

Invarianti di nodi e algebre di Hopf

Introduzione alle algebre di Hopf e all'equazione di
Yang-Baxter applicate alla teoria dei nodi

Laureando: **Lorenzo DARIO** Matr.: **1185159**

Relatore: Prof. **Francesco ESPOSITO**



Tesi presentata per il titolo di
Dottore Magistrale in Matematica

Dipartimento di Matematica
Università degli studi di Padova

25/02/2021

Indice

1	Nodi, trecce e l'equazione di Yang-Baxter	7
1.1	Nodi, links e proiezioni	7
1.2	Isotopie ambiente e nodi equivalenti	9
1.3	Il Gruppo delle Trecce di Artin	11
1.4	L'equazione di Yang-Baxter	16
1.5	Categorie monoidali	19
2	Algebre di Hopf quasitriangolari	22
2.1	Algebre di Hopf	22
2.1.1	Algebre	22
2.1.2	Coalgebre	25
2.1.3	Bialgebre	27
2.1.4	Algebre di Hopf	32
2.2	Algebre di Hopf quasitriangolari	36
2.3	Il Quantum Double di Drinfeld	39
3	Algebre universali involuanti quantizzate	48
3.1	La definizione di quantizzazione	48
3.1.1	Deformare un'algebra di Hopf	49
3.1.2	Coalgebre di Hopf-Poisson	51
3.1.3	Quantizzazione	56
3.2	La quantizzazione di $U(\mathfrak{sl}_2)$	58
3.2.1	Costruzione di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$	59
3.2.2	Struttura quasitriangolare di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$	64
3.2.3	R -matrice universale	72
3.3	Operatori di Yang-Baxter quantistici	74
4	Invarianti polinomiali di nodi	77
4.1	Il polinomio di Jones	78
4.2	Il Bracket Polynomial	81
4.3	Invarianti dagli operatori di Yang-Baxter	86
4.4	Il polinomio HOMFLY	90
4.5	Il polinomio di Kauffman	95

4.6	Modelli di stati per la teoria dei nodi	100
4.6.1	Step 1: $J_S(L)$ in termini di stati per proiezioni orientate che sono chiusura di trecce	101
4.6.2	Step 2: $J_S(L)$ in termini di stati per proiezioni orientate qualsiasi	104
4.6.3	Step 3: $J_S(L)$ in termini di stati per proiezioni non orientate qualsiasi	115
4.6.4	Step 4: dimostrazione del teorema 4.5.4	121

Introduzione

La teoria dei nodi nasce con lo scopo di *classificare i nodi a meno di equivalenza*, ovverosia, in parole povere, “stilare un grande elenco” in cui vengono riportati tutti i possibili tipi di nodi. Nella figura 1, che si trova alla fine dell’introduzione, ne sono elencati alcuni, a puro titolo esemplificativo. In matematica il problema della classificazione degli oggetti è strettamente correlato alla ricerca degli *invarianti*, in questo caso specifico si parla di *invarianti di nodi*. Lo scopo di questa tesi è quello di andare ad illustrarne alcuni: nello specifico noi ci focalizzeremo soprattutto sugli invarianti polinomiali derivanti dalle algebre di Hopf e dall’equazione di Yang-Baxter.

Nel capitolo 1 andremo a porre le basi. Nella sezione 1.1 formalizzeremo i concetti di *nodo* e di *link*, e nella sezione 1.2 daremo la definizione di *nodii equivalenti*. Nella sezione 1.3, invece introdurremo il concetto di *trecce*, uno strumento molto utile nello studio dei nodi. Le trecce, a differenza dei nodi, formano un gruppo, che nella letteratura prende il nome di *gruppo delle trecce di Artin*, e viene denotato col simbolo \mathcal{B}_m . Alla fine della sezione vedremo che le chiusure di trecce producono dei nodi, e che è possibile produrre degli invarianti di nodi partendo dal gruppo delle trecce. Un’idea per produrre tali invarianti, è quella di andare a rappresentare il gruppo delle trecce, mediante una mappa $\rho : \mathcal{B}_m \rightarrow \text{End}(V^{\otimes m})$. Le rappresentazioni di trecce saranno discusse nella sezione 1.4 dove vedremo che, per costruirle, avremo bisogno di endomorfismi $I \in \text{End}(V \otimes V)$ che risolvono l’*equazione di Yang-Baxter*:

$$(I \otimes \text{id})(\text{id} \otimes I)(I \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes I)(I \otimes \text{id})(\text{id} \otimes I),$$

che può essere sintetizzata in

$$I_{12}I_{23}I_{12} = I_{23}I_{12}I_{23},$$

dove $I_{12} = (I \otimes \text{id})$, e $I_{23} = (\text{id} \otimes I)$. Gli operatori che risolvono quest’equazione sono detti *operatori di Yang-Baxter*. Le rappresentazioni di trecce ci permetteranno di produrre un invariante di nodi molto generale, che verrà illustrato più avanti, nella sezione 4.3. In ultimo nella sezione 1.5 faremo

una piccola digressione sulle *categorie monoidali*, dal momento che, nel linguaggio categoriale, le trecce formano la categoria monoidale **braid**.

I capitoli 2 e 3 avranno come scopo finale la costruzione di operatori di Yang-Baxter. Questi infatti, possono essere ricavati dalle *algebre di Hopf quasitriangolari*, a cui dedicheremo tutto il capitolo 2. Nella sezione 2.1 introdurremo il concetto di *algebra di Hopf*. I casi più interessanti di algebre di Hopf, sono quelli in cui l'algebra in questione non è nè commutativa, nè cocommutativa. Le algebre di Hopf che ci interessano sono dette *quasitriangolari* o *intrecciate*, e verranno discusse nella sezione 2.2. Queste particolari algebre di Hopf sono *quasicocommutative*, e contengono sempre un elemento $\mathcal{R} \in A \otimes A$, detto *R-matrice universale*, che risolve l'*equazione di Yang-Baxter quantistica* data da:

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}.$$

Attraverso una rappresentazione di algebre di Hopf $\rho : A \rightarrow \text{End}(V)$ è quindi possibile ottenere un operatore $R \in \text{End}(V \otimes V)$, dato dalla rappresentazione di \mathcal{R} , che risolve l'equazione di Yang-Baxter quantistica

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Componendo un tale operatore, con il morfismo di scambio σ , si ottiene l'operatore $I = \sigma \circ R$ che risolve l'equazione di Yang-Baxter. Infine nella sezione 2.3, mediante una costruzione chiamata *quantum double*, vedremo un metodo molto generale per ottenere delle algebre di Hopf quasitriangolari.

Nel capitolo 3 andremo a studiare una famiglia specifica di algebre di Hopf quasitriangolari: le *algebre universali involuportanti quantizzate*. Nella sezione 3.1 andremo a dare la definizione di *quantizzazione*, e nella sezione 3.2 andremo ad applicarla all'algebra universale involuportante $U(\mathfrak{sl}_2)$. In questa sezione faremo vedere che l'algebra universale involuportante quantizzata $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ è quasitriangolare, perchè è "quasi" isomorfa ad un quantum double opportunamente costruito. Alla fine della sezione vedremo anche la sua *R-matrice universale*, da cui otterremo un operatore di Yang-Baxter. Nella sezione 3.3 andremo a generalizzare i risultati ottenuti nella sezione precedente: vedremo che ogni algebra universale involuportante quantizzata $U_h(\mathfrak{g})$ è quasitriangolare, perchè isomorfa ad un quantum double opportunamente costruito, e daremo un elenco di operatori di Yang-Baxter che si possono ottenere dalle *R-matrici universali* di $U_h(\mathfrak{g})$ quando \mathfrak{g} è un'algebra di Lie del tipo A_n , B_n , C_n o D_n .

Nel capitolo 4 sfrutteremo i risultati ottenuti nei capitoli precedenti per andare a produrre degli invarianti di nodi. Le sezioni 4.1 e 4.2 sono di carattere introduttivo, e servono per illustrare come i polinomi vengono utilizzati

nella pratica come invarianti di nodi. In queste due sezioni prenderemo in esame rispettivamente il *polinomio di Jones*, e il *Bracket Polynomial* di Louis Kauffman. La sezione 4.3 è il cuore del capitolo 4: qui infatti andremo a definire un invariante di nodi molto generale, che sfrutta le rappresentazioni di trecce e gli operatori di Yang-Baxter. Lo denoteremo con $J_S(L)$. Nelle sezioni rimanenti non faremo altro che produrre invarianti di nodi sostituendo dentro a $J_S(L)$ gli operatori di Yang-Baxter ottenuti nel capitolo precedente. La sezione 4.4 è dedicata alla costruzione del *polinomio HOMFLY*: esso può essere ricavato sostituendo dentro a $J_S(L)$ gli operatori di Yang-Baxter relativi alle algebre di Lie del tipo A_n . Nella sezione 4.5 andremo a studiare il *polinomio di Kauffman*: questo può essere ricavato sostituendo dentro a $J_S(L)$ gli operatori di Yang-Baxter relativi alle algebre di Lie di tipo B_n , C_n e D_n . La costruzione del polinomio di Kauffman è ben più complicata rispetto a quella dell'HOMFLY, e l'approccio proposto da Turaev fa uso di *modelli di stati*, derivanti dalla fisica e adattati alla teoria dei nodi. La sezione 4.6 è dedicata alla costruzione di tali modelli, e si concluderà con la dimostrazione dell'esistenza del polinomio di Kauffman.

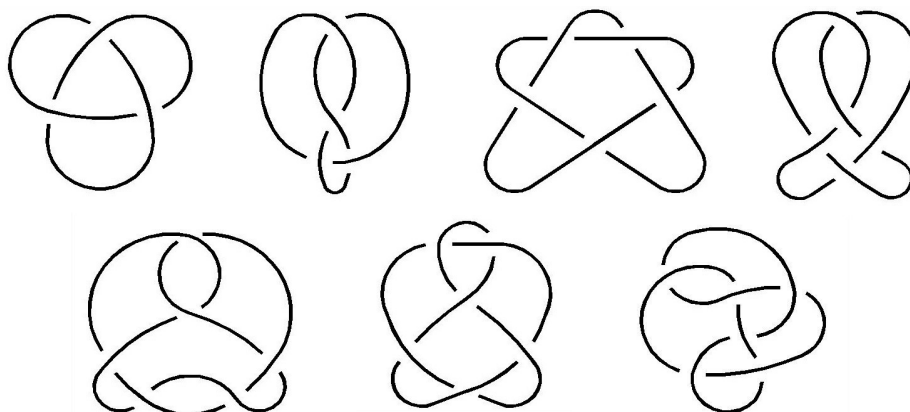


Figura 1: Alcuni esempi di nodi.

Capitolo 1

Nodi, trecce e l'equazione di Yang-Baxter

1.1 Nodi, links e proiezioni

Iniziamo con le nozioni basilari che costituiscono la teoria dei nodi, partendo proprio dalla definizione di nodo: intuitivamente, un nodo è una curva “annodata e chiusa” immersa nello spazio \mathbb{R}^3 , come riportato nella figura 1.1. Formalmente:

Definizione 1.1.1. *Un **nodo** è una varietà 1-dimensionale $K \subseteq \mathbb{R}^3$ liscia omeomorfa ad S^1 . Il diffeomorfismo verrà denotato con $f : S^1 \rightarrow K \subseteq \mathbb{R}^3$.*

Definizione 1.1.2. *Un **link** con m componenti è una varietà 1-dimensionale $K \subseteq \mathbb{R}^3$ liscia omeomorfa all'unione disgiunta di $m \geq 2$ cerchi.*

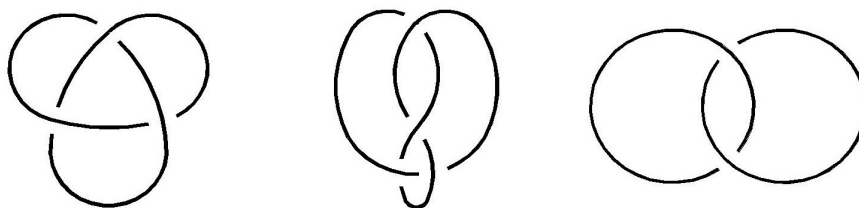


Figura 1.1: In figura sono rappresentati, da sinistra a destra, il nodo trifoglio, il nodo ad otto e il link di Hopf.

Nel seguito useremo il termine “nodi” anche quando ci riferiremo ai links, a meno che il contesto non ci obblighi a fare diversamente, e in ambo i casi useremo la lettera K per denotarli. Una prima domanda che ci si può porre è perchè i nodi siano definiti come sottospazio di \mathbb{R}^3 , e non di \mathbb{R}^n . Il motivo è indicato nel seguente teorema che non dimostreremo:

Teorema 1.1.3. *Se $n \neq 3$, allora ogni sottospazio 1-dimensionale connesso $K \in \mathbb{R}^n$ è equivalente al nodo banale.*

È bene osservare che non lavoreremo propriamente con dei nodi, ma con le loro *proiezioni*. Il concetto di proiezione è molto intuitivo, si tratta di una rappresentazione 2-dimensionale in cui si capisce chiaramente quale corda “passa sopra”, e quale invece “passa sotto”. Formalmente:

Definizione 1.1.4. *Una **proiezione quasi-regolare piana** di un nodo (link) K è l'immagine di una mappa $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ iniettiva ovunque, eccetto in un numero finito di punti, i quali sono immagine di soltanto due punti non collineari di K . Tali punti sono detti **incroci**.*

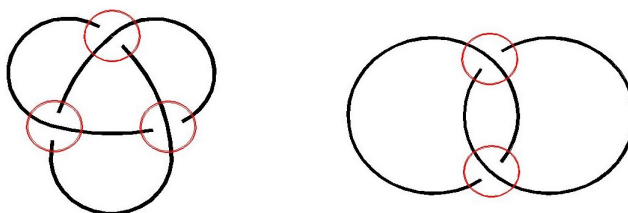


Figura 1.2: Il nodo trifoglio ha tre incroci, il link di Hopf invece ne ha due.

Nel seguito faremo distinzione tra le proiezioni *orientate* e quelle *non orientate* (il senso in cui lo intendiamo è chiaro: bisogna scegliere un verso di percorrenza su ogni componente della proiezione). Useremo le lettere L e D per indicare rispettivamente le proiezioni orientate e non orientate.

Osservazione 1.1.5. *Nel seguito supporremo anche che tutti le proiezioni che incontreremo abbiano un numero finito di incroci. I nodi (links) che definiscono proiezioni di questo tipo sono detti addomesticati o domestici. I nodi che definiscono proiezioni con un numero infinito di incroci, come per esempio quello in figura 1.3, sono invece detti selvaggi.*

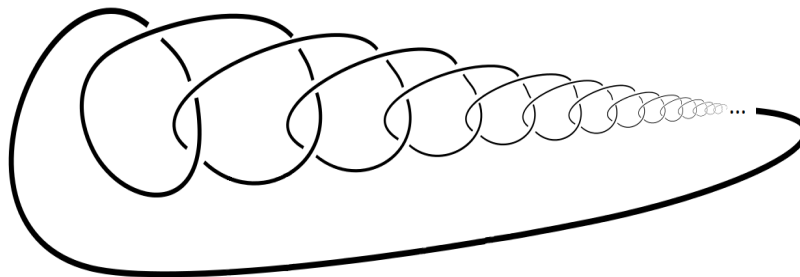


Figura 1.3: Un nodo selvaggio si annoda infinite volte su sè stesso.

Una definizione formale può essere la seguente: un nodo K , con omeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow K \subseteq \mathbb{R}^3$, è detto **addomesticato** se esiste un'estensione di f ad omeomorfismo del toro solido $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \tilde{K} \subseteq \mathbb{R}^3$, tale che \tilde{K} sia interamente contenuta dentro ad una palla di raggio finito.

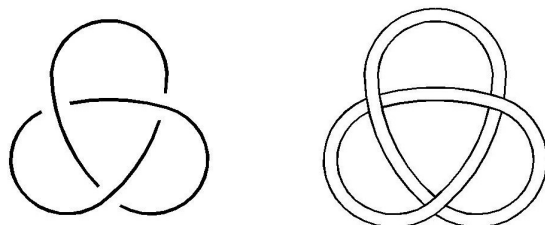


Figura 1.4: Intuitivamente un nodo è detto addomesticato se la curva 1-dimensionale che funge da corda può essere inspessita: il cerchio 1-dimensionale \mathbb{S}^1 viene sostituito dal toro solido $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$.

Equivalentemente: un nodo è addomesticato se e solo se può essere rappresentato mediante una poligonale chiusa che ha un numero finito di lati. Un esempio è riportato in figura 1.5.

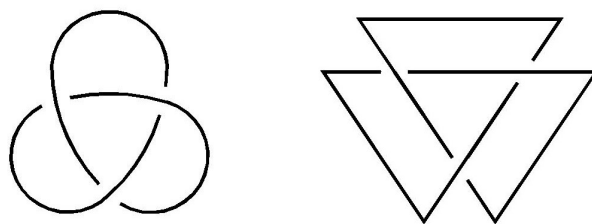


Figura 1.5: Il nodo trifoglio è un esempio di nodo addomesticato, perchè può essere rappresentato mediante una poligonale chiusa finita.

Nel seguito i nodi saranno sempre supposti addomesticati.

1.2 Isotopie ambiente e nodi equivalenti

Vediamo ora di introdurre la nozione di *equivalenza di nodi*. Intuitivamente, due nodi sono detti *equivalenti* se si può passare da uno dall'altro senza dover strappare la corda, come accade per esempio in figura 1.6. I links riportati in figura 1.7 invece non sono equivalenti, perchè, sempre intuitivamente, l'unico modo di passare dall'uno all'altro senza strappi o tagli, è quello di fondere le due corde assieme, e fare in modo che queste “si attraversino a vicenda”.

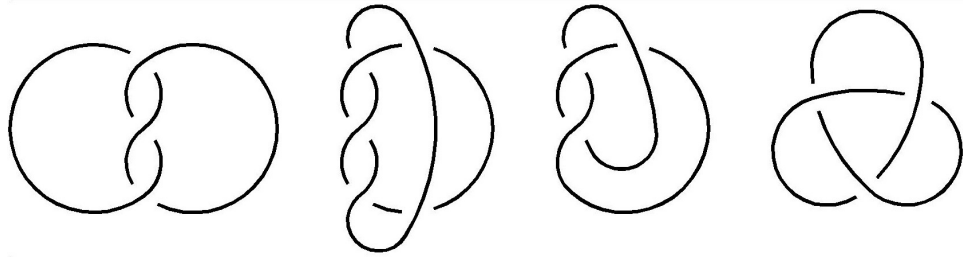


Figura 1.6: Proiezioni equivalenti del nodo trifoglio. La figura mostra come si possa passare da una proiezione all'altra senza bisogno di tagliare le corde.

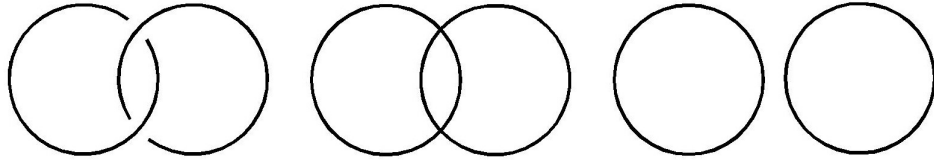


Figura 1.7: Intuitivamente, questi links non possono essere equivalenti: l'unico modo di passare dall'uno all'altro senza strappi è quello di fondere le due corde, e poi far sì che si "attraversino a vicenda".

Vediamo ora di formalizzare questi concetti intuitivi, introducendo il concetto di *isotopia ambiente*.

Definizione 1.2.1. Date due funzioni tra spazi topologici $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ tali che $X \simeq f_1(X)$ e $X \simeq f_2(X)$, un'**isotopia ambiente** tra f_1 e f_2 è una mappa continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che:

- $H(-, 0) = \text{id}_Y$;
- Per ogni $t \in [0, 1]$, $H(-, t)$ è un omeomorfismo di Y in sè;
- $H(-, 1) \circ f_1 = f_2$.

La condizione aggiuntiva $H(-, t)$ omeomorfismo per ogni t , ci assicura che, nel caso dei nodi (links), le corde non possano "attraversarsi a vicenda".

Definizione 1.2.2. Due nodi (links) K_1 e K_2 , con rispettivi omeomorfismi $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sono detti **equivalenti** se esiste un'*isotopia ambiente* di \mathbb{R}^3 in sè, che manda f_1 in f_2 . Due proiezioni si dicono **equivalenti** se definiscono nodi (links) equivalenti.

Ora che abbiamo dato le definizioni formali, vediamo di semplificare le cose. Il prossimo teorema è dovuto a Reidemeister, e ci fornisce un metodo estremamente semplice per caratterizzare le equivalenze tra nodi (links).

Teorema 1.2.3 (Reidemeister). *Due proiezioni definiscono nodi (links) equivalenti se e solo se possono essere ottenute l'una partendo dall'altra mediante una sequenza di isotopie planari e mosse di Reidemeister:*



Figura 1.8: Reidemeister I.

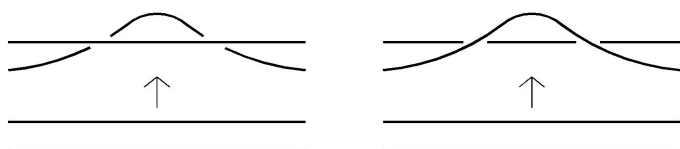


Figura 1.9: Reidemeister II.

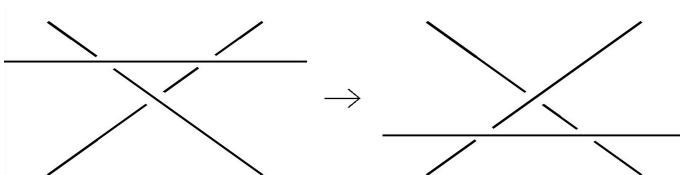


Figura 1.10: Reidemeister III.

A questo punto si potrebbe pensare che classificare i nodi sia qualcosa di estremamente semplice, ma sfortunatamente, nonostante le semplificazioni, non è così. In matematica la classificazione degli oggetti è strettamente correlata alla ricerca di *invarianti*. Questa tesi si propone proprio lo scopo di illustrarne alcuni. Noi ci focalizzeremo in particolare sugli invarianti di nodi polinomiali derivanti dalle algebre di Hopf e dagli operatori di Yang-Baxter.

1.3 Il Gruppo delle Trece di Artin

Vediamo ora la definizione di treccia. Per poterla definire dobbiamo innanzitutto scegliere un piano $P^0 \subseteq \mathbb{R}^3$, e un numero finito di punti $p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0$ che giacciono in P^0 . Denotiamo poi con $P^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ il piano che si trova a distanza 1 da P^0 , e in generale indichiamo con $P^s = \mathbb{R}^2 \times \{s\}$ il piano che si trova a distanza s da P^0 . Scegliamo i punti $p_1^1, p_2^1, \dots, p_m^1$ su P^1 in modo che ciascun p_i^1 sia la proiezione ortogonale di p_i^0 su P^1 , come in figura 1.11.

Definizione 1.3.1. Una **treccia con m fili** è data dall'unione disgiunta di m curve lisce incluse in X , ciascuna delle quali connette un punto $p_i^0 \in P^0$ con un punto $p_j^1 \in P^1$, e tali che ogni piano $P^s \subseteq X$ tagli ogni filo in uno ed un solo punto.

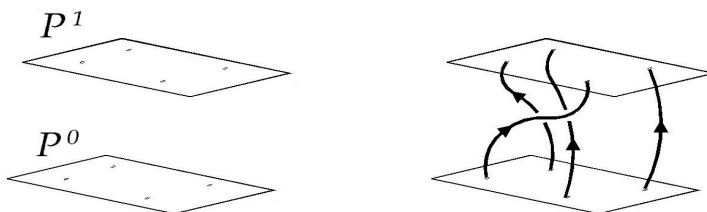


Figura 1.11: Una treccia in \mathbb{R}^3 .

Anche in questo caso non lavoreremo con trecce, ma con le loro **proiezioni**. Per proiettare una treccia dobbiamo scegliere un piano di proiezione Q che sia perpendicolare a P^0 e P^1 , in modo che non ci siano sovrapposizioni tra i punti $p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0$, e nemmeno tra i punti $p_1^1, p_2^1, \dots, p_m^1$. Il resto è analogo alle proiezioni nodi: sono iniettive quasi ovunque, eccetto in un numero finito di punti, che chiameremo **incroci**.

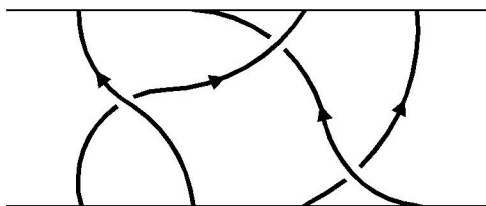


Figura 1.12: La proiezione di una treccia.

Definizione 1.3.2. Due trecce β_1 e β_2 sono detti **equivalenti** se esiste un'isotopia ambiente di X in sè, che manda ogni piano $P^s \subseteq X$ in sè stesso, tiene fissi i punti $p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0$, e $p_1^1, p_2^1, \dots, p_m^1$, e manda β_1 in β_2 . Due proiezioni di trecce sono dette **equivalenti**, se definiscono trecce equivalenti.

Osservazione 1.3.3. Il motivo che rende le trecce così interessanti, è che queste formano un gruppo. Si noti infatti che, quando due trecce β e β' hanno lo stesso numero di fili, la loro composizione è a sua volta una treccia, come si può vedere dalla figura 1.13. La treccia identica è la treccia che “non si intreccia”, come mostrato in figura 1.14, mentre l'inverso di una treccia si ottiene mediante una riflessione rispetto al piano $P^{1/2}$, come mostrato in figura 1.15. Il gruppo formato dalle trecce con m fili verrà denotato col simbolo \mathcal{B}_m . La cosa forse più interessante di \mathcal{B}_m , è che questo è finitamente generato: i suoi generatori sono fatti come in figura 1.16, sono detti **incroci elementari**, e verranno denotati con T_1, T_2, \dots, T_{m-1} .

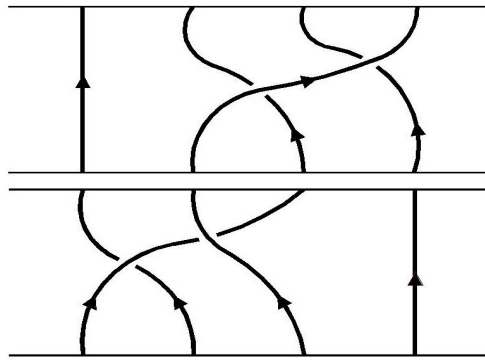


Figura 1.13: Componendo due trecce β e β' con lo stesso numero m di fili, otteniamo ancora una treccia con m fili.

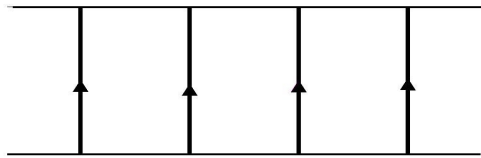


Figura 1.14: L'elemento identico: componendo qualsiasi treccia β con quella in figura, si ottiene β .

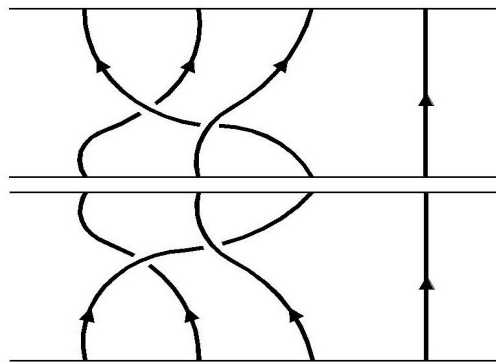


Figura 1.15: Componendo due trecce si ottiene la treccia identica.

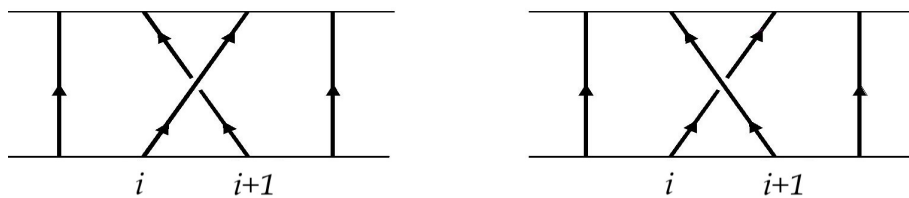


Figura 1.16: A sinistra gli incroci elementari nella forma T_i , a destra T_i^{-1} .

Esempio 1.3.4. La treccia in figura 1.17 appartiene a \mathcal{B}_4 , e scritta algebricamente diventa $\beta = T_3^{-1}T_1^{-1}T_2$.

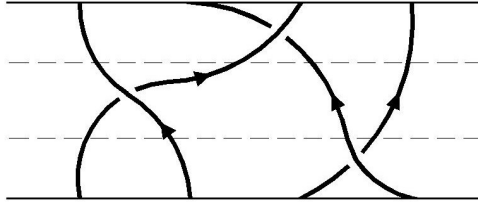


Figura 1.17: Una treccia decomposta in incroci elementari.

Teorema 1.3.5 (Artin). Si fissi un intero $m \geq 3$, il gruppo delle trecce \mathcal{B}_m può essere presentato come il gruppo generato da T_1, T_2, \dots, T_{m-1} in cui sono soddisfatte le relazioni:

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \quad (1.1)$$

$$T_i T_j = T_j T_i \text{ se } |i - j| > 1. \quad (1.2)$$

Quando $m = 2$, \mathcal{B}_2 è isomorfo al gruppo libero generato da T_1 . È utile inoltre porre $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 = 1$.

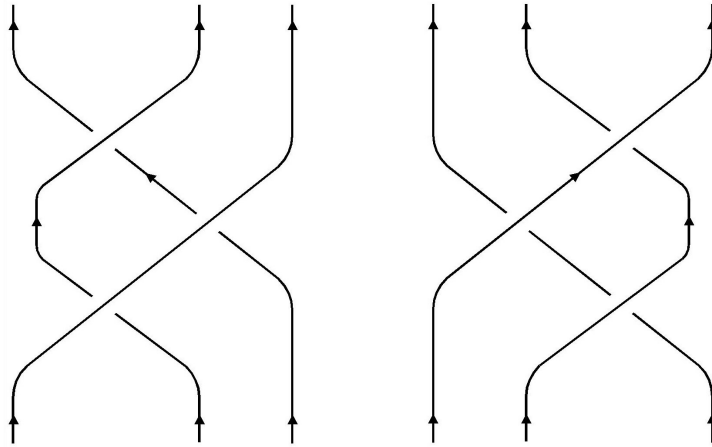


Figura 1.18: Rappresentazione grafica della relazione $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$.

Vediamo ora di connettere il concetto di treccia con quello di nodi (links):

Definizione 1.3.6. Data una treccia β , definiamo la sua **chiusura** $\bar{\beta}$ come la proiezione orientata di nodi ottenuta connettendo le coppie (p_i^0, p_i^1) come si può vedere in figura 1.19.

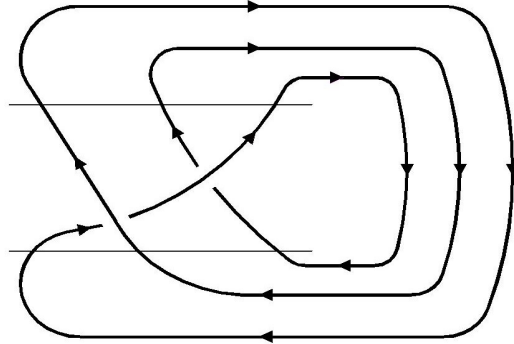


Figura 1.19: La chiusura di una treccia è un nodo (link).

Teorema 1.3.7 (Alexander). *Dato un nodo K , esistono sempre una sua proiezione orientata L , ed una treccia β tali che $\overline{\beta} \cong L$.*

Il teorema di Alexander ci assicura quindi che ogni nodo (link) K può essere espresso mediante la chiusura di una treccia, (attenzione: questo non vuol dire che ogni proiezione sia chiusura di una treccia, questo in generale è falso). È abbastanza intuitivo notare che, se le trecce β, β' sono equivalenti, allora anche le loro chiusure $\overline{\beta}$ e $\overline{\beta}'$ sono equivalenti come proiezioni orientate. Sfortunatamente il viceversa non è vero in generale: infatti potrebbe accadere che due trecce non equivalenti abbiano chiusure equivalenti. Schematicamente:

Trecce β, β' equivalenti \Rightarrow Chiusure $\overline{\beta}, \overline{\beta}'$ equivalenti.

Trecce β, β' equivalenti $\not\Leftarrow$ Chiusure $\overline{\beta}, \overline{\beta}'$ equivalenti.

Per avere il viceversa, dobbiamo introdurre la **Markov-equivalenza**.

Definizione 1.3.8. *Due trecce sono dette **Markov-equivalenti** se e solo se una può essere ottenuta algebricamente partendo dall'altra mediante una sequenza di mosse di Markov:*

- *Markov (i): $\beta \sim \beta' \beta \beta'^{-1}$ con $\beta, \beta' \in \mathcal{B}_m$*
- *Markov (ii): $\beta \sim \beta T_m$ con $\beta \in \mathcal{B}_m$*

Teorema 1.3.9 (Markov). *Due trecce β, β' sono Markov-equivalenti se e solo se le loro chiusure sono equivalenti come proiezioni di nodi (links).*

Trecce β, β' Markov-equivalenti \iff Chiusure $\overline{\beta}, \overline{\beta}'$ equivalenti.

1.4 L'equazione di Yang-Baxter

I teoremi di Alexander e di Markov ci dicono che possiamo produrre degli invarianti di nodi partendo dal gruppo delle trecce. Un'idea per costruire tali invarianti è quella di rappresentare il gruppo delle trecce mediante una mappa $\rho_m : \mathcal{B}_m \rightarrow \text{End}(V^{\otimes m})$, e cercare degli invarianti partendo dalla rappresentazione. Per rappresentare il gruppo delle trecce avremo bisogno di endomorfismi che rispettino le condizioni (1.1)-(1.2), ovverosia:

$$\rho_m(T_i)\rho_m(T_{i+1})\rho_m(T_i) = \rho_m(T_{i+1})\rho_m(T_i)\rho_m(T_{i+1}), \quad (1.3)$$

$$\rho_m(T_i)\rho_m(T_j) = \rho_m(T_j)\rho_m(T_i) \text{ se } |i - j| > 1. \quad (1.4)$$

Definizione 1.4.1. *Sia V un k -modulo libero, di rango finito, con k anello commutativo. Diciamo che $I \in \text{End}(V \otimes V)$ è un **operatore di Yang Baxter** se risolve l'equazione:*

$$(I \otimes \text{id})(\text{id} \otimes I)(I \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes I)(I \otimes \text{id})(\text{id} \otimes I). \quad (1.5)$$

L'equazione (1.5) è detta **equazione di Yang-Baxter**, ed è definita in $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$. Volendo snellire le notazioni, possiamo anche riscriverla come segue:

$$I_{12}I_{23}I_{12} = I_{23}I_{12}I_{23}$$

dove abbiamo posto implicitamente $I_{12} = I \otimes \text{id}$, e $I_{23} = \text{id} \otimes I$. Detta $\{v_i\}_i$ una base per V , l'operatore $I \in \text{End}(V \otimes V)$ ha matrice

$$I = \sum_{k,l} I_{i,j}^{k,l} E_{i,k} \otimes E_{j,l}, \quad I(v_i \otimes v_j) = \sum_{k,l} I_{i,j}^{k,l} (v_k \otimes v_l),$$

e quindi, a livello di scalari, I è una soluzione dell'equazione di Yang-Baxter se e solo se per ogni i, j, k, l, m, n , vale la relazione

$$\sum_{p,q,x} I_{i,j}^{p,q} I_{q,k}^{x,n} I_{p,x}^{l,m} = \sum_{r,s,y} I_{j,k}^{r,s} I_{i,r}^{l,y} I_{y,s}^{m,n}. \quad (1.6)$$

Esempio 1.4.2. *L'identità $\text{id}_{V^{\otimes 2}}$ è un operatore di Yang-Baxter, così come lo è il morfismo di scambio $\sigma : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ definito da $\sigma(v \otimes v') = v' \otimes v$. Si prova facilmente infatti che entrambi risolvono l'equazione (1.5).*

Esempio 1.4.3. *Diamo anche un esempio di operatore di Yang-Baxter non banale. Posto $\text{rank}(V) = 2$, sia $\{v_0, v_1\}$ una base per V , e quindi $\{v_0 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1\}$ una base per $V^{\otimes 2}$, allora l'operatore*

$$I = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

è un operatore di Yang-Baxter, e lo si può verificare con un calcolo diretto. Ci torneremo comunque nella sezione 3.2, quando vedremo la sua costruzione esplicita.

Osservazione 1.4.4. *Nel seguito della tesi incontreremo anche l'equazione di Yang-Baxter quantistica, che è data da*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (1.7)$$

dove $R_{12} = R \otimes \text{id}$, $R_{23} = \text{id} \otimes R$, $R_{13} = (\sigma \otimes \text{id})(\text{id} \otimes R)(\sigma \otimes \text{id})$.

Gli operatori che risolvono tale equazione sono detti operatori di Yang-Baxter quantistici.

La relazione tra equazione di Yang-Baxter, ed equazione di Yang-Baxter quantistica, è riportata nella seguente proposizione:

Proposizione 1.4.5. *Se R è un operatore che risolve l'equazione di Yang-Baxter quantistica, allora $I = \sigma \circ R$ è un operatore che risolve l'equazione di Yang-Baxter. σ è inteso come l'usuale operatore di scambio.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $I = \sigma \circ R$ risolve l'equazione di Yang-Baxter, ovvero sia

$$(\sigma R \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma R)(\sigma R \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes \sigma R)(\sigma R \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma R).$$

Andiamo a svolgere il membro di sinistra:

$$\begin{aligned} (\sigma R \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma R)(\sigma R \otimes \text{id}) &= \sigma_{12}R_{12}\sigma_{23}R_{23}\sigma_{12}R_{12} = \\ &= \sigma_{12}R_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\sigma_{12}R_{23}\sigma_{12})R_{12} = \sigma_{12}R_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}R_{13}R_{12} \\ &= \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\sigma_{12}\sigma_{23}R_{12}\sigma_{23}\sigma_{12})R_{13}R_{12} = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}R_{23}R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

Analogamente per il membro di destra si dimostra che

$$(\text{id} \otimes \sigma R)(\sigma R \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma R) = \dots = \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}R_{12}R_{13}R_{23}.$$

A questo punto basta verificare che vale l'uguaglianza

$$\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}.$$

Scritta esplicitamente, questa diventa

$$(\sigma \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma),$$

e viene soddisfatta perchè σ è un operatore di Yang-Baxter, come visto nell'esempio 1.4.2. \square

Proposizione 1.4.6. *Sia $I \in \text{End}(V \otimes V)$ un operatore di Yang-Baxter. Allora, per ogni $m \geq 0$, il morfismo di gruppi $\rho_m^I : \mathcal{B}_m \rightarrow \text{End}(V^{\otimes m})$ definito da*

$$\rho_m^I(T_i)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes I(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes \cdots \otimes v_m \quad (1.8)$$

definisce una rappresentazione di \mathcal{B}_m in $V^{\otimes m}$.

Nel seguito, per snellire le notazioni, denoteremo con $I_i \in \text{End}(V^{\otimes m})$ l'operatore definito da

$$I_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes I(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes \cdots \otimes v_m, \quad (1.9)$$

e in particolare quindi $\rho_m^I(T_i) = I_i$. Si noti anche che, con queste notazioni, l'equazione di Yang-Baxter è definita da

$$I_1 \circ I_2 \circ I_1 = I_2 \circ I_1 \circ I_2. \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Quello che dobbiamo provare, è che la rappresentazione ρ_m^I rispetta le condizioni (1.3)-(1.4), che nelle nuove notazioni diventano

$$I_i \circ I_{i+1} \circ I_i = I_{i+1} \circ I_i \circ I_{i+1}$$

$$I_i \circ I_j = I_j \circ I_i \text{ se } |i - j| > 1.$$

La seconda è soddisfatta in automatico, mentre la prima non è altro che l'equazione di Yang-Baxter traslata. Volendo essere espliciti

$$I_i \circ I_{i+1} \circ I_i = \text{id}^{\otimes(i-1)} \otimes (I_1 \circ I_2 \circ I_1) \otimes \text{id}^{\otimes(m-i-2)},$$

$$I_{i+1} \circ I_i \circ I_{i+1} = \text{id}^{\otimes(i-1)} \otimes (I_2 \circ I_1 \circ I_2) \otimes \text{id}^{\otimes(m-i-2)}.$$

□

Si noti anche che le rappresentazioni ρ_m^I sono compatibili, nel senso che, fissato I operatore di Yang-Baxter, possiamo passare da ρ_m^I a ρ_{m+1}^I usando il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_m & \xrightarrow{\rho_m^I} & \text{End}(V^{\otimes m}) \\ \downarrow & & \downarrow -\otimes \text{id}_V \\ \mathcal{B}_{m+1} & \xrightarrow{\rho_{m+1}^I} & \text{End}(V^{\otimes m+1}) \end{array}$$

cioè $\rho_{m+1}^I = \rho_m^I \otimes \text{id}_V$. È sottinteso che la mappa $\mathcal{B}_m \hookrightarrow \mathcal{B}_{m+1}$ manda ogni $T_i \in \mathcal{B}_m$ in $T_i \in \mathcal{B}_{m+1}$ per ogni $i = 1, \dots, m-1$.

1.5 Categorie monoidali

Facciamo ora una piccola digressione sulle categorie monoidali, poichè nel linguaggio categoriale le trecce formano la categoria monoidale **braid**. Le categorie monoidali nascono con l'intento di introdurre il prodotto tensoriale all'interno del linguaggio delle categorie.

