 6$, e di conseguenza $2E \leq 6V - 12$.

Quindi

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \leq 6V - 12.$$

Supponiamo per assurdo che $\deg(v) \geq 6 \forall v \in V$. Allora abbiamo che

$$\begin{cases} \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6V \\ \sum_{v \in V} \deg(v) \leq 6V - 12 \end{cases}$$

Perciò $6V - 12 \geq 6V$, che è chiaramente una contraddizione.

Di conseguenza, almeno un vertice $v \in V$ è tale che $\deg(v) \leq 5$. \square

Ricordiamo ora la Congettura dei Quattro Colori e passiamo alla vera e propria dimostrazione (errata) di Kempe.

Congettura dei Quattro Colori. Se G è un grafo semplice e planare, $\chi(G) \leq 4$.

Dimostrazione (con errore). Procediamo per induzione sul numero di vertici:

(*Caso base*) Sappiamo che se $G = (V, E)$ è un grafo con $|V| \leq 4$, allora esso è colorabile con al più 4 colori: è sufficiente utilizzare un colore diverso per ogni vertice.

(*Passo induttivo*) Supponiamo che ogni grafo con $|V| = n$ sia 4-colorabile, dimostriamo allora che anche ogni grafo con $|V| = n + 1$ è 4-colorabile.

Consideriamo quindi un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n + 1$, individuiamo in esso un vertice $v \in V$ tale che $\deg(v) \leq 5$, che esisterà sicuramente, come dimostrato in precedenza, e rimuoviamolo da G , ottenendo un grafo $G \setminus v$.

$G \setminus v$ ha n nodi, perciò è 4-colorabile, coloriamo quindi $G \setminus v$ con 4 colori e reinseriamo in esso il vertice v con i relativi archi incidenti: sarà sufficiente colorare v per ottenere una 4-colorazione di G , provando quindi la Congettura.

Il vertice v può avere grado 1, 2, 3, 4 o 5, consideriamo quindi 5 casi e utilizziamo ad esempio i colori rosso, blu, verde e giallo.

1. $\deg(v) = 1$:

v ha un solo nodo adiacente, colorato con un colore, quindi è sufficiente utilizzare un colore differente per v .

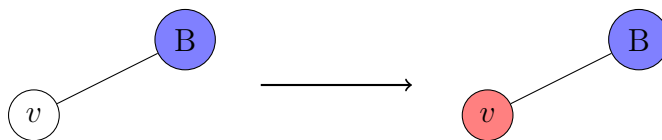


Figura 4.1: $\deg(v) = 1$: il nodo B, adiacente a v , è colorato di blu, quindi v può essere colorato di rosso (oppure verde o giallo).

2. $\deg(v) = 2$:

v ha soltanto 2 nodi adiacenti, colorati con, al più, 2 colori diversi.

Utilizziamo semplicemente un colore diverso per v e abbiamo terminato.

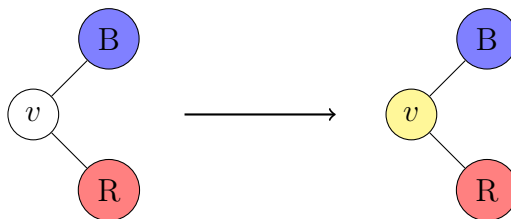


Figura 4.2: $\deg(v) = 2$: i nodi B ed R, adiacenti a v , sono colorati di blu e rosso, quindi v può essere colorato di giallo (o verde).

3. $\deg(v) = 3$:

v ha 3 nodi adiacenti, colorati con, al più, 3 colori diversi.

Come nei casi precedenti, utilizziamo un colore diverso per v e abbiamo terminato.

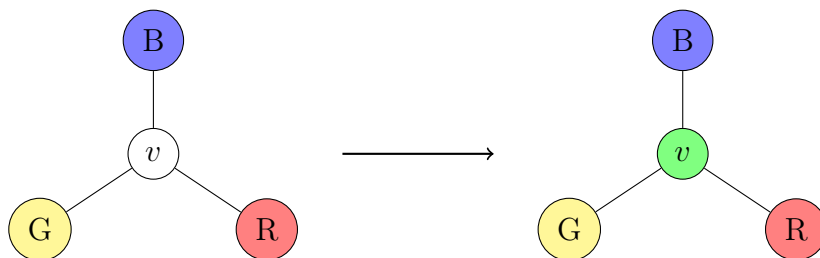


Figura 4.3: $\deg(v) = 3$: i nodi B, R e G, adiacenti a v , sono colorati di blu, rosso e giallo, quindi v può essere colorato di verde.

4. $\deg(v) = 4$:

Questo è il primo caso non banale, poiché i 4 vertici adiacenti a v potrebbero essere colorati con 4 colori diversi, rendendo quindi necessario un metodo per modificarne la colorazione.

Qualora invece i colori utilizzati siano meno di 4, è sufficiente seguire l'esempio dei casi 1, 2 e 3 e colorare v .

Allo scopo di risolvere il caso non banale definiamo il significato di *catena di Kempe*.

Definizione 4.1. In un grafo $G = (V, E)$ con una colorazione propria dei vertici, dati due colori c_1 e c_2 , una **catena di Kempe** (*Kempe chain*) c_1 - c_2 è un sottografo bipartito e connesso $K = (C_1 \cup C_2, E')$ tale che ogni vertice di C_1 sia colorato con il colore c_1 e ogni vertice di C_2 sia colorato con il colore c_2 .

Se ad esempio vogliamo determinare la catena di Kempe rossa-blu che contiene uno specifico vertice rosso, individuiamo tutti i vertici blu ad esso adiacenti, tutti i vertici rossi adiacenti ad ognuno di questi e così via.

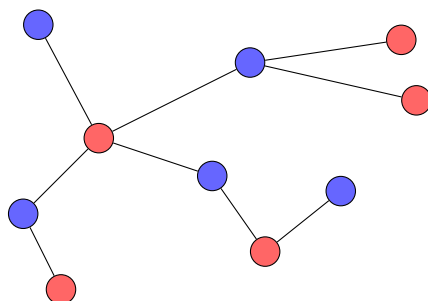


Figura 4.4: Catena di Kempe rossa-blu.

Supponiamo, senza perdita di generalità, che i 4 vertici adiacenti a v siano colorati con i colori rosso, giallo, verde e blu, in senso orario, e chiamiamoli rispettivamente R, G, V e B.

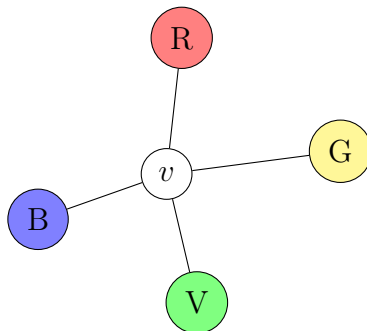


Figura 4.5: $\deg(v) = 4$, i 4 vertici adiacenti a v sono colorati con 4 colori diversi.

Consideriamo allora due sottocasi:

i) La catena di Kempe blu-gialla che contiene B non contiene anche G:

in questo caso è sufficiente invertire i colori nella catena di Kempe, da blu a giallo e da giallo a blu, il vertice B diventerà giallo, come G, e quindi v potrà essere colorato di blu.

Sottolineiamo che invertire i colori nella catena di Kempe consente di mantenere una colorazione propria del grafo, poiché se il colore di un vertice viene modificato da blu a giallo, ogni vertice giallo ad esso adiacente viene a sua volta colorato di blu, e viceversa.

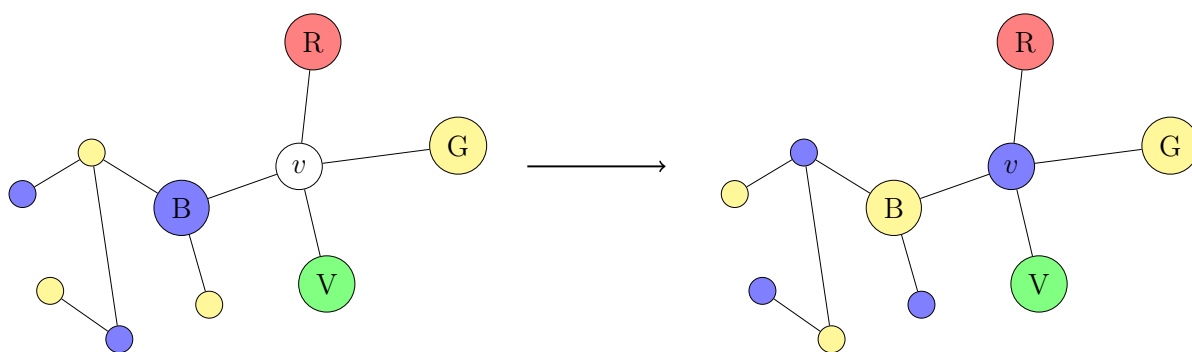


Figura 4.6: Inversione dei colori nella catena di Kempe blu-gialla contenente B. In questo modo v può essere colorato di blu.

ii) La catena di Kempe blu-gialla che contiene B contiene anche G (*catena di Kempe ciclica*):

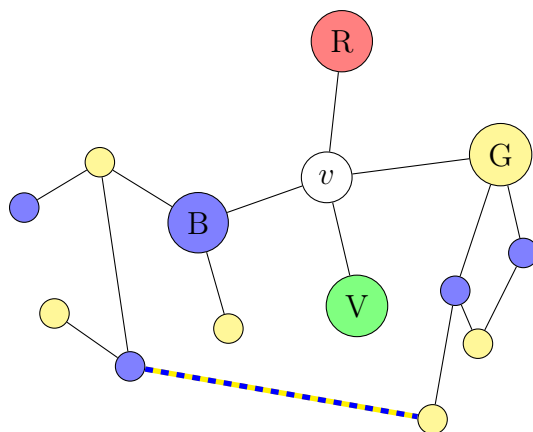


Figura 4.7: Catena di Kempe ciclica tra B e G.
La linea blu-gialla indica vertici blu e gialli che fanno parte della catena.

Questo caso è leggermente più complesso, poiché il metodo illustrato precedentemente scambierebbe soltanto il colore di G e di B, poiché appartengono alla stessa catena di Kempe, senza risolvere il problema.

Tuttavia, se la catena gialla-blu è ciclica, significa che esiste un cammino giallo-blu tra G e B, ma di conseguenza non può esistere un cammino rosso-verde tra R e V, in quanto, per la proprietà di planarità del grafo, ogni cammino tra R e V deve contenere almeno un vertice blu o giallo appartenente alla catena ciclica blu-gialla, quindi la catena di Kempe rossa-verde che contiene R non è ciclica.

Possiamo allora applicare il metodo del caso precedente a R, colorarlo di verde, proprio come V, liberando quindi il colore rosso per v .

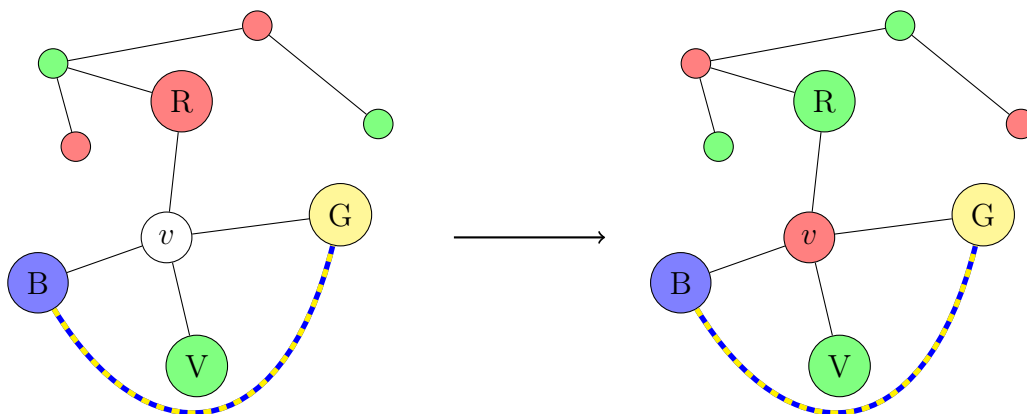


Figura 4.8: Inversione dei colori nella catena di Kempe rossa-verde (necessariamente non ciclica) contenente R. In questo modo v può essere colorato di rosso.

Nota: fino a questo punto la dimostrazione di Kempe non presenta alcun errore.

5. $\deg(v) = 5$:

Questo è il caso più complicato. Naturalmente, se i colori utilizzati per i nodi adiacenti a v sono meno di 4, scegliamo un colore per v e abbiamo terminato, come nei casi 1,2 e 3.

Consideriamo il caso in cui i colori già utilizzati sono invece 4, allora due dei 5 vertici avranno lo stesso colore.

Scegliamo ad esempio il rosso come colore ripetuto e individuiamo 2 sottocasi:

i) I vertici rossi sono consecutivi in sequenza l'uno all'altro:

ad esempio assegniamo i colori verde, giallo, blu, rosso e di nuovo rosso in senso orario, chiamiamo i vertici rispettivamente V , G , B , R_1 ed R_2 .

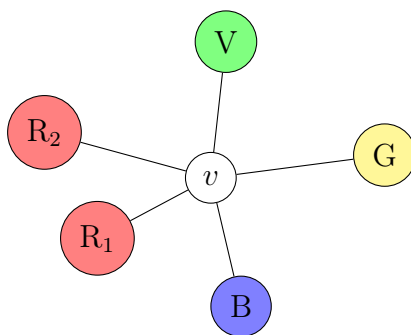


Figura 4.9: $\deg(v) = 5$, i 5 vertici adiacenti a v sono colorati con 4 colori diversi.

I vertici R_1 ed R_2 , entrambi rossi, sono consecutivi.

Questo caso è molto simile a quello precedente: individuiamo la catena di Kempe verde-blu contenente V , se non è ciclica invertiamo tutti i colori dei vertici al suo interno, V sarà quindi colorato di blu, come B , e il colore verde sarà disponibile per v .