Definizione 1.5.1. Una *categoria monoidale* è una categoria \mathcal{C} , assieme ad un funtore $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ con $(U, V) \mapsto U \otimes V$ per cui valgono le seguenti condizioni:

- i. *Assioma del pentagono:* Esiste un isomorfismo naturale $\alpha : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$ tale che, per ogni scelta di $U, V, W, Z \in \mathcal{C}$, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \otimes (V \otimes (W \otimes Z)) & \xrightarrow{\alpha} & (U \otimes V) \otimes (W \otimes Z) & \xrightarrow{\alpha} & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes Z \\ & \downarrow \text{id} \otimes \alpha & & & \uparrow \alpha \otimes \text{id} \\ U \otimes ((V \otimes W) \otimes Z) & \xrightarrow{\alpha} & & & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes Z \end{array}$$

- ii. *C'è un oggetto identico $1 \in \mathcal{C}$, assieme a due isomorfismi naturali $\rho_U : U \otimes 1 \rightarrow U$ e $\lambda_U : 1 \otimes U \rightarrow U$ tali che il seguente diagramma commuti per ogni scelta di $U, V \in \mathcal{C}$:*

$$\begin{array}{ccc} U \otimes (1 \otimes V) & \xrightarrow{\alpha} & (U \otimes 1) \otimes 1V \\ \downarrow \text{id} \otimes \lambda & & \downarrow \rho \otimes \text{id} \\ U \otimes V & \xrightarrow{\text{id}} & U \otimes V \end{array}$$

Definizione 1.5.2. Un funtore $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ tra due categorie monoidali, è un *funtore monoidale* se valgono le seguenti condizioni per ogni $U, V \in \mathcal{C}$:

- i. $\phi(U \otimes V) \simeq \phi(U) \otimes \phi(V)$;
ii. $\phi(1) = 1'$.

Inoltre i morfismi $\varphi_{U,V} : \phi(U \otimes V) \rightarrow \phi(U) \otimes \phi(V)$ fanno commutare i seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} \phi(U) \otimes (\phi(V) \otimes \phi(W)) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varphi} & \phi(U) \otimes \phi(V \otimes W) & \xrightarrow{\varphi} & \phi(U \otimes (V \otimes W)) \\ \downarrow \alpha' & & & & \downarrow \phi(\alpha) \\ (\phi(U) \otimes \phi(V)) \otimes \phi(W) & \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} & \phi(U \otimes V) \otimes \phi(W) & \xrightarrow{\varphi} & \phi((U \otimes V) \otimes W) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \phi(1) \otimes \phi(A) & \xrightarrow{\varphi} & \phi(1 \otimes A) & & \phi(A) \otimes \phi(1) & \xrightarrow{\varphi} & \phi(A \otimes 1) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \phi(\lambda) & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \phi(\rho) \\ 1' \otimes \phi(A) & \xrightarrow{\lambda'} & \phi(A) & & \phi(A) \otimes 1' & \xrightarrow{\rho'} & \phi(A) \end{array}$$

Una categoria in cui il morfismo associativo α e i due isomorfismi ρ e λ sono i morfismi identici, viene detta **stretta**.

Esempio 1.5.3. Il primo esempio è $\mathbf{Mod}\text{-}k$, ovvero la categoria dei k -moduli, dove k è un anello commutativo. Il funtore \otimes è il classico prodotto tensoriale di k -moduli, ovvero

$$\begin{aligned} \otimes : \mathbf{Mod}\text{-}k \times \mathbf{Mod}\text{-}k &\rightarrow \mathbf{Mod}\text{-}k \\ (M, N) &\mapsto M \otimes N \end{aligned}$$

e l'isomorfismo naturale α è la mappa associativa $(M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes (N \otimes P)$. L'assioma del pentagono diventa quindi

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes (N \otimes (P \otimes Q)) & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes (P \otimes Q) & \longrightarrow & ((M \otimes N) \otimes P) \otimes Q \\ & & \downarrow & & \uparrow \\ M \otimes ((N \otimes P) \otimes Q) & \longrightarrow & & \longrightarrow & (M \otimes (N \otimes P)) \otimes Q. \end{array}$$

L'oggetto identico è k stesso, e fissato $M \in \mathbf{Mod}\text{-}k$, i due isomorfismi naturali ρ_M e λ_M sono gli isomorfismi canonici $\rho_M : M \otimes k \xrightarrow{\sim} M$, e $\lambda_M : k \otimes M \xrightarrow{\sim} M$ (esplicitamente: per ogni $x \in M$, ed ogni $\lambda \in k$: $\rho_M(x \otimes \lambda) = \lambda x$, $\lambda_M(\lambda \otimes x) = \lambda x$). Questi fanno commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} M \otimes (k \otimes N) & \longrightarrow & (M \otimes k) \otimes N \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ M \otimes N & \xrightarrow{\text{id}} & M \otimes N. \end{array}$$

Esempio 1.5.4. Il secondo esempio che portiamo è la categoria **braid**. Gli oggetti di **braid** sono i numeri naturali, mentre i morfismi sono dati da

$$\text{Hom}(m, n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } m \neq n, \\ \mathcal{B}_m & \text{se } m = n. \end{cases}$$

La composizione dei morfismi è associativa perchè le trecce formano un gruppo. Il prodotto tensoriale tra oggetti è definito come segue: a livello di oggetti abbiamo $m \otimes n = m + n$, e dati due morfismi $\beta \in \text{Hom}(m, m)$, $\beta' \in \text{Hom}(n, n)$, il morfismo $\beta \otimes \beta'$ appartiene a $\text{Hom}(m + n, m + n)$ e si ottiene accostando β e β' una accanto all'altra. Il morfismo α è la mappa associativa $\alpha : (m + n) + p \rightarrow m + (n + p)$, che chiaramente soddisfa l'assioma del pentagono:

$$\begin{array}{ccccc} m + (n + (p + q)) & \longrightarrow & (m + n) + (p + q) & \longrightarrow & ((m + n) + p) + q \\ & & \downarrow & & \uparrow \\ m + ((n + p) + q) & \longrightarrow & & \longrightarrow & (m + (n + p)) + q. \end{array}$$

L'oggetto identico è lo zero, e i morfismi $\rho_m : m+0 \rightarrow m$, e $\lambda_m : 0+m \rightarrow m$ fanno commutare il diagramma come segue:

$$\begin{array}{ccc}
 m + (0 + n) & \longrightarrow & (m + 0) + n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 m + n & \xrightarrow{\text{id}} & m + n.
 \end{array}$$

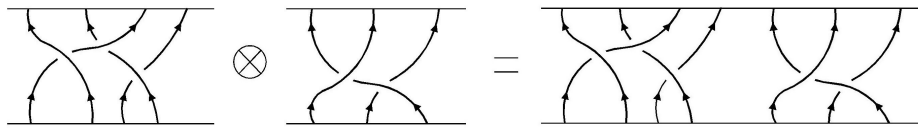


Figura 1.20: Il prodotto tensoriale di trecce si ottiene accostandole l'una accanto all'altra.

Capitolo 2

Algebre di Hopf quasitriangolari

Abbandoniamo ora i nodi e le trecce, e concentriamoci sulla ricerca degli operatori di Yang-Baxter: alla fine di questa sezione avremo un modo molto generale per produrre tali operatori. Nella sezione 2.1 introdurremo il concetto di *algebra di Hopf*, mentre nella sezione 2.2 andremo a definire le algebre di Hopf *quasitriangolari*. In questa sezione vedremo che queste particolari algebre, sono sempre dotate di un elemento $\mathcal{R} \in A \otimes A$, detto *R*-matrice universale, che risolve l'equazione di Yang-Baxter quantistica, e ce ne serviremo per produrre un operatore di Yang-Baxter. Infine nella sezione 2.3, mediante una costruzione chiamata *quantum double*, vedremo un metodo molto generale per produrre algebre di Hopf quasitriangolari.

2.1 Algebre di Hopf

Alla fine di questa sezione avremo il primo tassello, ovverosia la definizione di *algebra di Hopf*. Per costruirla avremo bisogno dei concetti di *coalgebra* e *bialgebra*. La definizione di coalgebra si ottiene dualizzando quella di algebra, che probabilmente è già ben nota al lettore. Per poterlo fare dovremo usare il linguaggio delle categorie, ovverosia scrivere tutto in termini di diagrammi commutativi. Una volta definite le coalgebre, poi scendono a catena sia la definizione di bialgebra, che quella di algebra di Hopf. Una bialgebra infatti non è altro che un k -modulo dotato contemporaneamente sia della strutture di algebra, che di quella di coalgebra; e un'algebra di Hopf non è altro che una bialgebra con una struttura aggiuntiva chiamata *antipodo*.

2.1.1 Algebre

Questo paragrafo non introduce nulla di nuovo: serve solo a tradurre concetti già noti sulle algebre in termini di diagrammi commutativi.

Definizione 2.1.1. Un'algebra sopra ad un anello commutativo k è una tripla (A, m, u) , dove A è un k -modulo, mentre m ed u sono delle mappe di k -moduli, $m : A \otimes A \rightarrow A$, $u : k \rightarrow A$, dette rispettivamente **moltiplicazione** ed **unità**, che fanno commutare i seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \downarrow \text{id} \otimes m & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes k & \xrightarrow{\text{id} \otimes u} & A \otimes A \\ \downarrow \simeq & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{\text{id}} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k \otimes A & \xrightarrow{u \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \downarrow \simeq & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{\text{id}} & A. \end{array}$$

Possiamo snellire le notazioni ponendo $m(a \otimes a') = aa'$ per ogni $a, a' \in A$, e $u(1) = 1_A$ dove $1 \in k$ è l'elemento identico dell'anello. Per ogni $\lambda \in k$ segue che $u(\lambda) = \lambda 1_A$: in altre parole la mappa u ci dice come viene immerso k dentro ad A . Commentiamo ora i diagrammi commutativi: il primo è la condizione di associatività, ovvero sia

$$m(m(a \otimes a') \otimes a'') = m(a \otimes m(a' \otimes a''))$$

per ogni $a, a', a'' \in A$. Equivalentemente,

$$(aa')a'' = a(a'a'').$$

Gli altri due diagrammi invece riguardano le condizioni imposte sull'unità, e ci dicono come poter moltiplicare gli elementi $\lambda \in k$ con gli elementi $a \in A$, ovvero sia

$$\begin{aligned} m(u(\lambda) \otimes a) &= m(\lambda 1_A \otimes a) = \lambda a, \\ m(a \otimes u(\lambda)) &= m(a \otimes \lambda 1_A) = \lambda a \end{aligned}$$

per ogni $\lambda \in k$, $a \in A$. Equivalentemente

$$(\lambda 1_A)a = \lambda a = a(\lambda 1_A),$$

o anche solo

$$1_A a = a = a 1_A.$$

Proseguiamo ora con le definizioni: un'algebra si dice *commutativa* se

$$m(a \otimes a') = m(a' \otimes a),$$

per ogni $a, a' \in A$, o equivalentemente

$$aa' = a'a.$$

In termini di diagrammi commutativi, un'algebra è commutativa se e solo se, detto σ l'operatore di scambio, $\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$, vale la relazione

$$m = m \circ \sigma : A \otimes A \xrightarrow{\sigma} A \otimes A \xrightarrow{m} A.$$

In ogni caso, indipendentemente che l'algebra in questione sia commutativa o meno, possiamo definire la mappa $m_{\text{op}} : A \otimes A \rightarrow A$ come la composizione $m_{\text{op}} = m \circ \sigma$, o equivalentemente $m_{\text{op}}(a \otimes a') = a'a$. Si verifica che m_{op} è una moltiplicazione, e che (A, m_{op}, u) è un'algebra, che denoteremo col simbolo A_{op} . In generale un'algebra è commutativa se e solo se $A = A_{\text{op}}$.

Date due algebre A e B , definiamo l'algebra tensoriale $A \otimes B$ come il prodotto tensoriale di A e B visti come k -moduli, dotato della seguente struttura moltiplicativa

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb', \quad \text{per ogni } a, a' \in A, b, b' \in B,$$

che in termini di diagrammi commutativi diventa

$$m_{A \otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \xrightarrow{\sigma_{23}} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m^A \otimes m^B} A \otimes B.$$

dove σ_{23} è la mappa di scambio definita da

$$\sigma_{23}(a \otimes b \otimes a' \otimes b') = a \otimes a' \otimes b \otimes b'.$$

L'unità $u_{A \otimes B} = u_A \otimes u_B$ può essere espressa come segue

$$u_{A \otimes B} : k \simeq k \otimes k \xrightarrow{u_A \otimes u_B} A \otimes B,$$

o in altre parole $u_{A \otimes B}(\lambda) = \lambda(1_A \otimes 1_B)$.

In ultimo, date due algebre A e B , un morfismo di algebre $f : A \rightarrow B$ è una mappa di k -moduli che soddisfa le seguenti condizioni aggiuntive

- $f(aa') = f(a)f(a')$ per ogni $a, a' \in A$;
- $f(1_A) = 1_B$.

o, in termini di diagrammi commutativi,

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ \downarrow m_A & & \downarrow m_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\text{id}} & k \\ \downarrow u_A & & \downarrow u_B \\ A & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

ovverosia

$$f \circ m = m \circ (f \otimes f), \quad f \circ u_A = u_B.$$

2.1.2 Coalgebre

Come anticipato, la definizione di *coalgebra* si ottiene dualizzando quella di algebra. Nel seguito della sezione dualizzeremo anche tutte le altre definizioni richiamate nella sezione precedente (algebra tensoriale, commutatività, morfismo di algebre, ...).

Definizione 2.1.2. Una *coalgebra* sopra ad un anello commutativo k è una tripla (A, Δ, ϵ) , dove A è un k -modulo, mentre Δ ed ϵ sono delle mappe di k -moduli $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, $\epsilon : A \rightarrow k$, dette rispettivamente **comoltiplicazione** e **counità**, che fanno commutare i seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
 \text{id} \otimes \Delta \uparrow & & \Delta \uparrow \\
 A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes k & \xleftarrow{\text{id} \otimes \epsilon} & A \otimes A \\
 \simeq \uparrow & & \Delta \uparrow \\
 A & \xleftarrow{\text{id}} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 k \otimes A & \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
 \simeq \uparrow & & \Delta \uparrow \\
 A & \xleftarrow{\text{id}} & A
 \end{array}$$

Usare il linguaggio delle categorie ci ha permesso di dare agevolmente la definizione di coalgebra, ma questa ha lo svantaggio di essere astratta e poco “maneggevole”. Vediamo quindi di rendere le cose più concrete, utilizzando le notazioni di Sweedler: dato $a \in A$, la comoltiplicazione $\Delta(a)$ può essere espressa come segue:

$$\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

Andiamo ora a riscrivere le condizioni imposte dai diagrammi commutativi in termini delle notazioni di Sweedler: il primo è la condizione di *coassociatività*, ovverosia

$$\sum \left(\sum a_{(1)(1)} \otimes a_{(1)(2)} \right) \otimes a_{(2)} = \sum a_{(1)} \otimes \left(\sum a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} \right)$$

e che noi scriveremo semplicemente come $\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)}$.

Gli altri due diagrammi invece sono le condizioni imposte sulla counità, che scritti in termini delle notazioni di Sweedler diventano

$$\sum \epsilon(a_{(1)}) a_{(2)} = a = \sum a_{(1)} \epsilon(a_{(2)}).$$

Una coalgebra A si dice *cocommutativa* se, $\sigma \circ \Delta(a) = \Delta(a)$ per ogni $a \in A$, dove σ è l’usuale operatore di scambio. Nelle notazioni di Sweedler questo vuol dire che, per ogni $a \in A$

$$\sum a_{(2)} \otimes a_{(1)} = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

Si noti inoltre che chiedere che A sia cocommutativa equivale a chiedere che $\Delta(A)$ sia inclusa nella parte simmetrica di $A \otimes A$. In ogni caso, indipendentemente che la coalgebra in questione sia cocommutativa o meno, possiamo sempre definire $\Delta^{\text{op}} = \sigma \circ \Delta$: anche in questo caso si verifica con un calcolo diretto che Δ^{op} è una comoltiplicazione, e che $(A, \Delta^{\text{op}}, \epsilon)$ è una coalgebra, che denoteremo col simbolo A^{op} . In generale una coalgebra A è cocommutativa se e solo se $A^{\text{op}} = A$.

Date due coalgrebre A e B , possiamo definire la *coalgebra tensoriale* $A \otimes B$ come il prodotto tensoriale di A e B visti come k -moduli, in cui la comoltiplicazione e la counità sono definite da

$$\Delta^{A \otimes B} : A \otimes B \xrightarrow{\Delta^A \otimes \Delta^B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\sigma_{23}} (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$$

$$\epsilon^{A \otimes B} : k \simeq k \otimes k \xrightarrow{\epsilon^A \otimes \epsilon^B} k \otimes k \simeq k,$$

o, in termini delle notazioni di Sweedler,

$$\Delta^{A \otimes B}(a \otimes b) = \sum a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)},$$

$$\epsilon^{A \otimes B}(a \otimes b) = \epsilon^A(a)\epsilon^B(b).$$

Un *morfismo di coalgrebre* è un morfismo di k -moduli $\varphi : A \rightarrow B$ che soddisfa le seguenti condizioni aggiuntive:

- $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta^A = \Delta^B \circ \varphi$,
- $\epsilon^B \circ \varphi = \epsilon^A$,

o, in termini delle notazioni di Sweedler,

$$\sum \varphi(a_{(1)}) \otimes \varphi(a_{(2)}) = \sum \varphi(a)_{(1)} \otimes \varphi(a)_{(2)},$$

$$\epsilon^A(a) = \epsilon^B(\varphi(b)).$$

Esempio 2.1.3. *Il seguente esempio è ripreso da [SS]-(sezione 1.2): poniamo $k = \mathbb{C}$ e $A = M_n(\mathbb{C})$. Per capire come definire la comoltiplicazione guardiamo il caso particolare $n = 2$: data una matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, possiamo definire la comoltiplicazione Δ come segue:*

$$\Delta(X) = \Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes a + b \otimes c & a \otimes b + b \otimes c \\ c \otimes a + d \otimes c & c \otimes a + d \otimes c \end{pmatrix}$$

per ogni $X \in M_2(\mathbb{C})$. A livello di coefficienti abbiamo che

$$\begin{aligned} a &\mapsto a \otimes a + b \otimes c, & b &\mapsto a \otimes b + b \otimes c, \\ c &\mapsto c \otimes a + d \otimes c, & d &\mapsto c \otimes a + d \otimes c. \end{aligned}$$

Questa definizione può essere generalizzata ad $M_n(\mathbb{C})$ come segue:

$$\Delta(X) = X \boxplus X, \quad a_{ij} \mapsto \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}.$$

Una comoltiplicazione così definita è coassociativa, poichè:

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta(X) = (X \boxplus X) \boxplus X = X \boxplus (X \boxplus X) = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(X).$$

Per quanto riguarda la counità invece, andiamo a far vedere che non esiste alcuna mappa $\epsilon : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfi le condizioni

$$(\epsilon \otimes \text{id})\Delta(X) = X = (\text{id} \otimes \epsilon)\Delta(X).$$

Se andiamo a svilupparle infatti

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes \text{id})\Delta(X) &= (\epsilon \otimes \text{id})(X \boxplus X) = \epsilon(X)X, \\ (\text{id} \otimes \epsilon)\Delta(X) &= \dots = X\epsilon(X). \end{aligned}$$

L'unica possibilità è quindi quella di porre $\epsilon(X) \equiv 1$, ma questa purtroppo non va bene, perchè non è un morfismo di \mathbb{C} -moduli. Pertanto abbiamo trovato un curioso esempio di \mathbb{C} -modulo che non è una coalgebra, pur essendo dotato di struttura comoltiplicativa.

2.1.3 Bialgebre

Come anticipato ad inizio sezione, una bialgebra non è altro che un k -modulo che è dotato sia della struttura di algebra che di quella di coalgebra. Formalmente:

Definizione 2.1.4. Una **bialgebra** sopra ad un anello commutativo k è una quintupla $(A, m, \Delta, u, \epsilon)$ tale che:

- i. (A, m, u) è una k -algebra;
- ii. (A, Δ, ϵ) è una k -coalgebra;
- iii. Δ ed ϵ sono morfismi per l'algebra (A, m, u) ;
- iv. m ed u sono morfismi per la coalgebra (A, Δ, ϵ) .

Le condizioni *iii* e *iv* servono ad assicurare che le strutture di algebra e coalgebra siano compatibili. Si noti anche che sono ridondanti, poichè chiedono esattamente le stesse cose formulate in due modi diversi. Se andiamo a svilupparle infatti otteniamo:

- Δ morfismo di algebre: $\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ \Delta^{A \otimes A}$, $\Delta \circ u = u^{A \otimes A}$,
- ϵ morfismo di algebre: $\epsilon \circ m = \epsilon^{A \otimes A}$, $\epsilon \circ u = \text{id}$,
- m morfismo di coalgebre: $(m \otimes m) \circ \Delta^{A \otimes A} = \Delta \circ m$, $\epsilon \circ m = \epsilon^{A \otimes A}$,
- u morfismo di coalgebre: $u^{A \otimes A} = \Delta \circ u$, $\epsilon \circ u = \text{id}$.

Siccome è comodo averle entrambe, le includiamo comunque tutte e due nella definizione. Volendo snellire le notazioni, la condizione *iii* può essere espressa come segue: per ogni $a, a' \in A$,

- Δ morfismo di algebre: $\Delta(aa') = \Delta(a)\Delta(a')$, $\Delta(1_A) = 1_A \otimes 1_A$,
- ϵ morfismo di algebre: $\epsilon(aa') = \epsilon(a)\epsilon(a')$, $\epsilon(1_A) = 1$.

Queste notazioni possono essere usate anche per esprimere la condizione *iv*: l'unica differenza sta nella condizione $(m \otimes m) \circ \Delta^{A \otimes A} = \Delta \circ m$, che in termini delle notazioni di Sweedler può essere espressa come

$$\sum (aa')_{(1)} \otimes (aa')_{(2)} = \sum a_{(1)} a'_{(1)} \otimes a_{(2)} a'_{(2)}.$$

Una bialgebra A è *commutativa* se è commutativa come algebra, ed è *co-commutativa* se lo è come coalgebra. Si verifica che anche $(A, m_{\text{op}}, \Delta, u, \epsilon)$, $(A, m, \Delta^{\text{op}}, u, \epsilon)$ e $(A, m_{\text{op}}, \Delta^{\text{op}}, u, \epsilon)$ sono bialgebre, che denoteremo rispettivamente coi simboli A_{op} , A^{op} , $A_{\text{op}}^{\text{op}}$. Date due bialgebre A e B , la *bialgebra tensoriale* $A \otimes B$ è data dal prodotto tensoriale di A e B visti come k -moduli, in cui le strutture $m_{A \otimes B}$, $\Delta^{A \otimes B}$, $u_{A \otimes B}$, $\epsilon^{A \otimes B}$ sono definite come nelle sezioni precedenti. In ultimo un *morfismo di bialgebre* $\varphi : A \rightarrow B$ è una mappa che è sia morfismo di algebre che di coalgebre. Un concetto nuovo invece rispetto alle sezioni precedenti è la nozione di *dualità*. Per il momento supporremo che A sia di rango finito come k -modulo.

Definizione/Proposizione 2.1.5. *Sia $A = (A, m, u, \Delta, \epsilon)$ una bialgebra, dove A è un k -modulo di rango finito. Allora anche il k -modulo $A^* = \text{Hom}_k(A, k)$ può essere dotato della struttura di bialgebra. In particolare m^* , Δ^* , u^* , ϵ^* sono definite usando le seguenti relazioni:*

- $\langle m^*(f \otimes g), a \rangle = \langle f \otimes g, \Delta(a) \rangle$
- $\langle \Delta^*(f), a \otimes b \rangle = \langle f, ab \rangle$
- $\langle u^*(1), a \rangle = \langle 1, \epsilon(a) \rangle_k = \epsilon(a)$
- $\epsilon^*(f) = \langle \epsilon^*(f), 1 \rangle_k = \langle f, u(1) \rangle = f(1_A)$

per ogni $a, b \in A$, $f, g \in A^*$. A^* viene detta la **bialgebra duale** di A .

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $(A^*, m^*, \Delta^*, u^*, \epsilon^*)$ è una bialgebra, ovvero che soddisfa le condizioni *i-ii-iii* della definizione 2.1.4. Proviamo innanzitutto il primo punto, ovvero che (A^*, m^*, u^*) è un'algebra. Dobbiamo quindi verificare che m^* è associativa, e che u^* soddisfa gli assiomi di unità: per quanto riguarda l'associatività di m^* abbiamo che:

$$\begin{aligned}\langle m^*(m^* \otimes \text{id})(f \otimes g \otimes h), a \rangle &= \dots = \langle f \otimes g \otimes h, (\Delta \otimes \text{id})\Delta(a) \rangle, \\ \langle m^*(\text{id} \otimes m^*)(f \otimes g \otimes h), a \rangle &= \dots = \langle f \otimes g \otimes h, (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(a) \rangle,\end{aligned}$$

e quindi l'associatività di m^* segue dalla coassociatività di Δ . Analogamente, per quanto riguarda l'unitarietà di u^* , abbiamo che:

$$\begin{aligned}\langle m^*(u^* \otimes \text{id})(1 \otimes f), a \rangle &= \dots = \langle 1 \otimes f, (\epsilon \otimes \text{id})\Delta(a) \rangle = \langle f, a \rangle, \\ \langle m^*(\text{id} \otimes u^*)(f \otimes 1), a \rangle &= \dots = \langle f \otimes 1, (\text{id} \otimes \epsilon)\Delta(a) \rangle = \langle f, a \rangle.\end{aligned}$$

e quindi l'unitarietà di u^* segue dal fatto che ϵ è counità. In modo analogo si prova che A^* è una coalgebra. Si noti che questa prima parte della dimostrazione ha provato implicitamente che:

$$A \text{ algebra} \Rightarrow A^* \text{ coalgebra}; \quad A \text{ coalgebra} \Rightarrow A^* \text{ algebra}.$$

Proviamo infine che Δ ed ϵ sono morfismi di algebre:

- $\langle \Delta^* \circ m^*(f \otimes g), a \otimes b \rangle = \langle f \otimes g, \Delta \circ m(a \otimes b) \rangle$
 $= \langle f \otimes g, (m \otimes m)\Delta^{A \otimes A}(a \otimes b) \rangle$
 $= \langle f \otimes g, (m \otimes m)\sigma_{23}(\Delta \otimes \Delta)(a \otimes b) \rangle$
 $= \langle f \otimes g, m^{A \otimes A}(\Delta \otimes \Delta)(a \otimes b) \rangle$
 $= \langle (m^* \otimes m^*)\Delta^*{}^{A^* \otimes A^*}(f \otimes g), (a \otimes b) \rangle,$
- $\langle \Delta^* \circ u^*(1), a \otimes b \rangle = \langle 1, \epsilon \circ m(a \otimes b) \rangle_k$
 $= \langle 1, \epsilon^{A \otimes A}(a \otimes b) \rangle$
 $= \langle u^*{}^{A^* \otimes A^*}(1), a \otimes b \rangle,$
- $\langle \epsilon^* \circ m^*(f \otimes g), 1 \rangle_k = \langle f \otimes g, \Delta \circ u(1) \rangle$
 $= \langle f \otimes g, u^{A \otimes A}(1) \rangle$
 $= \langle \epsilon^*{}^{A^* \otimes A^*}(f \otimes g), 1 \rangle_k,$
- $\langle \epsilon^* \circ u^*(1), 1 \rangle_k = \langle 1, \epsilon \circ u(1) \rangle_k = \langle 1, 1 \rangle_k,$

da cui $\epsilon^* \circ u^* = \text{id}_{A^*}$, che è proprio ciò che volevamo. \square

Esempio 2.1.6. *L'esempio più semplice di bialgebra viene dai gruppi. Siano G un gruppo finito e k un anello commutativo: definiamo l'algebra-gruppo $A = k[G]$ come il k -modulo libero avente come base gli elementi $g \in G$. Formalmente:*

$$k[G] = \left\{ x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in k \right\}.$$

La moltiplicazione su $k[G]$ è definita come segue:

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{g' \in G} \mu_{g'} g' \right) = \sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'} gg'.$$

L'unità invece è definita da

$$u(1) = 1_G, \quad u(\lambda) = \lambda 1_G.$$

Con queste strutture $k[G]$ è un'algebra. Definiamo ora la struttura di coalgebra: dal momento che gli elementi di G formano una base per $k[G]$, ci basta definire comoltiplicazione e counità sugli elementi di G , e lo facciamo come segue:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \epsilon(g) = 1.$$

Verifichiamo che $k[G]$ è una coalgebra: per quanto riguarda la coassociatività di Δ abbiamo che, per ogni $\sum \lambda_g g \in k[G]$,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id})\Delta\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) &= (\Delta \otimes \text{id}) \sum_{g \in G} \lambda_g \Delta(g) = \\ &= (\Delta \otimes \text{id}) \sum_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g) = \sum_{g \in G} \lambda_g ((g \otimes g) \otimes g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta)\Delta\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) &= (\text{id} \otimes \Delta) \sum_{g \in G} \lambda_g \Delta(g) = \\ &= (\text{id} \otimes \Delta) \sum_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g) = \sum_{g \in G} \lambda_g (g \otimes (g \otimes g)). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le condizioni sulla counità abbiamo

$$(\epsilon \otimes \text{id})\Delta\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = (\epsilon \otimes \text{id}) \sum_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g) = \sum_{g \in G} \lambda_g \epsilon(g)g = \sum_{g \in G} \lambda_g g,$$

$$(\text{id} \otimes \epsilon)\Delta\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = \dots = \sum_{g \in G} \lambda_g g \epsilon(g) = \sum_{g \in G} \lambda_g g.$$

Andiamo a verificare che $k[G]$ è una bialgebra: dobbiamo far vedere che Δ ed ϵ sono morfismi di algebre:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Delta\left(\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{g' \in G} \mu_{g'} g'\right)\right) &= \sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'} \Delta(gg') = \\ &= \sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'} (gg' \otimes gg') = \sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'} (g \otimes g)(g' \otimes g') \\ &= \sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'} \Delta(g)\Delta(g') = \Delta\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)\Delta\left(\sum_{g' \in G} \mu_{g'} g'\right), \end{aligned}$$

- $\Delta(u(1)) = \Delta(1_G) = 1_G \otimes 1_G = u(1) \otimes u(1),$
- $\epsilon((\sum_{g \in G} \lambda_g g)(\sum_{g' \in G} \mu_{g'} g')) = \epsilon(\sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'} gg') = \sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'},$
- $\epsilon(u(1)) = \epsilon(1_G) = 1.$

Esempio 2.1.7. Andiamo a dualizzare l'esempio precedente: siano G un gruppo finito, k un anello commutativo, e $k[G]$ la rispettiva algebra-gruppo. Poniamo $\mathcal{F}(G) = \text{Hom}_k(k[G], k)$, e studiamone la struttura di bialgebra. $\mathcal{F}(G)$ eredita la naturale struttura di k -modulo, con somma e moltiplicazione scalare definiti, per ogni $g \in G$, da:

- $\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle,$
- $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle,$

Per quanto riguarda la struttura di bialgebra invece, la definiamo usando la definizione/proposizione 2.1.5, per cui abbiamo che:

- $\langle f.h, g \rangle = \langle f \otimes h, \Delta(g) \rangle = \langle f \otimes h, g \otimes g \rangle = \langle f, g \rangle \langle h, g \rangle,$
- $\langle \Delta^*(f), g \otimes g' \rangle = \langle f, gg' \rangle,$
- $\langle u^*(1), g \rangle = \epsilon(g) = 1,$
- $\epsilon^*(f) = f(1_G).$

Vediamo di rendere le cose più concrete, mediante una descrizione esplicita. La struttura moltiplicativa è definita da

$$f.h(g) = f(g).h(g)$$

per ogni $g \in G$. Per quanto riguarda la comoltiplicazione invece, l'abbiamo definita in modo che valga la relazione

$$\langle \Delta^*(f), g \otimes g' \rangle = \langle f, gg' \rangle = f(gg').$$

Vediamo di esplicitare il significato di quest'ultima: la comoltiplicazione infatti deve essere una mappa di k -moduli $\Delta : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$, che nelle notazioni di Sweedler diventa

$$\Delta^*(f)(g \otimes g') = \sum (f_{(1)} \otimes f_{(2)})(g \otimes g') = \sum f_{(1)}(g) \otimes f_{(2)}(g').$$

Per capire come sono fatte le funzioni $f_{(1)}$ e $f_{(2)}$, dobbiamo usare la relazione imposta dal duale, ovvero sia

$$\langle \Delta^*(f), g \otimes g' \rangle = \sum \langle f_{(1)}, g \rangle \langle f_{(2)}, g' \rangle = \langle f, gg' \rangle$$

da cui risulta che la condizione da imporre è

$$\sum f_{(1)}(g)f_{(2)}(g') = f(gg').$$

Dobbiamo quindi trovare delle funzioni $f_{(1)}$ ed $f_{(2)}$ che soddisfino la condizione appena trovata. Fortunatamente G è un gruppo finito, e quindi vale l'isomorfismo di k -algebre $\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \simeq \mathcal{F}(G \times G)$, con mappa esplicita data da

$$\sum f_1(g) \otimes f_2(g') \mapsto \sum f_1(g)f_2(g')$$

per cui esiste un'unica scelta per le funzioni $f_{(1)}$ ed $f_{(2)}$ in maniera che queste soddisfino

$$\sum f_{(1)}(g) \otimes f_{(2)}(g') \mapsto \sum f_{(1)}(g)f_{(2)}(g') = f(gg').$$

Questo prova in un sol colpo che la comoltiplicazione esiste ed è univocamente determinata. Per quanto riguarda unità e counità, notiamo che porre $u^*(1) = 1_{\mathcal{F}}$ la mappa definita da $g \mapsto 1_G$ è il modo più spontaneo di definire l'unità, mentre porre $\epsilon^*(f) = f(1_G)$ è il modo più spontaneo di definire una mappa $\epsilon^* : \mathcal{F}(G) \rightarrow k$.

Purtroppo la definizione/proposizione 2.1.5 risulta in generale falsa quando A , come k -modulo, non è di rango finito. Questo perchè se il rango non è finito, allora non vale l'isomorfismo $(A \otimes A)^* \simeq A^* \otimes A^*$, e quindi la mappa $\Delta^* : A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$, potrebbe prendere valori al di fuori della sottoalgebra $A^* \otimes A^*$. Per risolvere questo problema, una via percorribile è quella di “restringere” il duale. Ci sono vari modi per farlo, uno di questi per esempio è definire

$$A^\circ = \{f \in A^* \mid \Delta^*(f) \in A^* \otimes A^*\}.$$

Si può provare che A° è una sottoalgebra di A^* , e che $\Delta^*(A^\circ) \leq A^\circ \otimes A^\circ$: quindi A° con le mappe di struttura $m^*|_{A^\circ}$, $\Delta^*|_{A^\circ}$, ..., $\epsilon^*|_{A^\circ}$ è una bialgebra, che verrà detta la *bialgebra duale* di A . Nella sezione 3.2 vedremo un altro modo di “restringere” il duale, specifico per il caso in cui A_h è un'algebra universale involuante quantizzata.

2.1.4 Algebre di Hopf

Siamo finalmente pronti per dare la definizione di algebra di Hopf: come anticipato, un'algebra di Hopf non è altro che una bialgebra dotata di una struttura aggiuntiva chiamata *antipodo*.

Definizione 2.1.8. Una bialgebra A sopra ad un anello commutativo k , diventa **algebra di Hopf** se esiste un morfismo di k -moduli biiettivo $S : A \rightarrow A$ chiamato **antipodo**, che fa commutare i seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{S \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
\Delta \uparrow & & \downarrow m \\
A & \xrightarrow{u\epsilon} & A.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{\text{id} \otimes S} & A \otimes A \\
\Delta \uparrow & & \downarrow m \\
A & \xrightarrow{u\epsilon} & A.
\end{array}$$

I diagrammi commutativi possono essere sintetizzati in

$$m(S \otimes \text{id})\Delta = u\epsilon = m(\text{id} \otimes S)\Delta,$$

o in termini delle notazioni di Sweedler ,

$$\sum S(a_{(1)})a_{(2)} = \epsilon(a) = \sum a_{(1)}S(a_{(2)}).$$

Osservazione 2.1.9. (i) *Data una bialgebra A , anche $\text{End}_k(A)$ visto come k -modulo ha una struttura di algebra, dove il prodotto tra $f, g \in \text{End}_k(A)$ è definito dalla convoluzione $f * g = m(f \otimes g)\Delta$. In termini delle notazioni di Sweedler questo si scrive come*

$$(f * g)(a) = \sum f(a_{(1)})g(a_{(2)}).$$

Si può verificare che l'elemento identico della convoluzione non è l'identità id_A , ma la mappa $u\epsilon$, che da ora in avanti denoteremo col simbolo 1_ . Le condizioni imposte sull'antipodo S ci dicono che una bialgebra diventa algebra di Hopf se id_A è invertibile rispetto alla convoluzione, e che il suo inverso è l'antipodo S .*

(ii) *Si può provare che S è un anti-omomorfismo di algebre, ovvero sia che $S(aa') = S(a')S(a)$ per ogni $a, a' \in A$. Non scenderemo nel dettaglio della dimostrazione, ma, se poniamo $\gamma(a \otimes a') = S(aa')$, e $\nu(a \otimes a') = S(a')S(a)$ per ogni $a, a' \in A$, allora valgono le uguaglianze $\gamma * m = 1_* = m * \nu$. Questo vuol dire che γ e ν sono entrambi inversi di m rispetto alla convoluzione, e quindi si deve necessariamente avere $\gamma = \nu$, perchè l'inverso se esiste è unico. Per il calcolo esplicito si consulti [Ab]-(teorema 2.1.4).*

Date due algebre di Hopf A e B , si dimostra che la bialgebra tensoriale $A \otimes B$ ha struttura di algebra di Hopf, con antipodo dato da $S_{A \otimes B} = S_A \otimes S_B$. Se S è invertibile, allora anche $(A_{\text{op}}, m_{\text{op}}, \Delta, u, \epsilon, S^{-1})$, $(A^{\text{op}}, m, \Delta^{\text{op}}, u, \epsilon, S^{-1})$ e $(A_{\text{op}}^{\text{op}}, m_{\text{op}}, \Delta^{\text{op}}, u, \epsilon, S)$ sono algebre di Hopf. Si può poi provare che ogni morfismo di bialgebre φ è in automatico anche morfismo di algebre di Hopf, nel senso che $S^B \circ \varphi = \varphi \circ S^A$. In ultimo, si dimostra che anche A^* ha struttura di algebra di Hopf, con antipodo dato dalla relazione $\langle S^*(f), a \rangle = \langle f, S(a) \rangle$, e questo è vero anche quando il rango di A non è finito.

Esempio 2.1.10. Riprendiamo gli esempi 2.1.6 e 2.1.7. Siano $A = k[G]$, $A^* = \mathcal{F}(G)$ con G gruppo finito. Per provare che A ed A^* sono algebre di Hopf, dobbiamo provare che hanno un antipodo. Iniziamo da $k[G]$, dobbiamo trovare una mappa $S : k[G] \rightarrow k[G]$ tale che

$$m(S \otimes \text{id})\Delta = u\epsilon = m(\text{id} \otimes S)\Delta.$$

Andando a sviluppare i tre membri

$$\begin{aligned} m(S \otimes \text{id})\Delta\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) &= \dots = \sum_{g \in G} \lambda_g S(g)g, \\ m(\text{id} \otimes S)\Delta\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) &= \dots = \sum_{g \in G} \lambda_g g S(g), \\ u\epsilon\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) &= \dots = \sum_{g \in G} \lambda_g 1_G. \end{aligned}$$

Risulta evidente che si riduce tutto all'uguaglianza $S(g)g = gS(g) = 1_G$, che viene soddisfatta ponendo $S(g) = g^{-1}$ per ogni $g \in G$.

Per quanto riguarda la duale $A^* = \mathcal{F}(G)$, l'antipodo $S^* \in \text{End}(\mathcal{F}(G))$ è determinato dalla relazione

$$\langle S^*(f), g \rangle = \langle f, S(g) \rangle = f(g^{-1}).$$

Esempio 2.1.11 (Algebra Universale Inviluppante). Quest'esempio è estremamente importante, e lo riprenderemo in mano nel capitolo 3. Supponiamo per comodità che k sia un campo. Dato un k -spazio vettoriale V , la sua algebra tensoriale $T(V)$ è definita come segue:

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n},$$

dove implicitamente abbiamo posto $T^n(V) = V^{\otimes n}$. La somma è quella usuale, mentre il prodotto sfrutta l'isomorfismo $T^m(V) \otimes T^n(V) \simeq T^{m+n}(V)$, ed è definito come segue: dati $u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_m} \in T^m(V)$ e $v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n} \in T^n(V)$

$$(u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_m})(v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n}) = u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_m} \otimes v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n}.$$

La moltiplicazione si estende per linearità su tutto $T(V)$. L'unità invece può essere ottenuta ponendo $u(\lambda) = \lambda 1$ per ogni $\lambda \in k$.

L'algebra tensoriale è una struttura molto importante, poichè molte altre algebre possono essere scritte partendo da $T(V)$, mediante un opportuno quoziente, e l'algebra universale inviluppante $U(V)$ è proprio una di queste. Nello specifico, nell'algebra universale inviluppante lo spazio vettoriale $V = \mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie sopra ad un campo k : è chiaro quindi che \mathfrak{g} porti con sè

non solo la struttura di spazio vettoriale, ma anche le relazioni legate alle parentesi di Lie. Pertanto viene spontaneo definire $U(\mathfrak{g})$ come il quoziente

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / (x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$$

dove $(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$ è l'ideale generato dagli elementi $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$.

Ora dobbiamo definire anche la struttura di coalgebra. Fortunatamente non dobbiamo definirla su tutto $U(\mathfrak{g})$, ma soltanto sugli elementi di \mathfrak{g} : il teorema di Poincarè-Witt-Birkhoff infatti afferma che, se $\{x_i\}_{i \in I}$ è una qualsiasi base di \mathfrak{g} come k -modulo, con I insieme totalmente ordinato e al più numerabile, allora $\{x_i\}_{i \in I}$ genera $U(\mathfrak{g})$ come algebra, e l'insieme dei monomi $\{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}\}$, dove $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, costituisce una base per $U(\mathfrak{g})$ come k -modulo. Una volta definita la struttura di coalgebra sugli elementi di \mathfrak{g} , potremo poi estendere il tutto su $U(\mathfrak{g})$, sfruttando il fatto che Δ ed ϵ sono morfismi di algebre. Poniamo quindi per ogni $x \in \mathfrak{g}$:

- $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$,
- $\epsilon(1) = 1$,
- $\epsilon(x) = 0$ per ogni altro $x \in \mathfrak{g}$,
- $S(x) = -x$.

Gli elementi che soddisfano $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ sono detti primitivi, e si può dimostrare che gli elementi $x \in \mathfrak{g}$ sono gli unici elementi primitivi di $U(\mathfrak{g})$. La verifica che $U(\mathfrak{g})$ con queste strutture è un'algebra di Hopf è un esercizio che lasciamo al lettore: noi qui di seguito proveremo la parte meno banale, ovvero sia che Δ è un morfismo di algebre. Dal momento che $[x, y] = xy - yx$, segue che

$$\begin{aligned} \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) &= \\ &= (x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) + \\ &\quad -(y \otimes 1 + 1 \otimes y)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= (xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx) \\ &= [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y] = \Delta([x, y]). \end{aligned}$$

Osservazione 2.1.12. Nel capitolo 3 andremo a discutere le algebre universali involuanti quantizzate, che si denotano con $U_h(\mathfrak{g})$ e sono ottenute deformando le algebre universali involuanti $U(\mathfrak{g})$ mediante l'aggiunta di un parametro h . Queste algebre sono dotate di una struttura topologica, dal

momento che hanno come anello di base non più k , ma $k[[h]]$, ovverosia l'anello delle serie formali su k ad indeterminata h , dotato della topologia h -adica, in cui, per ogni $\lambda \in k[[h]]$, $\{\lambda + h^n k[[h]] : n \geq 0\}$ è una base di intorni per λ . La topologia definita su $k[[h]]$ induce spontaneamente una struttura topologica su tutta l'algebra di Hopf, in cui, per ogni $x \in U_h(\mathfrak{g})$, $\{x + h^n U_h(\mathfrak{g}) : n \geq 0\}$ è una base di intorni per x . In generale, le algebre di Hopf dotate di una topologia sono dette **algebre di Hopf topologiche**, e si definiscono apportando alle definizioni già date le seguenti modifiche:

- Il prodotto tensoriale $A \otimes A$ viene sostituito da un opportuno completamento rispetto alla topologia indotta, (in altre parole gli elementi $\sum a_i \otimes a'_i \in A \otimes A$ non sono necessariamente somme finite, ma anche serie convergenti rispetto alla topologia);
- Le mappe che generano le strutture di algebra di Hopf, ovverosia m , Δ , u ed ϵ , e in generale le mappe di k -moduli, devono essere continue.

Fortunatamente, quando la topologia è indotta dall'anello di base $k[[h]]$, ogni mappa di $k[[h]]$ -moduli è automaticamente continua, per cui la seconda condizione può essere trascurata.

Definizione 2.1.13. *Un'algebra di Hopf topologica sopra a $k[[h]]$ anello delle serie formali, è un $k[[h]]$ -modulo completo assieme alle mappe di $k[[h]]$ -moduli m , Δ , u , ϵ ed S che soddisfano gli assiomi di algebra di Hopf (definizione 2.1.8) in cui il prodotto tensoriale $A \otimes A$ viene rimpiazzato dal suo completamento rispetto alla topologia h -adica.*

Le algebre di Hopf topologiche torneranno nel capitolo 3. Per il momento comunque, i risultati che daremo nel seguito del capitolo 2 valgono anche per algebre di Hopf non topologiche.

2.2 Algebre di Hopf quasitriangolari

I casi più interessanti sono quelli in cui l'algebra di Hopf in questione non è nè commutativa, nè cocommutativa. Più precisamente, le algebre di Hopf che ci interessano sono dette *quasitriangolari*, o *intrecciate*. In questo particolare tipo di algebre la condizione di cocommutatività viene rimpiazzata da quella di *quasicocommutatività*.

Definizione 2.2.1. *Un'algebra di Hopf si dice **quasicocommutativa** se esiste un elemento invertibile $\mathcal{R} \in A \otimes A$ tale che, per ogni $a \in A$*

$$\Delta^{\text{op}}(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}. \quad (2.1)$$

Osservazione 2.2.2. *Notiamo subito che le algebre di Hopf quasicocommutative ma non cocommutative, non possono essere nemmeno commutative.*

Se per assurdo infatti lo fossero, avremmo che

$$\Delta^{\text{op}}(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\Delta(a) = \Delta(a).$$

Ma in questo caso l'algebra di Hopf sarebbe cocommutativa, e ciò è impossibile per ipotesi. Segue che le algebre di Hopf quasicocommutative con $\mathcal{R} \neq 1$ non sono mai nè commutative, nè cocommutative.

L'obiettivo sarà quello di dimostrare che \mathcal{R} , sotto opportune condizioni, risolve le equazioni di Yang-Baxter. Iniziamo col vedere le proprietà di \mathcal{R} : dal momento che A^{op} è un'algebra di Hopf, devono quindi valere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} (\Delta^{\text{op}} \otimes \text{id})\Delta^{\text{op}}(a) &= (\text{id} \otimes \Delta^{\text{op}})\Delta^{\text{op}}(a), \\ (\epsilon \otimes \text{id})\Delta^{\text{op}}(a) &= a = (\text{id} \otimes \epsilon)\Delta^{\text{op}}(a). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Lemma 2.2.3. *Se \mathcal{R} soddisfa le condizioni*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}), \\ (\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}) &= 1 = (\text{id} \otimes \epsilon)(\mathcal{R}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

allora soddisfa anche le condizioni (2.2).

Dimostrazione. Andiamo a sviluppaure le due condizioni di (2.2): per quanto riguarda la prima, la condizione di coassociatività, abbiamo che

$$\begin{aligned} (\Delta^{\text{op}} \otimes \text{id})\Delta^{\text{op}}(a) &= (\Delta^{\text{op}} \otimes \text{id})(\mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}) \\ &| \quad \dots \\ &= \mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}).(\Delta \otimes \text{id})\Delta(a).(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}^{-1})\mathcal{R}_{12}^{-1}, \\ (\text{id} \otimes \Delta^{\text{op}})\Delta^{\text{op}}(a) &= (\text{id} \otimes \Delta^{\text{op}})(\mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}) \\ &| \quad \dots \\ &= \mathcal{R}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}).(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(a).(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}^{-1})\mathcal{R}_{23}^{-1}, \end{aligned}$$

e quindi una condizione sufficiente ad assicurarci la coassociatività è

$$\mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}).$$

Sviluppriamo ora le condizioni sulla counità:

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes \text{id})\Delta^{\text{op}}(a) &= (\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}) \\ &| \quad \dots \\ &= (\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}).a.(\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}^{-1}) = a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{id} \otimes \epsilon) \Delta^{\text{op}}(a) &= (\text{id} \otimes \epsilon)(\mathcal{R} \Delta(a) \mathcal{R}^{-1}) \\
&| \quad \dots \\
&= (\text{id} \otimes \epsilon)(\mathcal{R}) \cdot a \cdot (\text{id} \otimes \epsilon)(\mathcal{R}^{-1}) = a,
\end{aligned}$$

da cui segue che una condizione sufficiente è data da

$$(\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = 1 = (\text{id} \otimes \epsilon)(\mathcal{R}). \quad \square$$

Le condizioni (2.3) su \mathcal{R} sono sufficienti a fargli verificare (2.2), ma non bastano a fare in modo che \mathcal{R} risolva l'equazione di Yang-Baxter. Per questo motivo dobbiamo trovare delle condizioni ancora più rigide, ed è quello che faremo nella prossima definizione.

Definizione 2.2.4. *Un'algebra di Hopf (A, \mathcal{R}) quasicommutativa, si dice **quasitriangolare** se \mathcal{R} soddisfa le seguenti condizioni aggiuntive*

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}, \\
(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Se (A, \mathcal{R}) è quasitriangolare, l'elemento \mathcal{R} è detto **R -matrice universale**. La prossima proposizione ci assicura che, se \mathcal{R} soddisfa le condizioni (2.4), allora risolve l'equazione di Yang-Baxter quantistica e verifica le condizioni (2.3).

Proposizione 2.2.5. *Sia (A, \mathcal{R}) un'algebra di Hopf quasitriangolare. Allora*

- (i) $\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}$,
- (ii) $(\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = 1 = (\text{id} \otimes \epsilon)(\mathcal{R})$,
- (iii) $(S \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}$.

Dimostrazione. Iniziamo dal punto (i): usando le proprietà di \mathcal{R} otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} &= \mathcal{R}_{12} \cdot (\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = (\Delta^{\text{op}} \otimes \text{id})(\mathcal{R}) \cdot \mathcal{R}_{12} = \\
&= \sigma_{12}(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) \cdot \mathcal{R}_{12} = \sigma_{12}(\mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}) \cdot \mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda (ii) invece, abbiamo che

$$\mathcal{R} = ((\epsilon \otimes \text{id}) \Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = (\epsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}) \stackrel{(*)}{=} (\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}) \mathcal{R}.$$

L'uguaglianza (*) può essere provata come segue: se scriviamo \mathcal{R} nella forma $\sum r_i \otimes r^i$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}) &= (\epsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})\left(\sum r_i \otimes 1 \otimes r^i\right) \left(\sum 1 \otimes r_i \otimes r^i\right) = \\
&= \left(\sum \epsilon(r_i) \otimes 1 \otimes r^i\right) \left(\sum \epsilon(1) \otimes r_i \otimes r^i\right) = (\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}) \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Proviamo in ultimo (iii):

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} \cdot (S \otimes \text{id})(\mathcal{R}) &\stackrel{(*)}{=} (m \otimes \text{id})(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \\
&= (m \otimes \text{id})(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) \\
&= (m(\text{id} \otimes S)\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = (u\epsilon \otimes \text{id})(\mathcal{R}) \stackrel{(ii)}{=} 1.
\end{aligned}$$

Anche qui l'uguaglianza (*) si giustifica utilizzando la relazione $\mathcal{R} = \sum r_i \otimes r^i$. \square

Osservazione 2.2.6. *Se (A, \mathcal{R}) è un'algebra di Hopf quasitriangolare, allora ogni rappresentazione di algebre di Hopf $\rho : A \rightarrow \text{End}(V)$, manda \mathcal{R} in un operatore $R \in \text{End}(V \otimes V)$ che risolve l'equazione di Yang-Baxter quantistica, ovvero sia*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

In ultimo infine, grazie alla proposizione 1.4.5, possiamo comporre R con l'operatore di scambio σ e ottenere l'operatore di Yang-Baxter $I = \sigma \circ R$. Abbiamo quindi concluso che ogni algebra di Hopf quasitriangolare (A, \mathcal{R}) ci fa ottenere un operatore di Yang-Baxter, ottenuto dalla rappresentazione sua R -matrice universale composta con l'operatore di scambio.

2.3 Il Quantum Double di Drinfeld

In questa sezione vedremo un metodo molto generale che ci permette di produrre algebre di Hopf quasitriangolari partendo da algebre di Hopf qualsiasi. Nel seguito della sezione, le algebre di Hopf saranno supposte di rango finito come k -moduli. Data un'algebra di Hopf A di rango finito come k -modulo, denotiamo con $A_{\text{op}} = (A, m_{\text{op}}, \Delta, u, \epsilon, S^{-1})$ la sua algebra opposta, e con $A^* = (A^*, m^*, \Delta^*, u^*, \epsilon^*, S^*)$ la sua algebra duale. Sia inoltre $\{e_i\}_i$ una base per A ed A_{op} , e sia invece $\{e^i\}_i$ la base duale per A^* ottenuta dualizzando gli elementi di $\{e_i\}_i$. La struttura di algebra di Hopf su A_{op} è data da:

$$\begin{aligned}
m_{\text{op}}(e_i \otimes e_j) &= e_j e_i = \sum_k m_{ji}^k e_k, \\
\Delta(e_i) &= \sum_{k,l} \Delta_i^{kl} e_k \otimes e_l, \\
S^{-1}(e_i) &= \sum_k (S^{-1})_i^k e_k.
\end{aligned}$$

Usando le relazioni duali, riportate nella definizione/proposizione 2.1.5, possiamo ottenere la struttura di algebra di Hopf su A^* . In questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned}
e^i e^j &= \sum_k \langle e^i e^j, e_k \rangle e^k \\
&= \sum_k \langle e^i \otimes e^j, \Delta(e_k) \rangle e^k = \dots = \sum_k \Delta_k^{ij} e^k, \\
\Delta^*(e^i) &= \sum_{k,l} \langle \Delta^*(e^i), e_k \otimes e_l \rangle e^k \otimes e^l \\
&= \sum_{k,l} \langle e^i, e_k \cdot e_l \rangle e^k \otimes e^l = \dots = \sum_{k,l} m_{kl}^i e^k \otimes e^l, \\
S^*(e^i) &= \sum_k \langle S^*(e^i), e_k \rangle e^k \\
&= \sum_k \langle e^i, S(e_k) \rangle e^k = \dots = \sum_k S_k^i e^k.
\end{aligned}$$

Lemma 2.3.1. *Sia A un'algebra di Hopf di rango finito come k -modulo. Definiamo $\tilde{A} = A^* \otimes_{A_{\text{op}}}$ come l'algebra di Hopf definita dal prodotto tensoriale di A^* ed A_{op} , e poniamo $\tilde{F} \in \tilde{A} \otimes \tilde{A}$ l'elemento canonico*

$$\tilde{F} = \sum_i (1 \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1).$$

Allora \tilde{F} è invertibile, con inverso

$$\tilde{F}^{-1} = \sum_i (1 \otimes S^{-1}(e_i)) \otimes (e^i \otimes 1)$$

e inoltre \tilde{F}^{-1} soddisfa le ipotesi del lemma 2.2.3.

Dimostrazione. La prima cosa da dimostrare è che \tilde{F} è invertibile. Lo mostriamo con un calcolo diretto, che abbiamo ottenuto ricalcando la dimostrazione del punto *iii* di 2.2.5:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}\tilde{F}^{-1} &= \sum_{i,j} 1 \otimes m_{\text{op}}(e_i \otimes S^{-1}(e_j)) \otimes m^*(e^i \otimes e^j) \otimes 1 \\
&= \sum_{i,j,k} 1 \otimes m_{\text{op}}(\text{id} \otimes S^{-1})(e_i \otimes e_j) \otimes \Delta_k^{i,j} e^k \otimes 1 \\
&= \sum_k 1 \otimes m_{\text{op}}(\text{id} \otimes S^{-1})\Delta(e_k) \otimes e^k \otimes 1 \\
&= \sum_k 1 \otimes u\epsilon(e_k) \otimes e^k \otimes 1
\end{aligned}$$

e per concludere prendiamo come elementi di base $e_0 = 1$, ed $e_i \in \ker(\epsilon)$ se $i \neq 0$: in questo modo vengono elisi tutti i termini della sommatoria eccetto il primo e quello che otteniamo è

$$\tilde{F}\tilde{F}^{-1} = 1 \otimes u\epsilon(e_0) \otimes e^0 \otimes 1 = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1.$$

Facciamo ora vedere che \tilde{F}^{-1} soddisfa le ipotesi del lemma 2.2.3: dimostriamo innanzitutto la prima relazione, che nel nostro caso è data da

$$(\tilde{F}^{-1})_{12}(\Delta \otimes \text{id})(\tilde{F}^{-1}) = (\tilde{F}^{-1})_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\tilde{F}^{-1}).$$

Per dimostrarla, notiamo preliminarmente che

$$\begin{aligned} \bullet (\Delta \otimes \text{id})(\tilde{F}) &= \sum_i \Delta(1 \otimes e_i) \otimes e^i \otimes 1 \\ &= \sum_{i,k,l} \Delta_i^{kl}(1 \otimes e_k) \otimes (1 \otimes e_l) \otimes (e^i \otimes 1) \\ &= \sum_{k,l} (1 \otimes e_k) \otimes (1 \otimes e_l) \otimes (e^k e^l \otimes 1) = \tilde{F}_{13} \tilde{F}_{23}, \\ \bullet (\text{id} \otimes \Delta)(\tilde{F}) &= \sum_i 1 \otimes e_i \otimes \Delta(e^i \otimes 1) \\ &= \sum_{i,k,l} m_{kl}^i (1 \otimes e_i) \otimes (e^k \otimes 1) \otimes (e^l \otimes 1) \\ &= \sum_{k,l} (1 \otimes e_l e_k) \otimes (e^k \otimes 1) \otimes (e^l \otimes 1) = \tilde{F}_{13} \tilde{F}_{12}, \\ \bullet \tilde{F}_{13} \tilde{F}_{23} \tilde{F}_{12} &= \tilde{F}_{13} \tilde{F}_{12} \tilde{F}_{23}. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che \tilde{F}_{12} ed \tilde{F}_{23} commutano fra loro. Mettendo insieme le osservazioni appena fatte segue

$$(\Delta \otimes 1)(\tilde{F}) \tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{13} \tilde{F}_{23} \tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{13} \tilde{F}_{12} \tilde{F}_{23} = (1 \otimes \Delta)(\tilde{F}) \tilde{F}_{23}.$$

e invertendo gli estremi dell'uguaglianza otteniamo la prima relazione. Per quanto riguarda la seconda relazione, invece, ovverosia

$$(\epsilon \otimes \text{id})(\tilde{F}^{-1}) = 1 = (\text{id} \otimes \epsilon)(\tilde{F}^{-1}),$$

ricordiamo che abbiamo già scelto gli elementi di base in modo che $e_0 = 1$, ed $e_i \in \ker(\epsilon)$ se $i \neq 0$, e questo è sufficiente a verificarla. \square

Teorema 2.3.2. *Sia A un'algebra di Hopf di rango finito come k -modulo con antipodo invertibile. Definiamo $H = A^* \otimes A_{\text{op}}$, come k -modulo, dotata delle seguenti strutture di algebra di Hopf:*

1. *La struttura di algebra su H è quella usuale definita su $A^* \otimes A_{\text{op}}$.*
2. *Come coalgebra, H è dotata della seguente comoltiplicazione:*

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \Delta \mathcal{F}^{-1}$$

dove Δ è l'usuale comoltiplicazione di cui è dotato $A^* \otimes A_{\text{op}}$, e $\mathcal{F} \in H \otimes H$ è l'elemento canonico definito come

$$\mathcal{F} = \tilde{F}^{-1} = \sum_i (1 \otimes S^{-1}(e_i)) \otimes (e^i \otimes 1).$$

3. La counità di H è il prodotto tensoriale delle counità di A^* ed A_{op} .

Allora H è un'algebra di Hopf, con antipodo invertibile dato da

$$S_{\mathcal{F}}(l \otimes a) = f(S^*(l) \otimes S^{-1}(a))f^{-1}$$

dove $f = \sum_i e^i \otimes e_i \in H$, per ogni $l \otimes a \in H$.

Dimostrazione. Il fatto che H sia una coalgebra si ottiene mettendo insieme i lemmi 2.2.3 e 2.3.1. Il fatto che $\Delta_{\mathcal{F}}$ sia un morfismo di algebre scende immediato da Δ morfismo di algebre:

$$\Delta_{\mathcal{F}}(xy) = \mathcal{F}\Delta(xy)\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\Delta(x)\Delta(y)\mathcal{F}^{-1} = \Delta_{\mathcal{F}}(x)\Delta_{\mathcal{F}}(y).$$

L'unica cosa non banale da provare è che $S_{\mathcal{F}}$ è un antipodo. Dobbiamo provare che valgono le relazioni

$$m(S_{\mathcal{F}} \otimes \text{id})\Delta_{\mathcal{F}}(l \otimes a) = m(\text{id} \otimes S_{\mathcal{F}})\Delta_{\mathcal{F}}(l \otimes a) = \epsilon(l)\epsilon(a).$$

Mediante i seguenti passaggi otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{F}}(l \otimes a) &= \\ &= \mathcal{F}(\sum(l_{(1)} \otimes a_{(1)}) \otimes (l_{(2)} \otimes a_{(2)}))\mathcal{F}^{-1} \\ &= \sum(l_{(1)} \otimes S^{-1}(e_i)a_{(1)}e_j) \otimes (e^i l_{(2)} e^j \otimes a_{(2)}), \\ (S_{\mathcal{F}} \otimes \text{id})\Delta_{\mathcal{F}}(l \otimes a) &= \\ &= \sum f(S^*(l_{(1)}) \otimes S^{-1}(S^{-1}(e_i)a_{(1)}e_j))f^{-1} \otimes e^i l_{(2)} e^j \otimes a_{(2)} \\ &= \sum e^k S^*(l_{(1)})e^m \otimes e_k S^{-1}(e_j)S^{-1}a_{(1)}S^{-2}(e_i)S^{-1}(e_m) \otimes e^i l_{(2)} e^j \otimes a_{(2)}, \\ m(S_{\mathcal{F}} \otimes \text{id})\Delta_{\mathcal{F}}(l \otimes a) &= \\ &= \sum e^k S^*(l_{(1)})\underline{e^m e^i} l_{(2)} e^j \otimes e_k S^{-1}(e_j)S^{-1}(a_{(1)})\underline{S^{-2}(e_i)S^{-1}(e_m)} a_{(2)}. \end{aligned}$$

Isoliamo i termini sottolineati e trattiamoli separatamente:

$$\begin{aligned} \sum e^m e^i \otimes S^{-2}(e_i)S^{-1}(e_m) &= (\text{id} \otimes S^{-1}) \sum e^m e^i \otimes e_m S^{-1}(e_i) = \\ &= \text{id} \otimes S^{-1} \sum (e^m \otimes e_m)(e^i \otimes S^{-1}(e_i)) = (\text{id} \otimes S^{-1})(ff^{-1}) = 1_H. \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} m(S_{\mathcal{F}} \otimes \text{id})\Delta_{\mathcal{F}}(l \otimes a) &= \sum e^k S^*(l_{(1)})l_{(2)}e^j \otimes e_k S^{-1}(e_j)S^{-1}(a_{(1)})a_{(2)} \\ &= \sum e^k \epsilon(l)e^j \otimes e_k S^{-1}(e_j)\epsilon(a) = \epsilon(l)\epsilon(a) \sum e^k e^j \otimes e_k S^{-1}(e_j) \\ &= \epsilon(l)\epsilon(a)(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}) = \epsilon(l)\epsilon(a). \end{aligned}$$

La relazione $m(\text{id} \otimes S_{\mathcal{F}})\Delta_{\mathcal{F}}(l \otimes a) = \epsilon(l)\epsilon(a)$ si prova in modo analogo, per cui ne omettiamo la verifica. \square

Siamo finalmente pronti per definire il *quantum double* di Drinfeld:

Definizione 2.3.3. *Data un'algebra di Hopf A di rango finito come k -modulo, il suo **quantum double**, che denoteremo con $\mathcal{D}(A)$ è l'algebra di Hopf H^* , che si ottiene dualizzando $H = A^* \otimes A_{\text{op}}$, (la struttura di algebra di Hopf su H è definita come nel teorema 2.3.2).*

Teorema 2.3.4. *L'algebra di Hopf $\mathcal{D}(A) = H^*$ è isomorfa come coalgebra al prodotto tensoriale $A \otimes (A^*)^{\text{op}}$, mentre a livello di algebre, abbiamo che, per ogni $a, a' \in A$, e $l, l' \in (A^*)^{\text{op}}$, vale la seguente struttura moltiplicativa:*

$$(i) (a \otimes 1).(a' \otimes 1) = aa' \otimes 1,$$

$$(ii) (1 \otimes l).(1 \otimes l') = 1 \otimes ll',$$

$$(iii) (a \otimes 1).(1 \otimes l) = a \otimes l,$$

$$(iv) (1 \otimes l).(a \otimes 1) = \sum \langle l_{(1)}, S^{-1}(a_{(1)}) \rangle \langle l_{(3)}, a_{(3)} \rangle a_{(2)} \otimes l_{(2)}.$$

In particolare quindi, dalle relazioni (i) e (ii) segue che A ed $(A^*)^{\text{op}}$ possono essere immerse come sottoalgebre di Hopf in $\mathcal{D}(A)$.

Dimostrazione. La comoltiplicazione su H^* è definita da

$$\langle \Delta^*(a \otimes l), (k \otimes b) \otimes (k' \otimes b') \rangle = \langle a \otimes l, m_{A^* \otimes A_{\text{op}}}((k \otimes b) \otimes (k' \otimes b')) \rangle,$$

da cui segue che Δ^* è l'usuale comoltiplicazione $\Delta^{A \otimes A^* \text{op}}$.

Proviamo ora che valgono le relazioni moltiplicative. Partiamo da (i): siano pertanto $a, a' \in A$, dobbiamo provare che

$$\langle (a \otimes 1).(a' \otimes 1), k \otimes b \rangle = \langle aa' \otimes 1, k \otimes b \rangle$$

per ogni $k \in A^*$, $b \in A_{\text{op}}$. Andiamo a sviluppare i calcoli

$$\begin{aligned} \langle (a \otimes 1).(a' \otimes 1), k \otimes b \rangle &= \\ &= \langle (a \otimes 1) \otimes (a' \otimes 1), \Delta_{\mathcal{F}}(k \otimes b) \rangle \\ &= \langle (a \otimes 1) \otimes (a' \otimes 1), \sum (k_{(1)} \otimes S^{-1}(e_i) b_{(1)} e_j) \otimes (e^i k_{(2)} e^j \otimes b_{(2)}) \rangle \\ &= \sum \langle a, k_{(1)} \rangle \langle 1, S^{-1}(e_i) b_{(1)} e_j \rangle \langle a', e^i k_{(2)} e^j \rangle \langle 1, b_{(2)} \rangle \\ &= \sum \langle a, k_{(1)} \rangle \epsilon(S^{-1}(e_i)) \epsilon(b_{(1)}) \epsilon(e_j) \langle a', e^i k_{(2)} e^j \rangle \epsilon(b_{(2)}) \end{aligned}$$

e scegliamo come al solito una base $\{e_i\}_i$ in modo che $e_0 = 1$, $e_i \in \ker(\epsilon)$ se $i \neq 0$. In questo modo otteniamo

$$\begin{aligned}
\langle (a \otimes 1).(a' \otimes 1), k \otimes b \rangle &= \dots \\
&= \sum \langle a, k_{(1)} \rangle \epsilon(b_{(1)}) \langle a', k_{(2)} \rangle \epsilon(b_{(2)}) \\
&= \sum \langle a, k_{(1)} \rangle \langle a', k_{(2)} \rangle \epsilon(b_{(1)} b_{(2)}) \\
&= \langle a \otimes a', \Delta(k) \rangle \epsilon(b) = \langle aa', k \rangle \langle 1, b \rangle = \langle aa' \otimes 1, k \otimes b \rangle.
\end{aligned}$$

Il punto (ii) si prova in modo analogo. Nel seguito della dimostrazione supporremo sempre $e_0 = 1$, $e_i \in \ker(\epsilon)$ se $i \neq 0$. Andiamo ora a dimostrare il punto (iii), anche questo lo facciamo con un calcolo diretto.

$$\begin{aligned}
\langle (a \otimes 1).(1 \otimes l), k \otimes b \rangle &= \\
&= \langle (a \otimes 1) \otimes (1 \otimes l), \Delta_{\mathcal{F}}(k \otimes b) \rangle \\
&= \langle (a \otimes 1) \otimes (1 \otimes l), \sum (k_{(1)} \otimes S^{-1}(e_i) b_{(1)} e_j) \otimes (e^i k_{(2)} e^j \otimes b_{(2)}) \rangle \\
&= \sum \langle a, k_{(1)} \rangle \epsilon(S^{-1}(e_i)) \epsilon(b_{(1)}) \epsilon(e_j) \epsilon(e^i) \epsilon(k_{(2)}) \epsilon(e^j) \langle l, b_{(2)} \rangle \\
&= \sum \langle a, k_{(1)} \rangle \epsilon(b_{(1)}) \epsilon(k_{(2)}) \langle l, b_{(2)} \rangle \\
&= \sum \langle a \otimes 1 \otimes 1 \otimes l, k_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes b_{(2)} \rangle \\
&= \langle a \otimes 1 \otimes 1 \otimes l, \Delta(k \otimes b) \rangle \\
&= \langle (a \otimes 1)(1 \otimes l), k \otimes b \rangle = \langle a \otimes l, k \otimes b \rangle.
\end{aligned}$$

Resta da provare soltanto il punto (iv), che si ottiene come segue

$$\begin{aligned}
\langle (1 \otimes l).(a \otimes 1), k \otimes b \rangle &= \\
&= \langle (1 \otimes l) \otimes (a \otimes 1), \Delta_{\mathcal{F}}(k \otimes b) \rangle \\
&= \langle (1 \otimes l) \otimes (a \otimes 1), \sum (k_{(1)} \otimes S^{-1}(e_i) b_{(1)} e_j) \otimes (e^i k_{(2)} e^j \otimes b_{(2)}) \rangle \\
&= \sum \epsilon(k_{(1)}) \langle l, S^{-1}(e_i) b_{(1)} e_j \rangle \langle a, e^i k_{(2)} e^j \rangle \epsilon(b_{(2)}) \\
&= \sum \langle l, S^{-1}(e_i) b e_j \rangle \langle a, e^i k e^j \rangle \\
&= \sum \langle l_{(1)}, S^{-1}(e_i) \rangle \langle l_{(2)}, b \rangle \langle l_{(3)}, e_j \rangle \langle a_{(1)}, e^i \rangle \langle a_{(2)}, k \rangle \langle a_{(3)}, e^j \rangle \\
&= \sum \langle S^{*(-1)}(l_{(1)}) \otimes a_{(1)}, e_i \otimes e^i \rangle \langle l_{(3)} \otimes a_{(3)}, e_j \otimes e^j \rangle \langle l_{(2)} \otimes a_{(2)}, b \otimes k \rangle \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum \langle S^{*(-1)}(l_{(1)}), a_{(1)} \rangle \langle l_{(3)}, a_{(3)} \rangle \langle l_{(2)} \otimes a_{(2)}, b \otimes k \rangle \\
&= \left\langle \sum \langle l_{(1)}, S^{-1}(a_{(1)}) \rangle \langle l_{(3)}, a_{(3)} \rangle, l_{(2)} \otimes a_{(2)}, b \otimes k \right\rangle,
\end{aligned}$$

dove nell'uguaglianza (*) abbiamo usato l'identità $\sum_i \langle m \otimes c, e_i \otimes e^i \rangle = \langle m, c \rangle$. La si può verificare come segue:

$$\langle m, c \rangle = \langle m, \sum \langle c, e^i \rangle e_i \rangle = \sum \langle m, e_i \rangle \langle c, e^i \rangle = \sum \langle m \otimes c, e_i \otimes e^i \rangle.$$

□

Teorema 2.3.5. *Sia $\mathcal{R} = \sum_i (e_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes e^i) \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)$. Allora \mathcal{R} è invertibile, con inverso*

$$\mathcal{R}^{-1} = \sum_i S(e_i) \otimes 1 \otimes 1 \otimes e^i,$$

inoltre $(\mathcal{D}(A), \mathcal{R})$ è un'algebra di Hopf quasitriangolare.

Dimostrazione. L'invertibilità di \mathcal{R} viene provata in maniera analoga all'invertibilità di \tilde{F} , riportata nel lemma 2.3.1. Proviamo invece che valgono le seguenti relazioni:

$$(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23},$$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}.$$

Per quanto riguarda la prima, abbiamo che

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) &= \sum \Delta(e_i \otimes 1) \otimes 1 \otimes e^i \\ &= \sum \Delta_i^{kl}(e_k \otimes 1) \otimes (e_l \otimes 1) \otimes 1 \otimes e^i \\ &= \sum (e_k \otimes 1) \otimes (e_l \otimes 1) \otimes 1 \otimes e^k e^l = \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}. \end{aligned}$$

L'altra relazione si prova in modo analogo. Per concludere, dobbiamo provare che \mathcal{R} rende $\mathcal{D}(A)$ quasicommutativa, ovvero sia che, per ogni $a \in A$, $l \in (A^*)^{\text{op}}$, si ha che

$$\mathcal{R} \cdot \Delta(a \otimes l) = \Delta^{\text{op}}(a \otimes l) \cdot \mathcal{R}. \quad (2.5)$$

Dimostriamo innanzitutto che (2.5) è vera per gli elementi nella forma $a \otimes 1$ e $1 \otimes l$. Dobbiamo quindi provare che valgono le relazioni

$$\mathcal{R} \Delta(a \otimes 1) = \Delta^{\text{op}}(a \otimes 1) \mathcal{R}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{R} \Delta(1 \otimes l) = \Delta^{\text{op}}(1 \otimes l) \mathcal{R}. \quad (2.7)$$

Per quanto riguarda (2.6), il membro di destra è dato da

$$\Delta^{\text{op}}(a \otimes 1) \mathcal{R} = \sum a_{(2)} e_i \otimes 1 \otimes a_{(1)} \otimes e^i,$$

mentre il membro di sinistra si sviluppa come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \Delta(a \otimes 1) &= \\ &= \sum (e_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes e^i) (a_{(1)} \otimes 1 \otimes a_{(2)} \otimes 1) \\ &= \sum e_i a_{(1)} \otimes 1 \otimes (1 \otimes e^i) (a_{(2)} \otimes 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum e_i a_{(1)} \otimes 1 \otimes \langle e_{(1)}^i, S^{-1}(a_{(2)}) \rangle \langle e_{(3)}^i, a_{(4)} \rangle a_{(3)} \otimes e_{(2)}^i \\
&= \sum e_i a_{(1)} \otimes 1 \otimes \langle e_{(1)}^i, S^{-1}(a_{(2)}) \rangle \langle e_{(3)}^i, a_{(4)} \rangle a_{(3)} \otimes \langle e_{(2)}^i, e_j \rangle e^j \\
&= \sum e_i a_{(1)} \otimes 1 \otimes \langle e_{(3)}^i \otimes e_{(2)}^i \otimes e_{(1)}^i, a_{(4)} \otimes e_j \otimes S^{-1}(a_{(2)}) \rangle a_{(3)} \otimes e^j \\
&= \sum e_i a_{(1)} \otimes 1 \otimes \langle e^i, a_{(4)} e_j S^{-1}(a_{(2)}) \rangle a_{(3)} \otimes e^j \\
&= \sum \langle e^i, a_{(4)} e_j S^{-1}(a_{(2)}) \rangle e_i a_{(1)} \otimes 1 \otimes a_{(3)} \otimes e^j \\
&= \sum a_{(4)} e_j S^{-1}(a_{(2)}) a_{(1)} \otimes 1 \otimes a_{(3)} \otimes e^j \\
&= \sum a_{(4)} e_j u\epsilon(a_{(2)}) \otimes 1 \otimes a_{(3)} \otimes e^j \\
&= \sum a_{(4)} e_j \otimes 1 \otimes u\epsilon(a_{(2)}) a_{(3)} \otimes e^j \\
&= \sum a_{(4)} e_j \otimes 1 \otimes a_{(3)} \otimes e^j \\
&= \sum a_{(2)} e_j \otimes 1 \otimes a_{(1)} \otimes e^j = \Delta^{\text{op}}(a \otimes 1) \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

La relazione (2.7) si fa con ragionamenti analoghi. Il membro di sinistra si sviluppa in

$$\mathcal{R}\Delta(1 \otimes l) = \sum e_i \otimes l_{(1)} \otimes 1 \otimes e^i l_{(2)}.$$

Per quanto riguarda il membro di destra invece abbiamo

$$\begin{aligned}
&\Delta^{\text{op}}(1 \otimes l) \mathcal{R} = \\
&= \sum (1 \otimes l_{(2)})(e_i \otimes 1) \otimes 1 \otimes l_{(1)} e^i \\
&= \sum \langle l_{(2)}, S^{-1}(e_i(1)) \rangle \langle l_{(4)}, e_i(3) \rangle e_i(2) \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes l_{(1)} e^i \\
&= \sum \langle S^*(l_{(2)}), e_i(1) \rangle \langle l_{(4)}, e_i(3) \rangle e_i(2) \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes l_{(1)} e^i \\
&= \sum \langle S^*(l_{(2)}) \otimes e^j \otimes l_{(4)}, e_i(1) \otimes e_i(2) \otimes e_i(3) \rangle e_j \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes l_{(1)} e^i \\
&= \sum \langle S^*(l_{(2)}) e^j l_{(4)}, e_i \rangle e_j \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes l_{(1)} e^i \\
&= \sum e_j \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes l_{(1)} \langle S^*(l_{(2)}) e^j l_{(4)}, e_i \rangle e^i \\
&= \sum e_j \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes l_{(1)} S^*(l_{(2)}) e^j l_{(4)} \\
&= \sum e_j \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes u\epsilon(l_{(2)}) e^j l_{(4)} \\
&= \sum e_j \otimes u\epsilon(l_{(2)}) l_{(3)} \otimes 1 \otimes e^j l_{(4)} \\
&= \sum e_j \otimes l_{(3)} \otimes 1 \otimes e^j l_{(4)} \\
&= \sum e_j \otimes l_{(1)} \otimes 1 \otimes e^j l_{(2)} = \mathcal{R}\Delta(1 \otimes l).
\end{aligned}$$

A questo punto il caso generale, ovverosia (2.5), può essere dedotto da (2.6) e (2.7), sfruttando il fatto che Δ e Δ^{op} sono morfismi di algebre:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\Delta(a \otimes l) &= \mathcal{R}\Delta((a \otimes 1)(1 \otimes l)) = \mathcal{R}\Delta(a \otimes 1)\Delta(1 \otimes l) = \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \Delta^{\text{op}}(a \otimes 1)\mathcal{R}\Delta(1 \otimes l) \stackrel{(2.7)}{=} \Delta^{\text{op}}(a \otimes 1)\Delta^{\text{op}}(1 \otimes l)\mathcal{R} = \Delta^{\text{op}}(a \otimes l)\mathcal{R}. \end{aligned}$$

□

Capitolo 3

Algebre universali inviluppanti quantizzate

In questo capitolo andremo a discutere una famiglia di algebre di Hopf quasitriangolari molto importante, ovvero le algebre universali involuanti quantizzate. Nella sezione 3.1 costruiremo la definizione di quantizzazione, e poi nella sezione 3.2 andremo ad applicarla all'algebra universale involuante $U(\mathfrak{sl}_2)$. Dopo aver costruito l'algebra universale involuante quantizzata $U_h(\mathfrak{sl}_2)$, dimostreremo che la sua struttura di algebra di Hopf è "quasi" isomorfa a quella di un quantum double opportunamente costruito, e quindi $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ è quasitriangolare. Per la precisione: dimostreremo che $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ è isomorfa come algebra di Hopf al quantum double $\mathcal{D}(U_h(\mathfrak{b}_+))/\sim$, dove $\mathfrak{b}_+ \leq \mathfrak{sl}_2$ è la sottoalgebra di Lie generata dal sottoinsieme $\{H, E\}$, e \sim è una relazione di equivalenza opportunamente costruita. Usando quest'isomorfismo otterremo una costruzione esplicita della R -matrice universale di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$. In ultimo, nella sezione 3.3 generalizzeremo i risultati ottenuti nella sezione precedente, facendo vedere che ogni algebra universale involuante quantizzata $U_h(\mathfrak{g})$ è "quasi" isomorfa al quantum double di una sua sottoalgebra, e quindi è quasitriangolare. In questa sezione daremo un elenco degli operatori di Yang-Baxter che si possono ottenere dalle R -matrici universali delle varie $U_h(\mathfrak{g})$. Nel prossimo capitolo tali operatori verranno utilizzati per produrre degli invarianti di nodi.

3.1 La definizione di quantizzazione

Le quantizzazioni, in parole povere, sono delle *deformazioni* di Algebre di Hopf che rispettano le *strutture di Hopf-Poisson*: costruiremo tale definizione in 3 steps: Deformazioni - Strutture di Poisson - Quantizzazione.

3.1.1 Deformare un'algebra di Hopf

Definizione 3.1.1. Una *deformazione* di un'algebra di Hopf $(A, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ sopra ad un campo k è un'algebra di Hopf topologica $(A_h, m_h, u_h, \Delta_h, \epsilon_h, S_h)$ sopra all'anello $k[[h]]$ delle serie formali ad indeterminata h , tale che

- (i). $A_h \simeq A[[h]]$ come $k[[h]]$ -modulo,
- (ii). $m_h \equiv m \pmod{h}$, $\Delta_h \equiv \Delta \pmod{h}$.

Vediamo di ora di commentare la definizione appena scritta:

- La condizione (i) ci dice che tutti gli elementi di A_h si scrivono nella forma

$$a = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots \quad (a_0, a_1, a_2, \dots \in A) \quad (3.1)$$

e che dunque $A_h \simeq A[[h]]$ come $k[[h]]$ -modulo, (in altre parole A_h è il completamento di A rispetto alla topologia h -adica).

- Per quanto riguarda la condizione (ii), notiamo che

$$m_h(a \otimes a') = m(a \otimes a') + m_1(a \otimes a')h + m_2(a \otimes a')h^2 + \cdots, \quad (3.2)$$

$$\Delta_h(a) = \Delta(a) + \Delta_1(a)h + \Delta_2(a)h^2 + \cdots, \quad (3.3)$$

dove le mappe m_i e Δ_i sono morfismi di k -moduli. La condizione (ii) ci vincola ad imporre $m_0 = m$, $\Delta_0 = \Delta$, poichè se andiamo a esplicitarla:

$$m_h \equiv m_0 \equiv m \pmod{h},$$

$$\Delta_h \equiv \Delta_0 \equiv \Delta \pmod{h}.$$

Questa condizione può essere riformulata dicendo che il limite classico ($h \rightarrow 0$) di m_h e Δ_h coincide rispettivamente con m e Δ .

Ora dobbiamo imporre che $(A_h, m_h, u_h, \Delta_h, \epsilon_h, S_h)$ sia algebra di Hopf.