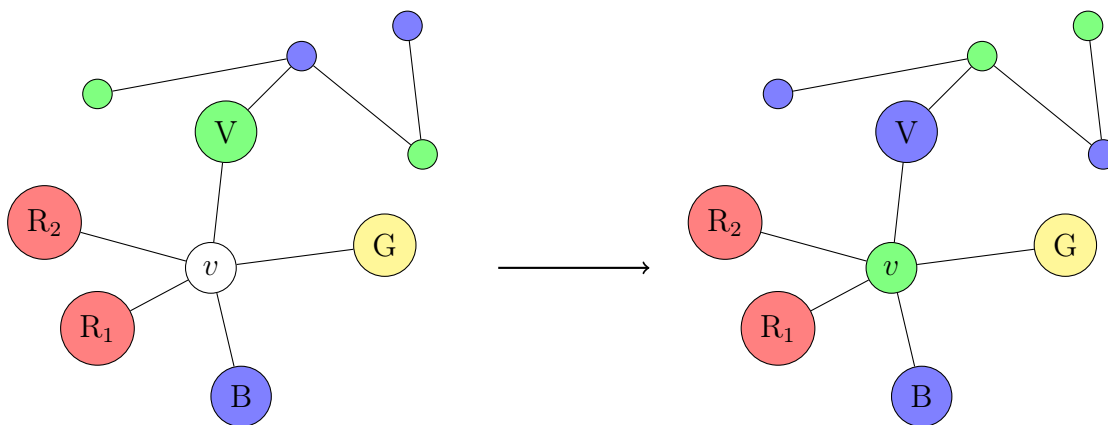


Figura 4.10: Inversione dei colori nella catena di Kempe (non ciclica) verde-blu contenente V . In questo modo v può essere colorato di verde.

Se la catena è ciclica e quindi contiene V e B , individuuiamo la catena di Kempe gialla-rossa contenente G , essa non può essere ciclica né tra G ed R_1 , né tra G ed R_2 , perciò è sufficiente invertire i colori al suo interno, G verrà colorato di rosso, come R_1 ed R_2 , e v potrà essere colorato di giallo.

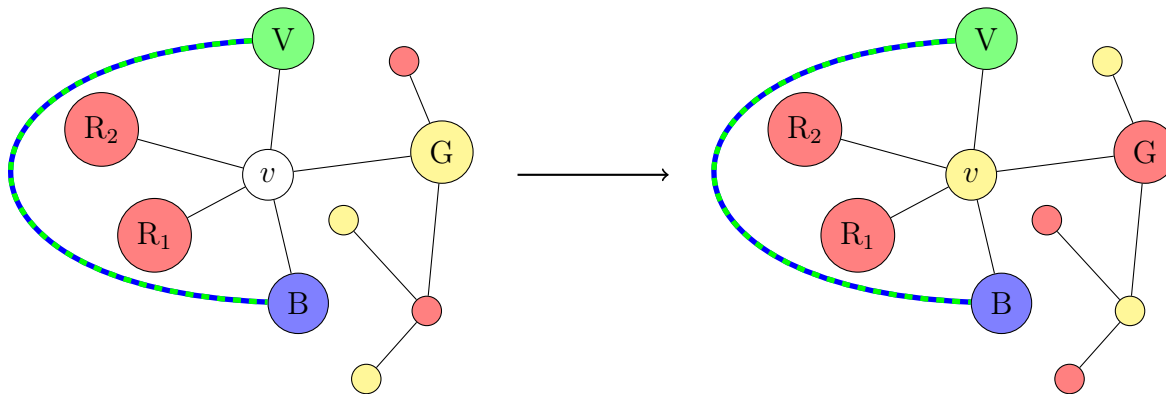


Figura 4.11: Inversione dei colori nella catena di Kempe gialla-rossa (necessariamente non ciclica) contenente G . In questo modo v può essere colorato di giallo.

- ii) I vertici rossi sono separati da un altro vertice: consideriamo ad esempio la sequenza $B-R_1-G-V-R_2$, in senso orario.

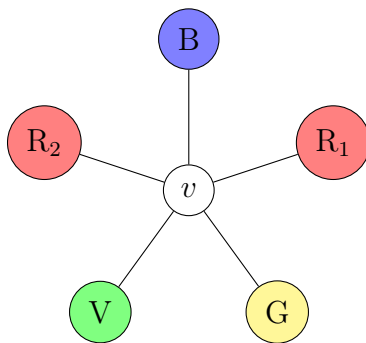


Figura 4.12: $\deg(v) = 5$, i 5 vertici adiacenti a v sono colorati con 4 colori diversi.

I vertici R_1 ed R_2 , entrambi rossi, sono separati.

Questo è il caso in assoluto più complicato.

Individuiamo la catena di Kempe blu-gialla contenente B , se non è ciclica con G usiamo lo stesso metodo usato in precedenza, ne invertiamo i colori, in modo che B diventi giallo, coloriamo quindi v di blu e abbiamo terminato.

Qualora la catena blu-gialla fosse ciclica, individuuiamo la catena di Kempe blu-verde contenente B , se non è ciclica con V usiamo il solito metodo, coloriamo B di verde e rendiamo il colore blu disponibile per v .

Se, tuttavia, anche la catena blu-verde è ciclica, non possiamo servirci di nessuna tra le due catene individuate e abbiamo di fronte il caso più problematico. Individuiamo due catene di Kempe, una rossa-verde contenente R_1 e una rossa-gialla contenente R_2 .

La catena rossa-verde è "circondata" da quella blu-gialla (ciclica) individuata in precedenza, perciò non può essere ciclica con V , i colori al suo interno possono essere invertiti, R_1 diventa quindi verde.

Allo stesso modo la catena rossa-gialla è "circondata" da quella blu-verde (ciclica) individuata in precedenza, perciò non può essere ciclica con G , ne possiamo invertire i colori dei vertici ed R_2 risulta quindi essere giallo.

Sia R_1 che R_2 hanno cambiato colore, permettendo quindi la colorazione in rosso di v .

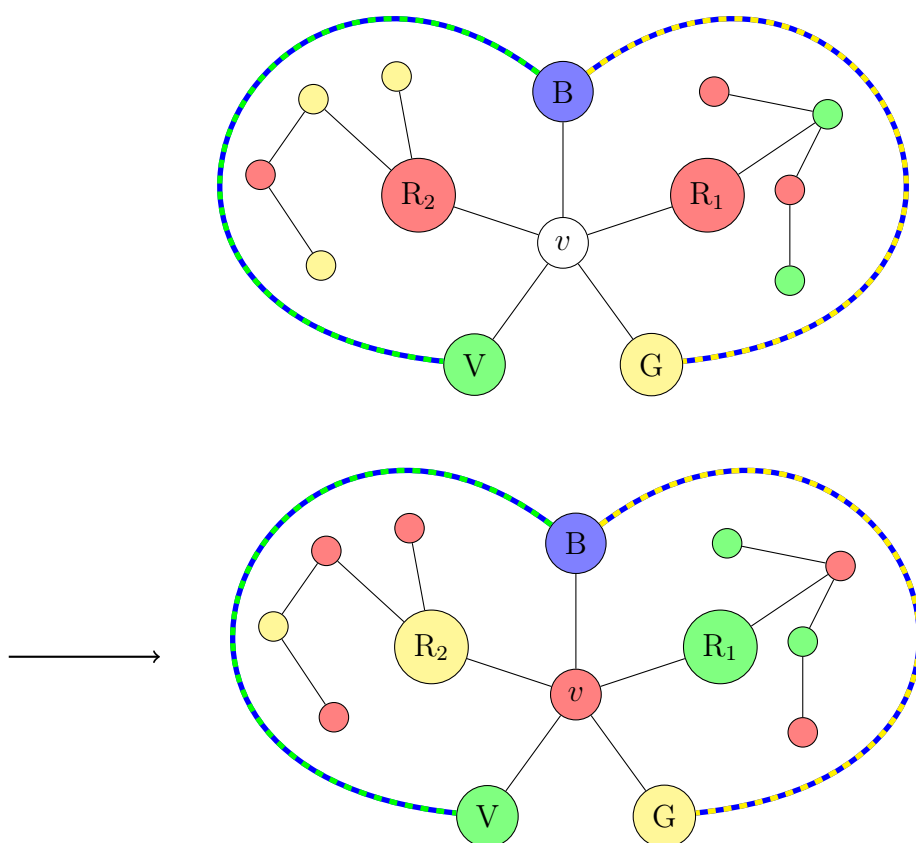


Figura 4.13: La catena di Kempe blu-verde è ciclica e contiene sia B che V , come la catena blu-gialla, che contiene B e G . L'inversione dei colori dei vertici all'interno della catena di Kempe rossa-verde contenente R_1 e di quelli nella catena di Kempe rossa-gialla contenente R_2 (non cicliche) consente di colorare v di rosso.

Non sono qui raffigurati i casi in cui una tra la catena di Kempe blu-verde e quella blu-gialla sia non ciclica, in tal caso è sufficiente applicare il metodo illustrato in precedenza.

Con questo ultimo passo della dimostrazione abbiamo esaurito tutti i possibili casi e fornito un algoritmo ricorsivo per determinare una 4-colorazione di ogni grafo planare. \square

A un primo sguardo, la dimostrazione di Kempe sembra corretta ed efficace, non sorprende quindi che l'errore sia sfuggito per 11 anni e che la Congettura dei Quattro Colori sia stata considerata ufficialmente dimostrata dalla comunità matematica.

Tuttavia, l'errore individuato da Percy John Heawood nel 1890 riguarda proprio l'ultimo caso trattato, il più complicato.

Il problema può presentarsi quando, come nel grafo sottostante, ci sono un vertice verde della catena di Kempe rossa-verde che appartiene anche alla catena ciclica blu-verde e un vertice giallo della catena rossa-gialla che appartiene anche alla catena ciclica blu-gialla.

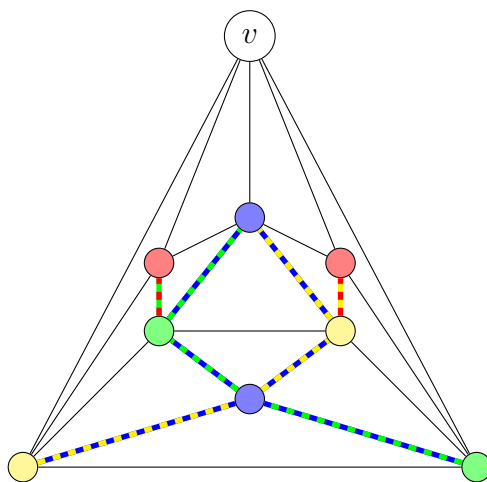


Figura 4.14: Il *grafo di Fritsch*, minimo controesempio alla dimostrazione di Kempe.

Per comprendere quale sia l'errore proviamo ad applicare il metodo di Kempe al grafo in figura, una delle rappresentazioni del minimo controesempio alla dimostrazione di Kempe, chiamata *grafo di Fritsch*, dal nome del matematico Rudolf Fritsch.

Il vertice v è di grado 5 e come nell'ultimo caso trattato nella dimostrazione esiste una catena di Kempe ciclica tra i vertici blu e verde ad esso adiacenti (linea blu-verde) e tra quello blu e quello giallo (linea blu-gialla).

Il colore ripetuto è il rosso, individuiamo quindi la catena di Kempe rossa-verde per il vertice rosso di sinistra (linea rossa-verde) e la catena rossa-gialla per il vertice rosso di destra (linea rossa-gialla).

Seguendo il metodo presentato in precedenza, dovrebbe essere possibile invertire i colori all'interno della catena di Kempe rossa-verde e di quella rossa-gialla, proviamo quindi a farlo in due modi, entrambi fallimentari.

1. Invertiamo i colori di entrambe le catene contemporaneamente:
i vertici giallo e verde delle due catene, adiacenti tra loro, vengono entrambi colorati

di rosso, la colorazione non è più una colorazione propria, poiché sono presenti due vertici rossi adiacenti, quindi il metodo non funziona.

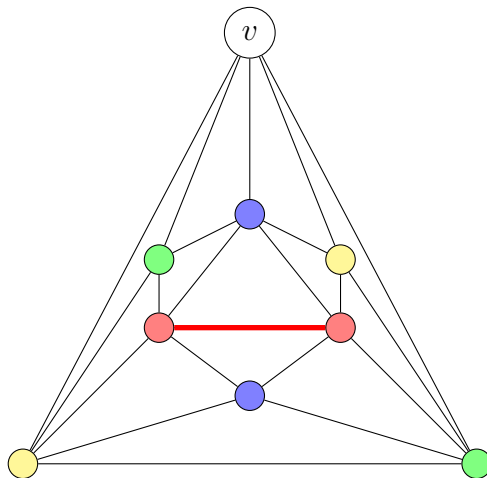


Figura 4.15: L'inversione dei colori contemporanea nelle catene di Kempe rossa-verde e rossa-gialla produce una colorazione non propria del grafo.

2. Invertiamo i colori di una sola catena di Kempe, ad esempio quella rossa-verde: si genera una catena di Kempe ciclica tra il vertice rosso e il vertice giallo adiacenti a v (linea rossa-gialla), invertirne i colori non produce quindi alcun risultato, perciò si produce nuovamente una situazione con due catene di Kempe cicliche (gialla-blu e gialla-rossa) e i vertici adiacenti a v sono colorati con 4 colori diversi. Il metodo, anche con questa modalità, non funziona.

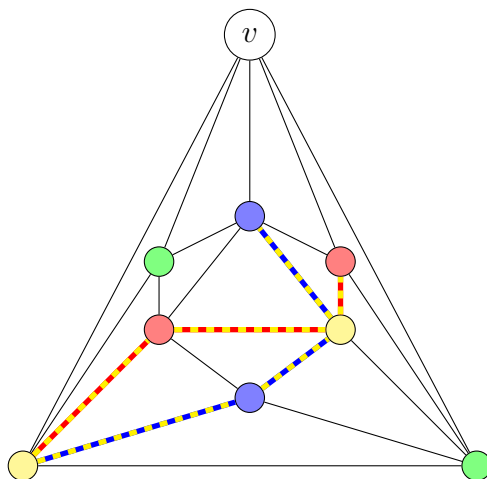


Figura 4.16: L'inversione dei colori di una sola catena di Kempe produce nuovamente un caso con due catene cicliche.

Il grafo utilizzato come controesempio non è lo stesso presentato da Heawood nel 1890, in quanto si trattava di un grafo composto da 25 nodi, si è scelto di presentare un controesempio minimo alla dimostrazione di Kempe.

4.2 La dimostrazione del Teorema dei Cinque Colori

Nel suo scritto del 1890, come detto in precedenza, Heawood non si limita soltanto a confutare la dimostrazione di Kempe, fornendo un controesempio al metodo da egli illustrato. Heawood si serve del concetto di catena di Kempe per dimostrare il Teorema dei Cinque Colori [10], modificando la dimostrazione fornita dallo stesso Kempe 11 anni prima. Ricordiamo innanzitutto l'enunciato del Teorema dei Cinque Colori, per poi presentare la dimostrazione di Heawood.

Teorema dei Cinque Colori. Se G è un grafo semplice e planare, $\chi(G) \leq 5$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione, come nella dimostrazione di Kempe.

(*Caso base*) Se il grafo $G = (V, E)$ è tale che $|V| \leq 5$, allora esso è sicuramente colorabile utilizzando al massimo 5 colori: è sufficiente utilizzare un colore diverso per ogni vertice.

(*Passo induttivo*) Supponiamo che ogni grafo con $|V| = n$ sia 5-colorabile, proviamo che anche ogni grafo con $|V| = n + 1$ è 5-colorabile.

Dato un generico grafo planare $G = (V, E)$ con $|V| = n + 1$, sappiamo che esisterà sicuramente un vertice $v \in V$ tale che $\deg(v) \leq 5$, come dimostrato in precedenza.

Rimuoviamo un vertice v con questa proprietà dal grafo G e otteniamo un grafo $G \setminus v$ con n nodi, 5-colorabile per ipotesi.

Reinseriamo v in $G \setminus v$, con i relativi archi incidenti, esso è quindi l'unico vertice da colorare per ottenere una 5-colorazione di G .

Consideriamo due casi.

1. $\deg(v) \leq 4$:

v ha, al massimo, 4 nodi adiacenti, colorati quindi con non più di 4 colori.

Utilizziamo semplicemente un colore diverso per v e abbiamo una 5-colorazione di G .

2. $\deg(v) = 5$:

Se i colori utilizzati per i 5 vertici adiacenti a v sono meno di 5, è sufficiente utilizzare un colore tra quelli rimanenti per colorare v e abbiamo terminato.

L'unico caso non banale è quello in cui i vertici adiacenti a v sono colorati con 5 colori diversi: utilizziamo i colori rosso, blu, verde, giallo e arancione.

Consideriamo ad esempio una configurazione con il vertice v al centro, adiacente ai vertici A, G, B, R e V, ordinati in senso orario e colorati rispettivamente di arancione, giallo, blu, rosso e verde, come nella figura sottostante.

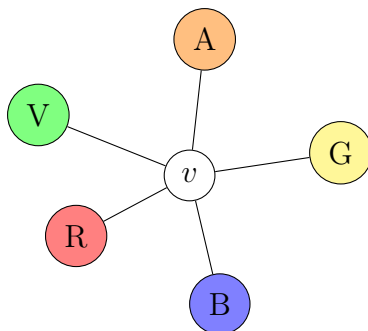


Figura 4.17: $\deg(v) = 5$, i 5 vertici adiacenti a v sono colorati con 5 colori diversi.

Scegliamo un vertice tra i 5 adiacenti a v , ad esempio A , e il colore di un vertice tra i due opposti ad A , ad esempio il blu.

Individuiamo la catena di Kempe arancione-blu contenente A , si presentano allora due sottocasi possibili:

- i) La catena di Kempe arancione-blu non è ciclica con B , allora invertiamo i colori all'interno della catena, colorando quindi A di blu e liberando il colore arancione per v .

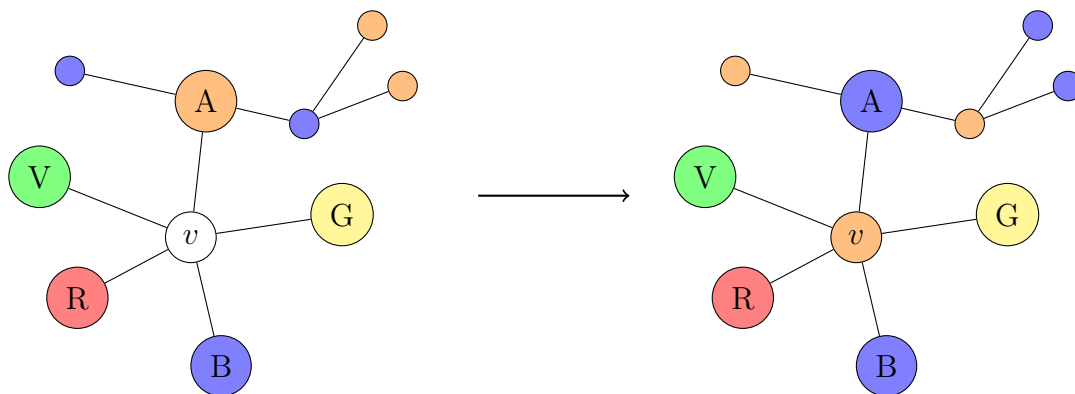


Figura 4.18: Inversione dei colori della catena di Kempe arancione-blu: in questo modo v può essere colorato di arancione.

- ii) La catena di Kempe arancione-blu è ciclica tra A e B , perciò invertirne i colori produce solo uno scambio dei colori di A e B , senza risolvere il problema.

Individuiamo allora la catena di Kempe gialla-rossa contenente G , essa non può essere ciclica con R per la proprietà di planarità del grafo, poiché un cammino tra G ed R dovrebbe necessariamente contenere un vertice della catena di Kempe ciclica arancione-blu.

Invertiamo allora i colori all'interno della catena di Kempe gialla-rossa, colorando così G di rosso e permettendo di utilizzare il colore giallo per v .

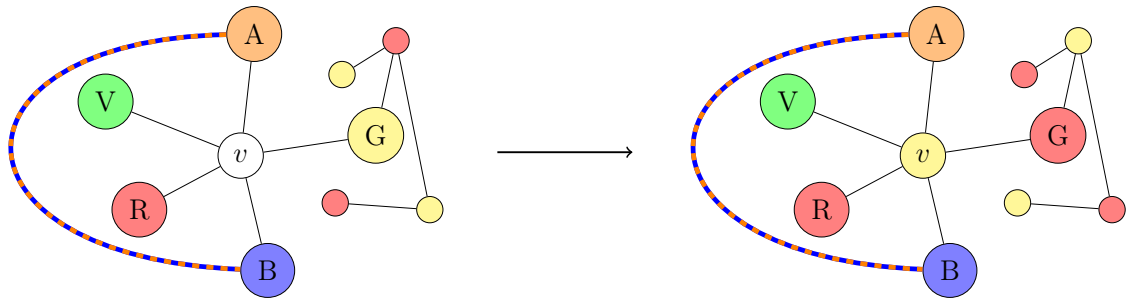


Figura 4.19: La linea arancione-blu indica una catena di Kempe ciclica arancione-blu tra A e B. L'inversione dei colori nella catena di Kempe (non ciclica) gialla-rossa contenente G permette di colorare v di giallo.

Abbiamo esaurito tutti i casi possibili e fornito un algoritmo ricorsivo per la 5-colorazione di ogni grafo planare, dimostrando quindi il Teorema. □

Capitolo 5

La dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori

5.1 Premessa

In questo capitolo possiamo finalmente affrontare la dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori. In particolare, la dimostrazione trattata è quella di Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (per semplicità Robertson et al.) del 1996 e in tutto il capitolo le principali fonti utilizzate saranno [8], [9] e [13].

Essa è infatti una dimostrazione più semplice ed efficiente di quella presentata da Appel e Haken nel 1976 [1], ma si serve delle stesse tecniche e degli stessi strumenti.

Tuttavia, nonostante questo, una trattazione completa ed esaustiva della suddetta dimostrazione non è purtroppo possibile in questa tesi, in quanto richiederebbe una quantità eccessiva di spazio e tempo, tra verifiche a mano e altre che devono necessariamente essere affidate ad un computer. Non sarebbe possibile nemmeno rappresentare tutte le 633 configurazioni inevitabili individuate da Robertson et al., perciò ne potremo presentare soltanto una selezione.

La dimostrazione di Robertson et al. è una dimostrazione per contraddizione, a differenza di quella errata di Kempe: suppone che esista un minimo controesempio al Teorema dei Quattro colori, ne deduce una serie di proprietà e le utilizza per giungere a una contraddizione.

Chiariamo innanzitutto il significato di minimo controesempio.

Definizione 5.1. Un **minimo controesempio** al Teorema dei Quattro colori è un grafo planare G tale che $\chi(G) = 5$ e, dato un altro grafo G' con $\chi(G') = 5$, $|V(G)| + |E(G)| \leq |V(G')| + |E(G')|$.

In particolare la dimostrazione si ottiene provando 3 teoremi, di cui chiariremo il significato successivamente:

Teorema 1. Ogni minimo controesempio al Teorema dei Quattro colori è una *triangolazione 6-connessa internamente*.

Teorema 2. Nessun minimo controesempio contiene una *buona configurazione*.

Teorema 3. Ogni *triangolazione 6-connessa internamente* contiene una *buona configurazione*.

Se il Teorema 1 è vero, allora i Teoremi 2 e 3 non possono essere contemporaneamente veri, perciò dimostrarli tutti e 3 significa provare che non può esistere un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori.

Nei paragrafi successivi chiariamo allora il significato di triangolazione, buona configurazione e 6-connessione per comprendere i 3 teoremi e introduciamo i concetti di riducibilità, inevitabilità e regole di scarica di un grafo per giungere alla dimostrazione di essi, e di conseguenza a quella del Teorema dei Quattro Colori.

5.2 Triangolazioni e configurazioni

La dimostrazione di Robertson et al., come detto, fa ampio uso del computer per la verifica di un numero finito, ma comunque considerevole, di casi.

Si rende quindi necessario ridurre in qualche modo le tipologie di grafi da analizzare: a tale scopo dimostriamo che è sufficiente dimostrare il Teorema dei Quattro colori per le triangolazioni, dopo averne chiarito il significato.

Definizione 5.2. Una **triangolazione**, o **grafo planare massimale**, è un grafo planare in cui ogni faccia è delimitata da 3 archi.

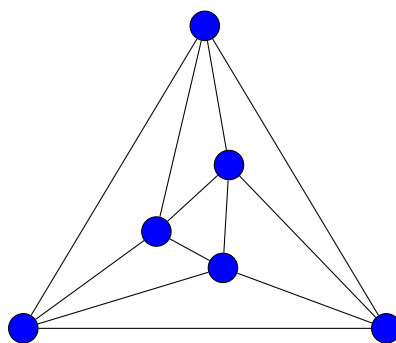


Figura 5.1: Esempio di triangolazione: ogni faccia è delimitata esattamente da 3 archi (anche la faccia illimitata).

Una triangolazione è detta anche grafo planare massimale perché l'aggiunta di qualunque arco all'interno di una triangolazione violerebbe la proprietà di planarità del grafo.

Una triangolazione contiene quindi il maggior numero possibile di archi in funzione del numero dei suoi vertici, che come abbiamo visto in precedenza risulta essere $|E| = 3|V| - 6$.

Lemma 5.1. È sufficiente dimostrare il Teorema dei Quattro colori per le triangolazioni.

Dimostrazione. Sia il grafo $G = (V, E)$ un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori e supponiamo per assurdo che non sia una triangolazione.

G contiene allora una faccia F delimitata da n archi, con $n \geq 4$, e n vertici v_1, \dots, v_n , ordinati in senso orario. Individuiamo allora due vertici v_i e v_j non adiacenti tra loro e creiamo un nuovo grafo $G' = G/\{v_i, v_j\}$ tramite contrazione, rimuovendo v_i e v_j e sostituendoli con un unico vertice v con gli stessi archi incidenti a v_i e v_j (se i due vertici sono adiacenti allo stesso vertice, l'arco sarà soltanto uno).

Si ha quindi $|V(G')| < |V(G)|$ e $|E(G')| \leq |E(G)|$, perciò $|V(G')| + |E(G')| < |V(G)| + |E(G)|$.

G' ha quindi necessariamente $\chi(G') = 4$, ma se G' è 4-colorabile allora lo è anche G : è sufficiente considerare una 4-colorazione di G' e reintrodurre i vertici v_i e v_j al posto di v , essi non sono adiacenti tra loro e hanno gli stessi archi incidenti di v , perciò possono semplicemente essere colorati con lo stesso colore di v .

In questo modo si ottiene una 4-colorazione di G , che quindi non può essere un minimo controesempio.

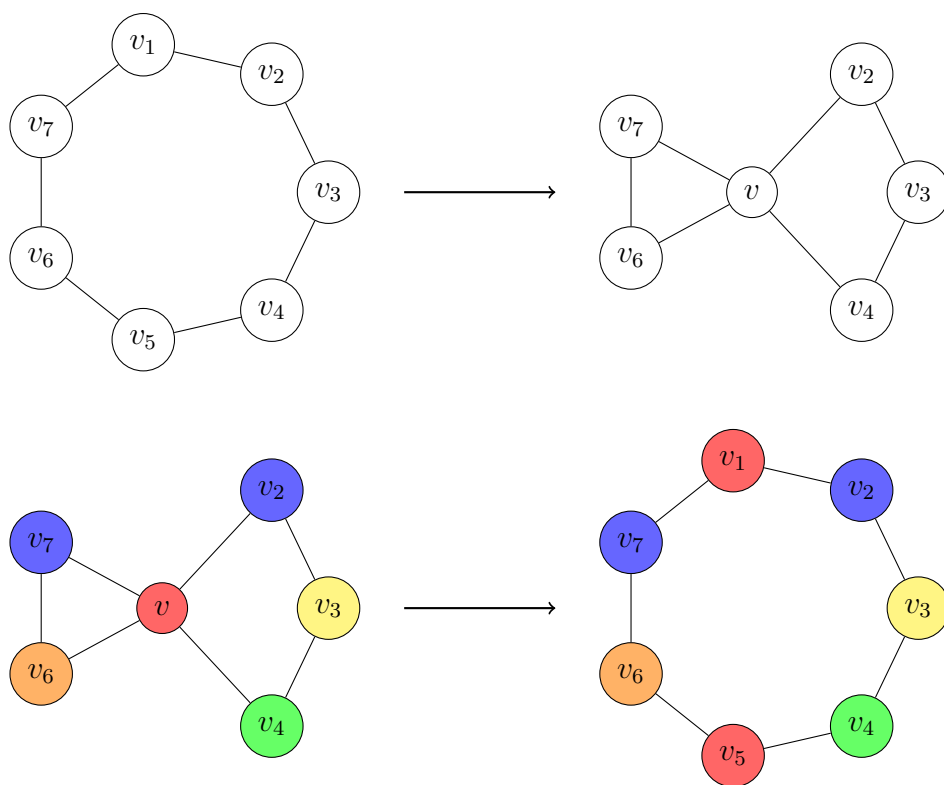


Figura 5.2: Esempio, nel caso $n = 7$, di contrazione di due vertici non adiacenti v_1 e v_5 in un unico vertice v .