- La prima condizione da imporre è che m_h sia associativa, ovverosia

$$m_h(m_h \otimes \text{id}) = m_h(\text{id} \otimes m_h).$$

È sufficiente sviluppare questa condizione sugli elementi di A , che a questo punto diventa

$$\sum_{i=0}^n m_{n-i}(m_i \otimes \text{id}) = \sum_{i=0}^n m_{n-i}(\text{id} \otimes m_i) \quad (3.4)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. In modo analogo, la condizione di coassociatività su Δ_h , ovverosia $(\Delta_h \otimes \text{id})\Delta_h = (\text{id} \otimes \Delta_h)\Delta_h$, sviluppata sugli elementi di A diventa

$$\sum_{i=0}^n (\Delta_{n-i} \otimes \text{id})\Delta_i = \sum_{i=0}^n (\text{id} \otimes \Delta_{n-i})\Delta_i. \quad (3.5)$$

- Andiamo ora a vedere cosa accade ad unità e counità. Iniziamo dall'unità: si noti che, come per ogni algebra, u_h viene fissata nel momento in cui definiamo $u_h(1) = 1_{A_h}$. In particolare, possiamo porre

$$u_h(1) = 1_{A_h} = u_0(1) + u_1(1)h + u_2(1)h^2 + \dots$$

La condizione da imporre sugli elementi di A è data da

$$m_h(u_h(1) \otimes \text{id}) = \text{id} = m_h(\text{id} \otimes u_h(1))$$

che sviluppata diventa

$$m_0(u_0(1) \otimes \text{id}) = \text{id} = m_0(\text{id} \otimes u_0(1)) \quad \Rightarrow \quad u_0(1) = 1_A = u(1),$$

$$\sum_{i=0}^n m_{n-i}(u_i(1) \otimes \text{id}) = 0 = \sum_{i=0}^n m_{n-i}(\text{id} \otimes u_i(1)).$$

In particolare quindi abbiamo che $u_h(1) \equiv u(1) \pmod{h}$, o equivalentemente $1_{A_h} \equiv 1_A \pmod{h}$. In modo analogo la condizione sulla counità, ovverosia,

$$(\epsilon_h \otimes \text{id})\Delta_h = \text{id} = (\text{id} \otimes \epsilon_h)\Delta_h$$

sviluppata diventa

$$(\epsilon_0 \otimes \text{id})\Delta_0 = \text{id} = (\text{id} \otimes \epsilon_0)\Delta_0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 = \epsilon$$

$$\sum_{i=0}^n (\epsilon_{n-i} \otimes \text{id})\Delta_i = 0 = \sum_{i=0}^n (\text{id} \otimes \epsilon_{n-i})\Delta_i$$

ed in particolare quindi $\epsilon_h \equiv \epsilon \pmod{h}$. Si può comunque provare che ogni deformazione A_h è isomorfa, come $k[[h]]$ -algebra di Hopf, ad una $k[[h]]$ -algebra di Hopf in cui u_h e ϵ_h sono definite in modo banale, ovverosia estendendo u ed ϵ per $k[[h]]$ -linearità. Esplicitamente,

$$u_h(1) = u(1), \quad \epsilon_h(a) = \epsilon(a)$$

per ogni elemento $a \in A$. Da ora in avanti supporremo sempre $u_h = u$, $\epsilon_h = \epsilon$.

- Ora dobbiamo imporre che Δ_h ed $\epsilon_h = \epsilon$ siano morfismi di algebre: le condizioni su Δ_h sono

$$\Delta_h \circ m_h = (m_h \otimes m_h) \circ (\Delta_h^{13} \otimes \Delta_h^{24})$$

$$\Delta_h \circ u = (u \otimes u) \circ \Delta_h \quad \Rightarrow \quad \Delta_n \circ u = (u \otimes u) \circ \Delta_n.$$

La seconda è già stata sviluppata, la prima invece diventa

$$\sum_{i=0}^n \Delta_{n-i} \circ m_i = \sum_{i+j+k+l=n} (m_i \otimes m_j) \circ (\Delta_k^{13} \otimes \Delta_l^{24}).$$

Per quanto riguarda ϵ invece dobbiamo imporre

$$\epsilon \circ m_h = m_h \circ (\epsilon \otimes \epsilon) \quad \Rightarrow \quad \epsilon \circ m_n = m_n \circ (\epsilon \otimes \epsilon),$$

$$\epsilon \circ u = \text{id}, \quad \text{che chiaramente è già verificata.}$$

- In ultimo dobbiamo far vedere che una deformazione di bialgebre è anche una deformazione di algebre di Hopf. Le condizioni sull'antipodo sono data da

$$m_h(S_h \otimes \text{id})\Delta_h = u\epsilon = m_h(\text{id} \otimes S_h)\Delta_h,$$

e se andiamo a svilupparle otteniamo

$$m(S_0 \otimes \text{id})\Delta = u\epsilon = m(\text{id} \otimes S_0)\Delta \quad \Rightarrow \quad S_0 = S$$

$$\sum_{i+j+k=n} m_i(S_j \otimes \text{id})\Delta_k = 0 = \sum_{i+j+k=n} m_i(\text{id} \otimes S_j)\Delta_k.$$

L'idea a questo punto è di risolvere ricorsivamente l'equazione: supponiamo di aver determinato tutti gli S_i fino ad $i \leq n-1$. S_n può essere ricavato notando che

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=n} m_i(S_j \otimes \text{id})\Delta_k &= m(S_n \otimes \text{id})\Delta + \sum_{\substack{i+j+k=n \\ j \neq n}} m_i(S_j \otimes \text{id})\Delta_k = \\ &= m(S_n \otimes \text{id})\Delta - f_{n-1} = S_n * \text{id} - f_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Da cui scende che

$$S_n * \text{id} = f_{n-1} \quad \Rightarrow \quad S_n * \text{id} * S = f_{n-1} * S \quad \Rightarrow \quad S_n = f_{n-1} * S$$

e questo fissa le condizioni sull'antipodo.

3.1.2 Coalgebre di Hopf-Poisson

Come suggerisce il termine, le coalgebre di Hopf-Poisson sono delle algebre di Hopf assieme ad una struttura aggiuntiva chiamata *coparentesi di Poisson*. La definizione di coparentesi di Poisson si ottiene dualizzando quella di parentesi di Poisson. Anche in questa sezione tradurremo tutto usando il linguaggio delle categorie, ovvero sia in termini di diagrammi commutativi.

Definizione 3.1.2. Un'algebra di Poisson è un'algebra commutativa (A, m, u) assieme ad una mappa $\{ , \} : A \otimes A \rightarrow A$, che chiameremo **parentesi di Poisson**, tale che, per ogni $a, b, c \in A$, soddisfi le seguenti proprietà:

- i. Antisimmetria: $\{a, b\} = -\{b, a\}$,
- ii. Identità di Jacobi: $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$,
- iii. Identità di Leibniz: $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$.

Rielaboriamo la definizione appena data usando il linguaggio delle categorie: sia $\gamma : A \otimes A \rightarrow A$, la mappa che corrisponde a $\{ , \}$. Tale mappa deve soddisfare:

- i. Antisimmetria: $\gamma(b \otimes a) = -\gamma(a \otimes a)$, ovvero sia

$$\gamma \circ \sigma = -\gamma. \quad (3.6)$$

- ii. Id. Jacobi: $\gamma(a \otimes \gamma(b \otimes c)) + \gamma(b \otimes \gamma(c \otimes a)) + \gamma(c \otimes \gamma(a \otimes b)) = 0$,

$$\gamma(\text{id} \otimes \gamma)(\text{id} + \sigma_{23}\sigma_{12} + \sigma_{12}\sigma_{23}) = 0. \quad (3.7)$$

- iii. Id. Leibniz: $\gamma(ab \otimes c) = a\gamma(b \otimes c) + \gamma(a \otimes c)b$, ovvero sia

$$\gamma(m \otimes \text{id}) = m(\text{id} \otimes \gamma) + m(\gamma \otimes \text{id})\sigma_{23}. \quad (3.8)$$

Date $(A, \{ , \}_A)$ e $(B, \{ , \}_B)$ algebre di Poisson sopra a k anello commutativo, l'algebra tensoriale di Poisson è data dal prodotto tensoriale tra A e B come k -algebre, in cui le parentesi di Poisson $\{ , \}_{A \otimes B}$ su $A \otimes A$ sono definite come segue:

$$\{a \otimes b, c \otimes d\}_{A \otimes B} = \{a, c\}_A \otimes bd + ac \otimes \{b, d\}_B$$

per ogni $a, c \in A$ e per ogni $b, d \in B$. In termini di categorie:

$$\gamma_{A \otimes B} = (\gamma_A \otimes m_B + m_A \otimes \gamma_B) \circ \sigma_{23}. \quad (3.9)$$

In ultimo, date $(A, \{ , \}_A)$ e $(B, \{ , \}_B)$ algebre di Poisson sopra a k , un morfismo di algebre di Poisson $f : A \rightarrow B$ è un morfismo di k -algebre che rispetta le parentesi di Poisson, ovvero sia dati due elementi $a, b \in A$

$$f(\{a, b\}_A) = \{f(a), f(b)\}_B.$$

Rielaborata in termini di categorie diventa

$$f \circ \gamma_A = \gamma_B \circ (f \otimes f). \quad (3.10)$$

Definizione 3.1.3. *Un'algebra di Hopf-Poisson è un'algebra di Hopf $(A, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ sopra a k anello commutativo, che è anche algebra di Poisson $(A, \{ , \}_A)$ sopra a k , e le due strutture sono compatibili nel senso che Δ è un morfismo di algebre di Poisson, ovverosia:*

$$\{\Delta(a), \Delta(b)\}_{A \otimes A} = \Delta(\{a, b\}_A), \quad (3.11)$$

o equivalentemente, in termini di categorie,

$$\gamma_{A \otimes A} \circ (\Delta \otimes \Delta) = \Delta \circ \gamma_A. \quad (3.12)$$

Ora che abbiamo ottenuto le definizioni di algebra di Poisson, e algebra di Hopf-Poisson, andiamo a dualizzarle per ottenere le definizioni di coalgebra di Poisson, e coalgebra di Hopf-Poisson.

Definizione 3.1.4. *Una coalgebra di Poisson è una coalgebra cocommutativa (A, Δ, ϵ) assieme ad una mappa di k -moduli $\delta : A \rightarrow A \otimes A$, che chiameremo **coparentesi di Poisson**, tale che*

i. *Antisimmetria:* $\sigma \circ \delta = -\delta$;

ii. *Co-id. Jacobi:* $(\text{id} + \sigma_{23}\sigma_{12} + \sigma_{12}\sigma_{23})(\text{id} \otimes \delta)\delta = 0$, ovverosia

$$\sum a_i \otimes a'_i \otimes a''_i + \sum a'_i \otimes a''_i \otimes a_i + \sum a''_i \otimes a_i \otimes a'_i = 0,$$

dove abbiamo posto $(\text{id} \otimes \delta)\delta(a) = \sum a_i \otimes a'_i \otimes a''_i$;

iii. *Co-id. Leibniz:* $(\Delta \otimes \text{id})\delta = (\text{id} \otimes \delta)\Delta + \sigma_{23}(\delta \otimes \text{id})\Delta$.

Definizione 3.1.5. *Una coalgebra di Hopf-Poisson è un'algebra di Hopf $(A, m, u, \Delta, \epsilon, S)$, che è anche coalgebra di Poisson $(A, \Delta, \epsilon, \delta)$, e le due strutture sono compatibili, nel senso che*

$$\delta(ab) = \delta(a)\Delta(b) + \Delta(a)\delta(b). \quad (3.13)$$

La condizione (3.13) equivale a richiedere che m sia un morfismo di coalgebre di Poisson, ed è stata ottenuta dualizzando (3.12) come riportato qui di seguito

$$\delta_A \circ m = (m \otimes m) \circ \delta_{A \otimes A}.$$

A sua volta la definizione di $\delta_{A \otimes A}$ si ottiene dualizzando (3.9), ovvero

$$\delta_{A \otimes A} = \sigma_{23} \circ (\delta \otimes \Delta + \Delta \otimes \delta).$$

Mettendole insieme otteniamo

$$\begin{aligned} \delta \circ m &= (m \otimes m) \circ \sigma_{23} \circ (\delta \otimes \Delta + \Delta \otimes \delta) = \\ &= m_{A \otimes A} \circ (\delta \otimes \Delta + \Delta \otimes \delta), \end{aligned} \quad (3.14)$$

che non è altro che la versione categoriale di (3.13).

Essendo interessati alla quantizzazione delle algebre universali involu-
panti $U(\mathfrak{g})$, dobbiamo trovare un modo di definire le coparentesi di Poisson
 δ sopra di esse. La prossima proposizione, in tal senso, risulta estremamente
utile, perchè ci dice che è sufficiente definire δ sugli elementi di \mathfrak{g} .

Proposizione 3.1.6. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sopra ad un campo k di ca-
ratteristica zero. Se la sua algebra universale involu-ppante $U(\mathfrak{g})$ ammette
 δ che la rende coalgebra di Hopf-Poisson, allora $\delta(\mathfrak{g}) \leq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, e $(\mathfrak{g}, \delta|_{\mathfrak{g}})$ è
una bialgebra di Lie. Viceversa, se (\mathfrak{g}, δ) è una bialgebra di Lie, allora δ si
estende in modo univoco su $U(\mathfrak{g})$, e la rende una coalgebra di Hopf-Poisson.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Diamo in breve la definizione di bialgebra di Lie: una
bialgebra di Lie è un'algebra di Lie \mathfrak{g} assieme ad una mappa $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes$
 \mathfrak{g} , che chiameremo *coparentesi di Lie*, che è antisimmetrica e soddisfa la
coidentità di Jacobi (vedi definizione 3.1.4). Le due strutture (parentesi di
Lie e coparentesi di Lie) sono compatibili, nel senso che

$$\delta([x, y]) = x.\delta(y) - y.\delta(x),$$

dove $x.\delta(y) = (\text{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \text{ad}_x)\delta(y)$. (Una mappa δ con questa caratteristica
aggiuntiva si chiama *1-cociclo*). Procediamo quindi con la dimostrazione: sia
data $\delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ coparentesi di Poisson su $U(\mathfrak{g})$, e sia $x \in \mathfrak{g}$.
Dobbiamo innanzitutto mostrare che $\delta(x) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, iniziamo col porre

$$\delta(x) = \sum x_i \otimes x'_i,$$

con $x_i, x'_i \in U(\mathfrak{g})$. Dalla condizione *iii* di 3.1.4 segue che

$$\begin{aligned} \sum \Delta(x_i) \otimes x'_i &= (\Delta \otimes \text{id})\delta(x) \\ &= (\text{id} \otimes \delta)\Delta(x) + \sigma_{23}(\delta \otimes \text{id})\Delta(x) \\ &= (\text{id} \otimes \delta)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \sigma_{23}(\delta \otimes \text{id})(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &\stackrel{(*)}{=} 1 \otimes \delta(x) + \cancel{x \otimes \delta(1)} + \sigma_{23}(\delta(x) \otimes 1 + \cancel{\delta(1) \otimes x}) \\ &= 1 \otimes \delta(x) + \sigma_{23}(\delta(x) \otimes 1) \end{aligned}$$

dove nell'uguaglianza (*) i termini si semplificano perchè $\delta(1) = 0$, (non
è difficile provarlo: basta sfruttare la catena di uguaglianze $\delta(1) = \delta(1^2) =$
 $\delta(1)\Delta(1) + \Delta(1)\delta(1) = 2\delta(1)$: se $\delta(1) = 2\delta(1)$, chiaramente si deve avere che
 $\delta(1) = 0$). Se continuiamo a svilupparla, l'uguaglianza di sopra diventa

$$\begin{aligned} \sum \Delta(x_i) \otimes x'_i &= 1 \otimes \delta(x) + \sigma_{23}(\delta(x) \otimes 1) \\ &= \sum 1 \otimes x_i \otimes x'_i + \sum x_i \otimes 1 \otimes x'_i \\ &= \sum (1 \otimes x_i + x_i \otimes 1) \otimes x'_i, \end{aligned}$$

per cui abbiamo appena provato che x_i è primitivo, il che implica $x_i \in \mathfrak{g}$, e quindi $\delta(x) \in \mathfrak{g} \otimes U(\mathfrak{g})$. Dal momento che δ è antisimmetrica, segue che $\delta(x) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ e questo implica, $\delta(\mathfrak{g}) \leq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Proviamo ora che $(\mathfrak{g}, \delta|_{\mathfrak{g}})$ è una bialgebra di Lie: $\delta|_{\mathfrak{g}}$ ovviamente è antisimmetrica poichè è restrizione di una mappa antisimmetrica, e soddisfa la coidentità di Jacobi per lo stesso motivo. L'unica cosa da provare è che $\delta|_{\mathfrak{g}}$ è un 1-cociclo, la verifica viene riportata qui di seguito:

$$\begin{aligned}
\delta([x, y]) &= \delta(xy - yx) = \delta(xy) - \delta(yx) \\
&= \Delta(x)\delta(y) + \delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\delta(x) - \delta(y)\Delta(x) \\
&= [\Delta(x), \delta(y)] - [\Delta(y), \delta(x)] \\
&= [1 \otimes x + x \otimes 1, \delta(y)] - [1 \otimes y + y \otimes 1, \delta(x)] \\
&= x.\delta(y) - y.\delta(x).
\end{aligned}$$

(\Leftarrow) Per il viceversa dobbiamo provare che $(U(\mathfrak{g}), \delta)$ è una coalgebra di Hopf-Poisson: δ è ovviamente antisimmetrica, dal momento che lo è sugli elementi di \mathfrak{g} , e per lo stesso motivo soddisfa la coidentità di Jacobi. Bisogna mostrare che soddisfa la coidentità di Leibniz:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \text{id})\delta(x) &= (\Delta \otimes \text{id})(\sum x_i \otimes x'_i) \\
&= \sum (1 \otimes x_i + x_i \otimes 1) \otimes x'_i \\
&= \sum 1 \otimes x_i \otimes x'_i + \sum x_i \otimes 1 \otimes x'_i \\
&= (\text{id} \otimes \delta)(1 \otimes x) + \sigma_{23}(\delta \otimes \text{id})(x \otimes 1) \\
&= (\text{id} \otimes \delta)\Delta(x) + \sigma_{23}(\delta \otimes \text{id})\Delta(x).
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene sempre da $\delta(1) = 0$.

Facciamo in ultimo vedere che $\delta(xy) = \delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y)$: dal momento che \mathfrak{g} è bialgebra di Lie segue che

$$\begin{aligned}
\delta([x, y]) &= x.\delta(y) - y.\delta(x) = [\Delta(x), \delta(y)] - [\Delta(y), \delta(x)] \\
&= (\delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y)) - (\delta(y)\Delta(x) + \Delta(y)\delta(x)).
\end{aligned}$$

Al tempo stesso, lavorando in $U(\mathfrak{g})$, abbiamo che

$$\delta([x, y]) = \delta(xy - yx) = \delta(xy) - \delta(yx),$$

da cui

$$\delta(xy) - \delta(yx) = (\delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y)) - (\delta(y)\Delta(x) + \Delta(y)\delta(x))$$

il che implica la tesi. □

3.1.3 Quantizzazione

Definizione 3.1.7. Sia $(A, \{ , \})$ un'algebra di Hopf-Poisson commutativa sopra ad un campo di caratteristica zero. Una **quantizzazione** A_h di A è una deformazione di algebre di Hopf tale che, dati $x, y \in A$

$$\{x, y\} \equiv \frac{[a, b]}{h} \equiv \frac{ab - ba}{h} \pmod{h}, \quad (3.15)$$

dove $a, b \in A_h$ sono tali che $a \equiv x \pmod{h}$, $b \equiv y \pmod{h}$.

Si osservi che nella condizione (3.15) è lecito mettere h al denominatore. Se infatti sviluppiamo $\frac{[a, b]}{h}$ otteniamo

$$\frac{[a, b]}{h} = \frac{(x + a_1h + \dots)(y + b_1h + \dots) - (y + b_1h + \dots)(x + a_1h + \dots)}{h}$$

e, siccome A è commutativa, i termini di grado 0 si elidono a vicenda. La condizione (3.15), se sviluppata ulteriormente, equivale a chiedere che

$$\{x, y\} = m_1(x \otimes y) - m_1(y \otimes x).$$

Andiamo a rielaborare (3.15) in termini di categorie, così da poterla poi dualizzare. Le parentesi di Poisson $\{ , \}$ vengono rimpiazzate dalla mappa γ , mentre il commutatore $[,]$ viene sostituito da $m_h - m_{h, \text{op}}$. La formulazione categoriale di (3.15) risulta quindi:

$$\gamma \equiv \frac{m_h - m_{h, \text{op}}}{h} \pmod{h}. \quad (3.16)$$

Definizione 3.1.8. Sia A una coalgebra di Hopf-Poisson cocommutativa sopra ad un campo di caratteristica zero, e siano $\delta : A \rightarrow A \otimes A$ le sue coparentesi di Poisson. Una **quantizzazione** A_h di A è una deformazione di algebre di Hopf tale che, dato $x \in A$

$$\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{\text{op}}(a)}{h} \pmod{h}, \quad (3.17)$$

dove $a \in A_h$ è tale che $a \equiv x \pmod{h}$.

Anche qui la definizione è ben posta perchè, A è cocommutativa e i termini di grado zero, ovverosia $\Delta(x)$ e $-\Delta^{\text{op}}(x)$ si elidono a vicenda. Se sviluppta, la condizione (3.17) equivale a

$$\delta(x) = \Delta_1(x) - \Delta_1^{\text{op}}(x).$$

Nel caso delle algebre universali involuanti $U(\mathfrak{g})$, le cose sono particolarmente favorevoli, poichè ogni deformazione, come mostra la prossima proposizione, è anche una quantizzazione.

Proposizione 3.1.9. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sopra ad un campo k di caratteristica zero, e sia $U_h(\mathfrak{g})$ una deformazione di $U(\mathfrak{g})$. Definiamo quindi $\delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ come*

$$\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{\text{op}}(a)}{h} \pmod{h}$$

dove $a \equiv x \pmod{h}$, allora $(U(\mathfrak{g}), \delta)$ è una coalgebra di Hopf-Poisson.

Dimostrazione. Dal momento che $\delta(x) = \Delta_1(x) - \Delta_1^{\text{op}}(x)$, segue che δ è ben definito: nel seguito della dimostrazione useremo $\Delta_h \pmod{h}$ oppure Δ_1 a seconda della convenienza. Per provare che $(U(\mathfrak{g}), \delta)$ è una coalgebra di Hopf-Poisson, bisogna provare che soddisfa le condizioni imposte dalle definizioni 3.1.4 e 3.1.5. Partiamo da 3.1.4: è chiaro che δ soddisfi il punto *i* (antisimmetria); dobbiamo mostrare che soddisfa anche *ii* e *iii*. Per quanto riguarda *ii* (coidentità di Jacobi) dobbiamo provare che

$$(1 + \sigma_{23}\sigma_{12} + \sigma_{12}\sigma_{23})(1 \otimes \delta)\delta(x) = 0$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}$. Andando a sviluppare il calcolo

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \delta)\delta(x) &\equiv \frac{1}{h^2} \{ (\Delta_h \otimes \text{id})\Delta_h(a) - (\Delta_h^{\text{op}} \otimes \text{id})\Delta_h(a) + \\ &\quad - (\Delta_h \otimes \text{id})\Delta_h^{\text{op}}(a) + (\Delta_h^{\text{op}} \otimes \text{id})\Delta_h^{\text{op}}(a) \} \pmod{h} \end{aligned}$$

e se sviluppiamo gli addendi del membro di destra separatamente, otteniamo

$$\begin{aligned} (\Delta_h \otimes \text{id})\Delta_h(a) &= \sum a_i \otimes a'_i \otimes a''_i, \\ (\Delta_h^{\text{op}} \otimes \text{id})\Delta_h(a) &= \sum a'_i \otimes a_i \otimes a''_i, \\ (\Delta_h \otimes \text{id})\Delta_h^{\text{op}}(a) &= \sum a'_i \otimes a''_i \otimes a_i, \\ (\Delta_h^{\text{op}} \otimes \text{id})\Delta_h^{\text{op}}(a) &= \sum a''_i \otimes a'_i \otimes a_i. \end{aligned}$$

Applicando $\text{id} + \sigma_{23}\sigma_{12} + \sigma_{12}\sigma_{23}$ si vede immediatamente che il risultato è 0 (il ciclo del primo membro si semplifica col ciclo del terzo, e il ciclo del secondo si semplifica col ciclo del quarto).

Proviamo ora *iii*, ovvero la coidentità di Leibniz: dobbiamo far vedere che, per ogni $x \in \mathfrak{g}$ vale

$$(\Delta \otimes \text{id})\delta(x) = (\text{id} \otimes \delta)\Delta(x) + \sigma_{23}(\delta \otimes \text{id})\Delta(x).$$

Sviluppiamo separatamente i tre membri:

$$(\Delta \otimes \text{id})\delta(x) \equiv \frac{1}{h}(\Delta \otimes \text{id})(\Delta_h(a) - \Delta_h^{\text{op}}(a)) \pmod{h},$$

$$(\text{id} \otimes \delta)\Delta(x) \equiv \frac{1}{h}(1 \otimes \Delta_h(a) - 1 \otimes \Delta_h^{\text{op}}(a)) \pmod{h},$$

$$\sigma_{23}(\delta \otimes \text{id}, \nu)\Delta(x) \equiv \frac{1}{h}\sigma_{23}(\Delta_h(a) \otimes 1 - \Delta_h^{\text{op}}(a) \otimes 1) \pmod{h}.$$

Non è difficile concludere eguagliando la somma dei termini positivi con quella dei termini negativi.

Per quanto riguarda la definizione 3.1.5 dobbiamo far vedere che

$$\delta(xy) = \delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y).$$

Anche qui andiamo a sviluppare i calcoli:

$$\begin{aligned} \delta(xy) &= \frac{\Delta_h(xy) - \Delta_h^{\text{op}}(xy)}{h} \pmod{h} \\ &= \frac{\Delta_h(x)\Delta_h(y) - \Delta_h^{\text{op}}(x)\Delta_h^{\text{op}}(y)}{h} \pmod{h} \\ &= \frac{\Delta_h(x)\Delta_h(y) - \Delta_h^{\text{op}}(x)\Delta_h(y) + \Delta_h^{\text{op}}(x)\Delta_h(y) - \Delta_h^{\text{op}}(x)\Delta_h^{\text{op}}(y)}{h} \pmod{h} \\ &= \frac{\Delta_h(x) - \Delta_h^{\text{op}}(x)}{h} \Delta_h(y) - \Delta_h^{\text{op}}(x) \frac{\Delta_h(y) - \Delta_h^{\text{op}}(y)}{h} \pmod{h} \\ &= \delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza sfrutta il fatto che

$$\Delta_h(y) \equiv \Delta(y), \quad \Delta_h^{\text{op}}(x) \equiv \Delta(x) \pmod{h}$$

□

3.2 La quantizzazione di $U(\mathfrak{sl}_2)$

In questa sezione vedremo l'esempio più semplice di algebra universale involuante quantizzata. Nel seguito, porremo $k = \mathbb{C}$, ed abbrevieremo $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ con \mathfrak{sl}_2 . Ricordiamo che \mathfrak{sl}_2 è la \mathbb{C} -algebra di Lie generata dagli elementi E, F, H , in cui le parentesi di Lie sono definite dalle relazioni

$$[E, F] = H, \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F.$$

Denotiamo poi con \mathfrak{b}_+ e \mathfrak{b}_- le sottoalgebre generate rispettivamente da $\{H, E\}$ e $\{H, F\}$, e denotiamo con \mathfrak{h} la sottoalgebra generata dal solo elemento H . Si noti che vale la relazione $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_-$.

3.2.1 Costruzione di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$

Per poter quantizzare $U(\mathfrak{sl}_2)$, dobbiamo dotarla di una struttura di coalgebra di Poisson. Nel seguito della sezione denoteremo le coparentesi di Poisson con la lettera δ . Come detto nella proposizione 3.1.6, non serve definire le coparentesi δ su tutto $U(\mathfrak{sl}_2)$, ma basta definirle soltanto su \mathfrak{sl}_2 , e poi estenderle in modo univoco. C'è un modo standard di definire δ su \mathfrak{sl}_2 , ed è il seguente:

$$\delta(H) = 0, \quad \delta(E) = E \wedge H, \quad \delta(F) = F \wedge H,$$

Con δ così definito, segue che $(\mathfrak{sl}_2, \delta)$ è una bialgebra di Lie, e quindi $(U(\mathfrak{sl}_2), \delta)$ è una coalgebra di Hopf-Poisson. Veniamo ora alla sua quantizzazione: notiamo preliminarmente che $\delta(\mathfrak{b}_\pm) < \mathfrak{b}_\pm \otimes \mathfrak{b}_\pm$, e allo stesso modo $\delta(\mathfrak{h}) < \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$. Pertanto $(\mathfrak{b}_\pm, \delta|_{\mathfrak{b}_\pm})$ e $(\mathfrak{h}, \delta|_{\mathfrak{h}})$ sono sottobialgebre di Lie di $(\mathfrak{sl}_2, \delta)$. La nostra strategia sarà quella di lavorare separatamente prima su $U(\mathfrak{h})$, poi sulle sottoalgebre $U(\mathfrak{b}_\pm)$, e infine mettere assieme i risultati ottenuti.

Iniziamo col definire la comoltiplicazione Δ_h : dobbiamo fare in modo che questa rispetti le tre condizioni qui di seguito riportate:

- (i) Δ_h sia coassociativa,
- (ii) $\Delta_h \equiv \Delta \pmod{h}$, ovvero sia $\Delta_0 = \Delta$,
- (iii) $\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(x) - \Delta_h^{\text{op}}(x)}{h} \pmod{h}$.

Definire Δ_h su $U(\mathfrak{h})$ è relativamente semplice: ci basta definire soltanto $\Delta_h(H)$ e poi estenderla a tutto $U_h(\mathfrak{h})$, sfruttando il fatto che Δ_h è un morfismo di algebre. Essendo $\delta(H) = 0$ possiamo tranquillamente porre

$$\Delta_h(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H \tag{3.18}$$

ovverosia estendere in modo banale la comoltiplicazione $\Delta(H)$. Si verifica facilmente che $\Delta_h(H)$ così definita rispetta le condizioni (i)-(ii)-(iii).

Definiamo ora Δ_h sulle sottoalgebre $U(\mathfrak{b}_\pm)$: nel seguito svilupperemo il caso $U(\mathfrak{b}_+)$, ma ragionamenti analoghi valgono anche per $U(\mathfrak{b}_-)$. Dal momento che $U(\mathfrak{b}_+) = \text{span}\{H^s E^t\}$, ci basta definire Δ_h soltanto sugli elementi H ed E . $\Delta_h(H)$ è già stato definito in (3.18), e siccome $U(\mathfrak{h}) \leq U(\mathfrak{b}_+)$, la relazione (3.18) continua (e deve continuare) ad essere vera. Per quanto riguarda invece $\Delta_h(E)$, questi non può essere definito estendendo in modo banale $\Delta(E)$, dal momento che $\delta(E) \neq 0$. Urge quindi trovare un'alternativa: possiamo sfruttare il fatto che $U(\mathfrak{b}_+)$ è un'algebra di Hopf graduata in cui $\deg(H) = 0$, $\deg(E) = 1$, e Δ preserva la struttura graduata. Analogamente $U(\mathfrak{b}_-)$ è un'algebra di Hopf graduata in cui $\deg(H) = 0$, $\deg(F) = -1$,

e Δ preserva la struttura graduata. Per la definizione di algebra di Hopf graduata si veda [CP]-(fine della sezione 4.1A). Potremmo pertanto provare a definire una comoltiplicazione Δ_h che continui a preservare tale struttura graduata. La comoltiplicazione $\Delta_h(E)$ che stiamo cercando è quindi nella forma

$$\Delta_h(E) = E \otimes f + g \otimes E$$

dove $\deg(f), \deg(g) = 0$. Si noti che imporre $\deg(f), \deg(g) = 0$ equivale a chiedere che $f, g \in U(\mathfrak{h})[[\hbar]]$. Andiamo ad imporre le condizioni (i) e (ii):

- Condizione (i): se andiamo a sviluppare la condizione di coassociatività, quello che ne risulta è:

$$(\Delta_h \otimes \text{id})\Delta_h(E) = (E \otimes f) \otimes f + (g \otimes E) \otimes f + \Delta_h(g) \otimes E,$$

$$(\text{id} \otimes \Delta_h)\Delta_h(E) = E \otimes \Delta_h(f) + g \otimes (E \otimes f) + g \otimes (g \otimes E).$$

Eguagliando le due otteniamo

$$E \otimes (f \otimes f - \Delta_h(f)) + (\Delta_h(g) - g \otimes g) \otimes E = 0.$$

Risulta quindi evidente che la condizione (i) equivale a chiedere che gli elementi f e g soddisfino

$$\Delta_h(f) = f \otimes f, \quad \Delta_h(g) = g \otimes g.$$

Gli elementi con questa caratteristica sono detti *group-like*, si veda l'esempio 2.1.6.

- Condizione (ii): questa condizione è immediata, e si traduce in

$$f, g \equiv 1 \pmod{\hbar}.$$

Proposizione 3.2.1. *Gli elementi $f \in U(\mathfrak{h})[[\hbar]]$ di tipo group-like, e tali che $f \equiv 1 \pmod{\hbar}$, sono tutti e soli gli elementi nella forma $f = e^{\hbar\mu H}$, dove $\mu \in \mathbb{C}[[\hbar]]$.*

Dimostrazione. (\Leftarrow) Sia $f \in U(\mathfrak{h})[[\hbar]]$ il generico elemento tale che $f \equiv 1 \pmod{\hbar}$. Questo si scrive nella forma

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \hbar^n.$$

Dobbiamo imporre $\Delta_h(f) = f \otimes f$, pertanto

$$\begin{aligned}
f \otimes f &= (1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m H^m) \otimes (1 + \sum_{k=1}^{+\infty} f_k H^k) \\
&= 1 \otimes 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_m f_k H^m \otimes H^k, \\
\Delta_h(f) &= 1 \otimes 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n (H \otimes 1 + 1 \otimes H)^n \\
&= 1 \otimes 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \left(\sum_{m=1}^n \binom{n}{m} H^m \otimes H^{n-m} \right) \\
&= 1 \otimes 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_{m+k} \binom{m+k}{m} H^m \otimes H^k.
\end{aligned}$$

Questo ci porta a concludere che

$$f_m f_k = \binom{m+k}{m} f_{m+k}$$

per ogni $m, k \geq 1$. Posto $f_1 = h\mu$, questo fissa tutti gli f_n , che sono uguali a $f_n = \frac{(h\mu)^n}{n!}$, da cui

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(h\mu)^n}{n!} H^n = e^{h\mu H}.$$

(\Rightarrow) Per il viceversa dobbiamo provare che

$$\Delta_h(e^{h\mu H}) = e^{h\mu H} \otimes e^{h\mu H}.$$

Quest'identità può essere facilmente verificata con un calcolo diretto che omettiamo. \square

Questa proposizione ci permette di concludere che la comoltiplicazione che stiamo cercando è nella forma

$$\Delta_h(E) = E \otimes e^{h\mu H} + e^{h\nu H} \otimes E$$

con $\mu, \nu \in \mathbb{C}[[h]]$ ancora da esplicitare.

- Ci resta da imporre la condizione (iii), che ricordiamo essere

$$\delta(E) \equiv \frac{\Delta_h(E) - \Delta_h^{\text{op}}(E)}{h} \pmod{h},$$

e che sviluppata diventa

$$\begin{aligned}
\delta(E) = E \wedge H &= (E \otimes \mu H + \nu H \otimes E) - (\mu H \otimes E + E \otimes \nu H) \\
&= (\mu - \nu)(E \otimes H - H \otimes E) \\
&= (\mu - \nu)E \wedge H
\end{aligned}$$

da cui è evidente che si deve imporre $\mu - \nu = 1$.

La scelta più comoda è quella di porre $\mu = 1$, $\nu = 0$, da cui

$$\Delta_h(E) = E \otimes e^{hH} + 1 \otimes E. \quad (3.19)$$

Con calcoli molto simili su $\Delta_h(F)$, si vede che possiamo porre

$$\Delta_h(F) = F \otimes 1 + e^{-hH} \otimes F. \quad (3.20)$$

Questo chiude la discussione sulla comoltiplicazione: definiamo ora le parentesi di Lie $[\ , \]_h$. Queste devono fare in modo che

(i) Δ_h sia un morfismo di algebre di Lie, ovverosia

$$\Delta_h([X, Y]_h) = [\Delta_h(X), \Delta_h(Y)]_h,$$

(ii) $[X, Y]_h \equiv [X, Y] \pmod{h}$, ovverosia $[X, Y]_0 = [X, Y]$,

Non è difficile far vedere che possiamo porre senza preoccuparci troppo

$$[H, E]_h = 2E, \quad [H, F]_h = -2F, \quad (3.21)$$

ovverosia estendere le parentesi di Lie $[H, E]$ e $[H, F]$ in modo banale. Per quanto riguarda invece $[E, F]_h$, è intuitivo aspettarsi che queste non possano essere ottenute estendendo $[E, F]$ in modo banale. Queste devono soddisfare in primis la condizione (i), ovverosia

$$\Delta_h([E, F]_h) = [\Delta_h(E), \Delta_h(F)]_h.$$

Se andiamo a sviluppare il membro di destra otteniamo

$$\begin{aligned}
[\Delta_h(E), \Delta_h(F)]_h &= [E \otimes e^{hH} + 1 \otimes E, F \otimes 1 + e^{-hH} \otimes F]_h \\
&| \quad \dots \\
&= [E, F]_h \otimes e^{hH} + e^{-hH} \otimes [E, F]_h + \\
&\quad + \cancel{E e^{-hH} \otimes e^{hH} F} - \cancel{e^{-hH} E \otimes F e^{hH}}.
\end{aligned}$$

Fortunatamente gli ultimi due addendi della somma si semplificano, dal momento che

$$E e^{-hH} \otimes e^{hH} F = e^{2h}(e^{-hH} E \otimes e^{hH} F),$$

e allo stesso modo

$$e^{-hH} E \otimes F e^{hH} = e^{2h}(e^{-hH} E \otimes e^{hH} F).$$

Sintetizziamo la dimostrazione di quest'ultimo passaggio in un lemma, che ci sarà utile anche nel seguito.

Lemma 3.2.2. *In $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ valgono le seguenti relazioni:*

$$\begin{aligned} Ee^{hH} &= e^{-2h}e^{hH}E, & Ee^{-hH} &= e^{2h}e^{-hH}E \\ Fe^{hH} &= e^{2h}e^{hH}F, & Fe^{-hH} &= e^{-2h}e^{-hH}F, \end{aligned}$$

Dimostrazione. Facciamo il calcolo su Ee^{hH} : notiamo subito che

$$Ee^{hH} = E \left(\sum \frac{h^n}{n!} H^n \right).$$

L'idea è quindi di far commutare E coi vari H^n : dal momento che

$$EH = HE + [E, H]_h = (H - 2 \text{id})E,$$

un'ovvia induzione mostra che

$$EH^n = (H - 2 \text{id})^n E.$$

Da ciò possiamo concludere

$$\sum \frac{h^n}{n!} EH^n = \sum \frac{h^n}{n!} (H - 2 \text{id})^n E = e^{h(H-2 \text{id})} E = e^{-2h} e^{hH} E$$

e quindi la tesi. Le altre uguaglianze si dimostrano con ragionamenti analoghi a quelli appena utilizzati. \square

La discussione appena fatta ci porta a concludere che

$$[\Delta_h(E), \Delta_h(F)]_h = [E, F]_h \otimes e^{hH} + e^{-hH} \otimes [E, F]_h.$$

È quindi immediato verificare che l'estensione banale $[E, F]_h = [E, F] = H$ non soddisfa la condizione appena trovata. Bisogna quindi trovare un'alternativa: fortunatamente e^{hH} è un elemento group-like, e guardando la relazione appena ottenuta non è difficile rendersi conto che possiamo porre $[E, F]_h$ uguale a un qualsiasi multiplo di $e^{hH} - e^{-hH}$. D'altra parte in questo modo otteniamo che

$$\Delta_h([E, F]_h) = e^{hH} \otimes e^{hH} - e^{-hH} \otimes e^{-hH},$$

$$[\Delta_h(E), \Delta_h(F)]_h = (e^{hH} - e^{-hH}) \otimes e^{hH} + e^{-hH} \otimes (e^{hH} - e^{-hH}).$$

che è proprio ciò che volevamo. Dovendo in ultimo imporre $[E, F]_h \equiv H \pmod{h}$, questo ci porta a concludere che

$$[E, F]_h = \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{e^h - e^{-h}}. \quad (3.22)$$

Abbiamo quindi definito anche le parentesi di Lie: passiamo ora ad unità, counità e antipodo. Unità e counità, come abbiamo già detto, sono definite

estendendo u ed ϵ in modo banale per $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -linearità. Per quanto riguarda l'antipodo invece, non è difficile verificare che ponendo

$$S_h(E) = -Ee^{-hH}, \quad S_h(F) = -e^{hH}F, \quad S_h(H) = -H. \quad (3.23)$$

vengono sempre soddisfatte le condizioni sull'antipodo, ovvero sia

$$m_h(S_h \otimes \text{id})\Delta_h = u\epsilon = m_h(\text{id} \otimes S_h)\Delta_h = u\epsilon.$$

Prima di procedere, enunciamo senza dimostrare un risultato estremamente importante. Ricordiamo che in generale, data un'algebra universale involupante $U(\mathfrak{g})$, il teorema di Poincarè-Witt-Birkhoff afferma che, se $\{x_i\}_{i \in I}$ è una qualsiasi base di \mathfrak{g} come k -modulo, con I insieme totalmente ordinato e al più numerabile, allora $\{x_i\}_{i \in I}$ genera $U(\mathfrak{g})$ come algebra, e l'insieme dei monomi $\{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\}$, dove $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, costituisce una base per $U(\mathfrak{g})$ come k -modulo. Il seguente risultato generalizza il teorema di Poincarè-Witt-Birkhoff al caso $U_h(\mathfrak{sl}_2)$.

Teorema 3.2.3. *L'insieme dei monomi $\{F^r H^s E^t\}_{r,s,t}$ con $r, s, t \in \mathbb{N}$ costituisce una base topologica per $U_h(\mathfrak{sl}_2)$.*

Nella prossima sezione faremo vedere che la struttura di algebra di Hopf di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ è quasitriangolare. Come anticipato nell'introduzione del capitolo, la dimostrazione fa uso del *quantum double* introdotto nella sezione 2.3: si tratta di dimostrare che $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ è isomorfa come algebra di Hopf al quantum double $\mathcal{D}(U_h(\mathfrak{b}_+)) / \sim$, dove \sim è una relazione di equivalenza opportunamente costruita, che vedremo nel teorema 3.2.8.