Ogni 4-colorazione del grafo G' così ottenuto può essere applicata anche a G semplicemente utilizzando lo stesso colore di v per v_1 e v_5 .

Abbiamo quindi dimostrato che un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori, se esiste, deve essere una triangolazione.

Perciò è possibile dimostrare il Teorema dei Quattro Colori soltanto per le triangolazioni. \square

Allo scopo di dimostrare il Teorema 1, chiariamo cosa si intende per *6-connessione interna* di un grafo.

Definizione 5.3. Un grafo G si dice **6-connesso internamente** se è connesso, ha almeno 6 vertici e, dato un insieme di vertici X tale che $G \setminus X$ non è connesso, $|X| \geq 6$ oppure $|X| = 5$ e $G \setminus X$ ha esattamente due componenti connesse, di cui una costituita da un solo vertice.

Di conseguenza, ogni vertice v di un grafo 6-connesso internamente ha $\deg(v) \geq 5$ (se avessimo $\deg(v) \leq 4$ sarebbe possibile rimuovere i 4 vertici adiacenti a v per provocare la disconnessione di G).

Dimostriamo ora il Teorema 1, dovuto a Birkhoff [3], seguendo la dimostrazione presentata in [10].

Teorema 1 (Birkhoff, 1913). Ogni minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori è una triangolazione 6-connessa internamente.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che ogni minimo controesempio al Teorema dei Quattro colori è necessariamente una triangolazione.

Dimostriamo allora il Teorema in 3 passi:

1. Se S è separatore minimo (cioè con cardinalità minima) di una triangolazione, $G(S)$ è un ciclo.
2. Ogni separatore minimo S di un minimo controesempio G al Teorema dei Quattro Colori ha $|S| \geq 5$, quindi G è 5-connesso.
3. Se un minimo controesempio G ha un separatore minimo S con $|S| = 5$, allora una delle due componenti di $G \setminus S$ è costituita da un solo vertice, quindi G è 6-connesso.

1. Siano G una triangolazione ed S un separatore di G , chiamiamo G_1 e G_2 le due componenti di $G \setminus S$. Allora $G(S)$ contiene un ciclo $G(S')$ che separa G_1 e G_2 .

Infatti, se $G(S)$ non contenesse un tale ciclo $G(S')$ che separa $G \setminus S'$ in una componente interna e una esterna, dati due vertici $v_1 \in V(G_1)$ e $v_2 \in V(G_2)$, esisterebbe una curva semplice nel piano tra v_1 e v_2 interamente contenuta in $\mathbb{R}^2 \setminus G(S)$.

Ogni curva semplice deve necessariamente seguire il percorso di un arco oppure attraversare una faccia intersecando due archi differenti.

Dato che G è una triangolazione e quindi il piano è suddiviso in facce triangolari, è possibile deformare una curva semplice in modo che i due punti di intersezione tra la curva e

ogni faccia siano esattamente due vertici della faccia, e tra di essi esisterà necessariamente un arco proprio per via della triangolarità delle facce.

In tal modo, la curva può essere trasformata in un cammino tra v_1 e v_2 interamente contenuto in $G \setminus S$, contraddicendo il fatto che v_1 e v_2 appartengano a componenti connesse separate.

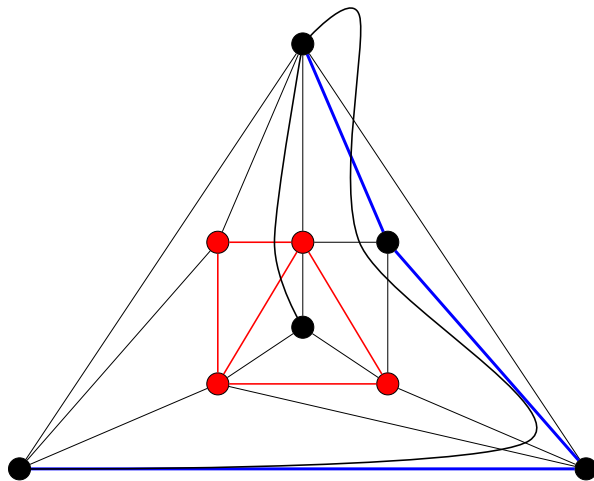


Figura 5.3: Nel grafo G rappresentato, con separatore S in rosso, la curva che interseca $G(S)$ non può essere deformata in modo da ottenere un cammino interamente contenuto in $G \setminus S$.
L'altra curva può invece essere deformata in modo da ottenere il cammino rappresentato in blu, contenuto in $G \setminus S$.

In particolare, se S è un separatore minimo, $G(S)$ deve essere un ciclo, altrimenti potrebbe contenere un separatore S' tale che $G(S')$ sia un ciclo.

2. Dato un minimo controesempio G al Teorema dei Quattro colori, supponiamo per assurdo che abbia un separatore minimo S con $|S| = 3$ oppure $|S| = 4$, in ogni caso $G(S)$ sarà un ciclo.

- Sia $|S| = 3$:

Chiamiamo A la parte di G interna a $G(S)$, con $G(S)$ compreso, e B la parte esterna a $G(S)$, con $G(S)$ compreso.

A causa della minimalità di G , A e B sono 4-colorabili e in particolare la restrizione a $G(S)$ delle 4-colorazioni di A e B è sostanzialmente unica.

Infatti, dato che $G(S)$ è un triangolo, i suoi 3 vertici saranno semplicemente colorati con 3 colori diversi e sarà sufficiente un'eventuale permutazione di colori per far coincidere le colorazioni di $G(S)$ in A e in B .

In questo modo le 4-colorazioni di A e B possono essere applicate a G , che quindi risulta 4-colorabile e non è un controesempio al Teorema dei Quattro Colori.

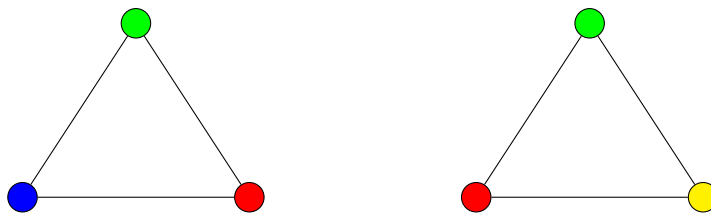


Figura 5.4: Nell'esempio in figura, supponiamo che la prima sia la 4-colorazione di $G(S)$ indotta da A e che la seconda sia quella indotta da B . Sarà sufficiente, nella colorazione di B , permutare il colore rosso con il blu, il giallo con il rosso e il blu con il giallo, in questo modo le due colorazioni saranno coincidenti.

- Sia $|S| = 4$:

$G(S)$ è un quadrilatero con vertici v_1, v_2, v_3, v_4 , ordinati in senso orario, e definiamo A e B come nel caso precedente.

Consideriamo A e B con l'aggiunta dell'arco (v_2, v_4) , essi sono 4-colorabili e, a meno di permutazioni come quelle del caso precedente, inducono soltanto due possibili 4-colorazioni su $G(S)$, poiché v_2 e v_4 devono avere colori diversi.

Se la colorazione a_1 , indotta da A , coincide alla colorazione b_1 , indotta da B , abbiamo terminato.

Consideriamo dunque il caso in cui a_1 e b_1 sono diverse, rappresentato nella figura sottostante.

Individuiamo allora in B la catena di Kempe verde-blu contenente v_3 , se non è ciclica con v_1 invertiamo i colori al suo interno, colorando così v_3 di blu, e otteniamo una nuova colorazione b_2 coincidente con a_1 .

Le colorazioni a_1 e b_2 consentono quindi di trovare una 4-colorazione di G , che non è un controesempio.

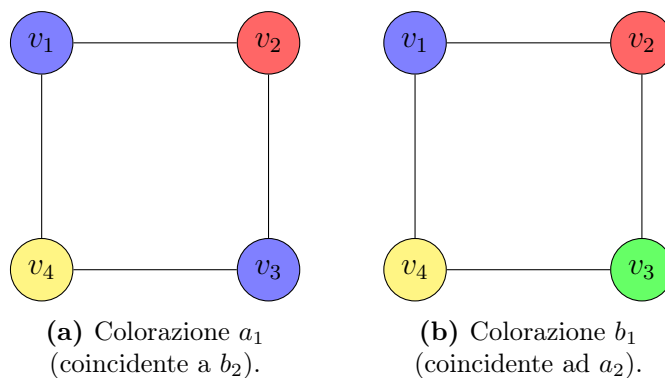


Figura 5.5: Le colorazioni di $G(S)$ a_1 e b_1 , indotte rispettivamente da A e da B , differiscono soltanto per il colore del vertice v_3 .

Se invece la catena di Kempe verde-blu è ciclica, esiste necessariamente una catena

di Kempe rossa-gialla contenente v_2 non ciclica con v_4 per la planarità di G .
 Invertendo i colori della catena otteniamo una colorazione b_3 in cui v_2 è colorato di giallo, come v_4 .

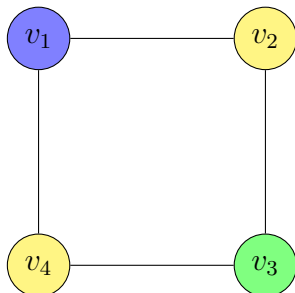


Figura 5.6: Colorazione b_3 (coincidente ad a_3).

Consideriamo allora nuovamente A , ma ora con l'aggiunta dell'arco (v_1, v_3) , esso è 4-colorabile e induce due possibili 4-colorazioni di $G(S)$: assegnati 3 colori a v_1 , v_3 e v_4 , a meno di permutazioni blu, verde e giallo rispettivamente, rimangono due scelte per v_2 .

La colorazione a_2 , con v_2 rosso, coincide con la colorazione b_1 , mentre la colorazione a_3 , con v_2 giallo, coincide con la colorazione b_3 .

In ogni caso è quindi possibile fare in modo che le colorazioni di $G(S)$ indotte da A e da B siano equivalenti, perciò possono essere utilizzate per 4-colorare G , che non è un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori.

Abbiamo dimostrato che un minimo controesempio non ha cicli separatori di lunghezza 3 o 4, perciò è 5-connesso.

3. Sia G un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori, sia S un ciclo separatore di G di lunghezza 5 e siano A e B le due componenti di $G \setminus S$.

Supponiamo per assurdo che sia A che B contengano più di un vertice.

Allora i grafi G/A e G/B , costruiti rispettivamente per contrazione di A e B , sono 4-colorabili e ogni 4-colorazione di G/A (rispettivamente G/B) coincide con una 4-colorazione di $G \setminus A$ ($G \setminus B$) che induce una 3-colorazione di S (poiché tutti i vertici di S sono adiacenti al singolo vertice contrazione di A o B).

Ogni 3 colorazione di S è unica a meno di permutazioni di colori e della scelta dell'unico vertice tra i 5 con un colore diverso dagli altri 4.

Chiamiamo questo vertice v *vertice marcato* nella colorazione c e scriviamo $v = m(c)$.

Date una colorazione c_1 indotta da G/B e una colorazione c_2 indotta da G/A , se $m(c_1) = m(c_2)$ le due colorazioni coincidono a meno di permutazioni, quindi possono essere estese a G , che risulta 4-colorabile e non è un minimo controesempio, e abbiamo terminato.

Consideriamo allora il caso in cui $m(c_1) \neq m(c_2)$, chiamiamo i vertici di S v_1, \dots, v_5 ,

ordinati in senso orario, e assumiamo senza perdita di generalità che $m(c_1) = v_1$. Si presentano due possibilità:

- i) $m(c_2)$ è adiacente a v_1
- ii) $m(c_2)$ non è adiacente a v_1 .

Il caso ii) può sempre essere ricondotto al caso i), vediamo come è possibile farlo.
ii)

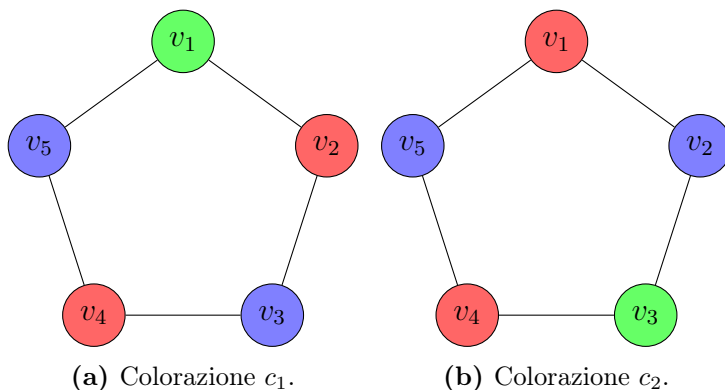


Figura 5.7: Nella colorazione c_2 , $m(c_2)$ non è adiacente a $v_1 = m(c_1)$. Senza perdita di generalità poniamo $m(c_2) = v_3$.

Individuiamo in $G \setminus A$ la catena di Kempe blu-verde contenente v_2 (e necessariamente v_3): se non è ciclica con v_5 ne possiamo invertire i colori, scambiando in particolare i colori di v_2 e v_3 e ottenendo quindi una colorazione d_2 tale che $m(d_2) = v_2$, adiacente a v_1 , riconducendoci al caso i).

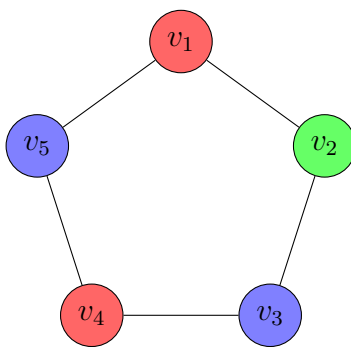


Figura 5.8: Colorazione d_2 .

Se la catena è ciclica, allora esiste, per planarità, una catena di Kempe rossa-gialla contenente v_4 non ciclica con v_1 : invertiamone i colori in modo che v_4 diventi giallo, ottenendo una nuova colorazione e_2 .

Consideriamo ora tutte le colorazioni d_1 di $G \setminus B$ in cui v_2 e v_5 hanno lo stesso colore

(utilizziamo il blu) e senza perdita di generalità scegliamo per v_3 e v_4 sempre il verde e il giallo rispettivamente.

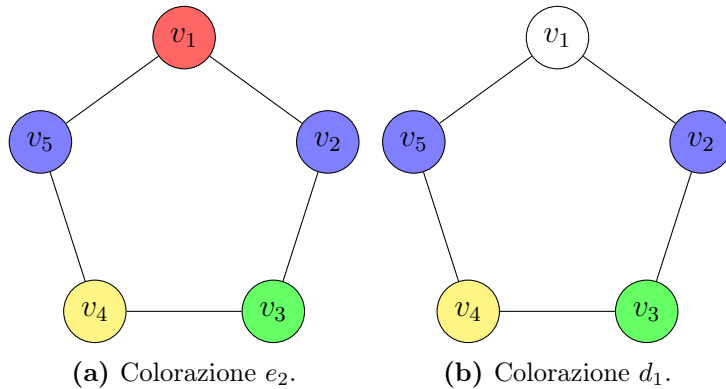


Figura 5.9: Nella colorazione d_1 , sono possibili 3 scelte per colorare v_1 .

Se v_1 è rosso, d_1 ed e_2 coincidono.

Se v_1 è giallo, $m(d_1) = v_3 = m(c_2)$ e quindi d_1 e c_2 coincidono a meno di una permutazione di colori.

Se v_1 è verde, $m(d_1) = v_4$, che è adiacente a $m(c_2) = v_3$, quindi ci riconduciamo nuovamente al caso i).

i) In questo caso $m(c_2)$ è adiacente a $m(c_1)$, poniamo $v_1 = m(c_1)$ e $v_2 = m(c_2)$.

Nella colorazione c_2 , se in $G \setminus A$ la catena di Kempe blu-verde contenente v_4 non è ciclica con v_2 (e v_1), allora v_4 può essere colorato di verde, rendendo la colorazione equivalente a c_1 grazie a una permutazione di colori.

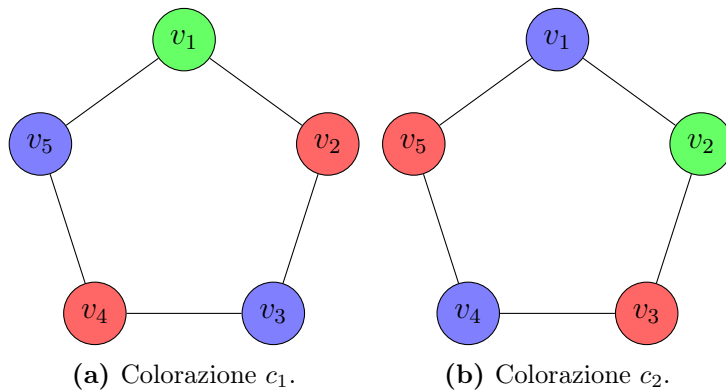


Figura 5.10: $v_2 = m(c_2)$ è adiacente a $v_1 = m(c_1)$

Se la catena blu-verde è ciclica, sicuramente non è ciclica con v_5 la catena di Kempe rossa-gialla contenente v_3 , quindi possiamo ottenere una colorazione d_2 in cui v_3 è colorato di giallo.

Consideriamo ora tutte le colorazioni d_1 di $G \setminus B$ in cui v_1 e v_4 hanno lo stesso colore

(utilizziamo il blu) e senza perdita di generalità coloriamo v_2 e v_3 rispettivamente di verde e di giallo.

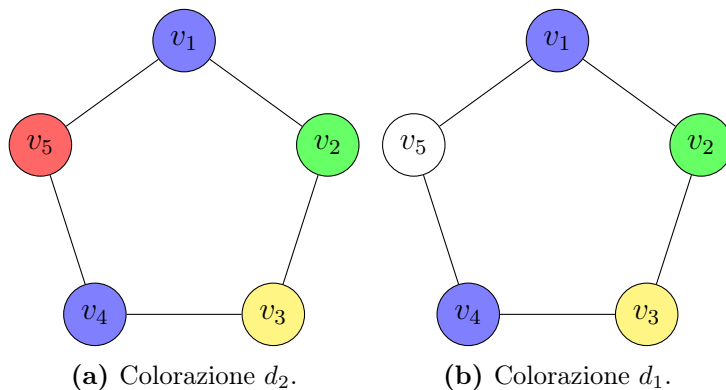


Figura 5.11: Nella colorazione d_1 sono possibili 3 scelte per il colore di v_5 .

Abbiamo quindi 3 possibili scelte di colore per il vertice v_5 .

Se v_5 è rosso, allora d_1 e d_2 coincidono.

Se v_5 è giallo, allora $m(d_1) = v_2$ e quindi la colorazione d_1 coincide con la colorazione c_2 grazie a una semplice permutazione di colori.

Se invece v_5 è verde, $m(d_1) = v_3$: perciò, a partire dalla coppia di colorazioni (c_1, c_2) con $(m(c_1) = v_1, m(c_2) = 2)$, abbiamo ottenuto la coppia (d_1, c_2) con $(m(d_1) = v_3, m(c_2) = v_2)$. Ripetendo la stessa procedura (scambiando i ruoli di $G \setminus B$ e $G \setminus A$) otterremo allora la coppia (d_1, d_2) con $(m(d_1) = v_3, m(d_2) = v_4)$ e con altre due iterazioni giungeremo alla coppia (e_1, e_2) con $(m(e_1) = v_5, m(e_2) = v_1)$.

Di conseguenza otteniamo una colorazione e_2 coincidente con c_1 a meno di permutazioni. In ciascuno di questi casi è quindi possibile estendere le colorazioni di G/A e G/B a G , che risulta quindi 4 colorabile e non è un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori.

Perciò, ogni minimo controesempio deve essere 6-connesso internamente. \square

Per comprendere i teoremi 2 e 3, chiariamo il significato di *configurazione* e *buona configurazione*.

Definizione 5.4. Una **quasi-triangolazione** è un grafo planare in cui ogni faccia finita è delimitata da 3 archi.

Quindi l'unica faccia che può essere delimitata da più di 3 archi è quella illimitata.

Definizione 5.5. Una **configurazione** K è costituita da una quasi-triangolazione $G(K)$ e una funzione $\gamma_K: V(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ con le proprietà seguenti:

- per ogni vertice $v \in V(K)$, $\gamma_K(v) \geq 5$

- per ogni vertice v , $G(K) \setminus v$ è composto da una o due componenti connesse, se sono due allora $\gamma_K(v) = \deg(v) + 2$
- dato un vertice v , se v non è adiacente alla faccia illimitata allora $\gamma_K(v) = \deg(v)$, altrimenti $\gamma_K(v) > \deg(v)$
- K ha *dimensione d'anello* (*ring-size*) ≥ 2 , con la dimensione d'anello definita come $\sum_{v \in \mathcal{V}} (\gamma_K(v) - \deg(v) - 1)$, dove $\mathcal{V} = \{v \in V(K) : v \text{ è adiacente alla faccia illimitata e } G(K) \setminus v \text{ è connesso}\}$.

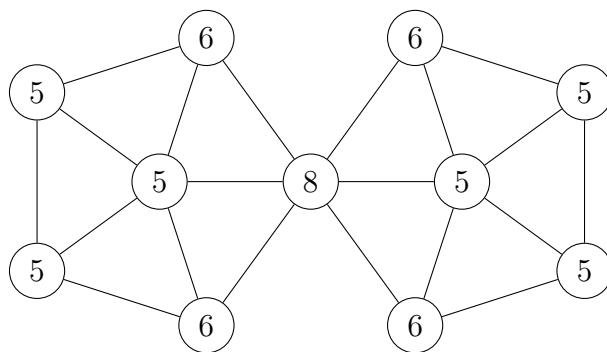


Figura 5.12: Un esempio di configurazione K , i numeri presenti all'interno dei nodi indicano il valore di $\gamma_K(v)$.

Definizione 5.6. Due configurazioni K_1 e K_2 si dicono **isomorfe** se esiste un isomorfismo di grafi ϕ tra $G(K_1)$ e $G(K_2)$ che preserva anche γ .

Ovvero $\phi: V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ è una funzione biunivoca tale che

- per ogni $u, v \in V(K_1)$, $(u, v) \in E(K_1) \iff (\phi(u), \phi(v)) \in E(K_2)$, cioè ϕ è isomorfismo di grafi
- per ogni $v \in V(K_1)$, $\gamma_{K_1}(v) = \gamma_{K_2}(\phi(v))$, cioè ϕ preserva γ .

Nella Figura 5.13 sottostante presentiamo una selezione di 17 tra le 633 configurazioni individuate da Robertson et al., rappresentate seguendo una convenzione introdotta da Heesch in [4]. La forma dei vertici indica il valore di $\gamma_K(v)$: un cerchio pieno \bullet indica che $\gamma_K(v) = 5$, un punto \cdot (cioè nessun simbolo) indica $\gamma_K(v) = 6$, un cerchio vuoto \circ indica $\gamma_K(v) = 7$ e un quadrato vuoto \square indica $\gamma_K(v) = 8$.

L'elenco completo delle 633 configurazioni è consultabile in [14] e all'interno di [9].

Definizione 5.7. Ogni configurazione isomorfa a una delle 633 configurazioni presentate da Robertson et al. è detta **buona configurazione**.

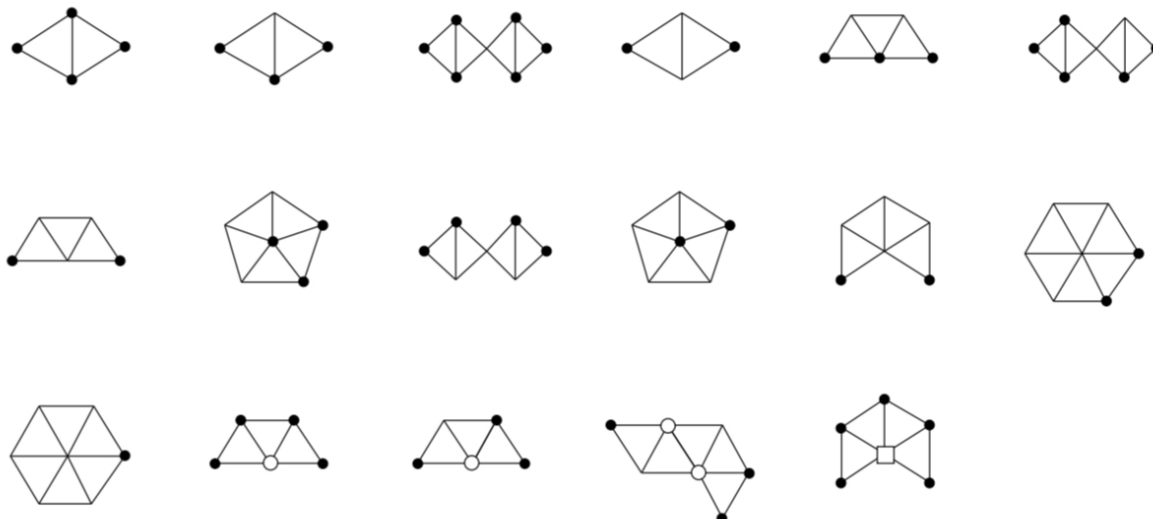


Figura 5.13: Alcune tra le 633 configurazioni di Robertson et al.

Definizione 5.8. Data una triangolazione T , si dice che T **contiene** una configurazione K se $G(K)$ è un sottografo di T , ogni faccia finita di $G(K)$ è una faccia di T e $\gamma_K(v) = \deg_T(v)$ per ogni vertice $v \in V(G(K))$.

Ricordiamo gli enunciati dei Teoremi 2 e 3 alla luce delle definizioni sovrastanti.

Teorema 2. Nessun minimo controesempio contiene una *buona configurazione*.

Teorema 3. Ogni *triangolazione 6-connessa internamente* contiene una *buona configurazione*.

La dimostrazione del Teorema 2 richiede necessariamente l'uso del computer, mentre quella del Teorema 3 potrebbe essere verificata interamente a mano, ma richiederebbe mesi di lavoro, perciò sono entrambe affidate al programma ideato da Robertson et al.

Tuttavia, nelle sezioni 5.3 e 5.4 discuteremo rispettivamente il Teorema 2 e il Teorema 3 e cercheremo di capire quantomeno come si sviluppano le due dimostrazioni.

5.3 Riducibilità

Per dimostrare il Teorema 2, introduciamo il concetto di riducibilità.

Si dimostra che ciascuna delle 633 configurazioni di Robertson et al. (e quindi ogni buona configurazione) è riducibile, può essere quindi sostituita con un grafo più piccolo e di conseguenza non può essere contenuta in un minimo controesempio.

Per chiarire le tipologie di riducibilità di una configurazione, è necessario definire il *completamento libero* di una configurazione.