3.2.2 Struttura quasitriangolare di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$

Richiamiamo dalla sezione 2.3 che, data un'algebra di Hopf A di rango finito sopra a k , il suo quantum double $\mathcal{D}(A)$ è a sua volta un'algebra di Hopf, che è isomorfa a $A \otimes (A^*)^{\text{op}}$ come coalgebra, e la cui struttura moltiplicativa è descritta nel teorema 2.3.4. In particolare poi $\mathcal{D}(A)$ è quasitriangolare, con R -matrice universale

$$\mathcal{R} = \sum (e_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes e^i).$$

Prima di procedere però, chiudiamo la questione lasciata in sospeso circa la dualità quando A non è un modulo di rango finito. Nel caso in cui A è un'algebra universale involupante quantizzata, possiamo ricorrere ad un escamotage offertoci da Drinfeld. Definiamo infatti la famiglia di mappe $\Delta_n : U_h(\mathfrak{g}) \rightarrow U_h(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ come segue,

$$\Delta_n(x) = (\text{id} - u_h \epsilon_h)^{\otimes n} \Delta_h^{(n)}(x)$$

e poniamo

$$\tilde{U}_h(\mathfrak{g}) = \{x \in U_h(\mathfrak{g}) \mid \Delta_n(x) \equiv 0 \pmod{h^n} \text{ per ogni } n \geq 1\}. \quad (3.24)$$

Definiamo la sua duale $\tilde{U}_h(\mathfrak{g})$ come l'algebra universale involupante quantizzata duale di $U_h(\mathfrak{g})$. Si può provare che, se il limite classico di $U_h(\mathfrak{g})$ è una bialgebra di Lie \mathfrak{g} sopra a k , il limite classico di $\tilde{U}_h(\mathfrak{g})^*$ è la bialgebra duale di \mathfrak{g} , nel senso delle bialgebre di Lie, e che se nella costruzione del quantum double rimpiazziamo $U_h(\mathfrak{g})^*$ con $\tilde{U}_h(\mathfrak{g})^*_h$, allora il quantum double $\mathcal{D}(U_h(\mathfrak{g}))$ diventa a sua volta un'algebra universale involupante quantizzata, il cui limite classico è il double classico $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ di \mathfrak{g} .

Proposizione 3.2.4. *L'algebra di Hopf $\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)$, definita come in (3.24), è la sottoalgebra di Hopf topologicamente generata, nel senso delle serie formali sopra a $\mathbb{C}[[h]]$, da $\tilde{H} = hH$, e $\tilde{E} = hE$.*

Dimostrazione. Un elemento $a \in U_h(\mathfrak{b}_+)$, appartiene anche a $\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)$ se e solo se $\Delta_n(a) \equiv 0 \pmod{h^n}$ per ogni $n \geq 1$. Osserviamo preliminarmente che, $\text{id} - u_h \epsilon_h$ coincide con la proiezione $\pi : A_h \rightarrow A_h$ che manda 1 in 0, e agisce come l'identità su tutti gli altri monomi nella forma $H^s E^t$ quando $s + t > 0$. Pertanto, per comodità e per chiarezza, nel seguito della dimostrazione useremo la notazione

$$\Delta_n = \pi^{\otimes n} \circ \Delta_h^{(n)}.$$

Denoteremo con $a = f_{s,t}(h)H^s E^t$, il generico monomio $a \in U_h(\mathfrak{b}_+)$, dove in particolare $f_{s,t}(h) \in \mathbb{C}[[h]]$. Vediamo cosa succede se applichiamo l'operatore Δ_{s+t} ad a . Nei casi più semplici risulta:

- $s + t = 1$: in questo primo caso le condizioni sono particolarmente semplici, poichè $\Delta_h^{(1)} = \text{id}$, per cui $\Delta_1 = \pi$. Dal momento che $s+t = 1$, ci sono solo due possibilità: $s = 1, t = 0$, oppure $s = 0, t = 1$. Nel primo caso abbiamo che

$$\Delta_1(f_{1,0}(h)H) = f_{1,0}(h)H \equiv 0 \pmod{h},$$

da cui segue che $f_{1,0}(h)$ deve essere multiplo di h . Nel secondo caso analogamente

$$\Delta_1(f_{0,1}(h)E) = f_{0,1}(h)E \equiv 0 \pmod{h},$$

ed anche in questo caso $f_{0,1}(h)$ deve essere multiplo di h .

- $s + t = 2$: abbiamo tre possibilità:

$$\Delta_1(f_{2,0}(h)H^2) = f_{2,0}(h) \left(\pi_2 \circ \Delta_h(H)^2 \right) = 2f_{2,0}(h) (H \otimes H)$$

$$\Delta_1(f_{1,1}(h)HE) = f_{1,1}(h)\left(HE \otimes (e^{hH} - 1) + H \otimes E + E \otimes He^{hH}\right)$$

$$\Delta_1(f_{0,2}(h)E^2) = f_{0,2}(h)\left(E^2 \otimes (e^{2hH} - 1) + E \otimes e^{hH}E + E \otimes Ee^{hH}\right)$$

da cui segue che questi tre termini siano uguali a zero (mod h^2) se e solo se $f_{2,0}(h)$, $f_{1,1}(h)$ e $f_{0,2}(h)$ sono multipli di h^2 .

Nel caso generale abbiamo che

$$\begin{aligned} \Delta_h^{(s+t)}(f_{s,t}(h)H^s E^t) &= f_{s,t}(h)(H \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes H)^s \\ &\quad (E \otimes e^{hH} \otimes \dots \otimes e^{hH} + \dots + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes E)^t, \end{aligned}$$

da cui si deduce che $f_{s,t}(h)$ deve essere multiplo di h^{s+t} . Ne segue che, posto $f_{s,t}(h) = h^{s+t}\tilde{f}_{s,t}(h)$, il generico monomio $a \in U_h(\mathfrak{b}_+)$ appartiene anche a $\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)$ se e solo se è nella forma

$$a = f_{s,t}(h)H^s E^t = \tilde{f}_{s,t}(h)(hH)^s (hE)^t.$$

A questo punto è evidente che $\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)$ è l'algebra di Hopf topologicamente generata, nel senso delle serie formali, da $\tilde{H} = hH$, e $\tilde{E} = hE$. \square

Per descrivere la struttura duale di $\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)$, poniamo $\vartheta = \tilde{H}^*$ e $\xi = \tilde{E}^*$ gli operatori lineari duali, definiti dalle relazioni:

$$\vartheta(\tilde{H}) = \langle \vartheta, \tilde{H} \rangle = 1, \quad \vartheta(\tilde{E}) = \langle \vartheta, \tilde{E} \rangle = 0,$$

$$\xi(\tilde{H}) = \langle \xi, \tilde{H} \rangle = 0, \quad \xi(\tilde{E}) = \langle \xi, \tilde{E} \rangle = 1.$$

Dal momento che $\{\tilde{H}^s \tilde{E}^t\}$ costituisce una base per $\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)$, così allo stesso modo $\{\vartheta^s \xi^t\}$ è una base per $\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)^*$. La prima cosa da capire è come agiscono i vari elementi $\vartheta^s \xi^t$ contro il generico monomio $\tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'}$. Si noti preliminarmente che

$$\Delta_h(\tilde{H}) = \tilde{H} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{H}, \quad \Delta_h(\tilde{E}) = \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} + 1 \otimes \tilde{E}. \quad (3.25)$$

Lemma 3.2.5. $\langle \vartheta^s \xi^t, \tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'} \rangle = \delta_s^{s'} \delta_t^{t'} s! e^{-\frac{1}{2}ht(t-1)} [t]_{e^h}!$

Dimostrazione. Iniziamo considerando il caso $t = 0$: usando la relazione $\langle f \cdot g, x \rangle = \langle f \otimes g, \Delta(x) \rangle$ otteniamo

$$\langle \vartheta^s, \tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'} \rangle = \langle \vartheta \otimes \dots \otimes \vartheta, \Delta_h^{(s)}(\tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'}) \rangle$$

che può essere diversa da 0 solo se $t' = 0$. In questo caso vale

$$\Delta_h^{(s)}(\tilde{H}^{s'}) = (\tilde{H} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{H} \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \tilde{H})^{s'}$$

che è uguale a

$$\sum_{a_1 + \dots + a_s = s'} \binom{s'}{a_1, \dots, a_s} \tilde{H}^{a_1} \otimes \tilde{H}^{a_2} \otimes \dots \otimes \tilde{H}^{a_s}.$$

L'unico caso in cui questa sommatoria calcolata contro $\vartheta \otimes \dots \otimes \vartheta$ è diversa da 0, è quando $a_1 = 1, a_2 = 1, \dots, a_s = 1$: in quel caso $s' = s$, e $\binom{s'}{a_1, \dots, a_s} = \binom{s}{1, \dots, 1} = s!$. Da ciò

$$\langle \vartheta \otimes \dots \otimes \vartheta, s!(\tilde{H} \otimes \dots \otimes \tilde{H}) \rangle = s! \langle \vartheta, \tilde{H} \rangle \dots \langle \vartheta, \tilde{H} \rangle = s!$$

Vediamo ora il caso $s = 0$, usando di nuovo la relazione $\langle f, g, x \rangle = \langle f \otimes g, \Delta(x) \rangle$ otteniamo

$$\langle \xi^t, \tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'} \rangle = \langle \xi \otimes \dots \otimes \xi, \Delta_h^{(t)}(\tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'}) \rangle$$

che si annulla a meno di porre $s' = 0, t' = t$. In questo caso vale

$$\Delta_h^{(t)}(\tilde{E}^t) = (\tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \otimes \dots \otimes e^{\tilde{H}} + 1 \otimes \tilde{E} \otimes \dots \otimes e^{\tilde{H}} + \dots + 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \tilde{E})^t.$$

Andiamo a sviluppare i casi più semplici, per farci un'idea su come procedere:

- $t = 1$: in questo caso $\Delta_h^{(1)} = \text{id}$, per cui il calcolo è banale, $\langle \xi, \tilde{E} \rangle = 1$.
- $t = 2$: in questo caso $\Delta_h^{(2)} = \Delta_h$, per cui

$$\Delta_h^{(2)}(\tilde{E})^2 = (\tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} + 1 \otimes \tilde{E})^2 = \tilde{E}^2 \otimes e^{2\tilde{H}} + \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} + \tilde{E} \otimes \tilde{E} e^{\tilde{H}} + 1 \otimes \tilde{E}^2.$$

Si noti che gli unici termini che sopravvivono quando sono calcolati contro $\xi \otimes \xi$, sono $\tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E}$ e $\tilde{E} \otimes \tilde{E} e^{\tilde{H}}$ (tutti gli altri vengono mandati a 0). Si noti anche che questi sono gli unici termini in cui \tilde{E} compare con grado 1 sia al primo che al secondo membro di ogni prodotto tensoriale. Ne segue l'uguaglianza

$$\langle \xi \otimes \xi, \Delta_h^{(2)}(\tilde{E})^2 \rangle = \langle \xi \otimes \xi, \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} + \tilde{E} \otimes \tilde{E} e^{\tilde{H}} \rangle.$$

Usando infine l'identità $\tilde{E} e^{\tilde{H}} = e^{-2h} e^{\tilde{H}} \tilde{E}$, provata nel lemma 3.2.2, otteniamo

$$\langle \xi \otimes \xi, \Delta_h^{(2)}(\tilde{E})^2 \rangle = \langle \xi \otimes \xi, (1 + e^{-2h}) \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \rangle = 1 + e^{-2h}.$$

Teniamo a mente questo risultato, e poniamo $c_2 := 1 + e^{-2h}$.

- $t = 3$: in questo caso $\Delta_h^{(3)} = (\Delta_h \otimes \text{id})\Delta_h$, e sviluppando $\Delta_h^{(3)}(E)^3$ ci si rende conto facilmente che gli unici termini che sopravvivono quando vengono calcolati contro $\xi \otimes \xi \otimes \xi$, sono i seguenti

$$\begin{aligned} & \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \quad \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} e^{\tilde{H}}, \quad \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes \tilde{E} e^{2\tilde{H}}, \\ & \tilde{E} \otimes \tilde{E} e^{\tilde{H}} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \quad \tilde{E} \otimes \tilde{E} e^{\tilde{H}} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} e^{\tilde{H}}, \quad \tilde{E} \otimes \tilde{E} e^{\tilde{H}} \otimes \tilde{E} e^{2\tilde{H}}. \end{aligned}$$

Si noti che, come nel caso $t = 2$, questi sono tutti e soli i termini in cui il monomio \tilde{E} compare con grado 1 sia al primo, che al secondo, che al terzo membro di ogni prodotto tensoriale. Usando più volte l'identità $\tilde{E} e^{\tilde{H}} = e^{-2h} e^{\tilde{H}} \tilde{E}$, i membri di sopra vengono riarrangiati in

$$\begin{aligned} & \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \quad e^{-2h} \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \quad e^{-4h} \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \\ & e^{-2h} \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \quad e^{-4h} \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \quad e^{-6h} \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E}, \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\langle \xi \otimes \xi \otimes \xi, \Delta_h^{(3)}(\tilde{E})^3 \rangle = \langle \xi \otimes \xi \otimes \xi, (1 + e^{-2h})(1 + e^{-2h} + e^{-4h}) \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E} \rangle.$$

Si noti che, ponendo $c_3 = (1 + e^{-2h})(1 + e^{-2h} + e^{-4h})$, vale l'identità

$$c_3 = c_2(1 + e^{-2h} + e^{-4h}).$$

A questo punto il quadro dovrebbe essere chiaro, per cui procediamo per induzione: il claim che vogliamo provare è

$$c_{t+1} = c_t(1 + e^{-2h} + \dots + e^{-2th}).$$

Generalizzando i casi $t = 2, 3$, quando andiamo a sviluppare $\Delta_h^{(t+1)}(E^{t+1})$, gli unici termini che sopravvivono quando vengono calcolati contro $\xi \otimes \xi \otimes \dots \otimes \xi$ producono una sommatoria nella forma

$$\sum_{i_1, \dots, i_t} \tilde{E} \otimes e^{(1-i_1)\tilde{H}} \tilde{E} e^{i_1\tilde{H}} \otimes \dots \otimes e^{(t-i_t)\tilde{H}} \tilde{E} e^{i_t\tilde{H}}$$

dove $0 \leq i_1 \leq 1, \dots, 0 \leq i_t \leq t$, e i monomi \tilde{E} compaiono con grado 1 in ogni membro del prodotto tensoriale. Usando l'identità $\tilde{E} e^{\tilde{H}} = e^{-2h} e^{\tilde{H}} \tilde{E}$ si può riarrangiare la sommatoria appena ottenuta, in una della forma

$$\sum_{i_1, \dots, i_t} (e^{-2hi_1} \dots e^{-2hi_t}) \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \tilde{E} \otimes e^{2\tilde{H}} \tilde{E} \dots \otimes e^{t\tilde{H}} \tilde{E}.$$

In particolare si noti che $c_{t+1} = \sum_{i_1, \dots, i_t} e^{-2hi_1} \dots e^{-2hi_t}$. A questo punto non è difficile constatare che

$$c_{t+1} = \sum_{i_t} e^{-2hi_t} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{t-1}} e^{-2hi_1} \dots e^{-2hi_{t-1}} \right) = \sum_{i_t} e^{-2hi_t} (c_t),$$

che è proprio ciò che volevamo. Per concludere basta constatare che

$$c_t = c_{t-1}(1 + e^{-2h} + \dots + e^{-2th}) = \dots = c_{t-1} e^{-h(t-1)} [t]_{e^h},$$

da cui $c_t = e^{-\frac{1}{2}t(t-1)} [t]_{e^h}!$.

Per il caso generale, dato $\vartheta^s \xi^t$, dobbiamo calcolare i termini della co-moltiplicazione $\Delta_h^{(s+t)}(H^{s'} E^{t'})$ che hanno s fattori H di grado 1 nei primi s membri del prodotto tensoriale, e t fattori E di grado 1 nei secondi t membri. In questo caso dobbiamo imporre $s' = s$, $t' = t$, e i termini con una tale caratteristica producono una sommatoria nella forma

$$\sum_{i_1, \dots, i_{t-1}} s! (\tilde{H} \otimes \dots \otimes \tilde{H}) \otimes \tilde{E} \otimes e^{(1-i_1)\tilde{H}} \tilde{E} e^{i_1\tilde{H}} \otimes \dots \otimes e^{(t-1-i_{t-1})\tilde{H}} \tilde{E} e^{i_{t-1}\tilde{H}}.$$

Questa può agevolmente essere riarrangiata con ragionamenti analoghi a quelli già fatti sopra, il che ci permette di concludere. \square

Teorema 3.2.6. *La struttura di algebra di Hopf su $(\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)^*)^{\text{op}}$ è definita dalle seguenti relazioni:*

- (i) $[\vartheta, \xi] = \vartheta\xi - \xi\vartheta = -\xi,$
- (ii) $\Delta_h^{*\text{op}}(\vartheta) = \vartheta \otimes 1 + 1 \otimes \vartheta, \quad \Delta_h^{*\text{op}}(\xi) = \xi \otimes 1 + e^{-2h\vartheta} \otimes \xi.$

Dimostrazione. Per il punto (i), notiamo preliminarmente che

$$\xi\vartheta = \sum \langle \xi\vartheta, \tilde{H}^s \tilde{E}^t \rangle \vartheta^s \xi^t.$$

Per cui l'unica cosa che dobbiamo capire è cosa si ottiene calcolando $\xi\vartheta$ contro tutti gli elementi di base $\tilde{H}^s \tilde{E}^t$. Per quanto riguarda quelli di grado più piccolo:

$$\begin{aligned} \langle \xi\vartheta, 1 \rangle &= \langle \xi \otimes \vartheta, \Delta_h(1) \rangle = 0 \\ \langle \xi\vartheta, \tilde{H} \rangle &= \langle \xi \otimes \vartheta, \Delta_h(\tilde{H}) \rangle \\ &= \langle \xi \otimes \vartheta, \tilde{H} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{H} \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \xi \vartheta, \tilde{E} \rangle &= \langle \xi \otimes \vartheta, \Delta_h(\tilde{E}) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \vartheta, \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} + 1 \otimes \tilde{E} \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \vartheta, \tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} \rangle = \langle \xi, \tilde{E} \rangle \langle \vartheta, e^{\tilde{H}} \rangle = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \xi \vartheta, \tilde{H} \tilde{E} \rangle &= \langle \xi \otimes \vartheta, \Delta_h(\tilde{H} \tilde{E}) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \vartheta, (\tilde{H} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{H})(\tilde{E} \otimes e^{\tilde{H}} + 1 \otimes \tilde{E}) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes \vartheta, \tilde{E} \otimes \tilde{H} e^{\tilde{H}} \rangle \\
&= \langle \xi, \tilde{E} \rangle \langle \vartheta, \tilde{H} e^{\tilde{H}} \rangle = 1.
\end{aligned}$$

Come si può notare, gli unici termini che sopravvivono, (i.e. che generano scalari non nulli), sono quelli in cui, nella comoltiplicazione $\Delta_h(\tilde{H}^s \tilde{E}^t)$ compare il monomio \tilde{E} con grado 1 al primo membro e \tilde{H} con grado 1 al secondo membro. Si può provare che $\langle \xi \vartheta, \tilde{H}^s \tilde{E}^t \rangle = 0$ per ogni altra coppia (s, t) , e quindi

$$\vartheta \xi - \xi \vartheta = \vartheta \xi - (\vartheta \xi + \xi) = -\xi.$$

Proviamo ora il punto (ii): per la prima relazione si noti che

$$\Delta_h^*(\vartheta) = \sum \langle \Delta_h^*(\vartheta), \tilde{H}^s \tilde{E}^t \otimes \tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'} \rangle (\vartheta^s \xi^t \otimes \vartheta^{s'} \xi^{t'}).$$

In particolare gli unici casi in cui lo scalare è diverso da 0 sono i casi in cui $t = t' = 0$, e poi rispettivamente $s = 1, s' = 0$ oppure $s = 0, s' = 1$. In questi casi non è difficile svolgere il calcolo che riportiamo qui sotto

$$\langle \Delta_h^*(\vartheta), \tilde{H} \otimes 1 \rangle = \langle \vartheta, \tilde{H} \rangle = 1, \quad \langle \Delta_h^*(\vartheta), 1 \otimes \tilde{H} \rangle = \langle \vartheta, \tilde{H} \rangle = 1.$$

Da ciò risulta

$$\Delta^{*\text{op}}(\vartheta) = \vartheta \otimes 1 + 1 \otimes \vartheta.$$

In modo analogo, per la seconda relazione, abbiamo che

$$\Delta_h^*(\xi) = \sum \langle \Delta_h^*(\xi), \tilde{H}^s \tilde{E}^t \otimes \tilde{H}^{s'} \tilde{E}^{t'} \rangle (\vartheta^s \xi^t \otimes \vartheta^{s'} \xi^{t'})$$

e gli unici due casi in cui lo scalare è diverso da 0 sono i seguenti

$$\langle \Delta_h^*(\xi), 1 \otimes \tilde{E} \rangle = \langle \xi, \tilde{E} \rangle = 1,$$

$$\langle \Delta_h^*(\xi), \tilde{E} \otimes \tilde{H}^{s'} \rangle = \langle \xi, \tilde{E} \tilde{H}^{s'} \rangle = \langle \xi, (\tilde{H} - 2h)^{s'} \tilde{E} \rangle = (-2h)^{s'}.$$

È quindi evidente che

$$\Delta_h^*(\xi) = \xi \otimes 1 + e^{-2h\vartheta} \otimes \xi,$$

a questo punto basta comporre Δ_h^* con l'operatore di scambio per concludere:

$$\Delta_h^{*\text{op}}(\xi) = 1 \otimes \xi + \xi \otimes e^{-2h\vartheta}.$$

□

Osservazione 3.2.7. *Si noti che $(\tilde{U}_h(\mathfrak{b}_+)^*)^{\text{op}}$ è isomorfa a $U_h(\mathfrak{b}_-)$ come algebra di Hopf topologica sopra a $\mathbb{C}[[h]]$, con isomorfismo esplicito dato da*

$$\vartheta \mapsto \frac{1}{2}H, \quad F \mapsto \xi.$$

Teorema 3.2.8. *In $\mathcal{D}(U_h(\mathfrak{b}_+))$ valgono le seguenti relazioni moltiplicative:*

- (i) $[E \otimes 1, 1 \otimes \xi] = \frac{e^{h(H \otimes 1)} - e^{-h(1 \otimes 2\vartheta)}}{h},$
- (ii) $[E \otimes 1, 1 \otimes \vartheta] = -E \otimes 1,$
- (iii) $[H \otimes 1, 1 \otimes \xi] = -2(1 \otimes \xi),$
- (iv) $[H \otimes 1, 1 \otimes \vartheta] = 0.$

Pertanto esiste un morfismo suriettivo $\mathcal{D}(U_h(\mathfrak{b}_+)) \rightarrow U_h(\mathfrak{sl}_2)$ di algebre di Hopf topologiche, dato da

$$\begin{aligned} E \otimes 1 &\mapsto E, & H \otimes 1 &\mapsto H, \\ 1 \otimes \xi &\mapsto \frac{e^h - e^{-h}}{h}F, & 1 \otimes \vartheta &\mapsto \frac{1}{2}H, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e vale in particolare l'isomorfismo

$$\boxed{\frac{\mathcal{D}(U_h(\mathfrak{b}_+))}{(H \otimes 1 - 1 \otimes 2\vartheta)} \simeq U_h(\mathfrak{sl}_2)} \quad (3.27)$$

Dimostrazione. La struttura moltiplicativa nel quantum double è riportata nel teorema 2.3.4: l'unica cosa “non standard” è la relazione moltiplicativa

$$(1 \otimes l)(a \otimes 1) = \sum \langle l_{(1)}, S^{-1}(a_{(1)}) \rangle \langle l_{(3)}, a_{(3)} \rangle a_{(2)} \otimes l_{(2)}. \quad (3.28)$$

Proviamo ora il punto *i*: notiamo che

$$[E \otimes 1, 1 \otimes \xi] = (E \otimes \xi) - (1 \otimes \xi)(E \otimes 1)$$

per cui l'unica non banale è la seconda moltiplicazione. Per svolgerla abbiamo bisogno delle seguenti identità:

$$\begin{aligned} (S_h^{-1} \otimes \text{id} \otimes \text{id})\Delta_h^{(3)}(E) &= -e^{-hH} E \otimes e^{hH} \otimes e^{hH} + 1 \otimes E \otimes e^{hH} + 1 \otimes 1 \otimes E, \\ (\Delta_h^*)^{(3)}(\xi) &= \xi \otimes 1 \otimes 1 + e^{-2h\vartheta} \otimes \xi \otimes 1 + e^{-2h\vartheta} \otimes e^{-2h\vartheta} \otimes \xi. \end{aligned}$$

Inserendo i risultati appena ottenuti in (3.28), si verifica che gli unici addendi diversi da 0 sono

- $\langle \xi, -e^{-hH} E \rangle \langle 1, e^{hH} \rangle e^{hH} \otimes 1 = -\frac{e^{hH} \otimes 1}{h} = -\frac{e^{h(H \otimes 1)}}{h}$
- $\langle e^{-2h\vartheta}, 1 \rangle \langle 1, e^{hH} \rangle E \otimes \xi = E \otimes \xi$
- $\langle e^{-2h\vartheta}, 1 \rangle \langle E, \xi \rangle 1 \otimes e^{-2h\vartheta} = \frac{1 \otimes e^{-2h\vartheta}}{h} = \frac{e^{-2h(1 \otimes \vartheta)}}{h}$

da cui otteniamo

$$[E, \xi] = \cancel{(E \otimes \xi)} - \cancel{(E \otimes \xi)} - \frac{e^{h(H \otimes 1)}}{h} + \frac{e^{-2h(1 \otimes \vartheta)}}{h}.$$

Per il punto *ii*, i calcoli per $[E, \vartheta]$ si fanno con ragionamenti analoghi, notando che

$$[E \otimes 1, 1 \otimes \vartheta] = (E \otimes \vartheta) - (1 \otimes \vartheta)(E \otimes 1)$$

e che

$$(S_h^{-1} \otimes \text{id} \otimes \text{id}) \Delta_h^{(3)}(E) = -e^{-hH} E \otimes e^{hH} \otimes e^{hH} + 1 \otimes E \otimes e^{hH} + 1 \otimes 1 \otimes E,$$

$$(\Delta_h^*)^{(3)}(\vartheta) = \vartheta \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \vartheta \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \vartheta.$$

Usando di nuovo (3.28), si vede che gli unici addendi diversi da 0 sono

- $\langle 1, 1 \rangle \langle 1, e^{hH} \rangle E \otimes \vartheta = E \otimes \vartheta$
- $\langle 1, 1 \rangle \langle \vartheta, e^{hH} \rangle E \otimes 1 = E \otimes 1$

da cui

$$[E \otimes 1, 1 \otimes \vartheta] = -E \otimes 1.$$

Gli altri due punti si fanno con ragionamenti del tutto analoghi, sfruttando le relazioni costruite sopra, assieme a

$$(S_h^{-1} \otimes \text{id}) \Delta_h^{(2)}(H) = -H \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes H,$$

e il resto dell'enunciato a questo punto è chiaro. \square

3.2.3 R -matrice universale

A questo punto possiamo calcolare la R -matrice universale di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$. Dal lemma 3.2.5 scende che la base duale di $\{H^s E^t\}$ di $U_h(\mathfrak{b}_+)$ è data da

$$\left\{ \frac{h^{s+t} e^{\frac{1}{2}ht(t-1)}}{s![t]_{e^h!}} \vartheta^s \xi^t \right\}$$

per cui la R -matrice universale di $\mathcal{D}(U_h(\mathfrak{b}_+))$ è

$$\sum_{s,t=0}^{+\infty} \frac{h^{s+t} e^{\frac{1}{2}ht(t-1)}}{s![t]_{e^h!}} (H^s E^t \otimes 1 \otimes 1 \otimes \vartheta^s \xi^t).$$

Usando il morfismo (3.26), che nel nostro caso si traduce in

$$H^s E^t \otimes 1 \mapsto H^s E^t, \quad 1 \otimes \vartheta^s \xi^t \mapsto \frac{H^s (e^h - e^{-h})^t}{2^s h^t} F^t,$$

otteniamo la formula

$$\mathcal{R}_h = \sum_{s,t=0}^{+\infty} \frac{h^s e^{\frac{1}{2}ht(t-1)}}{2^s s! [t]_{e^h!}} (e^h - e^{-h})^t (H^s E^t \otimes H^s F^t).$$

Questa formula può essere riarrangiata in

$$\boxed{\mathcal{R}_h = e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)} \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}ht(t+1)}}{[t]_{e^h!}} (1 - e^{-2h})^t E^t \otimes F^t.} \quad (3.29)$$

Corollario 3.2.9. *Se V è un $\mathbb{C}[[h]]$ -modulo libero di rango 2, con base $\{v_0, v_1\}$, e $\rho_h : U_h(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(V)$ è la rappresentazione canonica di $U_h(\mathfrak{sl}_2)$, definita dalle relazioni*

$$H.v_0 = v_0, \quad E.v_0 = 0, \quad F.v_0 = v_1,$$

$$H.v_1 = -v_1, \quad E.v_1 = v_0, \quad F.v_1 = 0,$$

allora la rappresentazione di \mathcal{R}_h in $\text{End}(V \otimes V)$ rispetto alla base

$$\{v_0 \otimes v_0, v_1 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_1\}$$

è l'operatore di Yang-Baxter quantistico

$$R_h = e^{-\frac{1}{2}h} \begin{pmatrix} e^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^h - e^{-h} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^h \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Dimostrazione. Bisogna vedere come agiscono i singoli termini della sommatoria (3.29) contro gli elementi di base $v_0 \otimes v_0, v_1 \otimes v_0, \dots, v_1 \otimes v_1$. Notiamo subito che, quando $t \geq 2$,

$$(E^t \otimes F^t).(v_i \otimes v_j) = 0$$

per ogni scelta di i, j : per cui tali termini sono ininfluenti nella rappresentazione. Gli unici casi da controllare quindi sono $t = 0, t = 1$:

- $t = 0$: il termine della sommatoria per $t = 0$ è uguale a $e^{\frac{1}{2}(H \otimes H)}$. Andiamo a farlo agire contro gli elementi di base: risulta che

$$e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)}.(v_i \otimes v_j) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{h^s}{2^s s!} (H^s \otimes H^s).(v_i \otimes v_j).$$

Andando a svolgere caso per caso:

$$\begin{aligned}
- e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)}.(v_0 \otimes v_0) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{h^s}{2^s s!} (v_0 \otimes v_0) = e^{\frac{1}{2}h}(v_0 \otimes v_0), \\
- e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)}.(v_1 \otimes v_0) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{h^s}{2^s s!} ((-1)^s v_1 \otimes v_0) = e^{-\frac{1}{2}h}(v_1 \otimes v_0), \\
- e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)}.(v_0 \otimes v_1) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{h^s}{2^s s!} (v_0 \otimes (-1)^s v_1) = e^{-\frac{1}{2}h}(v_0 \otimes v_1), \\
- e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)}.(v_1 \otimes v_1) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{h^s}{2^s s!} ((-1)^s v_1 \otimes (-1)^s v_1) = e^{\frac{1}{2}h}(v_1 \otimes v_1),
\end{aligned}$$

- $t = 1$: in questo caso, notiamo preliminarmente che per $t = 1$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}ht(t+1)}}{[t]_{e^h}!} (1 - e^{-2h})^t = e^h - e^{-h},$$

per cui il termine della sommatoria è $e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)}(e^h - e^{-h})(E \otimes F)$.
Notiamo che l'unico caso in cui $(E \otimes F).(v_i \otimes v_j)$ è diverso da 0, è quando $v_i = v_1, v_j = v_0$, e in questo caso

$$e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)}(e^h - e^{-h})(E \otimes F).(v_1 \otimes v_0) = e^{-\frac{1}{2}h}(e^h - e^{-h})(v_0 \otimes v_1).$$

Segue che, rispetto alla base $\{v_0 \otimes v_0, v_1 \otimes v_0, \dots, v_1 \otimes v_1\}$ la rappresentazione R_h assume la forma descritta in (3.30). \square

Corollario 3.2.10. *Sia $R_h \in \text{End}(V \otimes V)$ l'operatore di Yang-Baxter quantistico definito come in (3.30). Allora anche l'operatore*

$$R = e^{\frac{1}{2}h} R_h = \begin{pmatrix} e^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^h - e^{-h} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^h \end{pmatrix}$$

risolve l'equazione di Yang-Baxter quantistica, e quindi, per la proposizione 1.4.5, l'operatore $I = \sigma \circ R$, già definito nell'esempio 1.4.3, risolve l'equazione di Yang-Baxter.

3.3 Operatori di Yang-Baxter quantistici

Così come per $U_h(\mathfrak{sl}_2)$, si può provare anche che ogni altra algebra universale involupante quantizzata $U_h(\mathfrak{g})$ è "quasi" isomorfa ad un opportuno quantum double. Nel seguito porremo $U_h^{\geq 0}(\mathfrak{g})$, $U_h^{\leq 0}(\mathfrak{g})$ e $U_h^0(\mathfrak{g})$ rispettivamente le sottoalgebre di $U_h(\mathfrak{g})$ dei termini di grado positivo, negativo e nullo.

Proposizione 3.3.1. *L'algebra di Hopf $\tilde{U}_h^{\geq}(\mathfrak{g})^*$ con comoltiplicazione opposta, è isomorfa a $U_h^{\leq 0}(\mathfrak{g})$ come algebra di Hopf topologica sopra a $\mathbb{C}[[\hbar]]$.*

Proposizione 3.3.2. *Esiste un morfismo suriettivo di algebre di Hopf topologiche*

$$\Psi : \mathcal{D}(U_h^{\geq 0}(\mathfrak{g})) \rightarrow U_h(\mathfrak{g}).$$

In particolare l'immagine della R -matrice universale di $\mathcal{D}(U_h^{\geq 0}(\mathfrak{g}))$ attraverso Ψ è una R -matrice universale per $U_h(\mathfrak{g})$. Questo, oltre a provare che $U_h(\mathfrak{g})$ è quasitriangolare, ci fornisce anche una descrizione esplicita della R -matrice universale. Attraverso un'opportuna rappresentazione di algebre di Hopf infine, possiamo ottenere degli operatori di Yang-Baxter quantistici R , e per la proposizione 1.4.5, se R è un operatore che risolve l'equazione Yang-Baxter quantistica, allora $I = \sigma \circ R$, è un operatore che risolve l'equazione di Yang-Baxter. Qui di seguito riportiamo gli operatori di Yang-Baxter che useremo nel capitolo 4 per produrre degli invarianti di proiezioni di nodi:

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, ovvero sia \mathfrak{g} è un'algebra di Lie del tipo A_n : la rappresentazione della R -matrice universale, produce l'operatore di Yang-Baxter quantistico

$$R_h = e^{-h/(n+1)} \left(e^h \sum_i E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} + (e^h - e^{-h}) \sum_{i < j} E_{i,j} \otimes E_{j,i} \right).$$

Si noti che, a meno di riscaldo, il caso $n = 1$, coincide con l'operatore trovato in (3.30). Riscalando, ponendo $e^h = q$ e componendo R_h con l'operatore di scambio σ , otteniamo l'operatore di Yang-Baxter

$$I = q \sum_i E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j} E_{i,j} \otimes E_{j,i} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j},$$

Useremo quest'operatore nella sezione 4.4, per ottenere il polinomio HOMFLY.

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ oppure $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, ovvero sia \mathfrak{g} è un'algebra di Lie del tipo B_n, C_n, D_n . Una descrizione uniforme degli operatori di Yang-Baxter che si ottengono dalle loro quantizzazioni, può essere data come segue. Sia $\nu \in \{1, -1\}$: per le algebre di tipo B_n e D_n porremo $\nu = -1$, invece per quelle di tipo C_n porremo $\nu = 1$. Nel seguito porremo $m = 2n$ oppure $m = 2n + 1$ a seconda dell'algebra di Lie utilizzata. Poniamo poi $i' = m + 1 - i$,

$$\bar{i} = \begin{cases} i - \nu/2 & \text{se } 1 \leq i < (m+1)/2 \\ i & \text{se } i = (m+1)/2 \\ i + \nu/2 & \text{se } (m+1)/2 < i \leq m. \end{cases} \quad (\text{per } m \text{ dispari})$$

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq i \leq (m+1)/2 \\ -\nu & \text{se } (m+1)/2 \leq i \leq m. \end{cases}$$

La formula compatta per gli operatori di Yang-Baxter è data da,

$$\begin{aligned} I_\nu &= q \sum_{i \neq i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i=i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j, j'} E_{i,j} \otimes E_{j,i} \\ &+ q^{-1} \sum_{i \neq i'} E_{i,i'} \otimes E_{i',i} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} \\ &+ (q^{-1} - q) \sum_{i < k'} \varepsilon(i) \varepsilon(k') q^{\bar{i} - \bar{k}'} E_{i,k} \otimes E_{i',k'}. \end{aligned}$$

Useremo questi operatori nella sezione 4.5 per ottenere il polinomio di Kauffman.

Capitolo 4

Invarianti polinomiali di nodi

Torniamo finalmente, dopo una lunga ricerca degli operatori di Yang-Baxter, agli invarianti di nodi. In quest'ultimo capitolo vedremo alcuni dei più famosi invarianti di nodi polinomiali: le sezioni 4.1 e 4.2 sono di carattere introduttivo, e servono per illustrare come vengono utilizzati nella pratica i polinomi come invarianti di nodi. In queste due sezioni prenderemo in esame rispettivamente il *polinomio di Jones*, e il *Bracket Polynomial* di Louis Kauffman, e introdurremo un concetto estremamente importante: le *skein relations*. Queste sono uno strumento molto usato in teoria dei nodi, dal momento che permettono di formulare gli invarianti polinomiali in maniera estremamente semplice. La sezione 4.3 è il cuore del capitolo 4: qui infatti andremo a definire un invariante molto generale che sfrutta le rappresentazioni di trecce e gli operatori di Yang-Baxter. Lo denoteremo con $J_S(L)$. Nelle sezioni 4.4 e 4.5 andremo a sostituire dentro a $J_S(L)$ gli operatori di Yang-Baxter che abbiamo ottenuto nella sezione 3.3. Ciascun polinomio che otterremo soddisferà una opportuna skein relation, che dipenderà dall'operatore di Yang-Baxter utilizzato. Nella sezione 4.4 andremo a costruire il *polinomio HOMFLY*, che deve il suo nome alle iniziali dei sei matematici che lo scoprirono nel 1985 in quattro gruppi indipendenti (Hoste, Oceanu, Millet, Freyd, Lickorish, Yetter): questo può essere ricavato sostituendo dentro a $J_S(L)$ gli operatori di Yang-Baxter relativi alle algebre di Lie del tipo A_n . La sezione 4.5 è dedicata invece al *polinomio di Kauffman*: questo polinomio è stato scoperto da Louis Kauffman nel 1987, e può essere ricavato sostituendo dentro a $J_S(L)$ gli operatori di Yang-Baxter relativi alle algebre di Lie di tipo B_n , C_n e D_n . La costruzione di tale polinomio è ben più complicata rispetto a quella dell'HOMFLY, e l'approccio proposto da Turaev fa uso dei *modelli di stati* derivanti dalla fisica e adattati alla teoria dei nodi. La sezione 4.6 è dedicata alla costruzione di tali modelli di stati, e si concluderà con la dimostrazione dell'esistenza del polinomio di Kauffman.

4.1 Il polinomio di Jones

Le sezioni 4.1 e 4.2 sono state incluse per illustrare come vengono utilizzati nella pratica i polinomi come invarianti di nodi. Gli esempi che daremo sono il polinomio di Jones, e il Bracket Polynomial, scoperto da Louis Kauffman. Iniziamo dal polinomio di Jones: per definirlo dobbiamo introdurre il concetto di *skein relations*. Tre proiezioni orientate L_+ , L_- e L_0 sono dette **skein related** se sono identiche dappertutto, eccetto in un intorno che contiene un incrocio, come evidenziato in figura 4.1. In figura qui sotto il nodo ad otto è quello centrale, ovverosia $L_- = L$.

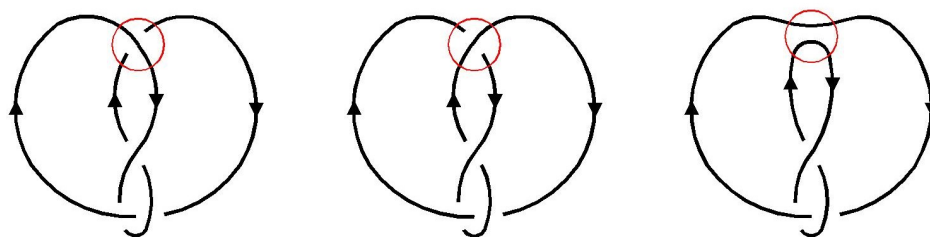


Figura 4.1: Le tre proiezioni sono identiche eccetto che attorno all'incrocio messo in evidenza con un cerchio rosso.

Attorno all'incrocio le tre proiezioni sono presentate come in figura 4.2:

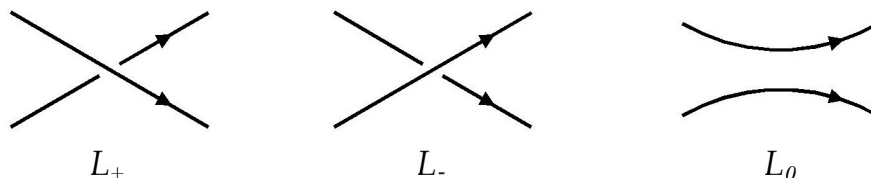


Figura 4.2: Le proiezioni attorno all'incrocio si presentano in questo modo.

Teorema 4.1.1 (Polinomio di Jones). *Per ogni proiezione orientata L , esiste un unico polinomio $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ invariante di proiezioni orientate tale che $V(\bigcirc) = 1$, dove \bigcirc è il nodo banale orientato, e inoltre*

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) - (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0) = 0 \quad (4.1)$$

ogni volta che L_+ , L_- , L_0 sono skein related. Questo polinomio è unico, ed è detto il polinomio di Jones di L .

Esempio 4.1.2. *Dimostreremo questo teorema in due modi: la prima volta alla fine della sezione 4.2, la seconda volta nella sezione 4.4. Per ora vediamo come calcolare il polinomio di Jones nella pratica, per esempio calcoliamo*

il polinomio di Jones del nodo ad otto. Chiamiamo con L la proiezione canonica del nodo ad otto, ed applichiamo le skein relations come viene mostrato in figura 4.3.

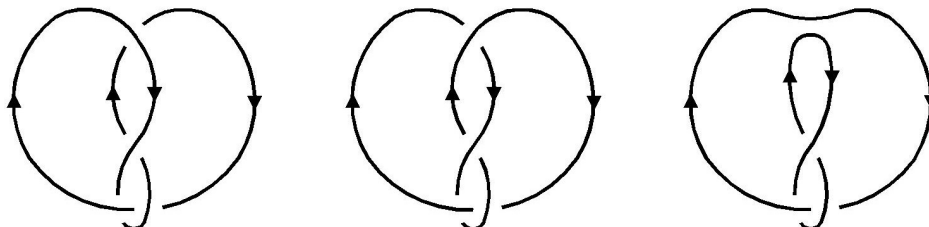


Figura 4.3: Nelle skein relations $L_+ = \bigcirc$, $L_- = L$, $L_0 = \bigcirc \bigcirc$.