Definizione 5.9. Sia K una configurazione. Una quasi-triangolazione S si dice **completamento libero** (*free completion*) di K **con anello** R se:

- R è un ciclo di S e delimita la faccia illimitata di S
- $G(K)$ è un sottografo di S e $G(K) = S \setminus V(R)$
- ogni vertice $v \in S \setminus V(R)$ ha $\deg_S(v) = \gamma_K(v)$.

Lemma 5.2. Ogni configurazione possiede un completamento libero.

Dimostrazione. Per generare un completamento libero S di una configurazione K procediamo come segue.

I vertici di $G(K)$ saranno interni a S , quindi non adiacenti alla faccia illimitata di S e interamente circondati dall'anello R .

Costruiamo l'anello R con questo metodo, considerando che deve valere $\deg_S(v) = \gamma_K(v)$:

- I vertici interni in K hanno per definizione $\gamma_K(v) = \deg_K(v)$, quindi rimangono invariati.
- I vertici esterni (adiacenti alla faccia illimitata) e che non siano separatori, cioè tali che $G(K) \setminus v$ sia connesso, diventeranno interni in S , perciò dovranno avere $\deg_S(v) = \gamma_K(v)$.

Considerando che per essi vale $\gamma_K(v) > \deg_K(v)$, sarà necessario aggiungere, per ogni v , un numero di archi tra esso e vertici di R pari a $\Delta_v = \gamma_K(v) - \deg_K(v)$.

Chiamando i vertici esterni di K v_1, \dots, v_n (ordinati ad esempio in senso orario), avremo che ogni coppia di archi consecutivi $(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$ sarà adiacente a un vertice di R in comune, perciò il numero totale di vertici di R sarà $|R| = \sum_{v \in \mathcal{V}} (\Delta_v) - n = \sum_{v \in \mathcal{V}} (\gamma_K(v) - \deg(v) - 1)$, poiché $n = |\mathcal{V}|$, dove $\mathcal{V} = \{v \in V(G(K)) : v \text{ è adiacente alla faccia illimitata di } K \text{ e } G(K) \setminus v \text{ è connesso}\}$.

Perciò $|R|$ è proprio la *dimensione d'anello* citata nella definizione di configurazione.

- Nel caso di vertici separatori, essi saranno sicuramente esterni in K e avranno $\gamma_K(v) = \deg_K(v) + 2$.

Sarà sufficiente congiungere ciascuno di essi ai due vertici di R adiacenti a entrambe le componenti connesse di $G(K) \setminus v$, come nella figura esplicativa sottostante.

La quasi-triangolazione S generata con l'aggiunta di R all'esterno di $G(K)$ e degli archi tra di essi è un completamento libero di K . □

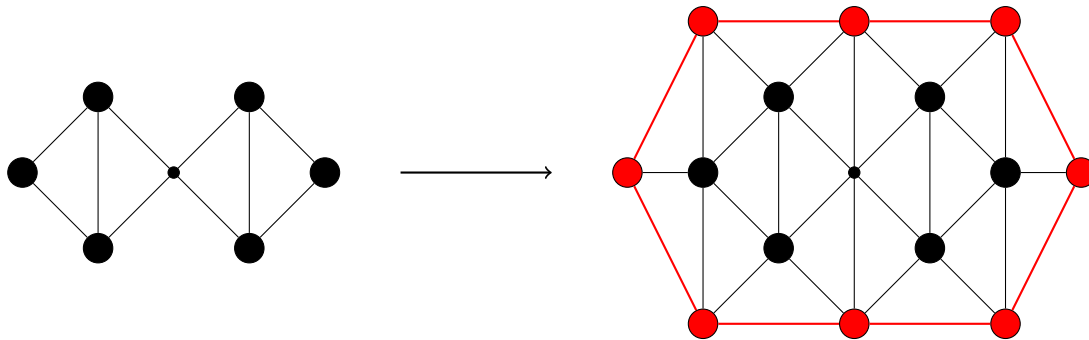


Figura 5.14: Consideriamo ad esempio la configurazione numero 3 della Figura 5.13: il vertice centrale separatore ha $\deg_K(v) = 4$ e di conseguenza $\gamma_K(v) = 6$, tutti gli altri vertici hanno $\gamma_K(v) = 5$. Costruiamo il completamento libero di K in modo da aggiungere 3 archi incidenti ai vertici di destra e sinistra, poiché essi hanno $\deg_K = 2$, e 2 archi incidenti a tutti gli altri vertici, che hanno $\deg_K = 3$. Per il vertice separatore centrale v è sufficiente aggiungere due archi incidenti ai due vertici di R adiacenti a entrambe le componenti connesse di $G(K) \setminus v$, già presenti. L'anello R così generato è rappresentato in rosso.

Ogni completamento libero di una configurazione è sostanzialmente unico, poiché due completamenti liberi di una stessa configurazione K sono legati da un isomorfismo di grafi.

Infatti, dati due completamenti liberi S ed S' di una configurazione K :

- la configurazione K è fissa
- la lunghezza degli anelli R ed R' è determinata dalla dimensione d'anello, che dipende unicamente dalla configurazione, ed è quindi la stessa in entrambi i casi
- il numero di archi tra ogni vertice esterno v di K e quelli di R è determinato da $\deg_K(v)$ e $\gamma_K(v)$, quindi dipende unicamente dalla configurazione.

Di conseguenza, esiste un isomorfismo $\phi: V(S) \rightarrow V(S')$ tale che:

- per ogni vertice $v \in V(K)$, $\phi(v) = v$
- per ogni vertice $r \in V(R)$ esiste $r' \in V(R')$ tale che $\phi(r) = r'$
- $(v, r) \in E(S)$, con $v \in V(K)$ e $r \in V(R) \iff (v, r') = (\phi(v), \phi(r)) \in E(S')$.

Dato un ciclo R , esiste una proprietà di *consistenza* (*consistency*) di un insieme di 4-colorazioni di R che è stato utilizzato da Kempe e Birkhoff.

Per i nostri scopi, non è necessario definire cosa si intenda per *consistenza*, ma è sufficiente enunciare le seguenti proprietà:

1. l'insieme vuoto è consistente
2. l'unione di due insiemi consistenti è consistente
3. se T è una triangolazione, R è un ciclo di T , T' è la quasi-triangolazione ottenuta rimuovendo da T tutti i vertici interni al disco aperto delimitato da R e \mathcal{C} è l'insieme di tutte le restrizioni delle 4-colorazioni di T' a R , allora \mathcal{C} è consistente
4. la consistenza è una proprietà abbastanza restrittiva da permettere l'esistenza di abbastanza *configurazioni riducibili* (ne chiariremo il significato in seguito).

Dato un completamento libero S di una configurazione K con anello R , sia \mathcal{C}^* l'insieme di tutte le 4-colorazioni di R e sia \mathcal{C} l'insieme di tutte le restrizioni a $V(R)$ delle 4-colorazioni di S (si dimostra facilmente che ognuna delle 633 configurazioni di Robertson et al., che sono le uniche che saranno utili nel seguito, sono 4-colorabili, come anche i loro completamenti liberi).

Sia inoltre \mathcal{C}' il sottoinsieme consistente massimale di $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}$.

Diamo due diverse definizioni di *riducibilità* della configurazione K .

Definizione 5.10. La configurazione K si dice **D -riducibile** se $\mathcal{C}' = \emptyset$.

Definizione 5.11. La configurazione K si dice **C -riducibile** se esiste una quasi-triangolazione S' , chiamata **riduttrice**, ottenuta da S sostituendo $G(K)$ con un grafo più piccolo, in modo che nessun elemento di \mathcal{C}' sia la restrizione a $V(R)$ di una 4-colorazione di S' .

Per giungere alla dimostrazione del Teorema 2, vogliamo provare che nessun minimo controesempio al Teorema dei Quattro colori può contenere una configurazione D -riducibile o C -riducibile.

Per quanto riguarda la D -riducibilità, la dimostrazione non presenta particolari problemi, come vedremo in seguito. Per quanto riguarda invece la C -riducibilità, che sembra essere la definizione più "naturale" di riducibilità, la dimostrazione è in realtà molto più problematica, poiché porterebbe a una sostituzione di S con S' , tuttavia non abbiamo la certezza che S' sia privo di cappi, e quindi semplice.

A tale scopo, consideriamo soltanto riduttrici *sicure*.

Definizione 5.12. Una riduttrice si dice **sicura** se il processo di sostituzione sopraccitato, a partire da una triangolazione T 6-connessa internamente, produce una triangolazione.

Lemma 5.3. Un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori non può contenere configurazioni D -riducibili oppure C -riducibili con una riduttrice sicura.

Dimostrazione (accenno). Per quanto riguarda la prima parte del Lemma, qualora un minimo controesempio G contenesse una configurazione D -riducibile K , avremmo $\mathcal{C}' = \emptyset$.

Di conseguenza, dato un completamento libero S di K con anello R , l'insieme delle 4-colorazioni di R , considerato autonomo rispetto ad S , e l'insieme delle 4-colorazioni di R , come restrizioni delle 4-colorazioni di S , sono sostanzialmente uguali tra loro, nel senso che la differenza tra i due insiemi ha sottoinsieme consistente massimale vuoto.

Perciò, la presenza di $G(K)$ non influisce sulla 4-colorabilità dei vertici di R e, in generale, di ogni vertice adiacente a $G(K)$ (non è infatti necessariamente vero che tutto R sia contenuto in G).

$G(K)$ potrebbe allora essere sostituito ad esempio da un grafo vuoto ed R avrebbe sostanzialmente lo stesso insieme di 4-colorazioni possibili.

Se G contiene una configurazione D -riducibile, non può essere un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori.

Consideriamo un esempio semplice in cui non soltanto $\mathcal{C}' = \emptyset$, ma $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C} = \emptyset$, quindi non è necessaria una reale comprensione del concetto di consistenza.

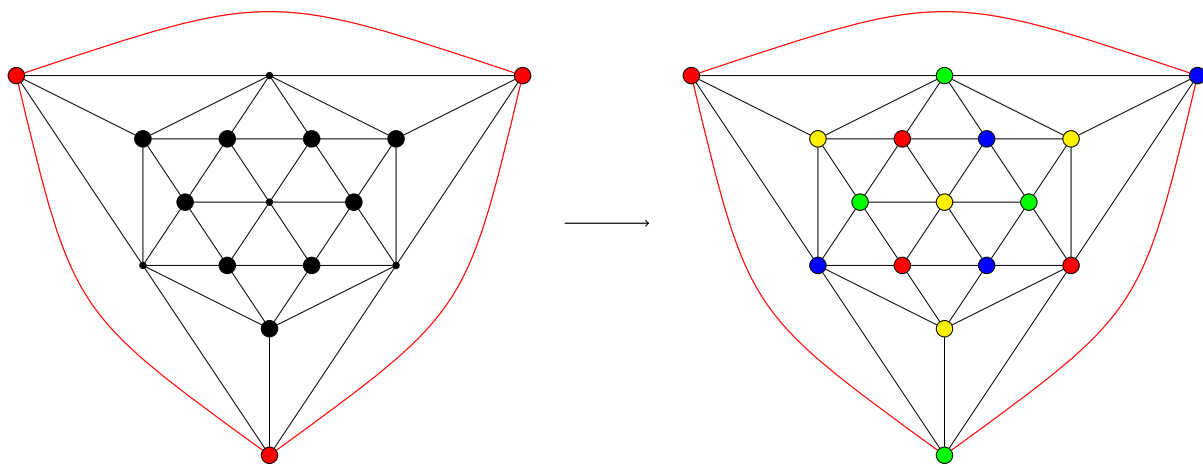


Figura 5.15: Un esempio di configurazione D -riducibile.

Nella parte sinistra dell'esempio in figura sono rappresentati una configurazione K (in nero) con la convenzione di Heesch e il suo completamento libero S con anello R (in rosso).

Ogni 4-colorazione di R è individuata semplicemente dall'utilizzo di 3 colori diversi per i 3 vertici (rosso, blu e verde in questo caso) e ognuna di queste colorazioni è anche restrizione di una 4-colorazione di S e sostanzialmente unica a meno di scambi di colori, come si può vedere ad esempio nella figura di destra.

Di conseguenza, in questo caso $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C} = \emptyset$, quindi K è D -riducibile e potrebbe essere sostituita semplicemente da un grafo vuoto.

Nota: S non può in realtà comparire in un eventuale controesempio minimo G già per ipotesi, poiché R sarebbe un ciclo separatore di lunghezza 3 e di conseguenza G non sarebbe 6-connesso internamente.

Per quanto riguarda la seconda parte, per definizione di C -riducibilità, la presenza di una configurazione C -riducibile in un minimo controesempio (se con riduttrice sicura) è impossibile, perché permetterebbe la sostituzione di $G(K)$ con un grafo più piccolo. L'unica difficoltà è quindi la dimostrazione della *sicurezza*, affidata al programma elaborato da Robertson et al. e molto meno problematica rispetto a quanto lo sia nella dimostrazione di Appel e Haken.

In questo caso vengono infatti considerate soltanto riduttrici ottenute da $G(K)$ tramite contrazione di 4 archi al massimo, rendendo la verifica della *sicurezza* più semplice.

Consideriamo anche in questo caso un semplice esempio esplicativo di configurazione C -riducibile: la prima configurazione della Figura 5.13, che chiameremo C_1 , il cui completamento libero viene chiamato *diamante di Birkhoff* [12].

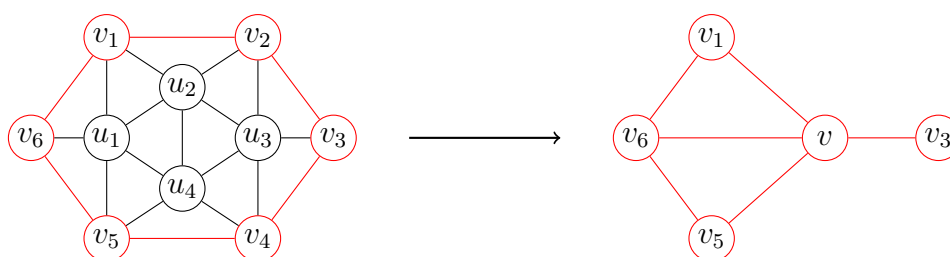


Figura 5.16: Contrazione del diamante di Birkhoff

Il diamante di Birkhoff S rappresentato nella parte sinistra della figura, completamente libero di C_1 , può essere ridotto tramite contrazione al grafo $S' = S/\{u_1, u_2, u_3, u_4, v_2, v_4\}$, rappresentato a destra, in cui v è la contrazione dei 6 vertici.

Dimostriamo che ogni 4-colorazione di S' può essere estesa anche ad S , che di conseguenza non può essere presente in un minimo controesempio [6].

Consideriamo tutte le 4-colorazioni di S' , che sono 6: fissiamo 3 colori, diversi tra loro, per v, v_1 e v_6 , ad esempio blu, rosso e verde rispettivamente. Così facendo rimangono 2 colori disponibili per v_5 , ovvero rosso e giallo, e 3 colori per v_3 , ovvero rosso, verde e giallo, quindi il numero di scelte totali è 6.

Applichiamo ciascuna di queste 6 colorazioni all'anello R di S (rappresentato in rosso) utilizzando per v_2 e v_4 lo stesso colore di v , in questo caso il blu, e mostriamo le 6 colorazioni di S che si ottengono.

Le prime 5 colorazioni si ottengono in modo molto semplice a partire dalla rispettiva colorazione di R , mentre la colorazione 6 richiede l'utilizzo delle catene di Kempe per rendere possibile la colorazione di C_1 .

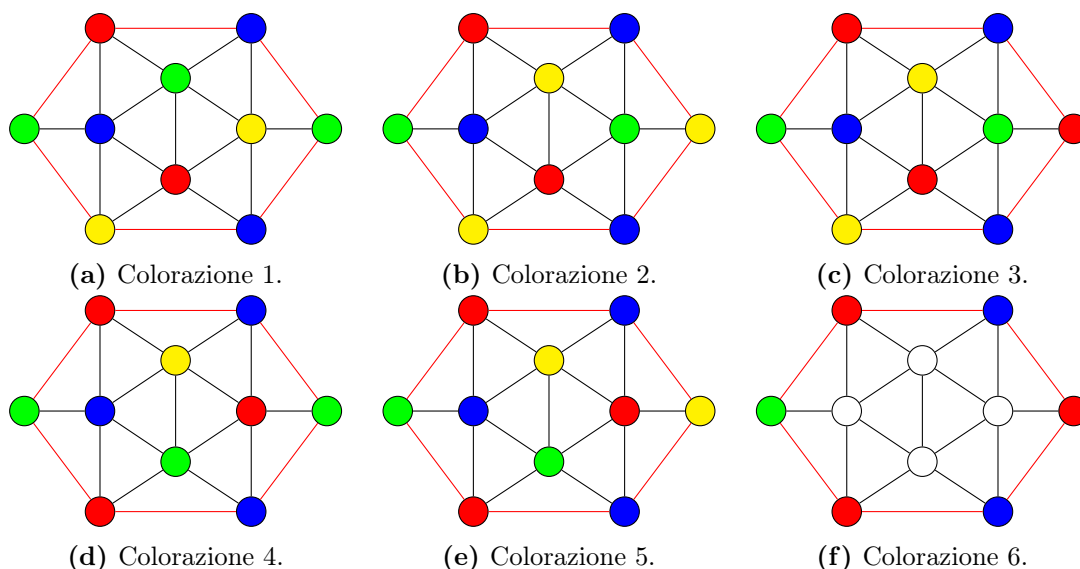


Figura 5.17: Le 6 colorazioni di S ricavate a partire dalle colorazioni di S' .

Per quanto riguarda la colorazione 6, utilizzando i nomi assegnati ai vertici in precedenza, individuiamo la catena di Kempe rossa-gialla contenente v_3 e abbiamo 3 possibili casi:

- La catena non è ciclica né con v_1 né con v_5 , gli altri due vertici rossi. In questo caso invertiamo i colori all'interno della catena, colorando quindi v_3 di giallo, e ci riconduciamo alla colorazione 5.
- La catena è ciclica con v_1 ma non con v_5 (o viceversa). Individuiamo allora la catena di Kempe rossa-gialla contenente v_5 (rispettivamente v_1), ne invertiamo i colori, colorando così v_5 (o v_1) di giallo e riconducendoci quindi alla colorazione 3.
- La catena è ciclica sia con v_1 che con v_5 . In quest'ultimo caso individuiamo allora la catena di Kempe blu-verde contenente v_4 , che non può essere ciclica con il vertice verde v_6 per la planarità del grafo. Invertiamo i colori all'interno della catena e coloriamo v_4 di verde, possiamo allora estendere la 4-colorazione anche ai vertici di C_1 , come illustrato nella figura sottostante.

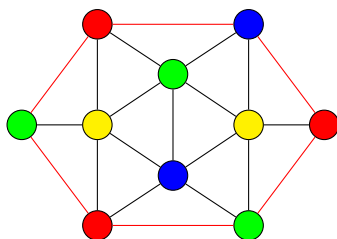


Figura 5.18: Colorazione 6.

La configurazione C_1 è quindi C -riducibile, può essere sostituita da un grafo più piccolo e di conseguenza non può essere contenuta in un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori. \square

A questo punto, per dimostrare il Teorema 2, è sufficiente provare il seguente Lemma.

Lemma 5.4. Ciascuna delle 633 configurazioni di Robertson et al. è D -riducibile o C -riducibile con una riduttrice sicura.

La dimostrazione del Lemma 5.4 non può essere eseguita a mano, ed è infatti affidata a due programmi indipendenti, elaborati da Robertson et al., che individuano anche una serie di invarianti numerici da poter confrontare per consentire una verifica della correttezza dei risultati.

La dimostrazione del Lemma 5.3 e del Lemma 5.4 prova che nessuna delle 633 configurazioni (e di conseguenza nessuna buona configurazione) può essere contenuta in un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori, perciò anche il Teorema 2 è dimostrato.

5.4 Inevitabilità

Il Teorema 3, che dimostreremo in questa sezione, afferma l'*inevitabilità* della presenza di una buona configurazione in ogni triangolazione 6-connessa internamente.

Definizione 5.13. Una configurazione K **compare** in una configurazione L se $G(K)$ è un sottografo di $G(L)$, ogni faccia finita di K è una faccia finita di L e $\gamma_K(v) = \gamma_L(v)$ per ogni $v \in V(K)$.

Definizione 5.14. Sia T una triangolazione 6-connessa internamente.

Dato un vertice v di T , si dice **vicinato** di v in T la configurazione K tale che $G(K)$ sia il sottografo di T indotto da tutti i vertici u di T per i quali esiste un cammino P in T con estremi u e v e lunghezza massima 2, in cui il vertice centrale (se presente) ha grado massimo 8, e $\gamma_K(u) = \deg_T(u)$ per ogni $u \in V(K)$.

Per dimostrare il Teorema 3, proviamo che una buona configurazione compare necessariamente nel vicinato di un certo vertice.

Definizione 5.15. Dato un grafo planare G , una **regola** (*di scarica*) è una 6-upla $(G, \alpha, \epsilon, r, s, t)$, in cui

$\alpha: V(G) \rightarrow \{5, 6, 7, 8\}$ ed $\epsilon: V(G) \rightarrow \{-, 0, +\}$ sono applicazioni, $r > 0$ è un numero intero, s e t sono due vertici adiacenti di G .

La Figura 5.19 rappresenta l'insieme \mathcal{R} di tutte le 32 *regole* di Robertson et al. seguendo la convenzione seguente:

- l'applicazione α segue la convenzione di Heesch introdotta per le 633 configurazioni (cerchio pieno \bullet se $\alpha(v) = 5$, punto \cdot se $\alpha(v) = 6$, cerchio vuoto \circ se $\alpha(v) = 7$, quadrato vuoto \square se $\alpha(v) = 8$)
- ϵ corrisponde al *segno* del vertice ed è rappresentata con il segno $+$ o $-$ di fianco al vertice corrispondente (il segno 0 è omissivo)
- $s, t \in V(G)$ sono tali che l'unico arco direzionato rappresentato sia da s a t
- r è il numero di frecce rappresentate sull'arco (s, t) ,
 $r = 2$ per la prima regola ed $r = 1$ per le 31 regole restanti.

Le prime 7 regole seguono una sorta di "pattern", ma tutte le regole restanti sono state individuate da Robertson et al. tramite un metodo per tentativi.

Definizione 5.16. Un **passaggio** (*di carica*) P è una 4-upla (K, r, s, t) , in cui K è una configurazione, $r > 0$ è un numero intero ed $s, t \in V(K)$ sono tali che esistono una regola $R = (G, \alpha, \epsilon, r, s', t') \in \mathcal{R}$ e un isomorfismo di grafi $h: G(K) \rightarrow G$ con le seguenti proprietà:

1. $\gamma_K(v) \leq \alpha(h(v))$ per ogni $v \in V(K)$ con $\epsilon(h(v)) \in \{-, 0\}$
2. $\gamma_K(v) \geq \alpha(h(v))$ per ogni $v \in V(K)$ con $\epsilon(h(v)) \in \{0, +\}$
3. $h(s) = s'$ e $h(t) = t'$.

Diciamo che P **rispetta** la regola R , ogni passaggio rispetta esattamente un'unica regola. Scriveremo $r(P) = r$, $s(P) = s$, $t(P) = t$.

r è il *valore* del passaggio, s la sua *sorgente* e t il suo *pozzo*.

Un passaggio P è *contenuto* in una triangolazione T o in una configurazione L se $K(P)$ è contenuta in T o L .

Una volta definita nel seguito la *carica* di un vertice, il significato di passaggio sarà esattamente quello di un passaggio di carica tra i vertici s e t seguendo una delle 32 regole. In particolare, nell'algoritmo presentato da Robertson et al., i passaggi di carica saranno fondamentali per individuare una delle 633 configurazioni, seguendo lo spostamento delle cariche all'interno del grafo.

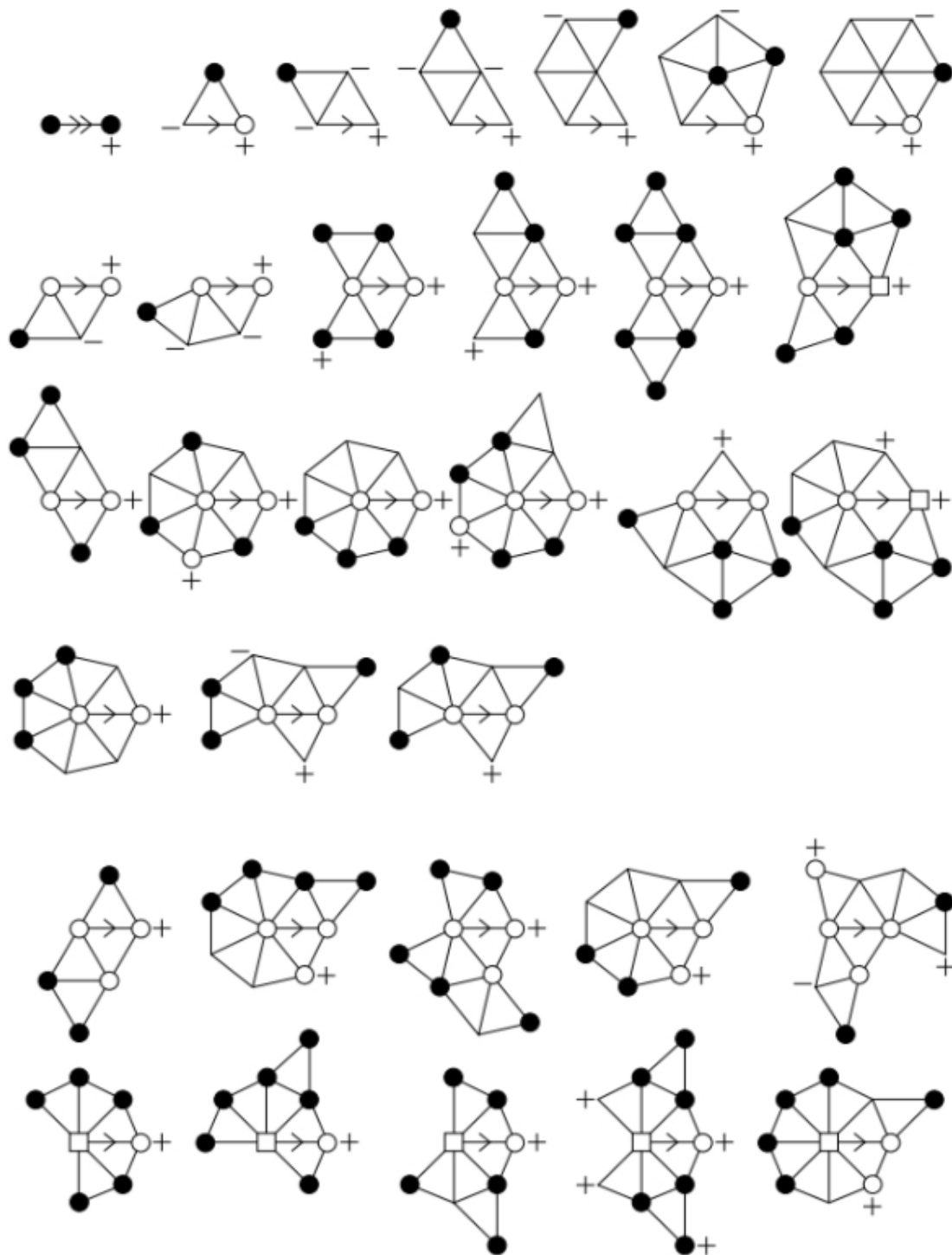


Figura 5.19: Le 32 regole di Robertson et al.

Definiamo ora la *carica* di un vertice.

Definizione 5.17. Dato un vertice v di una triangolazione T , definiamo la sua **carica** come

$$\Theta_T(v) = 10(6 - \deg_T(v)) + \sum_{\substack{P \text{ contenuti in } T \\ t(P)=v}} r(P) - \sum_{\substack{P \text{ contenuti in } T \\ s(P)=v}} r(P)$$

dove tutti i P sono passaggi.