Usando la relazione (4.1) otteniamo

$$t^{-1}V(\bigcirc) - tV(L) - (t^{1/2} - t^{-1/2})V(\bigcirc \bigcirc) = 0,$$

e ricordando che $V(\bigcirc) = 1$ otteniamo

$$V(L) = t^{-2} + (t^{-3/2} - t^{-1/2})V(\bigcirc \bigcirc).$$

Adesso dobbiamo calcolare $V(\bigcirc \bigcirc)$: poniamo $\bigcirc \bigcirc = L'$, usiamo le skein relations in figura 4.4, in modo analogo a quanto fatto prima.

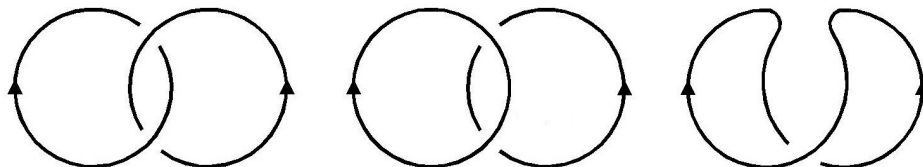


Figura 4.4: Nelle skein relations $L'_+ = L'$, $L'_- = \bigcirc \bigcirc$, $L'_0 = \bigcirc$.

e usando di nuovo la relazione (4.1) otteniamo

$$t^{-1}V(L') - tV(\bigcirc \bigcirc) - (t^{1/2} - t^{-1/2})V(\bigcirc) = 0,$$

che riarrangiata diventa

$$V(L') = t^2V(\bigcirc \bigcirc) + (t^{3/2} - t^{1/2}).$$

In ultimo, dobbiamo calcolare $V(\bigcirc \bigcirc)$: poniamo $\bigcirc \bigcirc = L''$, e usiamo le skein relations un'ultima volta come riportato in figura 4.5.

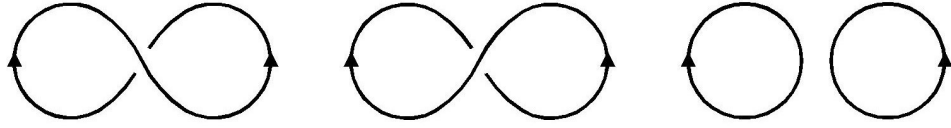


Figura 4.5: Nelle skein relations $L''_+ = \bigcirc$, $L''_- = \bigcirc$, $L''_0 = L''$.

Otteniamo così la relazione

$$t^{-1}V(\bigcirc) - tV(\bigcirc) - (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L'') = 0,$$

da cui possiamo determinare $V(L'')$, che risulta essere

$$V(L'') = -\frac{t - t^{-1}}{t^{1/2} - t^{-1/2}} = -(t^{1/2} + t^{-1/2}).$$

A questo punto possiamo determinare anche $V(L)$ e $V(L')$ sostituendo il risultato appena ottenuto nelle precedenti relazioni. Le sintetizziamo nel sistema

$$\begin{cases} V(L'') = V(\bigcirc\bigcirc) = -(t^{1/2} + t^{-1/2}) \\ V(L') = V(\bigcirc\bigcirc) = -t^{5/2} - t^{1/2} \\ \boxed{V(L) = t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}}. \end{cases}$$

Intuitivamente, possiamo aspettarci che ogni proiezione abbia il proprio polinomio di Jones, poichè possiamo usare ricorsivamente la relazione (4.1) per ridurre progressivamente il numero di incroci, fino ad ottenere proiezioni banali. E in effetti questo è proprio quello che accade: il teorema 4.1.1 non fa altro che formalizzare quest'idea intuitiva. Come anticipato, l'esistenza del polinomio di Jones sarà provata nelle sezioni 4.2 e 4.4, mentre l'unicità è garantita dal fatto che $V(L)$ viene costruito per ricorsione, usando la relazione (4.1). Volendo essere espliciti:

Dimostrazione dell'unicità. Se per assurdo, data una proiezione orientata L , vi fossero due polinomi di Jones $V_1(L)$, e $V_2(L)$, allora potremmo usare ricorsivamente la relazione (4.1) applicandola di volta in volta agli stessi incroci, sia quando calcoliamo $V_1(L)$, che quando calcoliamo $V_2(L)$. In questo modo $V_1(L)$ e $V_2(L)$ verrebbero ridotti a due sommatorie di elementi, rispettivamente nella forma

$$V_{1,2}(L) = \sum_{a,b} k_{a,b} t^a (t^{1/2} - t^{-1/2})^b V_{1,2}(\bigcirc).$$

Essendo $V_1(\bigcirc) = V_2(\bigcirc) = 1$, si deve necessariamente avere anche $V_1(L) = V_2(L)$.

4.2 Il Bracket Polynomial

Il bracket polynomial è un invariante scoperto da Louis Kauffman nel 1987. In questa sezione, per il momento le proiezioni saranno supposte *non orientate*, e verranno denotate con la lettera D , (in seguito useremo invece la L quando ci riferiremo a proiezioni orientate).

Teorema 4.2.1. *Data una proiezione non orientata D , esiste un unico polinomio $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, c]$ che soddisfa i seguenti assiomi*

1. $\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle + B \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle$
 $\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + B \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle$
2. $\langle \bigcirc \cup D \rangle = c \langle D \rangle$
 $\langle \bigcirc \rangle = 1.$

Si faccia attenzione: il polinomio appena costruito, per il momento, non è un invariante di proiezioni non orientate; per farlo diventare tale dovremo imporre delle condizioni aggiuntive su A , B e c . Prima di procedere con la dimostrazione, vediamo alcuni piccoli accorgimenti per calcolare $\langle D \rangle$.

- Vediamo in primis come imporre agevolmente la condizione 1: ogni incrocio distingue il piano in quattro porzioni, due di queste le identificheremo con la lettera A , ed altre due con la lettera B . Per individuare quali zone sono A e quali invece sono B , possiamo usare la convenzione mostrata in figura 4.6: le due porzioni di piano messe in evidenza quando ruotiamo la corda superiore in senso antiorario saranno le zone A , mentre le altre due saranno le zone B .



Figura 4.6: Le A -zone e B -zone.

La condizione 1 può essere schematizzata in

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle + B \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle$$

- La condizione 2 invece ci permette di eliminare le componenti banali disgiunte, in particolare dunque se calcoliamo $\langle D \rangle$ su un'unione disgiunta di n cerchi otteniamo

$$\langle \bigcirc^n \rangle = \langle \bigcirc^{n-1} \cup \bigcirc \rangle = c \langle \bigcirc^{n-1} \rangle = \dots = c^{n-1} \langle \bigcirc \rangle = c^{n-1}$$

Per dimostrare il teorema 4.2.1 riformuliamo il polinomio $\langle D \rangle$ in termini di *stati*, che definiamo come segue. Sia D una proiezione non orientata, nel seguito denoteremo il generico incrocio di D con la lettera u , e l'insieme di tutti gli incroci con $\text{Cross}(D)$. Ogni incrocio $u \in \text{Cross}(D)$ delimita due A -zone e due B -zone: ad ogni incrocio possiamo quindi associare una lettera compresa in $\{A, B\}$. Denotiamo con $a_D(S)$, il numero rispettivamente di A -scelte e con $b_D(S)$ il numero di B -scelte. Uno *stato* S è un modo di “dividere” gli incroci a seconda che questi siano associati ad una lettera A , oppure ad una lettera B . Un esempio è riportato in figura 4.7. Dato uno stato S , denotiamo con $|S|$ il numero di componenti connesse disgiunte risultanti dopo la divisione degli incroci.

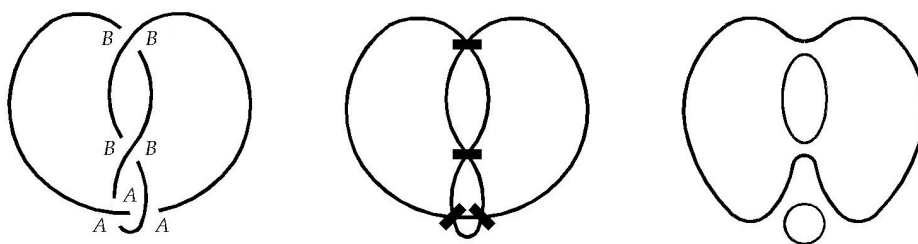


Figura 4.7: Un esempio di stato S del nodo ad otto: in questo caso $a_S(D) = 2$, $b_S(D) = 2$, $|S| = 3$.

Lemma 4.2.2. $\langle D \rangle = \sum_S A^{a_D(S)} B^{b_D(S)} c^{|S|-1}$.

Intuitivamente quest'enunciato è ovvio, motivo per cui ne omettiamo la dimostrazione. Questo ci permette di provare in un sol colpo che $\langle D \rangle$ esiste ed è unico. Come detto all'inizio però, $\langle D \rangle$ così definito non è ancora un invariante di proiezioni non orientate, motivo per cui ora dobbiamo imporre delle condizioni aggiuntive su A , B e c . Chiedere che $\langle D \rangle$ sia invariante, equivale a chiedere che sia invariante sotto l'azione delle mosse di Reidemeister. Iniziamo da Reidemeister II.

Lemma 4.2.3. $\langle \overline{\mathcal{D}}^- \rangle = AB \langle \rangle \langle \rangle + (ABc + A^2 + B^2) \langle \overline{\mathcal{D}}^- \rangle$.

Dimostrazione. Andando a svolgere i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mathcal{D}} \rangle &= A\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle + B\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle \\
&= A^2\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle + AB\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle + BA\langle \rangle \langle \rangle + B^2\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle \\
&= AB\langle \rangle \langle \rangle + (ABc + A^2 + B^2)\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle.
\end{aligned}$$

□

Pertanto, se vogliamo che $\langle D \rangle$ sia un invariante per Reidemeister II, dobbiamo imporre:

- $AB = 1$,
- $c = -A^2 - B^2$.

Con queste due condizioni otteniamo l'invarianza per Reidemeister II.

Lemma 4.2.4. *Se $\langle D \rangle$ è invariante per Reidemeister II, allora è invariante anche per Reidemeister III.*

Dimostrazione. Anche qui, basta andare a svolgere i calcoli:

$$\langle \overline{\mathcal{D}} \rangle = A\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle + B\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle \stackrel{(*)}{=} A\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle + B\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle = \langle \overline{\mathcal{D}} \rangle$$

dove nell'uguaglianza (*) si sfrutta l'invarianza per Reidemeister II. □

Una trasformazione che fa uso solo di Reidemeister II e III è detta *isotopia regolare*. Da ora in avanti porremo sempre $AB = 1$ e $c = -A^2 - B^2$.

Corollario 4.2.5. *Data una proiezione non orientata D , esiste un unico polinomio $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$, invariante di proiezioni non orientate sotto l'azione di isotopie regolari, che soddisfa i seguenti assiomi:*

1. $\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle = A\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle + A^{-1}\langle \rangle \langle \rangle$,
 $\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle = A\langle \rangle \langle \rangle + A^{-1}\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle$
2. $\langle \bigcirc \cup D \rangle = (A^2 - A^{-2})\langle D \rangle$
 $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

Ci resta solo da imporre Reidemeister I: apparentemente questo sembra dare problemi, perchè

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle &= A\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle + A^{-1}\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle = \dots = -A^3\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle \\
\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle &= A\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle + A^{-1}\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle = \dots = -A^3\langle \overline{\mathcal{B}} \rangle.
\end{aligned}$$

Per risolvere Reidemeister I dovremo scegliere un verso di percorrenza su D e supporre che la proiezione sia orientata, (da ora in poi la denoteremo



Figura 4.8: Ad ogni incrocio si associa un valore $\varepsilon(u) = \pm 1$ a seconda che l'incrocio sia positivo o negativo.

con la lettera L), e porremo inoltre $\alpha = -A^3$. Definiamo ora il *writhe number* di L come segue: ad ogni incrocio orientato $u \in \text{Cross}(L)$, possiamo associare un valore pari a $\varepsilon(u) \in \{+1, -1\}$, come riportato in figura 4.8. Il writhe number di una proiezione, che denotiamo con $\mathfrak{w}(L)$ è definito come la somma di tutti i valori $\varepsilon(u)$, formalmente:

$$\mathfrak{w}(L) = \sum_{u \in \text{Cross}(L)} \varepsilon(u). \quad (4.2)$$

Teorema 4.2.6 (Bracket Polynomial). *Per ogni proiezione orientata L , definiamo il polinomio $X(L) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ come segue:*

$$X(L) = \alpha^{-\mathfrak{w}(L)} \langle L \rangle \quad (4.3)$$

dove $\langle L \rangle$ è definito come in 4.2.5 e non tiene conto dell'orientamento di L . $X(L)$ è univocamente determinato, ed è un invariante di proiezioni orientate. Verrà chiamato *bracket polynomial* di L .

Dimostrazione. $X(L)$ è univocamente determinato poichè $\langle L \rangle$ è unico per il corollario 4.2.5. Per quanto riguarda l'invarianza, l'unica cosa da provare è che $X(L)$ è invariante per Reidemeister I, poichè Reidemeister II e III lasciano inalterato $\mathfrak{w}(L)$. In particolare dobbiamo provare l'invarianza per le mosse Reidemeister I orientate, riportate qui sotto in figura 4.9, (la versione orientata di Reidemeister II e III per ora non ci interessa e sarà riportata nel teorema 4.6.4).

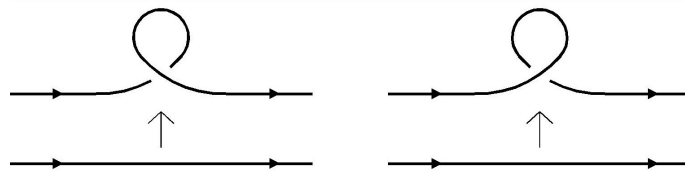


Figura 4.9: A sinistra Reidemeister Ia, a destra Reidemeister Ib.

Dette L_+ e L_- le proiezioni di L a cui vengono applicate rispettivamente Reidemeister Ia ed Ib, quello che otteniamo è

$$X(L_+) = \alpha^{-\mathfrak{w}(L_+)} \langle L_+ \rangle = \alpha^{-\mathfrak{w}(L)} \langle L \rangle = X(L),$$

$$X(L_-) = \alpha^{-w(L_-)} \langle L_- \rangle = \alpha^{-w(L) + 1} \alpha^{-1} \langle L \rangle = X(L),$$

che è proprio ciò che volevamo dimostrare. \square

Concludiamo questa sezione facendo vedere la relazione che connette il Bracket Polynomial, e il polinomio di Jones:

Proposizione 4.2.7. *Per ogni proiezione orientata L vale la relazione*

$$X(L)(t^{-1/4}) = V(L)(t).$$

Dimostrazione. Poniamo $A^4 = t^{-1}$, dobbiamo verificare che $X(L)$ soddisfa la relazione

$$A^4 X(L_+) - A^{-4} X(L_-) = (A^{-2} - A^2) X(L_0)$$

o equivalentemente, in forma schematica

$$A^4 X(\nearrow \searrow) - A^{-4} X(\searrow \nearrow) = (A^{-2} - A^2) X(\asymp)$$

Sviluppiamo separatamente i termini del membro di sinistra:

$$\begin{aligned} A^4 X(\nearrow \searrow) &= A^4 \alpha^{-w(\nearrow \searrow)} \langle \nearrow \searrow \rangle \\ &= A^4 \alpha^{-w(\asymp) - 1} (A \langle \asymp \rangle + A^{-1} \langle \nearrow \searrow \rangle) \\ &\quad | \quad \dots \\ &= -A^2 \alpha^{-w(\asymp)} \langle \asymp \rangle - \alpha^{-w(\nearrow \searrow)} \langle \nearrow \searrow \rangle \\ &= -A^2 X(\asymp) - X(\nearrow \searrow) \\ -A^{-4} X(\searrow \nearrow) &= \dots = X(\nearrow \searrow) + A^{-2} X(\asymp). \end{aligned}$$

Sommando i due risultati ottenuti, ne ricaviamo il membro di destra:

$$A^4 X(\nearrow \searrow) - A^{-4} X(\searrow \nearrow) = (A^{-2} - A^2) X(\asymp)$$

e ri-sostituendo $A = t^{-1/4}$

$$t^{-1} X(\nearrow \searrow) - t X(\searrow \nearrow) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) X(\asymp).$$

Per l'unicità del polinomio di Jones si deve necessariamente avere che $X(L)(t^{-1/4}) = V(L)(t)$. Come corollario di questa proposizione abbiamo l'esistenza del polinomio di Jones. \square

4.3 Invarianti dagli operatori di Yang-Baxter

In questa sezione, che è il cuore del capitolo 4, andremo a costruire un invariante di nodi di tipo polinomiale molto generale, che fa uso degli operatori di Yang-Baxter. Ricordiamo innanzitutto dalla sezione 1.3 che \mathcal{B}_m è il gruppo delle trecce con m fili, e tale gruppo è finitamente generato dagli incroci T_1, T_2, \dots, T_{m-1} . Il teorema di Alexander ci assicura che, dato un nodo (link) K , esistono sempre una sua proiezione orientata L , ed una qualche treccia $\beta \in \mathcal{B}_m$ tali che $L = \overline{\beta}$. Ricordiamo poi dalla sezione 1.4 che, data una treccia $\beta \in \mathcal{B}_m$, possiamo sempre costruirne una rappresentazione $\rho_m^I(\beta)$, dove I è un operatore di Yang-Baxter. Tale rappresentazione, sugli incroci elementari, è definita dalle formule (1.8) e (1.9), ovvero sia $\rho_m(T_i) = I_i$, con

$$I_i(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes I(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes \dots \otimes v_m.$$

Ricordiamo anche che, due proiezioni $L_1 = \overline{\beta_1}, L_2 = \overline{\beta_2}$ di nodi (links) che sono chiusura di trecce, sono equivalenti se e solo se le due rispettive trecce β_1 e β_2 sono Markov-equivalenti, ovvero sia se si può passare da una all'altra attraverso una sequenza di mosse di Markov:

- Markov (i): $\beta \sim \beta' \beta \beta'^{-1}$ con $\beta, \beta' \in \mathcal{B}_m$,
- Markov (ii): $\beta \sim \beta T_m$ con $\beta \in \mathcal{B}_m, \beta T_m \in \mathcal{B}_{m+1}$.

Gli invarianti di proiezioni che sono chiusura di trecce, dovranno quindi essere invarianti sotto l'azione delle mosse di Markov. Un primo tentativo che può essere fatto per produrre degli invarianti, è quello di provare a vedere se la traccia $\text{trace}(\rho_m^I(\beta))$ è invariante sotto l'azione delle mosse di Markov. Sfortunatamente la traccia è invariante per Markov I, ma non per Markov II, poichè come possiamo vedere qui di seguito:

- Markov I: $\text{trace}(\rho_m^I(\beta'^{-1} \beta \beta')) = \text{trace}(\rho_m^I(\beta))$,
- Markov II: $\text{trace}(\rho_m^I(\beta T_m)) = \text{trace}(\rho_m^I(\beta))$ in generale è falso.

Il nostro approccio ora sarà quello di modificare leggermente $\text{trace}(\rho_m(\beta))$, in modo che questa diventi invariante per Markov II.

Definizione 4.3.1. *Sia k un anello commutativo, e sia V modulo libero di rango finito sopra a k . Un **operatore di Yang-Baxter arricchito** S su $V \otimes V$ è una quadrupla $S = (I, f, \lambda, \mu)$ dove*

- i. $I \in \text{End}(V \otimes V)$ è un operatore di Yang-Baxter invertibile,*
- ii. $f \in \text{End}(V)$ è un operatore invertibile, tale che*

$$(f \otimes f) \circ I = I \circ (f \otimes f), \tag{4.4}$$

iii. $\lambda, \mu \in k^*$ sono due scalari invertibili tali che

$$\text{trace}_2(I \circ (f \otimes f)) = \lambda \mu f, \quad \text{trace}_2(I^{-1} \circ (f \otimes f)) = \lambda^{-1} \mu f. \quad (4.5)$$

Osservazione 4.3.2. (i). $\text{trace}_j : \text{End}(V^{\otimes m}) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes m-1})$ è un operatore definito come segue: dato $F \in \text{End}(V^{\otimes m})$, possiamo sfruttare l'isomorfismo $\text{End}(V^{\otimes m}) \cong \text{End}(V)^{\otimes m}$ per scrivere F nella forma

$$F = \sum F_1 \otimes \dots \otimes F_m$$

dove ciascun $F_i \in \text{End}(V)$. Definiamo $\text{trace}_j(F) \in \text{End}(V^{\otimes m-1})$ come

$$\text{trace}_j(F) = \sum \text{trace}(F_j)(F_1 \otimes \dots \otimes F_{j-1} \otimes F_{j+1} \otimes \dots \otimes F_m). \quad (4.6)$$

Il prossimo lemma ci fornisce alcune proprietà di trace_j , che risulteranno utili nel seguito.

Lemma 4.3.3. *Siano k un anello commutativo, e V un modulo libero di rango finito sopra a k . Siano poi $F \in \text{End}(V^{\otimes m+1})$, $G \in \text{End}(V^{\otimes m})$, $h \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ allora valgono le relazioni:*

- $\text{trace}(\text{trace}_{m+1}(F)) = \text{trace}(F)$,
- $\text{trace}_{m+1}((G \otimes \text{id}_V) \circ F) = G \circ \text{trace}_{m+1}(F)$,
- $\text{trace}_{m+1}(\text{id}_V^{\otimes(m-1)} \otimes h) = \text{id}_V^{\otimes(m-1)} \circ \text{trace}_2(h)$.

Dimostrazione. Sia V un modulo libero di rango n finito sopra k , e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Segue che $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{m+1}}\}$ è una base per $V^{\otimes m+1}$. F può essere espresso nella forma

$$F = \sum F_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}^{j_1 j_2 \dots j_{m+1}} E_{i_1, j_1} \otimes E_{i_2, j_2} \otimes \dots \otimes E_{i_{m+1}, j_{m+1}}$$

(se non si è convinti si provi il caso $m+1=2$, $n=2$). Segue immediato

$$- \text{trace}(F) = \sum F_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}^{i_1 i_2 \dots i_{m+1}},$$

$$\begin{aligned} - \text{trace}(\text{trace}_{m+1}(F)) &= \text{trace} \left(\sum F_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}^{j_1 j_2 \dots j_{m+1}} E_{i_1, j_1} \otimes \dots \otimes E_{i_m, j_m} \right) \\ &= \sum F_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}^{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} = \text{trace}(F). \end{aligned}$$

Per la seconda parte del lemma usiamo un'altra volta l'isomorfismo $\text{End}(V^{\otimes m+1}) \cong \text{End}(V)^{\otimes m+1}$, per ottenere

$$- F = \sum F_{i_1 \dots i_{m+1}}^{j_1 \dots j_{m+1}} E_{i_1, j_1} \otimes \dots \otimes E_{i_{m+1}, j_{m+1}};$$

$$- G \otimes \text{id}_V = \sum G_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} (E_{i_1, j_1} \otimes \dots \otimes E_{i_m, j_m}) \otimes \mathbb{1}_V.$$

Con un calcolo diretto possiamo concludere l'uguaglianza tra $\text{trace}_{m+1}((G \otimes \text{id}_V) \circ F)$ e $(G \otimes \text{id}_V) \circ \text{trace}_{m+1}(A_F)$. Per l'ultima parte invece basta porre

$$\text{id}_V^{\otimes m-1} \otimes h = \sum h_{i_m, i_{m+1}}^{j_m, j_{m+1}} \mathbb{1}_V \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_V \otimes E_{i_m, j_m} \otimes E_{i_{m+1}, j_{m+1}}$$

per ottenere immediatamente

$$- \text{trace}_{m+1}(\text{id}_V^{\otimes m-1} \otimes h) = \sum h_{i_m, i_{m+1}}^{j_m, j_{m+1}} \mathbb{1}_V \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_V \otimes E_{i_m, j_m},$$

$$- \text{id}_V^{\otimes m-1} \otimes \text{trace}_2(h) = \sum h_{i_m, i_{m+1}}^{j_m, j_{m+1}} \mathbb{1}_V \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_V \otimes E_{i_m, j_m}.$$

□

Il prossimo lemma invece ci fornisce un criterio per verificare quando un operatore di Yang-Baxter è arricchito. Produrre un operatore di Yang-Baxter arricchito infatti è più semplice di quel che sembra: ci basterà considerare i morfismi f con matrice diagonale.

Lemma 4.3.4. *Sia $I : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ un operatore di Yang-Baxter, e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base per V . Sia $f : V \rightarrow V$ un isomorfismo con matrice diagonale, definito da $f = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$, con $f_1, \dots, f_n \in k^*$. Allora la quadrupla $S = (I, f, \lambda, \mu)$ è un operatore di Yang-Baxter arricchito se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:*

ii'. Per ogni $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(f_i f_j - f_k f_l) I_{i,j}^{k,l} = 0, \quad (4.7)$$

iii'. per ogni $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\sum_{j=1}^m I_{i,j}^{k,j} f_j = \lambda \mu \delta_i^k; \quad \sum_{j=1}^m (I^{-1})_{i,j}^{k,j} f_j = \lambda^{-1} \mu \delta_i^k. \quad (4.8)$$

dove δ_i^k è il simbolo di Kronecker, ovverosia $\delta_i^i = 1$, $\delta_i^k = 0$ per $k \neq i$.

Dimostrazione. Iniziamo mostrando l'equivalenza tra le condizioni *ii* e *iii'*: se andiamo a svolgere i calcoli otteniamo

$$I \circ (f \otimes f) = \left(\sum I_{i,j}^{k,l} E_{i,k} \otimes E_{j,l} \right) \left(\sum f_x f_y E_{x,x} \otimes E_{y,y} \right) = \sum I_{i,j}^{k,l} f_k f_l E_{i,k} \otimes E_{j,l}$$

$$(f \otimes f) \circ I = \left(\sum f_x f_y E_{x,x} \otimes E_{y,y} \right) \left(\sum I_{i,j}^{k,l} E_{i,k} \otimes E_{j,l} \right) = \sum I_{i,j}^{k,l} f_i f_j E_{i,k} \otimes E_{j,l}$$

da cui scende subito l'equivalenza tra le condizioni *ii* e *iii'*.

Mostriamo ora l'equivalenza fra *iii* e *iii'* (facciamo i calcoli per I , il caso I^{-1} è analogo). Supponiamo vera la condizione *iii*, da ciò segue che

$$\text{trace}_2(I \circ (f \otimes f)) = \text{trace}_2 \left(\sum I_{i,j}^{k,l} f_k f_l E_{i,k} \otimes E_{j,l} \right) = \sum_{i,j,k} I_{i,j}^{k,j} f_k f_j E_{i,k}$$

e questo deve essere uguale a

$$\lambda\mu f = \sum_i \lambda\mu f_i E_{i,i} = \sum_{i,k} \lambda\mu f_k \delta_i^k E_{i,k}.$$

Uguagliando membro a membro i termini delle due sommatorie, segue che per ogni i, k si deve avere

$$\sum_{j=1}^m I_{i,j}^{k,j} f_k f_j = \lambda\mu f_k \delta_i^k$$

che è proprio la condizione *iii'*. Il viceversa si ottiene invertendo i passaggi appena effettuati. \square

Ora finalmente possiamo modificare la traccia in modo che questa diventi invariante per Markov II. Sia S un operatore di Yang-Baxter arricchito, denotiamo con $\mathfrak{w} : \mathcal{B}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ il morfismo di gruppi che conta il numero di incroci, ovverosia $\mathfrak{w}(T_i^{\pm 1}) = \pm 1$ per ogni i , dove \mathbb{Z} è inteso come gruppo additivo. Si noti che $\mathfrak{w}(\beta)$ è l'analogo del writhe number $\mathfrak{w}(L)$, solo che qui la definizione è stata adattata al gruppo delle trecce. Data una proiezione di trecce $\beta \in \mathcal{B}_m$, definiamo la mappa $J_S : \bigcup_m \mathcal{B}_m \rightarrow k$ come segue

$$\boxed{J_S(\beta) = \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \mu^{-m+1} \text{trace}(\rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m}).} \quad (4.9)$$

Proposizione 4.3.5. *La mappa $J_S : \bigcup_m \mathcal{B}_m \rightarrow k$ è invariante sia per Markov I che per Markov II, e quindi è un invariante di proiezioni orientate quando queste sono chiusura di trecce.*

Dimostrazione. Iniziamo col mostrare l'invarianza rispetto a Markov I.

$$\begin{aligned} J_S(\beta'^{-1}\beta\beta') &= \\ &= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta'^{-1}\beta\beta')} \mu^{-m+1} \text{trace}(\rho_m^I(\beta'^{-1}\beta\beta') \circ f^{\otimes m}) \\ &= \cancel{\lambda^{-\mathfrak{w}(\beta'^{-1})}} \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \cancel{\lambda^{-\mathfrak{w}(\beta')}} \mu^{-m+1} \text{trace}(\rho_m^I(\beta')^{-1} \rho_m^I(\beta) \rho_m^I(\beta') \circ f^{\otimes m}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \mu^{-m+1} \text{trace}(\rho_m^I(\beta')^{-1} \circ \rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m} \circ \rho_m^I(\beta')) \\ &= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \mu^{-m+1} \text{trace}(\rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m}) = J_S(\beta). \end{aligned}$$

Nell'uguaglianza (*) abbiamo sfruttato il fatto che $\rho_m(\beta')$ e $f^{\otimes m}$ commutano fra loro, perchè S è un operatore di Yang-Baxter arricchito. Mostriamo ora che $J_S(\beta)$ è invariante anche per Markov II, cioè che $J_S(\beta T_m) = J_S(\beta) = J_S(\beta T_m^{-1})$. Nello svolgimento del calcolo utilizzeremo più volte il lemma 4.3.3.

$$\begin{aligned}
J_S(\beta T_m) &= \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta T_m)} \mu^{-m-\mathfrak{l}+\mathfrak{l}'} \text{trace}(\rho_{m+1}^I(\beta T_m) \circ f^{\otimes m+1}) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)-1} \mu^{-m} \text{trace}(\rho_{m+1}^I(\beta) \circ \rho_{m+1}(T_m) \circ f^{\otimes m+1}) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)-1} \mu^{-m} \text{trace}((\rho_m^I(\beta) \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_V^{\otimes(m-1)} \otimes I) \circ f^{\otimes m+1}) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)-1} \mu^{-m} \text{trace}((\rho_m^I(\beta) \otimes \text{id}_V) \circ (f^{\otimes m-1} \otimes (I \circ f \otimes f))) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)-1} \mu^{-m} \text{trace}(\text{trace}_{m+1}((\rho_m^I(\beta) \otimes \text{id}_V) \circ (f^{\otimes m-1} \otimes (I \circ f \otimes f)))) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)-1} \mu^{-m} \text{trace}(\rho_m^I(\beta) \circ (f^{\otimes m-1} \otimes \text{trace}_2(I \circ f \otimes f))) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)-1} \mu^{-m} \text{trace}(\rho_m^I(\beta) \circ (f^{\otimes m-1} \otimes \lambda \mu f)) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)-\mathfrak{l}+\mathfrak{l}'} \mu^{-m+1} \text{trace}(\rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m}) = J_S(\beta)
\end{aligned}$$

La dimostrazione per $J_S(\beta T_m^{-1})$ è molto simile al calcolo appena svolto, ed usa il fatto che $\text{trace}_2(I^{-1} \circ f \otimes f) = \lambda^{-1} \mu f$. \square

Nel resto della tesi, non faremo altro che andare a sostituire dentro a $J_S(\beta)$ gli operatori Yang-Baxter riportati nella sezione 3.3.

4.4 Il polinomio HOMFLY

Teorema 4.4.1 (Polinomio HOMFLY). *Esiste un unico polinomio $P \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ invariante di proiezioni orientate tale che $P(\bigcirc) = 1$ e che inoltre soddisfa la relazione*

$$xP(L_+) + x^{-1}P(L_-) + y(L_0) = 0 \quad (4.10)$$

ogni volta che L_+ , L_- ed L_0 sono skein related come in figura 4.10. Questo polinomio è unico, ed è detto il polinomio di HOMFLY di L .

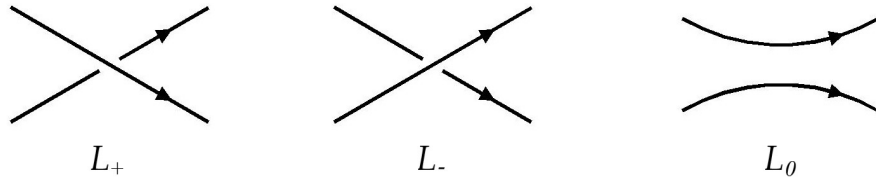


Figura 4.10: Skein Relations

Per ottenere il polinomio HOMFLY e dimostrare il teorema 4.4.1, dovremo sostituire dentro a J_S l'operatore di Yang-Baxter I ottenuto dall'algebra

universale involupante quantizzata $U_h(\mathfrak{sl}_{n+1})$, e che riportiamo qui sotto:

$$I = q \sum_{i=0}^n E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j} E_{i,j} \otimes E_{j,i} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j}. \quad (4.11)$$

con inverso

$$I^{-1} = q^{-1} \sum_{i=0}^n E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j} E_{i,j} \otimes E_{j,i} + (q^{-1} - q) \sum_{i > j} E_{i,i} \otimes E_{j,j}. \quad (4.12)$$

Proposizione 4.4.2. *Ponendo $f = \text{diag}(q^{-n}, q^{-(n-2)}, \dots, q^n)$, $\lambda = q^{n+1}$ e $\mu = 1$, si ha che $S = (I, f, \lambda, \mu)$ è un operatore di Yang-Baxter arricchito.*

Dimostrazione. Il fatto che I è un operatore di Yang-Baxter si verifica con un calcolo diretto, di cui daremo soltanto le linee generali. Per provare che I risolve l'equazione

$$I_1 \circ I_2 \circ I_1 = I_2 \circ I_1 \circ I_2$$

bisogna scrivere I_1 e I_2 come segue,

$$I_1 = q \sum_{i=0}^n E_{i,i} \otimes E_{i,i} \otimes \mathbb{1}_V + \sum_{i \neq j} E_{i,j} \otimes E_{j,i} \otimes \mathbb{1}_V + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} \otimes \mathbb{1}_V$$

$$I_2 = q \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_V \otimes E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j} \mathbb{1}_V \otimes E_{i,j} \otimes E_{j,i} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} \mathbb{1}_V \otimes E_{i,i} \otimes E_{j,j}$$

e sostituirli dentro a $I_1 \circ I_2 \circ I_1 = I_2 \circ I_1 \circ I_2$. Per dimostrare che (I, f, λ, μ) è arricchito, usiamo il lemma 4.3.4. Notiamo subito che, se $f = \text{diag}(f_0, \dots, f_n)$, allora $f_i = q^{-n+2i}$. Per verificare la condizione ii' notiamo che gli unici casi in cui $I_{i,j}^{k,l} \neq 0$, sono i seguenti:

- $I_{i,i}^{i,i} = q$,
- $I_{i,j}^{j,i} = 1$ se $i \neq j$,
- $I_{i,j}^{i,j} = q - q^{-1}$ se $i < j$.

In questi casi le coppie non ordinate $\{i, j\}$, $\{k, l\}$ coincidono, e questo prova in automatico ii' . Dobbiamo ora verificare iii' , ovvero che

$$\sum_{j=0}^n I_{i,j}^{i,j} f_j = \lambda \mu; \quad \sum_{j=0}^n (I^{-1})_{i,j}^{i,j} f_j = \lambda^{-1} \mu. \quad (4.13)$$

Proviamo la prima uguaglianza:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n I_{i,j}^{i,j} f_j &= I_{i,i}^{i,i} f_i + \sum_{i < j} I_{i,j}^{i,j} f_j \\
&= q f_i + \sum_{j=i+1}^n (q - q^{-1}) f_j \\
&= q(q^{2i-n}) + (q - q^{-1})[q^{2i+2-n} + \dots + q^n] \\
&\quad | \quad \dots \\
&= q^{n+1} = \lambda
\end{aligned}$$

La seconda uguaglianza si verifica in modo analogo. \square

Nel seguito della sezione porremo $P_n(L) = J_S(L)$.

Teorema 4.4.3. *Date tre proiezioni orientate L_+ , L_- , L_0 skein related come in figura 4.10, il polinomio P_n soddisfa l'equazione*

$$q^{n+1}P_n(L_+) - q^{-n-1}P_n(L_-) - (q - q^{-1})P_n(L_0) = 0 \quad (4.14)$$

Dimostrazione. Notiamo che, quando L_+ , L_- e L_0 sono tre proiezioni skein-related come in figura 4.10, possiamo sempre trovare una treccia $\beta \in \mathcal{B}_m$ tale che L_+ , L_- , L_0 siano equivalenti rispettivamente alle chiusure di $T_1\beta$, $T_1^{-1}\beta$, β . Segue che

$$\begin{aligned}
&q^{n+1}P_n(L_+) - q^{-(n+1)}P_n(L_-) - (q - q^{-1})P_n(L_0) = \\
&= q^{n+1} \left[\lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \text{trace} \left(\rho_m^I(T_1) \circ \rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m} \right) \right] + \\
&\quad - q^{-(n+1)} \left[\lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \text{trace} \left(\rho_m^I(T_1^{-1}) \circ \rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m} \right) \right] + \\
&\quad - (q - q^{-1}) \left[\lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \text{trace} \left(\rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m} \right) \right] \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \text{trace} \left(\left[\rho_m^I(T_1) - \rho_m^I(T_1^{-1}) - (q - q^{-1}) \text{id}^{\otimes m} \right] \circ \rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m} \right) \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \text{trace} \left(\left[(I - I^{-1} - (q - q^{-1}) \text{id}^{\otimes 2}) \otimes \text{id}^{\otimes m-2} \right] \circ \rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m} \right) \\
&\stackrel{(*)}{=} \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \text{trace} \left(\left[0^{\otimes 2} \otimes \text{id}^{\otimes m-2} \right] \circ \rho_m^I(\beta) \circ f^{\otimes m} \right) = 0.
\end{aligned}$$

L'uguaglianza (*) è dovuta al fatto che $I - I^{-1} = (q - q^{-1}) \text{id}^{\otimes 2}$. Questa può essere verificata usando (4.11) e (4.12). \square

Abbiamo quindi ottenuto una relazione molto importante, che ora dovremo andare a manipolare fino ad ottenere il polinomio HOMFLY.

Osservazione 4.4.4. *Apriamo un attimo una parentesi: la relazione (4.14) appena prodotta ci permette di ri-dimostrare in poche righe l'esistenza del polinomio di Jones. Si noti infatti che, nel caso in cui $n = 1$, abbiamo*

$$q^2P_1(L_+) - q^{-2}P_1(L_-) - (q - q^{-1})P_1(L_0) = 0.$$

Con un cambio di variabili, ponendo $q = -t^{-1/2}$, si ottiene

$$t^{-1}P_1(L_+) - tP_1(L_-) - (-t^{-1/2} + t^{1/2})P_1(L_0) = 0,$$

da cui segue immediato che $P_1(L)(-t^{-1/2})$ sia il polinomio di Jones. Si noti anche che l'operatore di Yang-Baxter utilizzato nel caso $n = 1$ è quello associato all'algebra universale involuante quantizzata $U_h(\mathfrak{sl}_2)$, riportato nel corollario 3.2.10.

Il prossimo step sarà quello di dimostrare che i coefficienti di P_n non dipendono da n . Proviamo innanzitutto il seguente lemma.

Lemma 4.4.5. $P_n(\bigcirc) = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}$; $P_n(\bigcirc^d) = \left(\frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}\right)^d$;

Dimostrazione. Iniziamo mostrando la prima uguaglianza:

$$\begin{aligned} P_n(\bigcirc) &= \text{trace}(f) \\ &= q^{-n} + q^{-(n-2)} + \dots + q^n \\ &= q^{-n}(1 + q^2 + \dots + q^{2n}) = \dots = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

A questo punto possiamo calcolare $P_n(\bigcirc^d)$: usando la relazione (4.14) e ragionamenti analoghi a quelli visti nella sezione 4.1 segue che

$$P_n(\bigcirc^d) = \left(\frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}\right)^d.$$

□

Osservazione 4.4.6. Come corollario abbiamo che, nel caso particolare dei links banali, i coefficienti di $P_n(\bigcirc^d)$ non dipendono da n .

Proposizione 4.4.7. Sia K un nodo (link) orientato con m fili, e sia L una sua proiezione orientata con u incroci. Se $n \geq 4u + 2m$ vale la relazione

$$(q - q^{-1})^{u+m} P_n(L) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}} p_{a,b} q^{a+(n+1)b}$$

in cui gli elementi $p_{a,b}$ sono interi e tali che:

- i. $p_{a,b} = 0$ ad eccezione di un numero finito di coppie (a, b) ;
- ii. $p_{a,b} = 0$ per ogni $|a| > 2u + m$;
- iii. $p_{a,b}$ non dipendono da n .

Dimostrazione. Data una proiezione L , possiamo applicare ricorsivamente la relazione (4.14) fino ad ottenere una sommatoria di elementi nella forma

$$P_n(\bigcirc^d)q^{(n+1)e}(q - q^{-1})^f$$

con $d, e, f \in \mathbb{Z}$, $0 < d < u + m$, $0 < f < u$. Moltiplicando per $(q - q^{-1})^{u+m}$, e utilizzando il lemma 4.4.5 si ottiene una sommatoria di elementi nella forma

$$(q^{n+1} - q^{-n-1})^d q^{(n+1)e} (q - q^{-1})^{f+u+m-d}.$$

Questa sommatoria, sviluppata ulteriormente, diventa una sommatoria nella forma $\sum_{a,b \in \mathbb{Z}} p_{a,b} q^{a+(n+1)b}$, che soddisfa le proprietà richieste dal lemma:

- $p_{a,b} = 0$ eccetto che in un numero finito di coppie (a, b) : d'altra parte il polinomio di sopra è costituito da una somma finita di termini;

- $p_{a,b} = 0$ se $|a| > 2u + m$: infatti $|a| \leq f + u + m - d \leq 2u + m$;

- Gli elementi $p_{a,b}$ sono interi e non dipendono da n : ovvio per come sono stati costruiti. \square

Il fatto che $P_n(L)$ non dipenda da n ci mette finalmente nella posizione di dimostrare il teorema 4.4.1.