La carica $\Theta_T(v)$ dipende soltanto dal vicinato di v in T , poiché nel primo termine $\deg_T(v)$ dipende dai vertici adiacenti a v , che fanno parte del suo vicinato, e il secondo e terzo termine dipendono dai passaggi in cui v è pozzo o sorgente. Ogni passaggio fa interamente parte del vicinato del proprio pozzo e della propria sorgente, come è facile verificare direttamente dall'elenco delle 32 regole presentate nella Figura 5.19.

Lemma 5.5. Per ogni triangolazione T , $\sum_{v \in V(T)} \Theta_T(v) = 120$.

Perciò, esiste un vertice v di T tale che $\Theta_T(v) > 0$.

Dimostrazione. Nelle sommatorie V sta per $V(T)$ e per P si intendono tutti i passi P contenuti in T .

$$\sum_{v \in V} \Theta_T(v) = \sum_{v \in V} \left[10(6 - \deg_T(v)) + \sum_P r(P) \cdot \delta_{t(P),v} - \sum_P r(P) \cdot \delta_{s(P),v} \right],$$

dove $\delta_{t(P),v}$ e $\delta_{s(P),v}$ sono funzioni indicatrici che valgono 1 se $t(P) = v$ o $s(P) = v$, rispettivamente, e 0 altrimenti.

Per linearità, possiamo calcolare la sommatoria sui tre termini separatamente:

$$\sum_{v \in V} \Theta_T(v) = \sum_{v \in V} 10(6 - \deg_T(v)) + \sum_{v \in V} \sum_P r(P) \cdot \delta_{t(P),v} - \sum_{v \in V} \sum_P r(P) \cdot \delta_{s(P),v}.$$

Consideriamo singolarmente il primo termine: $\sum_{v \in V} 10(6 - \deg_T(v))$.

Come per ogni grafo, anche T soddisfa:

$$\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2|E|,$$

dove $E = E(T)$ è l'insieme degli archi di T .

Inoltre, poiché T è una triangolazione, e quindi un grafo planare massimale, sappiamo che:

$$|E| = 3|V| - 6.$$

Quindi:

$$\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2(3|V| - 6) = 6|V| - 12.$$

Pertanto avremo che

$$\sum_{v \in V} 10(6 - \deg_T(v)) = 10 \left(6|V| - \sum_{v \in V} \deg_T(v) \right) = 10 \left(6|V| - (6|V| - 12) \right) = 10 \cdot 12 = 120.$$

Per quanto riguarda invece secondo e terzo termine, è sufficiente notare che se P è un passo contenuto in T , allora esisteranno necessariamente sia un vertice $u \in V(T)$ tale che $t(P) = u$, sia un vertice $v \in V(T)$ tale che $s(P) = v$.

Sommando quindi su tutti i vertici in $V(T)$ i due termini si cancellano:

$$\sum_{v \in V} \sum_P r(P) \cdot \delta_{t(P),v} - \sum_{v \in V} \sum_P r(P) \cdot \delta_{s(P),v} = 0.$$

Quindi risulta

$$\sum_{v \in V} \Theta_T(v) = 120 + 0 = 120.$$

Perciò, la somma totale delle cariche dei vertici in una triangolazione T è pari a 120 e di conseguenza esiste almeno un vertice v di T tale che $\Theta_T(v) > 0$. \square

A questo punto, per dimostrare il Teorema 3 è sufficiente dimostrare invece il Teorema seguente.

Teorema 4. Se v è un vertice di una triangolazione T 6-connessa internamente con $\Theta_T(v) > 0$, allora è presente una buona configurazione contenuta in T nel vicinato di v .

Chiamiamo C_1, C_2, \dots, C_{17} le 17 configurazioni raffigurate nella Figura 5.13 e suddividiamo il Teorema 4 in due casi.

Teorema 4(a). Se v è un vertice di una triangolazione T 6-connessa internamente con $\Theta_T(v) > 0$ e $\deg_T(v) \geq 12$ oppure $\deg_T(v) \leq 6$, allora è presente una buona configurazione contenuta in T isomorfa a una tra C_1, \dots, C_{17} nel vicinato di v .

Dimostrazione (accenno). Consideriamo il caso in cui $\Theta_T(v) > 0$ e $\deg_T(v) \geq 12$ e supponiamo per assurdo che non sia presente una tale configurazione nel vicinato di v . Poniamo per comodità $\deg_T(v) = d$ e chiamiamo D l'insieme di tutti i vertici adiacenti a v .

Per ogni $u \in D$ definiamo

$$R(u) = \sum_{\substack{P \text{ contenuti in } T \\ \text{con sorgente } u \text{ e pozzo } v}} r(P).$$

Si dimostra tramite un'analisi di tutti i casi possibili che $R(u) \leq 5$ per ogni $u \in D$.

Sappiamo infatti che $\gamma_K(u) \in \{5, 6, 7, 8\}$ per ogni passaggio P con configurazione K .

Numeriamo le 32 regole rappresentate nella Figura 5.19 con $i = 1, \dots, 32$, nell'ordine in cui compaiono, sia R_i la somma di $r(P)$ su tutti i passaggi P in T con sorgente u e pozzo v che rispettano la regola i .

Chiamiamo $R = R(u) = R_1 + \dots + R_{32}$ e vogliamo dimostrare quindi che $R \leq 5$.

Consideriamo separatamente i 4 casi:

- $\gamma_K(u) = 5$.

Le uniche regole compatibili sono le prime 3, perciò $R = R_1 + R_2 + R_3$.

Abbiamo $R_1 = 2$, ma siccome non compare la configurazione C_1 , è impossibile da un punto di vista geometrico che $R_2 = R_3 = 2$, uno dei due valori deve essere minore.

Perciò $R \leq 5$.

- $\gamma_K(u) = 6$.

Le regole compatibili sono le regole $2, \dots, 7$, quindi $R = R_2 + \dots + R_7$.

Abbiamo necessariamente, per geometria, $R_3 + R_5 + R_6 \leq 2$, $R_2 + R_7 \leq 2$ e $R_4 \leq 2$.

Se per assurdo valesse l'uguaglianza a ogni termine, avremmo $R_4 = 2$ e di conseguenza $R_7 = 0$. Inoltre $R_2 \leq 1$ poiché le configurazioni C_3 , C_6 e C_9 non compaiono.

Di conseguenza $R_2 + R_7 \leq 1$ e vale $R \leq 5$.

- $\gamma_K(u) = 8$.

In questo caso $R = R_{28} + \dots + R_{32}$.

Abbiamo chiaramente $R_{30}, R_{31}, R_{32} \leq 1$ e se uno dei 3 valori è 1 gli altri due sono 0.

Vale anche $R_{28}, R_{29} \leq 1$, poiché non compare la configurazione C_{17} , perciò $R \leq 3$.

- $\gamma_K(u) = 7$.

Questo è il caso più complicato, ma sfrutta sostanzialmente gli stessi metodi, per una sua trattazione completa rimandiamo a [9].

Di conseguenza avremo $\sum_{u \in D} R(u) \leq 5d$ e quindi

$$\Theta_T(v) \leq 10(6 - d) + \sum_{u \in D} R(u) \leq 10(6 - d) + 5d = 60 - 5d \leq 0$$

poiché $d \geq 12$ per ipotesi, abbiamo quindi una contraddizione con $\Theta_T(v) > 0$.

Il caso in cui $\deg_T(v) \leq 6$ è, di nuovo, un'analisi caso per caso. □

A questo punto, per dimostrare il Teorema 4, e di conseguenza il Teorema 3, rimane da provare soltanto il Teorema seguente.

Teorema 4(b). Se v è un vertice di una triangolazione T 6-connessa internamente con $\Theta_T(v) > 0$ e $\deg_T(v) \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$, allora è presente una buona configurazione contenuta in T nel vicinato di v .

La dimostrazione del Teorema 4(b) è molto più complicata e lunga di quella precedente, in totale consiste di circa 13.000 righe, quindi ovviamente non è possibile riportarla né verificare la sua esattezza senza l'ausilio di un computer.

Per questo motivo, Robertson et al. si sono serviti di un computer per accertare la validità della dimostrazione, ma è possibile anche affidare direttamente lo studio dei casi, che sono in numero finito, a un programma apposito.

In conclusione, avendo dimostrato i Teoremi 1, 2 e 3, abbiamo che:

- ogni minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori (se esiste) è necessariamente una triangolazione 6-connessa internamente
- un minimo controesempio al Teorema dei Quattro Colori non può contenere una buona configurazione

- ogni triangolazione 6-connessa internamente contiene una buona configurazione.

Chiaramente, siamo giunti a una contraddizione, perciò non può esistere un controesempio al Teorema dei Quattro Colori: ogni grafo semplice planare è 4-colorabile.

Capitolo 6

Conclusioni

Il Teorema dei Quattro Colori rappresenta forse uno degli esempi più significativi di quanto, nel mondo della matematica, anche un problema con una formulazione apparentemente molto semplice possa richiedere anni di ricerche, se non secoli, e favorire addirittura lo sviluppo di nuovi campi della matematica.

Nel corso della tesi abbiamo presentato il Teorema da un duplice punto di vista: storico e matematico.

Ne abbiamo ripercorso la storia, partendo dalla formulazione della Congettura da parte di Guthrie nel 1952, passando per le dimostrazioni fallite, gli sviluppi successivi e i risultati parziali, fino a giungere alla dimostrazione di Appel e Haken nel 1976 e a quella di Robertson et al. nel 1996. Risulta quindi evidente quanto il Teorema dei Quattro Colori si sia rivelato longevo e quanti contributi si siano resi necessari per giungere finalmente a una dimostrazione, con il coinvolgimento di una grande quantità di matematici, anche molto illustri.

Analizzando invece la parte matematica del Teorema e delle sue dimostrazioni abbiamo evidenziato quanto esso abbia favorito lo sviluppo non soltanto di una nuova branca della matematica, la Teoria dei grafi, ma anche di nuovi concetti, come la riducibilità e l'inevitabilità delle configurazioni, e di nuove tecniche, come ad esempio quella delle catene di Kempe, che nonostante sia stata presentata per la prima volta in una dimostrazione errata si è poi rivelata fondamentale in quasi ogni sviluppo successivo, o quella della scarica dei grafi.

Inoltre, la dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori ha richiesto non soltanto un grande contributo da un punto di vista matematico, ma anche un coinvolgimento di più discipline, che fino ad allora non erano considerate strettamente correlate: matematica, informatica e programmazione.

La dimostrazione di Appel e Haken, nonostante le controversie scatenate, ha quindi rappresentato un momento storico nel mondo della matematica e ha sancito l'inizio di una nuova epoca: quella delle dimostrazioni assistite da computer.

Il Teorema è ormai stato dimostrato e non offre molti spunti per sviluppi futuri, se non

forse nella ricerca di insiemi più piccoli di buone configurazioni e di regole di scarica, in quanto una dimostrazione che non faccia uso di computer appare molto improbabile. Tuttavia, la colorazione dei grafi rimane invece un ambito di ricerca molto attivo, anche per quanto riguarda concetti correlati al Teorema dei Quattro Colori, come ad esempio lo studio dei polinomi cromatici e delle loro applicazioni, oppure la ricerca di una dimostrazione alla *Congettura di Hadwiger*, una generalizzazione del Teorema dei Quattro Colori che rappresenta forse uno dei più grandi problemi irrisolti della Teoria dei grafi.

In conclusione, l'importanza del Teorema dei Quattro colori non è soltanto nel risultato in sé, ma anche nell'aver evidenziato ancora una volta quanto la matematica possa essere interdisciplinare e strettamente correlata ad ogni altro campo nel mondo della scienza, in continua evoluzione e volta a una comprensione sempre più profonda del mondo che ci circonda.

Bibliografia

- [1] Kenneth Appel e Wolfgang Haken. *Every planar map is four colorable*. Contemporary Mathematics 98. Providence, American Mathematical Society, 1989.
- [2] David Barnette. *Map Coloring, Polyhedra and the Four-Color Problem*. The Dolciani Mathematical Expositions No. 8. The Mathematical Association of America, 1983.
- [3] George D. Birkhoff. «The Reducibility of Maps». In: *American Journal of Mathematics*. Vol. 35.2. The Johns Hopkins University Press, 1913. URL: <https://www.jstor.org/stable/2370276>.
- [4] Heinrich Heesch. *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem*. Vol. B.I.-Hochschulschriften, 810/810a/810b. Bibliographisches Institut, 1969.
- [5] Alfred Bray Kempe. «On the Geographical Problem of the Four Colours». In: *American Journal of Mathematics* 2.3 (set. 1879), pp. 193–200. URL: <https://www.jstor.org/stable/2369235>.
- [6] Sean Evans Nanjwenge. «The Four Colour Theorem». Linnaeus University, 2018.
- [7] Gerhard Ringel. *Map Color Theorem*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974.
- [8] Neil Robertson et al. «A new proof of the Four-Colour Theorem». In: *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society* 2.1 (ago. 1996).
- [9] Neil Robertson et al. «The Four-Colour Theorem». In: *Journal of Combinatorial Theory*. B 70.2-44 (1997). A cura di Academic Press.
- [10] Thomas L. Saaty e Paul C. Kainen. *The Four-Color Problem*. McGraw-Hill, 1977.
- [11] Shai Simonson. *Mathematical Experiments in Computer Science. Lab 4*. URL: <https://sites.google.com/site/shaisimonson/professional-page/mathexp/lab4>.
- [12] John P. Steinberger. «An unavoidable set of D-reducible configurations». In: *Transactions of the American Mathematical Society*. Vol. 362.12. American Mathematical Society, 2010, pp. 6633–6661. URL: <https://www.jstor.org/stable/40997219>.
- [13] Robin Thomas. *The Four Color Theorem*. Nov. 1995. URL: <https://thomas.math.gatech.edu/FC/fourcolor.html>.

- [14] Robin Thomas. *Unavoidable set*. URL: <https://thomas.math.gatech.edu/OLDFTP/fcdir/unavoidable.pdf>.
- [15] Patrick Turner. «The Four Color Theorem». Honors Program Seniors Projects, 299. Western Washington University, 2012.