Dimostrazione. (Teorema 4.4.1) Dal momento che $P_n(L)$ non dipende da n , possiamo porre $q^{n+1} = t$: in altre parole q^{n+1} è diventata una variabile indipendente da q . Definiamo quindi

$$\tilde{P}(L) = (q - q^{-1})^{-u-m} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}} p_{a,b} q^a t^b.$$

Cambiando le variabili anche nella relazione (4.14), segue che \tilde{P} soddisfi

$$t\tilde{P}(L_+) - t^{-1}\tilde{P}(L_-) - (q - q^{-1})\tilde{P}(L_0) = 0. \quad (4.15)$$

Il polinomio $\tilde{P}(L)$ quindi dipende solo dalle variabili t e $q - q^{-1}$. Con un secondo cambio di variabili, poniamo $t = \sqrt{-1}x$, e $q - q^{-1} = -\sqrt{-1}y$, in questo modo (4.15) diventa

$$x\tilde{P}(L_+) + x^{-1}\tilde{P}(L_-) + y\tilde{P}(L_0) = 0. \quad (4.16)$$

In ultimo, essendo $\tilde{P}(\bigcirc) = \frac{x+x^{-1}}{y}$ poniamo

$$P(L) = \frac{y}{x+x^{-1}}\tilde{P}(L) \quad (4.17)$$

così da avere $P(\bigcirc) = 1$. $P(L)$ continua a soddisfare la relazione (4.16), e questo ci permette di provare l'esistenza del polinomio HOMFLY. L'unicità segue dal fatto che $P(L)$ può essere costruito per ricorsione, ed è analoga quanto fatto nel teorema 4.1.1 per il polinomio di Jones. \square

4.5 Il polinomio di Kauffman

Teorema 4.5.1 (Polinomio di Kauffman). *Esiste un unico polinomio $Q_\nu \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$, invariante per le proiezioni orientate, e tale che*

- (i) $Q_\nu(\bigcirc) = 1$;
- (ii) *Per ogni proiezione orientata L con corrispondente non orientata D , se poniamo $\tilde{Q}_\nu(D) = x^{\mathfrak{w}(L)}Q_\nu(L)$, il polinomio $\tilde{Q}_\nu(D)$ non dipende dall'orientamento di L ;*
- (iii) *Se D_+ , D_- , D_0 , D_∞ sono proiezioni non orientate e skein related come in figura 4.11, allora vale la relazione*

$$\tilde{Q}_\nu(D_+) + \nu\tilde{Q}_\nu(D_-) = y[\tilde{Q}_\nu(D_0) + \nu\tilde{Q}_\nu(D_\infty)]. \quad (4.18)$$

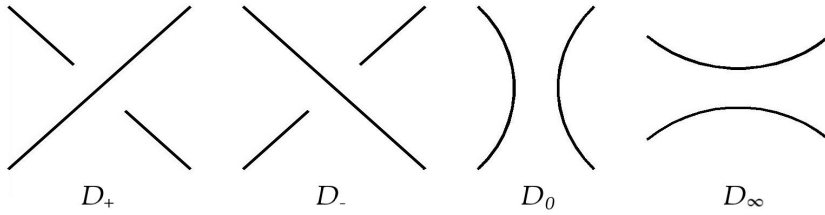


Figura 4.11: Queste skein relations sono diverse da quelle riportate in figura 4.10: in questo caso le proiezioni sono non orientate, e inoltre compare D_∞ .

Vediamo ora cosa succede se calcoliamo J_S utilizzando gli operatori di Yang-Baxter relativi alle quantizzazioni $U_h(\mathfrak{g})$, quando \mathfrak{g} è un'algebra di Lie del tipo B_n , C_n o D_n . Ricordiamo che le tre algebre sono rispettivamente $B_n = \mathfrak{o}_{2n+1}$, $C_n = \mathfrak{sp}_{2n}$, $D_n = \mathfrak{o}_{2n}$. Una descrizione uniforme degli operatori di Yang-Baxter è già stata data nella sezione 3.3, e per comodità la riportiamo anche qui di seguito. Sia $\nu \in \{1, -1\}$: per le algebre di tipo B_n e D_n porremo $\nu = -1$, invece per quelle di tipo C_n porremo $\nu = 1$. Da ora in poi, con un abuso di notazione, porremo $n = 2n + 1$, oppure $n = 2n$ a seconda dell'algebra utilizzata. Sia inoltre $i' = n + 1 - i$, poniamo poi

$$\bar{i} = \begin{cases} i - \nu/2 & \text{se } 1 \leq i < (n+1)/2 \\ i & \text{se } i = (n+1)/2 \\ i + \nu/2 & \text{se } (n+1)/2 < i \leq n. \end{cases} \quad (\text{per } n \text{ dispari})$$

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq i \leq (n+1)/2 \\ -\nu & \text{se } (n+1)/2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Notiamo anche che $i' = i$ se solo se $i = (n+1)/2$, e quindi se n è dispari. La formula compatta per gli operatori di Yang-Baxter è data da

$$\begin{aligned} I_\nu &= q \sum_{i \neq i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i=i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j, j'} E_{i,j} \otimes E_{j,i} \\ &+ q^{-1} \sum_{i \neq i'} E_{i,i'} \otimes E_{i',i} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} \\ &+ (q^{-1} - q) \sum_{i < k'} \varepsilon(i) \varepsilon(k') q^{\bar{i} - \bar{k}'} E_{i,k} \otimes E_{i',k'}. \end{aligned}$$

mentre il suo inverso è

$$\begin{aligned} I_\nu^{-1} &= q^{-1} \sum_{i \neq i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i=i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j, j'} E_{i,j} \otimes E_{j,i} \\ &+ q \sum_{i \neq i'} E_{i,i'} \otimes E_{i',i} + (q^{-1} - q) \sum_{i > j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} \\ &+ (q - q^{-1}) \sum_{i > k'} \varepsilon(i) \varepsilon(k') q^{\bar{i} - \bar{k}'} E_{i,k} \otimes E_{i',k'}. \end{aligned}$$

Proposizione 4.5.2. *Posti $f = \text{diag}(q^{2\bar{i}-n-1})$, $\lambda = q^{n+\nu}$, $\mu = 1$, allora (I_ν, f, λ, μ) è un operatore di Yang-Baxter arricchito.*

Dimostrazione. Proviamo che I_ν è arricchito: utilizziamo il criterio fornito dal lemma 4.3.4. Partiamo dalla condizione ii' , ovvero sia che, per ogni i, j, k, l :

$$(f_i f_j - f_k f_l)(I_\nu)_{i,j}^{k,l} = 0.$$

Gli unici casi in cui $(I_\nu)_{i,j}^{k,l} \neq 0$ sono elencati qui di seguito:

- $(I_\nu)_{i,i}^{i,i} = q$ se $i \neq i'$;
- $(I_\nu)_{i',i'}^{i',i'} = 1$ se $i = i'$;
- $(I_\nu)_{i,j}^{j,i} = 1$ se $i \neq j, j'$;
- $(I_\nu)_{i,i'}^{i',i} = q^{-1}$ se $i \neq i'$;
- $(I_\nu)_{i,j}^{i,j} = q - q^{-1}$ se $i < j \neq i'$;
- $(I_\nu)_{i,i'}^{k,k'} = (q^{-1} - q) \varepsilon(i) \varepsilon(k') q^{\bar{i} - \bar{k}'}$ se $i < k' \neq i'$;
- $(I_\nu)_{i,i'}^{i,i'} = (q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}-n-1})$ se $i < j = l = i'$.

L'ultima uguaglianza sfrutta il fatto che $\varepsilon(i) \varepsilon(i') = -\nu$, $\bar{i} + \bar{i}' = n + 1$. Notiamo che in tutti i casi eccetto il penultimo, le coppie non ordinate $\{i, j\}$

e $\{k, l\}$ sono uguali, per cui la tesi risulta verificata. Il penultimo caso va considerato a parte, ma un rapido calcolo ci permette di provare che:

$$f_i f_{i'} = q^{2\bar{i}-(n+1)} q^{2\bar{i}'-(n+1)} = q^{2(\bar{i}+\bar{i}')-2(n+1)} = 1 = f_k f_{k'}.$$

Proviamo ora *iii'*, ovverosia

$$(i). \sum_{j=1}^n (I_\nu)_{i,j}^{i,j} q^{2\bar{j}-n-1} = q^{n+\nu},$$

$$(ii). \sum_{j=1}^n (I_\nu^{-1})_{i,j}^{i,j} q^{2\bar{j}-n-1} = q^{-n-\nu}.$$

Notiamo che il punto (ii) può essere dedotto da (i) come segue: i termini $(I_\nu)_{i,j}^{k,l}$ e $(I_\nu^{-1})_{i,j}^{k,l}$ sono connessi dalla seguente relazione

$$(I_\nu^{-1})_{i,j}^{k,l} = \varphi((I_\nu)_{i',j'}^{k',l'})$$

dove $\varphi : \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}] \rightarrow \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ è l'automorfismo che manda $q^{1/2}$ in $q^{-1/2}$. La relazione diventa evidente se confrontiamo i coefficienti di I_ν con quelli di I_ν^{-1} , riportati qui sotto:

- $(I_\nu^{-1})_{i,i}^{i,i} = q^{-1}$ se $i \neq i'$;
- $(I_\nu^{-1})_{i',i'}^{i',i'} = 1$ se $i = i'$;
- $(I_\nu^{-1})_{i,j}^{j,i} = 1$ se $i \neq j, j'$;
- $(I_\nu^{-1})_{i,i'}^{i',i} = q$ se $i \neq i'$;
- $(I_\nu^{-1})_{i,j}^{i,j} = q^{-1} - q$ se $i > j \neq i'$;
- $(I_\nu^{-1})_{i,i'}^{k,k'} = (q - q^{-1})\varepsilon(i)\varepsilon(k')q^{\bar{i}-\bar{k}'}$ se $i > k' \neq i'$;
- $(I_\nu^{-1})_{i,i'}^{i,i'} = (q^{-1} - q)(1 + \nu q^{2\bar{i}-n-1})$ se $i > j = l = i'$.

Possiamo ora dimostrare che (i) \Rightarrow (ii):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (I_\nu^{-1})_{i,j}^{i,j} q^{2\bar{j}-n-1} &= \sum_{j'=1}^n \varphi((I_\nu)_{i',j'}^{i',j'}) \varphi(q^{2\bar{j}'-n-1}) = \\ &= \varphi\left(\sum_{j'=1}^n (I_\nu)_{i',j'}^{i',j'} q^{2\bar{j}'-n-1}\right) \stackrel{(i)}{=} \varphi(q^{n+\nu}) = q^{-n-\nu} \end{aligned}$$

per cui abbiamo concluso che (i) \Rightarrow (ii). Ci resta solo da provare il punto (i): ci conviene suddividere il problema in 3 casi: $i > i'$, $i = i'$, $i < i'$. Partiamo da $i > i'$: in quel caso $i > (n+1)/2$, e quindi $\bar{j} = j + \nu$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (I_\nu)_{i,j}^{i,j} q^{2\bar{j}-n-1} &= \sum_{j=i}^n (I_\nu)_{i,j}^{i,j} q^{2j+\nu-n-1} \\
&= (I_\nu)_{i,i}^{i,i} q^{2i+\nu-n-1} + \sum_{j=i+1}^n (I_\nu)_{i,j}^{i,j} q^{2j+\nu-n-1} \\
&= q q^{2i+\nu-n-1} + \sum_{j=i+1}^n (q - q^{-1}) q^{2j+\nu-n-1} \\
&\quad | \quad \dots \\
&= q^{n+\nu}
\end{aligned}$$

Il caso $i = i'$ è quasi analogo a quanto appena fatto, con la particolarità che n è dispari, e quindi $\nu = -1$. Per il caso $i < i'$ invece abbiamo $i < (n+1)/2$, e quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (I_\nu)_{i,j}^{i,j} q^{2\bar{j}-n-1} &= (I_\nu)_{i,i}^{i,i} q^{2\bar{i}-n-1} + \sum_{j=i+1}^n (I_\nu)_{i,j}^{i,j} q^{2\bar{j}-n-1} \\
&= (I_\nu)_{i,i}^{i,i} q^{2\bar{i}-n-1} + \left[\sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq i'}}^n (I_\nu)_{i,j}^{i,j} q^{2\bar{j}-n-1} \right] + (I_\nu)_{i,i'}^{i,i'} q^{2\bar{i}'-n-1} \\
&\stackrel{(*)}{=} q q^{2\bar{i}-n-1} + (q - q^{-1}) \sum_{j=i+1}^n q^{2\bar{j}-n-1} + \nu(q - q^{-1}) \\
&= q^{2\bar{i}-n} + \sum_{j=i+1}^n q^{2\bar{j}-n} + \sum_{j=i+1}^n q^{2\bar{j}-n-2} + \nu(q - q^{-1}) \\
&= \sum_{j=i}^n q^{2\bar{j}-n} - \sum_{j=i+1}^n q^{2\bar{j}-n-2} + \nu(q - q^{-1}).
\end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (*) è dovuta al fatto che

$$(I_\nu)_{i,i'}^{i,i'} q^{2\bar{i}'-n-1} = (q - q^{-1}) q^{2\bar{i}'-n-1} + \nu(q - q^{-1})$$

e il termine $(q - q^{-1}) q^{2\bar{i}'-n-1}$ è stato riportato dentro la sommatoria. Per svolgere la differenza tra le due sommatorie conviene svilupparle:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^n q^{2\bar{j}-n} &= \cancel{q^{2i-\nu-n}} + \dots + q^{2(\frac{n}{2})-\nu-n} \\
&\quad + \cancel{q^{2(\frac{n}{2}+1)+\nu-n}} + \dots + \cancel{q^{2(n-1)+\nu-n}} + q^{2n+\nu-n}; \\
\sum_{j=i+1}^n q^{2\bar{j}-n-2} &= \cancel{q^{2i-\nu-n}} + \dots + q^{2(\frac{n}{2})+\nu-n} \\
&\quad + \cancel{q^{2(\frac{n}{2}+1)+\nu-n}} + \dots + \cancel{q^{2(n-1)+\nu-n}};
\end{aligned}$$

in questo modo si vede quali termini si semplificano e quali no. Pertanto

$$\sum_{j=i}^n q^{2\bar{j}-n} - \sum_{j=i+1}^n q^{2\bar{j}-n-2} = (q^{-\nu} - q^{\nu}) + q^{n+\nu} = -\nu(q - q^{-1}) + q^{n+\nu},$$

da cui *iii'* scende immediato. \square

Come conseguenza segue che, per ogni proiezione L ed ogni treccia $\beta \in \mathcal{B}_m$ tale che $\bar{\beta} = L$, allora il polinomio

$$J_S(L) = J_S(\beta) = \lambda^{-\mathfrak{w}(\beta)} \mu^{-m+1} \text{trace}(\rho_m^{I_\nu}(\beta) \circ f^{\otimes m})$$

è un invariante di proiezioni orientate. Per il resto della sezione porremo $J_S(L) = Q_{n,\nu}(L)$.

Lemma 4.5.3. $Q_{n,\nu}(\circlearrowleft) = -\nu + \frac{q^{n+\nu} - q^{-n-\nu}}{q - q^{-1}}$.

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che $Q_{n,\nu}(\circlearrowleft) = \text{trace}(f)$: andiamo a dare una descrizione esplicita degli operatori diagonali $f = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$ nel caso delle tre algebre B, C, D . Usando la formula $f_i = q^{2\bar{j}-n-1}$ otteniamo

$$\begin{aligned} f_B &= \text{diag}(q^{-n+2}, q^{-n+4}, \dots, q^{-1}, 1, q, \dots, q^{n-2}), \\ f_C &= \text{diag}(q^{-n}, q^{-n-2}, \dots, q^{-4}, q^{-2}, q^2, q^4, \dots, q^n), \\ f_D &= \text{diag}(q^{-n+2}, q^{-n+4}, \dots, q^{-2}, 1, 1, q^2, \dots, q^{n-2}). \end{aligned}$$

Facciamo i tre calcoli separatamente: partiamo da B , ($\nu = -1$)

$$\begin{aligned} \text{trace}(f_B) &= q^{-n+2} + q^{-n+4} + \dots + q^{-1} + 1 + q + \dots + q^{n-2} \\ &= 1 + q^{-n+2}(1 + q^2 + \dots + q^{2n-4}) \\ &= 1 + q^{-n+2} \left(\frac{q^{2n-2}-1}{q^2-1} \right) \\ &= 1 + \frac{q^n - q^{-n+2}}{q^2-1} = 1 + \frac{q^{n-1} - q^{-n+1}}{q - q^{-1}} = -\nu + \frac{q^{n+\nu} - q^{-n-\nu}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Per l'algebra C invece, ($\nu = 1$)

$$\begin{aligned} \text{trace}(f_C) &= q^{-n} + q^{-n+2} + \dots + q^{-2} + q^2 + \dots + q^n \\ &= -1 + (q^{-n} + q^{-n+2} + \dots + q^{-2} + 1 + q^2 + \dots + q^n) \\ &= -1 + q^{-n}(1 + q^2 + \dots + q^{2n}) \\ &= -1 + q^{-n} \left(\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} \right) \\ &= -1 + \frac{q^{n+2} - q^{-n}}{q^2-1} = -1 + \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}} = -\nu + \frac{q^{n+\nu} - q^{-n-\nu}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

In ultimo nel caso D , ($\nu = -1$)

$$\begin{aligned}
\text{trace}(f_D) &= q^{-n+2} + q^{-n+4} + \dots + q^{-2} + 1 + 1 + q^2 + \dots + q^{n-2} \\
&= 1 + (q^{-n+2} + q^{-n+4} + \dots + q^{-2} + 1 + q^2 + \dots + q^{n-2}) \\
&= 1 + q^{-n+2}(1 + q^2 + \dots + q^{2n-4}) \\
&= 1 + q^{-n+2}\left(\frac{q^{2n-2}-1}{q^2-1}\right) \\
&= 1 + \frac{q^n - q^{-n+2}}{q^2-1} = 1 + \frac{q^{n-1} - q^{-n+1}}{q-q^{-1}} = -\nu + \frac{q^{n+\nu} - q^{-n-\nu}}{q-q^{-1}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.4. *Sia L una proiezione orientata, e sia D la corrispondente proiezione non orientata. Allora il polinomio*

$$\tilde{Q}_{n,\nu}(D) = (\sqrt{-\nu}q^{n+\nu})^{\mathfrak{w}(L)} Q_{n,\nu}(L)$$

non dipende dall'orientamento di L , dove $\mathfrak{w}(L)$ è il writhe number di L . (Qui si sottintende che $\sqrt{-\nu} = 1$ se $\nu = -1$, e $\sqrt{-\nu} = i$ se $\nu = 1$). Inoltre se D_+ , D_- , D_0 , D_∞ sono proiezioni skein-related, nel senso della figura 4.11, allora vale la relazione

$$\tilde{Q}_{n,\nu}(D_+) - \tilde{Q}_{n,\nu}(D_-) = (q - q^{-1})[\tilde{Q}_{n,\nu}(D_0) + \nu\tilde{Q}_{n,\nu}(D_\infty)]. \quad (4.19)$$

Notiamo che questo teorema non può essere dimostrato con lo stesso metodo usato per il teorema 4.4.3, poichè nelle skein relations compare anche D_∞ , che non può essere espresso facilmente in termini di trecce. L'idea, che svilupperemo nella sezione 4.6, è di bypassare il problema e riscrivere $J_S(L)$ senza usare il gruppo delle trecce. Motivo per cui rimandiamo la dimostrazione del teorema 4.5.4 alla fine della sezione 4.6.

Il teorema 4.5.1, può essere dedotto da 4.5.4, esattamente come è stato fatto nella dimostrazione di 4.4.1 per il polinomio HOMFLY. In particolare il lemma 4.4.7 resta vero se rimpiazziamo P_n con $Q_{n,\nu}$ e tutte le entate di $n + 1$ con $n + \nu$.

4.6 Modelli di stati per la teoria dei nodi

Nonostante il nome, questa sezione avrebbe potuto tranquillamente intitolarsi “dimostrazione del teorema 4.5.4”: il titolo che abbiamo scelto è dovuto al fatto che vengono introdotte tutta una serie di definizioni circa i modelli di stati riprese dalla fisica ed adattate alla teoria dei nodi. La dimostrazione si alterna in quattro steps: nei primi tre andremo progressivamente a ridefinire $J_S(L)$ in termini di stati, e poi nello step 4 andremo a dimostrare il

teorema 4.5.4 usando i risultati degli steps precedenti. Nel seguito V sarà un k -modulo di rango n , $S = (I, f, \lambda, \mu)$ un operatore di Yang-Baxter arricchito sopra a $V^{\otimes 2}$, e supporremo sempre di poter avere a disposizione una base di V per cui f è diagonale, $f = \text{diag}(f_i)$.

4.6.1 Step 1: $J_S(L)$ in termini di stati per proiezioni orientate che sono chiusura di trecce

In questo primo step andremo a riscrivere $J_S(L)$ in termini di stati per le proiezioni orientate che possono essere espresse tramite la chiusura di trecce. Negli step 2 e 3 andremo a generalizzare questo risultato, estendendolo a proiezioni (orientate e non) qualsiasi. Iniziamo con le definizioni: data una proiezione orientata L , porremo Γ_L il grafo planare orientato ottenuto come nella figura 4.12, i cui vertici sono gli incroci di L , e i cui archi (orientati) sono i “pezzi di corda” di L che connettono due incroci come in figura 4.12 seguendo l’orientamento di L . Nel seguito indicheremo con $\text{Vert}(L)$ e $\text{Edg}(L)$ rispettivamente l’insieme dei vertici e l’insieme degli archi di Γ_L , e supporremo inoltre che i grafi orientati Γ_L tengano conto della posizione reciproca delle corde attorno agli incroci (cioè di quale corda “passa sopra”, e quale invece “passa sotto”).

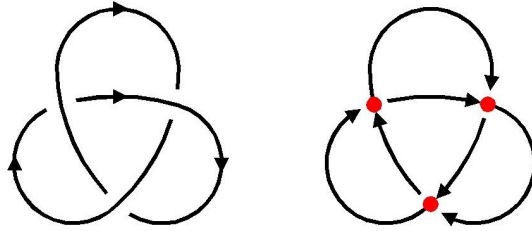


Figura 4.12: Un esempio di nodo L assieme al suo grafo planare Γ_L .

Definizione 4.6.1. Uno *stato* di L è una mappa $i : \text{Edg}(L) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. L’insieme degli stati di L viene denotato con $\text{St}(L)$.

Dato un operatore di Yang-Baxter I , siano i uno stato di L , u un vertice di Γ_L , ed a, b, c, d gli archi di Γ_L incidenti in u come in figura 4.13. Definiamo

$$\pi_u(i) = \begin{cases} I_{i(a),i(b)}^{i(c),i(d)} & \text{se } u \text{ è positivo} \\ (I^{-1})_{i(a),i(b)}^{i(c),i(d)} & \text{se } u \text{ è negativo} \end{cases} \quad (4.20)$$

Uno stato $i \in \text{St}(L)$ si dice *contributivo* se $\pi_u(i) \neq 0$ per ogni $u \in \text{Vert}(L)$. Denotiamo poi l’insieme degli stati contributivi con $\text{CSt}(L)$. Per ogni stato contributivo $i \in \text{CSt}(L)$, definiamo poi

$$\Pi(i) = \prod_{u \in \text{Vert}(L)} \pi_u(i), \quad (4.21)$$

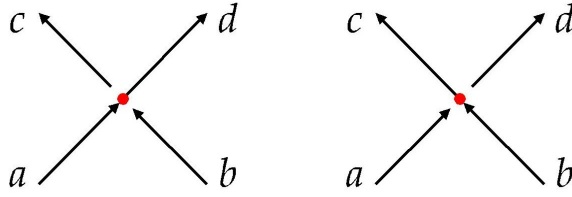


Figura 4.13: Il vertice di sinistra è positivo, quello di destra negativo.

e, se L può essere espresso come chiusura di una treccia $\beta \in \mathcal{B}_m$, poniamo

$$\int_L i = \prod_{k=1}^m f_{i(a_k)}, \quad (4.22)$$

dove a_1, \dots, a_m sono gli archi del grafo Γ_L che “chiudono” la parte superiore ed inferiore di $L = \bar{\beta}$, come in figura 4.14.

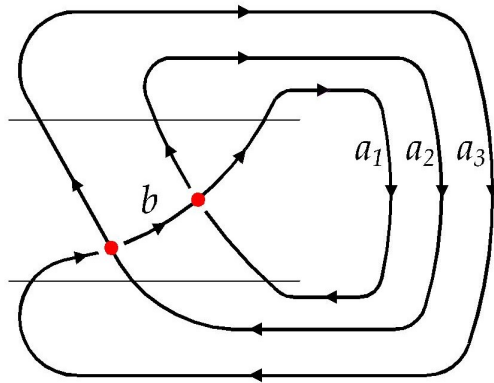


Figura 4.14: Qui per esempio, $\int_L i = f_{i(a_1)} f_{i(a_2)} f_{i(a_3)}$ per ogni $i \in \text{CSt}(L)$.

Teorema 4.6.2 (Step 1).

$$J_S(L) = \lambda^{-\mathfrak{m}(\beta)} \mu^{-m+1} \sum_{i \in \text{CSt}(L)} \Pi(i) \int_L i. \quad (4.23)$$

Dimostrazione. Fissiamo innanzitutto una base v_1, \dots, v_n di V rispetto alla quale f è diagonale, e consideriamo la matrice di $\rho_m(\beta) \circ f^{\otimes m}$ rispetto alla base $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m}\}$. Dobbiamo provare che

$$\text{trace}(\rho_m(\beta) \circ f^{\otimes m}) = \sum_{i \in \text{CSt}(L)} \Pi(i) \int_L i$$

Osserviamo preliminarmente che l'azione di $f^{\otimes m}$ su ogni elemento della base è data da

$$f^{\otimes m}(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m}) = f_{i_1} \dots f_{i_m}(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m})$$

e dunque $f^{\otimes m}$ ha matrice diagonale, data da

$$\sum_{i_1, \dots, i_m} f_{i_1} \dots f_{i_m}(E_{i_1, i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_m, i_m}).$$

Facciamo innanzitutto un esempio. Consideriamo la treccia in figura 4.14: in questo caso $m = 3$, $\beta = T_1^{-1}T_2 \in \mathcal{B}_3$, e fissato I operatore di Yang-Baxter, una rappresentazione di β è data da:

$$\rho_3^I(\beta) = \rho_3^I(T_1^{-1})\rho_3^I(T_2) = I_1^{-1} I_2.$$

Gli operatori I_1^{-1} , e I_2 , scritti esplicitamente sono

$$\begin{aligned} I_1^{-1} &= \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, \\ x_1, x_2}} (I_1^{-1})_{i_1, i_2, i_3}^{x_1, x_2, i_3} E_{i_1, x_1} \otimes E_{i_2, x_2} \otimes E_{i_3, i_3}, \\ I_2 &= \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, \\ y_2, y_3}} (I_2)_{j_1, y_2, y_3}^{j_1, j_2, j_3} E_{j_1, j_1} \otimes E_{y_2, j_2} \otimes E_{y_3, j_3}. \end{aligned}$$

Con un piccolo abuso di notazione, abbiamo esplicitato anche gli indici nascosti. In questo modo, quando andiamo ad eseguire il prodotto, quello che otteniamo è

$$\rho_3(\beta) = I_1^{-1}I_2 = \sum (I_1^{-1})_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, x_2, i_3} (I_2)_{j_1, x_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3} E_{i_1, j_1} \otimes E_{i_2, j_2} \otimes E_{i_3, j_3}.$$

Si noti che abbiamo implicitamente posto $x_1 = j_1$, $x_2 = y_2$, $i_3 = y_3$. Eliminando gli indici in eccesso questo diventa

$$I_1^{-1}I_2 = \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, x_2 \\ j_1, j_2, j_3}} (I_1^{-1})_{i_1, i_2}^{j_1, x_2} I_{x_2, i_3}^{j_2, j_3} E_{i_1, j_1} \otimes E_{i_2, j_2} \otimes E_{i_3, j_3}.$$

Andiamo ora a moltiplicare l'operatore appena ottenuto con $f^{\otimes 3}$. In questo modo otteniamo

$$\rho_3(\beta) \circ f^{\otimes 3} = \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, x_2 \\ j_1, j_2, j_3}} (I_1^{-1})_{i_1, i_2}^{j_1, x_2} I_{x_2, i_3}^{j_2, j_3} (f_{j_1} f_{j_2} f_{j_3}) E_{i_1, j_1} \otimes E_{i_2, j_2} \otimes E_{i_3, j_3}.$$

Gli elementi della diagonale sono individuati ponendo $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, $i_3 = j_3$, per cui

$$\text{trace}(\rho_3(\beta) \circ f^{\otimes 3}) = \sum_{i_1, i_2, i_3, x_2} (I_1^{-1})_{i_1, i_2}^{i_1, x_2} I_{x_2, i_3}^{i_2, i_3} (f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}).$$

A questo punto, ponendo $i_1 = i(a_1)$, $i_2 = i(a_2)$, $i_3 = i(a_3)$ e $x_2 = i(b)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{trace}(\rho_3(\beta) \circ f^{\otimes 3}) &= \sum_{i \in \text{St}(L)} (I^{-1})_{i(a_1)i(a_2)}^{i(a_1) i(b)} I_{i(b) i(a_3)}^{i(a_2)i(a_3)} (f_{i(a_1)} f_{i(a_2)} f_{i(a_3)}) \\
&= \sum_{i \in \text{St}(L)} \pi_u(i) \pi_v(i) (f_{i(a_1)} f_{i(a_2)} f_{i(a_3)}) \\
&= \sum_{i \in \text{St}(L)} \Pi(i) \int_L i.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il caso generale, sia data una treccia $\beta \in \mathcal{B}_m$ con m fili. Scritta come composizione di incroci elementari risulta

$$\beta = T_{h_1}^{\pm 1} T_{h_2}^{\pm 1} \dots T_{h_l}^{\pm 1}.$$

Ricalcando la dimostrazione appena fatta sul caso particolare di sopra, si può ottenere la generalizzazione

$$\begin{aligned}
\text{trace}(\rho_m(\beta) \circ f^{\otimes m}) &= \sum (I_{h_1}^{\pm 1})_{i_1, \dots, i_m}^{x_1, \dots, x_m} (I_{h_2}^{\pm 1})_{x_1, \dots, x_m}^{y_1, \dots, y_m} \dots (I_{h_l}^{\pm 1})_{z_1, \dots, z_m}^{i_1, \dots, i_m} (f_{i_1} \dots f_{i_m}) \\
&= \sum_{i \in \text{St}(L)} \pi_{u_1}(i) \pi_{u_2}(i) \dots \pi_{u_l}(i) (f_{i_1} \dots f_{i_m})
\end{aligned}$$

con $i_1 = i(a_1), \dots, i_m = i(a_m)$, che è proprio ciò che volevamo. \square

Non ci preoccuperemo più di tanto di formalizzare il caso generale, anche perchè nella prossima sezione dovremo produrre e dimostrare un risultato ancor più generale. Il prossimo step è scrivere $J_S(L)$ in termini di stati per proiezioni orientate qualsiasi, anche quando queste non sono chiusura di trecce.

4.6.2 Step 2: $J_S(L)$ in termini di stati per proiezioni orientate qualsiasi

Per poter generalizzare $J_S(L)$ alle proiezioni orientate che non sono chiusura di trecce, dobbiamo trovare un modo per esprimere/generalizzare $\mathfrak{w}(\beta)$, m (il numero di fili), e $\int_L i$.

Iniziamo da $\mathfrak{w}(\beta)$: questo può essere rimpiazzato dal writhe number $\mathfrak{w}(L)$, perchè, come già detto in precedenza, $\mathfrak{w}(\beta)$ non è altro che l'analogo di $\mathfrak{w}(L)$ adattato al gruppo delle trecce. Ricordiamo che il writhe number è stato definito in (4.2).

Per quanto riguarda m , questo può essere sostituito dal *numero di rotazione*: per definirlo procediamo come segue. Dato Γ_L grafo di L , denotiamo con Γ_L^0 il grafo ottenuto appiattendo ogni incrocio di Γ_L come in figura 4.15. Per abbreviare porremo $\Gamma^0 = \Gamma_L^0$, definiamo poi la mappa $\tau : \Gamma^0 \rightarrow \mathbb{S}^1$ di Gauss, che ad ogni punto $x \in \Gamma^0$ associa il vettore tangente $\tau(x) = p$.

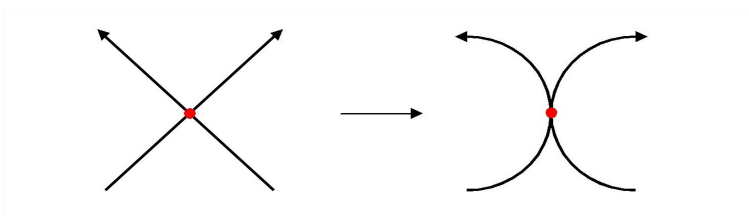


Figura 4.15: Quando appiattiamo gli incroci, la deformazione non tiene conto della posizione reciproca delle corde, (cioè di quale corda passa sopra e quale invece passa sotto), ma soltanto dell'orientamento.

Poniamo dunque

$$\text{rot}(L) = \frac{\text{deg}(\tau)}{2\pi}$$

dove $\text{deg}(\tau)$ è l'angolo totale spaziato dal vettore tangente che scorre lungo Γ^0 . In altre parole $\text{rot}(L)$ non fa altro che contare il “numero di giri” fatti dal vettore tangente quando questo scorre lungo Γ^0 (il numero ovviamente viene preso con segno positivo). Per redersi conto che $\text{rot}(L)$ generalizza il numero di fili m , basta prendere una qualsiasi chiusura di trecce (per esempio quella in figura 4.14) e provare a calcolarne il numero di rotazione.

L'integrale $\int_L i$ invece è il più difficile dei tre da generalizzare. Per definirlo supponiamo che valgano le seguenti condizioni aggiuntive:

- (o.i): $f_1, \dots, f_n \in k^*$;
- (o.ii): Se $I_{i,j}^{k,l} \neq 0$ oppure $(I^{-1})_{i,j}^{k,l} \neq 0$, allora $f_i f_j = f_k f_l$.

Queste due condizioni non sono troppo restrittive, e sono sempre rispettate per ogni operatore di Yang-Baxter arricchito, a patto che k non abbia divisori dello zero. Sia $\tau : \Gamma^0 \rightarrow \mathbb{S}^1$ la mappa di Gauss che ad ogni punto $x \in \Gamma^0$ associa il suo vettore tangente $p = \tau(x)$. Per ogni $p \in \mathbb{S}^1$, $\tau^{-1}(p) = \{x \in \Gamma^0 \mid \tau(x) = p\}$ è un insieme finito di punti $x \in \Gamma^0$ che hanno tutti lo stesso vettore tangente. Per ogni punto $x \in \tau^{-1}(p)$, denotiamo con $a(x)$ l'arco orientato di Γ^0 che contiene x . Poniamo inoltre $\varepsilon(x) = \pm 1$ a seconda che il vettore tangente stia ruotando in senso orario o antiorario, e $\varepsilon(x) = 0$ se il vettore non ruota ma rimane costante. Fatte queste premesse, possiamo definire

$$\int_L i = \prod_{x \in \tau^{-1}(p)} f_{i(a(x))}^{\varepsilon(x)} \quad (4.24)$$

Lemma 4.6.3. *Per ogni $i \in \text{CSt}(L)$, l'integrale $\int_L i$ è ben definito, ovvero sia non dipende dalla scelta del vettore tangente $p \in \mathbb{S}^1$.*

Prima di procedere con la dimostrazione, notiamo che, quando L è chiusura di una treccia, la nuova definizione di $\int_L i$ coincide con quella data nella formula (4.22): infatti data una proiezione che è chiusura di una treccia (prendiamo ad esempio la figura 4.14), ci basta scegliere come vettore tangente quello verticale, con la punta rivolta verso il basso. In questo caso è chiaro che le due definizioni di $\int_L i$ coincidano, e siccome nella nuova definizione $\int_L i$ non dipende dal vettore tangente, la definizione data è ben posta e generalizza correttamente quanto visto nella sezione precedente.

Dimostrazione. Nella dimostrazione denoteremo con u il generico vertice di Γ_L , con e il generico arco di Γ_L , e con a, b, c e d , gli archi incidenti in u come in figura 4.13. Osserviamo innanzitutto che quando $i \in \text{CSt}(L)$ è uno stato contributivo, allora per ogni vertice u vale la relazione $f_{i(a)}f_{i(b)} = f_{i(c)}f_{i(d)}$, pertanto la somma formale

$$\sum_{a \in \text{Edg}(L)} f_{i(a)} a$$

è un ciclo 1-dimensionale in $\Gamma_L = \Gamma_L^0$ a coefficienti nel gruppo moltiplicativo k^* (qui di seguito useremo la notazione additiva quando ci riferiremo all'operazione di gruppo). Verifichiamo che si tratta di un ciclo 1-dimensionale:

$$\begin{aligned} \delta\left(\sum_{e \in \text{Edg}(L)} f_{i(e)} e\right) &= \sum_{e \in \text{Edg}(L)} f_{i(e)} \delta(e) \\ &= \sum_{e \in \text{Edg}(L)} f_{i(e)} (u_e - v_e) \end{aligned}$$

dove u_e e v_e denotano rispettivamente la punta e la coda dell'arco e . Notando poi che, in ogni vertice $u \in \text{Vert}(L)$, incidono quattro archi a, b, c e d , come in figura 4.13, segue che la sommatoria può essere riarrangiata in

$$\delta\left(\sum_{e \in \text{Edg}(L)} f_{i(e)} e\right) = \sum_{u \in \text{Vert}(L)} (f_{i(a)} + f_{i(b)} - f_{i(c)} - f_{i(d)}) u = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che i coefficienti $f_{i(a)}, \dots, f_{i(d)}$ giacciono in k^* , e stiamo usando la notazione additiva. Denotiamo con $[i] \in H_1(\Gamma^0, k^*)$ la classe di equivalenza del ciclo 1-dimensionale appena trovato, pertanto la mappa

$$\tau_* : H_1(\Gamma^0, k^*) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1, k^*)$$

determina un unico elemento $\tau_*([i]) \in H_1(\mathbb{S}^1, k^*)$. L'orientamento scelto su \mathbb{S}^1 determina un isomorfismo $\psi : H_1(\mathbb{S}^1, k^*) \rightarrow k^*$, e a questo punto possiamo porre

$$\psi(\tau_*([i])) = \int_L i.$$

L'integrale $\int_L i$ così definito non dipende dal vettore scelto, e può essere calcolato come sopra prendendo un vettore tangente $p \in \mathbb{S}^1$ mediante la relazione (4.24). \square

Teorema 4.6.4 (Step 2). *Sia $S = (I, f, \lambda, \mu)$ un operatore di Yang-Baxter arricchito, dove $f = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$ è un morfismo diagonale in cui gli scalari $f_i \in k^*$ soddisfano le condizioni (o.i)-(o.ii). Se S soddisfa anche la seguente condizione ausiliaria*

$$\sum_{1 \leq x, y \leq n} (I^{-1})_{x,i}^{y,j} I_{y,l}^{x,k} f_j f_x^{-1} = \delta_i^k \delta_l^j \quad (4.25)$$

allora il seguente polinomio è un invariante di nodi orientati

$$J_S(L) = \lambda^{-\text{w}(L)} \mu^{-\text{rot}(L)+1} \sum_{i \in \text{St}(L)} \Pi(i) \int_L i. \quad (4.26)$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $J_S(L)$ così definito è invariante per le mosse di Reidemeister orientate, che riportiamo qui sotto nelle figure 4.16, 4.17 e 4.18, (si può dimostrare che tutte le altre mosse di Reidemeister orientate si deducono da queste).

Iniziamo da Reidemeister I: dimostriamo l'invarianza sotto l'azione di Reidemeister Ia (il caso Ib è analogo). La dimostrazione di questa prima parte è la più semplice delle tre, ma anche la più corposa, poichè dovremo introdurre tutta una serie di notazioni coniate ad hoc, che ricicleremo anche quando andremo a dimostrare Reidemeister II e III.

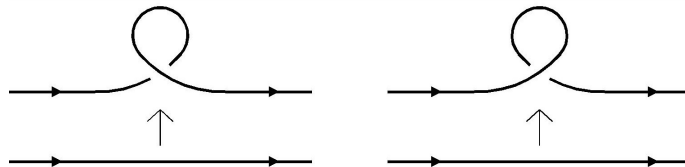


Figura 4.16: A sinistra Reidemeister Ia, a destra Reidemeister Ib.

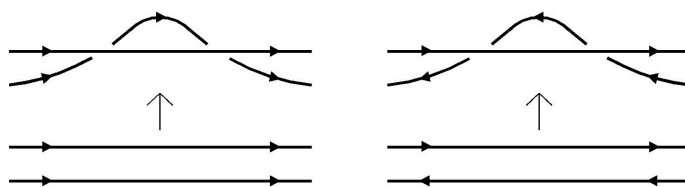


Figura 4.17: A sinistra Reidemeister IIa, a destra Reidemeister IIb.

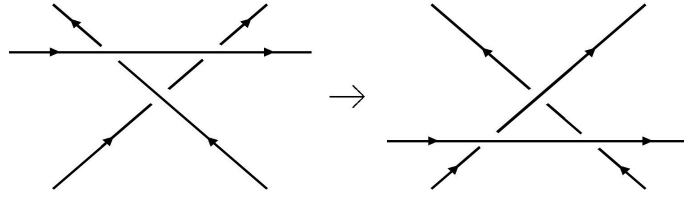


Figura 4.18: Reidemeister III orientato.

Data una proiezione L , sia L' la proiezione ottenuta applicando Reidemeister Ia ad L . Per quanto riguarda gli esponenti di λ e μ , si ha:

- $\mathfrak{w}(L') = \mathfrak{w}(L) + 1$,
- $\text{rot}(L') = \text{rot}(L) + 1$.

Denotiamo poi con u il vertice aggiuntivo di L' , in particolare quindi $\text{Vert}(L') = \text{Vert}(L) \cup \{u\}$, per quanto riguarda gli archi invece denotiamo con $a \in \text{Edg}(L)$ l'arco orientato coinvolto nell'azione di Reidemeister Ia, e con $a_1, a_2, b \in \text{Edg}(L')$ i nuovi archi di L' incidenti in u , come in figura 4.19.

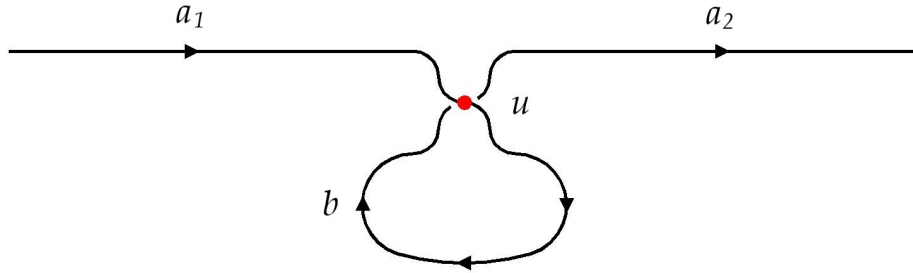


Figura 4.19: L'incrocio assume una forma strana perchè è stato appiattito.

Due stati $i, j \in \text{CSt}(L')$ sono detti equivalenti se coincidono in $\text{Edg}(L') \setminus \{b\}$ (cioè dappertutto eccetto che in b). Per ogni stato $i \in \text{CSt}(L')$ denotiamo con $M(i)$ la sua classe di equivalenza, e denotiamo con $C(M)$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza incluse in $\text{CSt}(L')$, (in altre parole $C(M)$ è l'insieme quoziente $\text{CSt}(L')/M$, dove M è la relazione di equivalenza appena indotta). Notiamo che la relazione M ci permette di riscrivere la sommatoria usando il principio di somma a blocchi:

$$\sum_{j \in \text{CSt}(L')} \Pi(j) \int_{L'} j = \sum_{i \in C(M)} \left(\sum_{j \in M(i)} \Pi(j) \int_{L'} j \right) \quad (4.27)$$

Per cui l'idea ora è di trattare (4.27) svolgendo separatamente ciascuna sommatoria del tipo

$$\sum_{j \in M(i)} \Pi(j) \int_{L'} j. \quad (4.28)$$

Notiamo subito che, per ogni $j \in M(i)$,

- L'integrale $\int_{L'} j$ può essere riscritto come

$$\int_{L'} j = f_{j(b)} f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i.$$

- Per quanto riguarda invece $\Pi(j)$, questo può essere riscritto come

$$\Pi(j) = \pi_u(j) \left(\prod_{v \in \text{Vert}(L') \setminus \{u\}} \pi_v(i) \right) =: \pi_u(j) \Pi_u(j)$$

dove il simbolo $\Pi_u(i)$ è stato introdotto per snellire le notazioni. Si noti anche che, per ogni $j \in M(i)$ vale l'identità

$$\Pi_u(j) = \Pi_u(i).$$

Prima di calcolare la sommatoria (4.28), svolgiamo uno step intermedio:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) \int_{L'} j &= \sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) \left(f_{j(b)} f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i \right) \\ &= f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i \sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) f_{j(b)} \\ &= f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i \sum_{j \in M(i)} I_{i(a_1)j(b)}^{i(a_2)j(b)} f_{j(b)} \\ &= f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i \sum_{j=1}^m I_{i(a_1)j}^{i(a_2)j} f_j \\ &\stackrel{(*)}{=} f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i \lambda_\mu \delta_{i(a_1)}^{i(a_2)} \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (*) è dovuta al fatto che I è un operatore di Yang-Baxter arricchito (si usa il lemma 4.3.4). La sommatoria appena calcolata quindi vale 0 a meno che $i(a_1) = i(a_2)$: in questo caso ogni $i \in \text{CSt}(L')$ determina un unico stato $h_i \in \text{CSt}(L)$ definito come segue:

- $h_i(a) = i(a_1) = i(a_2)$,
- $h_i(e) = i(e)$ per ogni altro arco $e \in \text{Edg}(L) \setminus \{a\}$,
- $\int_L h_i = f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i$,
- $\Pi_u(i) = \Pi(h_i)$.

Proseguiamo coi calcoli: ora possiamo calcolare agevolmente (4.28):

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in M(i)} \Pi(j) \int_{L'} j &= \sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) \Pi_u(j) \int_{L'} j \\
&= \Pi_u(i) \left(\sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) \int_{L'} j \right) \\
&= \Pi_u(i) \left(\lambda \mu \delta_{i(a_1)}^{i(a_2)} f_{i(b)}^{-1} \int_{L'} i \right) \\
&= \Pi(h_i) \lambda \mu \int_L h_i.
\end{aligned}$$

E in ultimo possiamo finalmente calcolare anche la sommatoria (4.27), che diventa

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in CSt(L')} \Pi(j) \int_{L'} j &= \sum_{i \in C(M)} \sum_{j \in M(i)} \Pi(j) \int_{L'} j \\
&= \sum_{i \in C(M)} \delta_{i(a_1)}^{i(a_2)} \Pi(h_i) \lambda \mu \int_L h_i \\
&= \sum_{\substack{i \in C(M) \\ i(a_1) = i(a_2)}} \Pi(h_i) \lambda \mu \int_L h_i \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{h_i \in CSt(L)} \Pi(h_i) \lambda \mu \int_L h_i
\end{aligned}$$

dove nell'uguaglianza (*) abbiamo usato il fatto che, quando $i(a_1) = i(a_2)$, allora gli insiemi $C(M)$ e $CSt(L)$ sono in biiezione, con mappa esplicita data da $i \mapsto h_i$. A questo punto possiamo finalmente concludere,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-\mathfrak{w}(L')} \mu^{-\text{rot}(L')+1} \sum_{j \in CSt(L')} \Pi(j) \int_{L'} j &= \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(L)-1} \mu^{-\text{rot}(L)} \sum_{h_i \in CSt(L)} \Pi(h_i) \lambda \mu \int_L h_i \\
&= \lambda^{-\mathfrak{w}(L)} \mu^{-\text{rot}(L)+1} \sum_{h_i \in CSt(L)} \Pi(h_i) \int_L h_i.
\end{aligned}$$

Reidemeister Ib si dimostra in maniera analoga, con delle lievi differenze nei calcoli, che riportiamo qui sotto:

- $\mathfrak{w}(L') = \mathfrak{w}(L) - 1$,
- $\text{rot}(L') = \text{rot}(L) + 1$,
- $\sum_{j=1}^m (I^{-1})_{i(a)j}^{i(c)j} f_j = \lambda^{-1} \mu \delta_{i(a)}^{i(c)}$.

Passiamo ora a Reidemeister II e III: notiamo subito che queste trasformazioni lasciano inalterati $\mathfrak{w}(L)$ e $\text{rot}(L)$, per cui bisogna mostrare soltanto che le mosse di Reidemeister IIa, IIb e III lascino invariate la sommatoria (4.27). Proviamo il caso Reidemeister IIa: denotiamo poi con $u, v \in \text{Vert}(L')$ i nuovi vertici di L' , in particolare quindi $\text{Vert}(L') = \text{Vert}(L) \cup \{u, v\}$, per quanto riguarda gli archi invece denotiamo con $a, b \in \text{Edg}(L)$ i due archi di L coinvolti nella trasformazione, e con $a_1, a_2, b_1, b_2, r, s \in \text{Edg}(L')$ i nuovi archi di L' , come in figura 4.20.

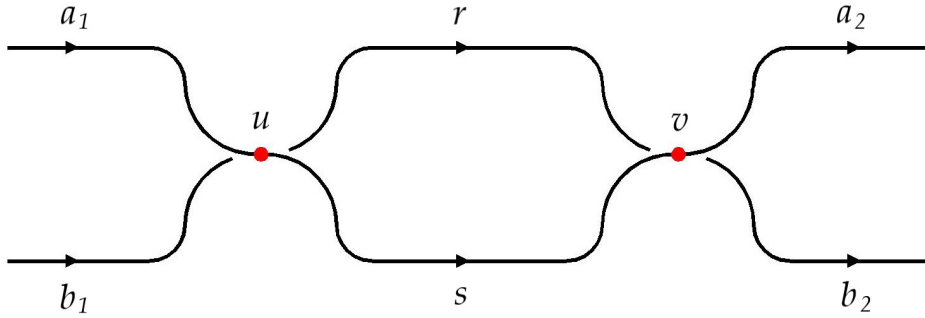


Figura 4.20: Anche qui, come in Reidemeister I, gli incroci assumono una forma strana perchè sono stati appiattiti.

Due stati $i, j \in \text{CSt}(L')$ sono detti equivalenti se coincidono in $\text{Edg}(L') \setminus \{r, s\}$ (cioè dappertutto eccetto che in r, s). Per ogni stato $i \in \text{CSt}(L')$ denotiamo con $M(i)$ la sua classe di equivalenza, e denotiamo con $C(M) = \text{CSt}(L')/M$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Quando $j \in M(i)$, si ha

- $\int_{L'} j = \int_{L'} i$,
- $\Pi(j) = \pi_u(j)\pi_v(j)\Pi_{u,v}(i)$.

E, ricalcando la dimostrazione di Reidemeister Ia, segue che

$$\begin{aligned} \sum_{j \in M(i)} \pi_u(j)\pi_v(j) &= \sum_{j \in M(i)} I_{i(a_1)i(b_1)}^{j(r),j(s)} (I^{-1})_{j(r),j(s)}^{i(a_2)i(b_2)} \\ &= \sum_{1 \leq x,y \leq m} I_{i(a_1)i(b_1)}^{x,y} (I^{-1})_{x,y}^{i(a_2)i(b_2)} \\ &= (I I^{-1})_{i(a_1)i(b_1)}^{i(a_2)i(b_2)} = (\text{id})_{i(a_1)i(b_1)}^{i(a_2)i(b_2)} = \delta_{i(a_1)}^{i(a_2)} \delta_{i(b_1)}^{i(b_2)}. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $i(a_1) = i(a_2)$, $i(b_1) = i(b_2)$, è evidente che lo stato $i \in \text{CSt}(L')$ determini uno stato $h_i \in \text{CSt}(L)$, definito da

- $h_i(a) = i(a_1) = i(a_2)$,

- $h_i(b) = i(b_1) = i(b_2)$,
- $h_i(e) = i(e)$ per ogni altro arco $e \in \text{Edg}(L) \setminus \{a, b\}$,

e tale che

- $\int_{L'} i = \int_L h_i$,
- $\Pi_{u,v}(i) = \Pi(h_i)$,
- $C(M)$ e $\text{CSt}(L)$ sono in biiezione, con mappa $i \mapsto h_i$.

Fatte queste premesse la tesi segue quasi immediata:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \text{CSt}(L')} \Pi(j) \int_{L'} j &= \sum_{i \in C(M)} \sum_{j \in M(i)} \Pi(j) \int_{L'} j \\
&= \sum_{i \in C(M)} \left[\sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) \pi_v(j) \right] \Pi_{u,v}(i) \int_{L'} i \\
&= \sum_{i \in C(M)} \delta_{i(a_1)}^{i(a_2)} \delta_{i(b_1)}^{i(b_2)} \Pi_{u,v}(i) \int_{L'} i \\
&= \sum_{h_i \in \text{CSt}(L)} \Pi(h_i) \int_L h_i.
\end{aligned}$$

I calcoli del caso Reidemeister IIb sono piuttosto diversi da quelli della gemella IIa, per cui svolgiamo anche quelli. Le differenze iniziano fin da subito, basta notare la figura 4.21 per rendersi conto che gli incroci attorno ai vertici u, v vengono deformati in modo diverso.

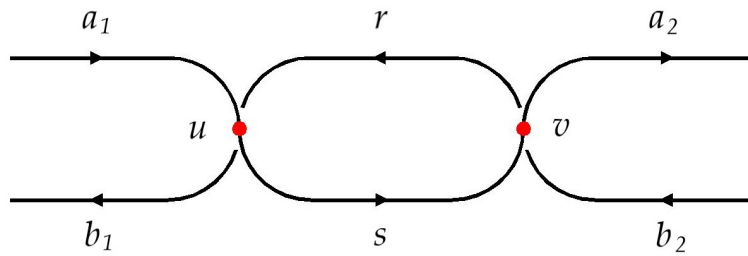


Figura 4.21: Gli incroci sono deformati in maniera diversa rispetto a Reidemeister IIa.

In particolare, dati $i \in \text{CSt}(L')$ e $j \in M(i)$, vale la seguente relazione (che rimane vera anche sostituendo s al posto di r):

$$\int_{L'} j = f_{i(r)} f_{j(r)}^{-1} \int_{L'} i.$$

Ora: nei calcoli qui sotto l'obiettivo è manipolare la sommatoria (4.27) in modo da poter applicare la condizione (4.25) (che si trova nell'enunciato del teorema: questa condizione non è ancora stata utilizzata, ed è stata aggiunta appositamente per dimostrare Reidemeister IIb):

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) \pi_v(j) \int_{L'} j &= \\
&= \sum_{j \in M(i)} (I^{-1})_{j(r)i(a_1)}^{j(s)i(b_1)} I_{j(s)i(b_2)}^{j(r)i(a_1)} f_{i(r)} f_{j(r)}^{-1} \int_{L'} i \\
&= \left[\sum_{j \in M(i)} (I^{-1})_{j(r)i(a_1)}^{j(s)i(b_1)} I_{j(s)i(b_2)}^{j(r)i(a_1)} f_{i(b_1)} f_{j(r)}^{-1} \right] f_{i(b_1)}^{-1} f_{i(r)} \int_{L'} i \\
&\stackrel{(*)}{=} \delta_{i(a_1)}^{i(a_2)} \delta_{i(b_1)}^{i(b_2)} f_{i(b_1)}^{-1} f_{i(r)} \int_{L'} i
\end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (*) è dovuta alla condizione (4.25) con $j(r) = x$, $j(s) = y$. A questo punto, esattamente come nei casi precedenti, ogni stato $i \in \text{CSt}(L')$ in cui $i(a_1) = i(a_2)$, $i(b_1) = i(b_2)$ determina uno stato $h_i \in \text{CSt}(L)$ definito come in Reidemeister IIa, e tale che

- $\int_L h_i = f_{i(b_1)}^{-1} f_{i(r)} \int_{L'} i$,
- $\Pi_{u,v}(i) = \Pi(h_i)$,
- $C(M)$ e $\text{CSt}(L)$ sono in biiezione, con mappa $i \mapsto h_i$.

Anche in questo caso la tesi scende quasi immediata

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \text{CSt}(L')} \Pi(j) \int_{L'} j &= \sum_{i \in C(M)} \Pi_{u,v}(i) \left[\sum_{j \in M(i)} \pi_u(j) \pi_v(j) \int_{L'} j \right] \\
&= \sum_{i \in C(M)} \Pi_{u,v}(i) \left[\delta_{i(a_1)}^{i(a_2)} \delta_{i(b_1)}^{i(b_2)} f_{i(b_1)}^{-1} f_{i(r)} \int_{L'} i \right] \\
&= \sum_{h_i \in \text{CSt}(L')} \Pi(h_i) \int_L h_i
\end{aligned}$$

Proviamo in ultimo Reidemeister III. In figura 4.22 sono rappresentate due proiezioni L ed L' nell'intorno in cui viene applicata la trasformazione. Denotiamo i vertici e gli archi di L ed L' coinvolti nell'azione di Reidemeister III, seguendo la convenzione illustrata in figura 4.22.

Due stati $i, j \in \text{CSt}(L)$ sono detti equivalenti se coincidono in $\text{Edg}(L) \setminus \{c, d, e\}$, analogamente due stati $i', j' \in \text{CSt}(L')$ sono detti equivalenti se coincidono dappertutto in $\text{Edg}(L') \setminus \{c', d', e'\}$. Per ogni stato $i \in \text{CSt}(L)$ denotiamo con $M(i)$ la sua classe di equivalenza, analogamente per ogni stato $i' \in \text{CSt}(L')$ denotiamo con $M'(i')$ la sua classe di equivalenza. Denotiamo in ultimo con $C(M)$ e $C(M')$ tutti gli insiemi delle classi di equivalenza

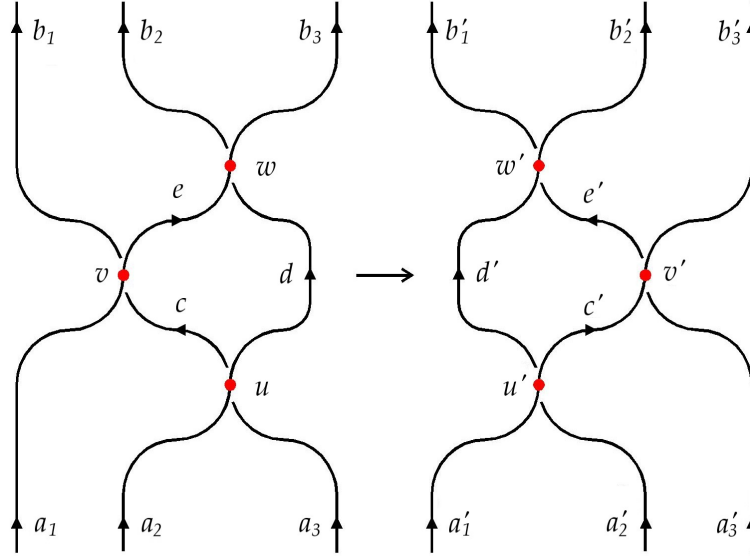


Figura 4.22: L'azione di Reidemeister III orientata, con gli incroci deformati.

incluse in $\text{CSt}(L)$ e $\text{CSt}(L')$. Non dovrebbe sorprendere che $C(M)$ e $C(M')$ siano in biiezione, ed anzi, si può dire che “concidano”. Scritta esplicitamente, la biiezione è data da $i \mapsto i'$, dove $i(e) = i'(e)$ per ogni arco comune ad ambo i grafi. Si prova che

$$\int_L i = \int_{L'} i'.$$

Per quanto riguarda $\Pi(i)$ e $\Pi(i')$ invece abbiamo le seguenti relazioni:

- $\Pi(i) = \pi_u(i)\pi_v(i)\pi_w(i) \Pi_{u,v,w}(i)$,
- $\Pi(i') = \pi_{u'}(i')\pi_{v'}(i')\pi_{w'}(i') \Pi_{u',v',w'}(i')$,
- $\Pi_{u,v,w}(i) = \Pi_{u',v',w'}(i')$,
- $\pi_u(i)\pi_v(i)\pi_w(i) = I_{i(a_2)i(a_3)}^{i(c)i(d)} I_{i(a_1)i(c)}^{i(b_1)i(e)} I_{i(e)i(d)}^{i(b_2)i(b_3)}$,
- $\pi_{u'}(i')\pi_{v'}(i')\pi_{w'}(i') = I_{i'(a_1)i'(a_2)}^{i'(d')i'(c')} I_{i'(c')i'(a_3)}^{i'(e')i'(b_3)} I_{i'(d')i'(e')}^{i'(b_1)i'(b_2)}$.

Procediamo ora coi calcoli:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \text{CSt}(L)} \Pi(j) \int_L j &= \sum_{i \in C(M)} \sum_{j \in M(i)} \pi_u(j)\pi_v(j)\pi_w(j) \Pi_{u,v,w}(j) \int_L j \\ &= \sum_{i \in C(M)} \Pi_{u,v,w}(i) \int_L i \left[\sum_{j \in M(i)} \pi_u(j)\pi_v(j)\pi_w(j) \right] \\ &= \sum_{i \in C(M)} \Pi_{u,v,w}(i) \int_L i \left[\sum_{r,s,y} I_{i(a_2)i(a_3)}^{r,s} I_{i(a_1),r}^{i(b_1),y} I_{y,s}^{i(b_2)i(b_3)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j' \in \text{CSt}(L')} \Pi(j') \int_{L'} j' &= \sum_{i' \in C(M')} \sum_{j' \in M'(i')} \pi_{u'}(j') \pi_{v'}(j') \pi_{w'}(j') \Pi_{u',v',w'}(j') \int_{L'} j' \\
&= \sum_{i' \in C(M')} \Pi_{u',v',w'}(i') \int_{L'} i' \left[\sum_{p,q,x} I_{i'(a_1)i'(a_2)}^{p,q} I_{q,i'(a_3)}^{x,i'(b_3)} I_{p,y}^{i'(b_1)i'(b_2)} \right].
\end{aligned}$$

Per cui il problema si riconduce a dimostrare l'uguaglianza

$$\sum_{r,s,y} I_{i(a_2)i(a_3)}^{r,s} I_{i(a_1),r}^{i(b_1),y} I_{y,s}^{i(b_2)i(b_3)} = \sum_{p,q,x} I_{i'(a_1)i'(a_2)}^{p,q} I_{q,i'(a_3)}^{x,i'(b_3)} I_{p,y}^{i'(b_1)i'(b_2)}$$

per ogni scelta di $i(a_1) = i'(a_1)$, $i(a_2) = i'(a_2)$, ... , $i(b_3) = i'(b_3)$. Se confrontiamo l'equazione appena ottenuta con l'equazione di Yang-Baxter definita sugli scalari, riportata in (1.6), ci rendiamo conto che le due coincidono, e che quindi l'uguaglianza tra le due sommatorie non è altro che una diretta conseguenza del fatto che I è un operatore di Yang-Baxter. \square

Abbiamo quindi concluso che $J_S(L)$ così definito è un invariante di proiezioni orientate qualsiasi. Nello step 3 andremo a generalizzare ulteriormente questo risultato, estendendolo anche alle proiezioni non orientate.

4.6.3 Step 3: $J_S(L)$ in termini di stati per proiezioni non orientate qualsiasi

Ora quello che dobbiamo fare è riformulare tutto ciò che abbiamo definito per le proiezioni orientate, in termini di proiezioni non orientate. In questa sezione, dato un operatore di Yang-Baxter arricchito $S = (I, f, \lambda, \mu)$, supporremo che f sia un morfismo diagonale rispetto ad un'opportuna base, definito da $f = \text{diag}(\gamma_1^2, \dots, \gamma_n^2)$ con $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in k^*$, tali che siano vere le seguenti condizioni:

- (n.i): $\gamma_{i'} = \gamma_i^{-1}$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
- (n.ii): Per ogni $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, si verifica

$$I_{i,j}^{k,l} = I_{l',k'}^{j'i'} \quad (4.29)$$

- (n.iii): Se $I_{i,j}^{k,l} \neq 0$, allora $\gamma_i \gamma_j = \gamma_k \gamma_l$,

dove ricordiamo che $i' = n + 1 - i$. Ad ogni proiezione D non orientata associamo il suo grafo planare Γ_D , i cui vertici coincidono con gli incroci di D , e ogni pezzo di corda non orientato viene identificato con una coppia di archi a, a' che, come in figura 4.23, congiungono gli stessi vertici ma hanno orientamento opposto. Denoteremo l'insieme dei vertici di Γ_D con $\text{Vert}(D)$, e l'insieme degli archi (orientati) di Γ_D con $\text{Edg}(D)$. Nel seguito supporremo

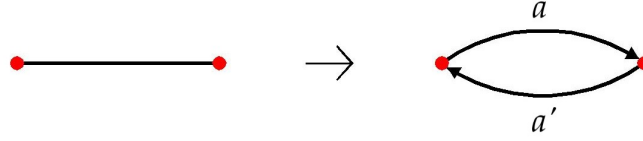


Figura 4.23: Ogni arco non orientato viene sostituito con una coppia di archi orientati con orientamento opposto.

inoltre che i grafi Γ_D tengano conto della posizione reciproca delle corde attorno agli incroci (cioè tengano conto di quale corda passa sopra, e quale invece passa sotto).

Uno stato di D è una mappa $i : \text{Edg}(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $i(a') = i(a)'$. Denotiamo l'insieme degli stati di D con $\text{St}(D)$. Ad ogni vertice $u \in \text{Vert}(D)$, possiamo associare $\pi_u(i)$ come segue: si scelga un verso di percorrenza per D , e siano a, b, c, d i quattro archi incidenti in u come in figura 4.13. Allora $\pi_u(i) = I_{i(a)i(b)}^{i(c)i(d)}$. Tale definizione è ben posta grazie alla condizione (4.29), nel senso che non dipende dal verso di percorrenza scelto. Infatti se avessimo scelto il verso di percorrenza opposto, avremmo ottenuto

$$\pi_u(i) = I_{i(d')i(c')}^{i(b')i(a')} = I_{i(a)i(b)}^{i(c)i(d)}.$$

Uno stato $i \in \text{St}(D)$ è detto *contributivo* se $\pi_u(i) \neq 0$ per ogni $u \in \text{Vert}(D)$. L'insieme degli stati contributivi di D si denota con $\text{CSt}(D)$. Denotiamo poi con $\Gamma^\wedge = \Gamma_D^\wedge$ il grafo ottenuto deformando gli incroci di Γ_D come in figura 4.24, e con $T : \Gamma^\wedge \rightarrow \mathbb{P}^1$ la mappa che associa ad ogni $x \in \Gamma^\wedge$ la sua retta tangente $p = T(x)$. Fissata $p \in \mathbb{P}^1$, poniamo

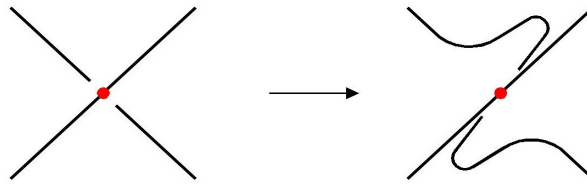


Figura 4.24: Gli incroci sono stati appiattiti in modo diverso rispetto alla figura 4.15. In questo caso la deformazione non tiene conto dell'orientamento, mentre prende in considerazione la posizione reciproca delle due corde.

$$\int_D i = \prod_{x \in T^{-1}(p)} \gamma_{i(a(x))}^{\varepsilon(x, a(x))} \quad (4.30)$$

dove $a(x)$ denota l'arco orientato rispetto al verso di percorrenza scelto che contiene x , e $\varepsilon(x, a(x)) \in \{\pm 1, 0\}$ dipende sia da x che dall'orientamento

dell'arco $a(x)$. Si noti che $\gamma_{i(a(x))}^{\varepsilon(x,a(x))}$ così definito non dipende dalla scelta dell'arco $a(x)$, poichè

$$\gamma_{i(a')}^{\varepsilon(x,a')} = \gamma_{i(a)}^{-\varepsilon(x,a)} = [\gamma_{i(a)}^{-1}]^{-\varepsilon(x,a)} = \gamma_{i(a)}^{\varepsilon(x,a)}.$$

Osservazione 4.6.5. *Si noti che $\int_D i$ così definito non è una generalizzazione di $\int_L i$, poichè gli incroci sono stati deformati in modo diverso rispetto alla sezione precedente. In ogni caso esiste una relazione tra i due integrali, che vedremo nella dimostrazione del teorema 4.6.7.*

Lemma 4.6.6. *$\int_D i$ è ben definito, ovvero non dipende dalla scelta della retta tangente p .*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quanto visto per il lemma 4.6.3: si sceglie innanzitutto un verso di percorrenza su Γ^\wedge , e si prova che:

- La somma formale $\sum \gamma_{i(e)} e$ è un 1-ciclo in Γ^\wedge a coefficienti in k^* ,
- La sua classe, che denotiamo con $[i] \in H_1(\Gamma^\wedge, k^*)$ non dipende dalla scelta dell'orientamento su Γ^\wedge .
- Pertanto la composizione dei due morfismi

$$T_* : H_1(\Gamma^\wedge, k^*) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^1, k^*), \quad \Psi : H_1(\mathbb{P}^1, k^*) \rightarrow k^*,$$

determina univocamente un elemento $\Psi(T_*([i])) \in k^*$. Ψ è l'isomorfismo indotto dall'orientamento di \mathbb{P}^1 in senso orario.

Come nel caso del lemma 4.6.3, poniamo a questo punto

$$\Psi(T_*([i])) = \int_D i,$$

e questi può essere calcolato usando la relazione (4.30). \square

Teorema 4.6.7 (Step 3). *Sia $S = (I, f, \lambda, \mu)$ un operatore di Yang-Baxter arricchito, con $f = \text{diag}(\gamma_1^2, \dots, \gamma_n^2)$ morfismo diagonale rispetto ad un'opportuna base, e tale che $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in k^*$. Supponiamo inoltre che valgano le condizioni (n.i)-(n.ii)-(n.iii), assieme alla seguente condizione aggiuntiva:*

$$(I^{-1})_{i,j}^{k,l} = \gamma_i \gamma_l^{-1} I_{k',i}^{l,j'}. \quad (4.31)$$

Allora, se D è una proiezione non orientata di un nodo (link), ed L è una sua corrispondente orientata, allora

$$\lambda^{\mathfrak{w}(L)} \mu^{\text{rot}(L)-1} J_S(L) = \sum_{i \in \text{CSt}(D)} \Pi(i) \int_D i. \quad (4.32)$$

Dimostrazione. L'idea è quella di ricondursi al teorema 4.6.4. Proviamo innanzitutto che data una proiezione orientata L , vale la relazione

$$\lambda^{\mathfrak{w}(L)} \mu^{\text{rot}(L)-1} J_S(L) = \sum_{i \in \text{CSt}(L)} \Pi(i) \int_L i.$$

Facciamo vedere che $S = (I, f, \lambda, \mu)$ soddisfa le ipotesi del teorema 4.6.4, ovvero sia che valgono le condizioni (o.i)-(o.ii) e (4.25). Iniziamo da (o.i)-(o.ii): dobbiamo provare che

- (o.i): $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_n^2 \in k^*$,
- (o.ii): Se $I_{i,j}^{k,l} \neq 0$ oppure $(I^{-1})_{i,j}^{k,l} \neq 0$, allora $\gamma_i^2 \gamma_j^2 = \gamma_k^2 \gamma_l^2$.

La prima condizione scende immediata dal fatto che $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in k^*$; per quanto riguarda (o.ii) invece,

- Se $I_{i,j}^{k,l} \neq 0$ da (n.iii) segue che $\gamma_i \gamma_j = \gamma_k \gamma_l$, e quindi la tesi.
- Se invece $(I^{-1})_{i,j}^{k,l} \neq 0$, allora grazie a (4.31) abbiamo che

$$(I^{-1})_{i,j}^{k,l} = \gamma_i \gamma_l^{-1} I_{k',i}^{l,j'} \neq 0,$$

da cui $\gamma_{k'} \gamma_i = \gamma_l \gamma_{j'}$. Ricordando che, per (n.i), $\gamma_{i'} = \gamma_i^{-1}$, segue immediata

$$\gamma_k^{-1} \gamma_i = \gamma_l \gamma_j^{-1},$$

e anche in questo caso segue la tesi.

Per provare la condizione (4.25), svolgiamo i calcoli come segue

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq x, y \leq n} (I^{-1})_{x,i}^{y,j} I_{y,l}^{x,k} \gamma_j^2 \gamma_x^{-2} = \\ &= \sum_{1 \leq x, y \leq n} I_{y',x}^{j,i'} (I^{-1})_{l,k'}^{y',x} (\cancel{\gamma_x} \gamma_j^{-1}) (\gamma_l^{-1} \cancel{\gamma_x}) \gamma_j^2 \cancel{\gamma_x^{-2}} \\ &= (\text{id})_{l,k'}^{j,i'} \gamma_j^{-1} \gamma_l^{-1} \gamma_j^2 = \delta_l^j \delta_k^i. \end{aligned}$$

Vale pertanto il teorema 4.6.4, e quindi

$$\lambda^{\mathfrak{w}(L)} \mu^{\text{rot}(L)-1} J_S(L) = \sum_{i \in \text{CSt}(L)} \Pi(i) \int_L i.$$

Per concludere la dimostrazione del teorema ci basta ora dimostrare che, data una proiezione non orientata D , con L corrispondente orientata

$$\sum_{i \in \text{CSt}(L)} \Pi(i) \int_L i = \sum_{i \in \text{CSt}(D)} \Pi(i) \int_D i. \quad (4.33)$$

Osserviamo che dato uno stato $i \in \text{St}(D)$, questo determina uno ed un solo stato $i^* \in \text{St}(L)$ dato dalla restrizione di i sugli archi di L . La mappa $\text{St}(D) \rightarrow \text{St}(L)$, $i \mapsto i^*$ quindi è biettiva. Osserviamo anche che tale mappa manda stati contributivi in stati contributivi, nel senso che per ogni $i \in \text{CSt}(D)$, allora $i^* \in \text{CSt}(L)$: questo perchè sono vere le seguenti uguaglianze

$$I_{i,j}^{k,l} = \gamma_k \gamma_j^{-1} (I^{-1})_{j,l'}^{i',k} = \gamma_{j'} \gamma_{k'}^{-1} (I^{-1})_{k',i}^{l,j'} = I_{l',k'}^{j',i'}. \quad (4.34)$$

Di conseguenza dato un vertice $u \in \text{Vert}(D)$, e detti $a, b, c, d \in \text{Edg}(D)$ gli archi incidenti in u come in figura 4.13, se $\pi_u(i) = I_{i(a)i(b)}^{i(c)i(d)} \neq 0$, allora $\pi_u(i^*)$ è uguale ad uno di questi quattro termini:

$$I_{i(a)i(b)}^{i(c)i(d)}, \quad (I^{-1})_{i(b),i(d')}^{i(a'),i(c)}, \quad (I^{-1})_{i(c'),i(a)}^{i(d),i(b')}, \quad I_{i(d'),i(c')}^{i(b'),i(a')}.$$

Grazie alle uguaglianze di (4.34), se uno di essi è diverso da 0, allora tutti e quattro i termini sono diversi da 0. Pertanto $\pi_u(i) \neq 0$ se e solo se $\pi_u(i^*) \neq 0$, e quindi la mappa $i \mapsto i^*$ è una biiezione tra gli elementi di $\text{CSt}(D)$ e quelli di $\text{CSt}(L)$. Per completare la dimostrazione quindi sarà sufficiente far vedere che le due sommatorie coincidono membro a membro, ovvero, per ogni stato $i \in \text{CSt}(D)$, $i^* \in \text{CSt}(L)$,

$$\Pi(i) \int_D i = \Pi(i^*) \int_L i^*. \quad (4.35)$$

Per semplificare le cose a questo punto introduciamo un sistema di coordinate: siano z_1, z_2 delle coordinate in \mathbb{R}^2 , a meno di isotopia, possiamo supporre che i vertici $u \in \text{Vert}(L)$ dispongano ciascuno di un proprio intorno W_u in cui gli incroci si presentano come in figura 4.25, col pezzo di corda superiore che è parallelo a $\{z_1 = z_2\}$, e il pezzo che passa sotto parallelo a $\{z_1 = -z_2\}$.

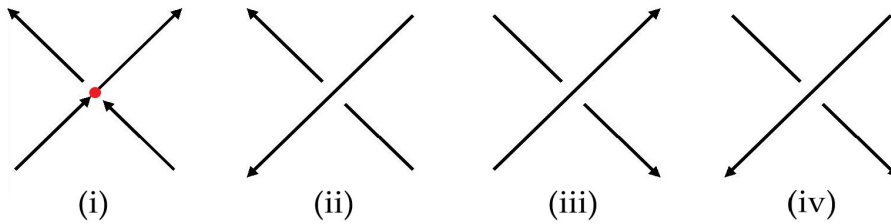


Figura 4.25: Il pezzo di corda superiore è sempre parallelo a $\{z_1 = z_2\}$.

Sia X l'insieme dei punti di L che hanno tangente parallela alla retta orizzontale $z_2 = 0$. Si noti in particolare che $X \subset L \setminus \bigcup_u W_u$. Se noi ora deformiamo Γ_L in Γ^0 come nella figura 4.15, compaiono nuovi punti che hanno tangente parallela a $z_2 = 0$, e questi sono tutti inclusi in $\bigcup_u W_u$.

Per ogni vertice u denotiamo con Y_u l'insieme dei nuovi punti con tangente orizzontale contenuto in W_u , e poniamo $Y = \bigcup_u Y_u$. Il claim che vogliamo provare ora, è che

$$\int_L i^* = \prod_{x \in X \cup Y} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)}.$$

Per provarlo denotiamo con $p \in \mathbb{P}^1$ la retta orizzontale $z_2 = 0$, e con $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^1$ rispettivamente i vettori $p_1 = (1, 0)$, $p_2 = (-1, 0)$. Vale quindi la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_L i^* &= \prod_{x \in \tau^{-1}(p_1)} \mu_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)} = \prod_{x \in \tau^{-1}(p_1)} (\gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)})^2 = \left(\prod_{x \in \tau^{-1}(p_1)} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)} \right)^2 = \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\prod_{x \in \tau^{-1}(p_1)} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)} \right) \left(\prod_{x \in \tau^{-1}(p_2)} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)} \right) = \left(\prod_{x \in T^{-1}(p)} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)} \right) = \prod_{x \in X \cup Y} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)}. \end{aligned}$$

Se si vuole una dimostrazione più dettagliata dell'uguaglianza (*) si consulti [Tu]- (dimostrazione del lemma 6.2, alla fine di pagina 548). Andiamo invece ora a deformare Γ_D in Γ^\wedge come in figura 4.24: in ogni intorno W_u ci sono esattamente quattro punti che hanno tangente parallela a $z_2 = 0$, e il prodotto dei loro termini $\gamma_{i(a(x))}^{\varepsilon(x, a(x))}$ vale 1. Pertanto abbiamo che

$$\int_D i = \prod_{x \in X} \gamma_{i(a(x))}^{\varepsilon(x, a(x))}.$$

La condizione (4.35) diventa quindi

$$\Pi(i) \prod_{x \in X} \gamma_{i(a(x))}^{\varepsilon(x, a(x))} = \Pi(i^*) \prod_{x \in X \cup Y} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)}$$

e questo equivale a provare che

$$\Pi(i) = \Pi(i^*) \prod_{x \in Y} \gamma_{i(a(x))}^{\varepsilon(x, a(x))}. \quad (4.36)$$

In realtà la condizione che dobbiamo provare è ancora più semplice: infatti se sviluppiamo i membri di (4.36) otteniamo

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Pi(i) &= \prod_{u \in \text{Vert}(D)} \pi_u(i), \\ \bullet \quad \Pi(i^*) \prod_{x \in Y} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)} &= \prod_{u \in \text{Vert}(L)} \left[\pi_u(i^*) \prod_{x \in Y_u} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)} \right], \end{aligned}$$

dove $Y_u = Y \cap W_u$ per ogni vertice u . Dal momento che $\text{Vert}(D) = \text{Vert}(L)$, per provare (4.36) è sufficiente eguagliare i due prodotti membro a membro, e far quindi vedere che attorno ad ogni vertice u vale l'uguaglianza

$$\pi_u(i) = \pi_u(i^*) \prod_{x \in Y_u} \gamma_{i^*(a(x))}^{\varepsilon(x)}. \quad (4.37)$$

Per provare (4.37) possiamo sfruttare le uguaglianze riportate in (4.34): detti a, b, c, d gli archi di D incidenti in u come nel caso (i) della figura 4.25, e $\pi_u(i) = I_{i(a)i(b)}^{i(c)i(d)}$, segue che

- Caso (i): $\pi_u(i^*) \prod_{x \in Y_u} \gamma_{i(a(x))}^{\epsilon(x,a(x))} = I_{i(a)i(b)}^{i(c)i(d)} \frac{\gamma_{i(a)}^{-1} \gamma_{i(b)} \gamma_{i(c')}^{-1} \gamma_{i(d)}}{\gamma_{i(a)} \gamma_{i(b')} \gamma_{i(c')} \gamma_{i(d)}} = \pi_u(i)$,
- Caso (ii): $\pi_u(i^*) \prod_{x \in Y_u} \gamma_{i(a(x))}^{\epsilon(x,a(x))} = (I^{-1})_{i(b),i(d')}^{i(a'),i(c)} \gamma_{i(c')}^{-1} \gamma_{i(b')} = \pi_u(i)$,
- Caso (iii): $\pi_u(i^*) \prod_{x \in Y_u} \gamma_{i(a(x))}^{\epsilon(x,a(x))} = (I^{-1})_{i(c'),i(a)}^{i(d),i(b')} \gamma_{i(c')}^{-1} \gamma_{i(b')} = \pi_u(i)$,
- Caso (iv): $\pi_u(i^*) \prod_{x \in Y_u} \gamma_{i(a(x))}^{\epsilon(x,a(x))} = I_{i(d'),i(c')}^{i(b'),i(a')} \frac{\gamma_{i(a)}^{-1} \gamma_{i(b)} \gamma_{i(c')}^{-1} \gamma_{i(d)}}{\gamma_{i(a)} \gamma_{i(b')} \gamma_{i(c')} \gamma_{i(d)}} = \pi_u(i)$.

Abbiamo quindi provato che (4.37) è vera. A catena lo sono anche tutte le altre uguaglianze fino a (4.33). \square

4.6.4 Step 4: dimostrazione del teorema 4.5.4

Ora che abbiamo tutto ciò che ci serve, possiamo finalmente procedere con la dimostrazione del teorema 4.5.4. Richiamiamo preliminarmente le nozioni che ci servono: l'operatore di Yang-Baxter I_ν è dato da

$$\begin{aligned}
I_\nu &= q \sum_{i \neq i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i=i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} \\
&+ \sum_{i \neq j, j'} E_{i,j} \otimes E_{j,i} + q^{-1} \sum_{i \neq i'} E_{i,i'} \otimes E_{i',i} \\
&+ (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} \\
&+ (q^{-1} - q) \sum_{i < k'} \varepsilon(i) \varepsilon(k') q^{\bar{i} - \bar{k}'} E_{i,k} \otimes E_{i',k'}
\end{aligned}$$

con inverso

$$\begin{aligned}
I_\nu^{-1} &= q^{-1} \sum_{i \neq i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i=i'} E_{i,i} \otimes E_{i,i} \\
&+ \sum_{i \neq j, j'} E_{i,j} \otimes E_{j,i} + q \sum_{i \neq i'} E_{i,i'} \otimes E_{i',i} \\
&+ (q^{-1} - q) \sum_{i > j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} \\
&+ (q - q^{-1}) \sum_{i > k'} \varepsilon(i) \varepsilon(k') q^{\bar{i} - \bar{k}'} E_{i,k} \otimes E_{i',k'}.
\end{aligned}$$

• $(I_\nu)_{i,i}^{i,i} = q$	se $i \neq i'$;
• $(I_\nu)_{i',i'}^{i',i'} = 1$	se $i = i'$;
• $(I_\nu)_{i,j}^{j,i} = 1$	se $i \neq j, j'$;
• $(I_\nu)_{i,i'}^{i',i} = q^{-1}$	se $i \neq i'$;
• $(I_\nu)_{i,j}^{i,j} = q - q^{-1}$	se $i < j \neq i'$;
• $(I_\nu)_{i,i'}^{k,k'} = (q^{-1} - q)\varepsilon(i)\varepsilon(k')q^{\bar{i}-\bar{k}'}$	se $i < l = k' \neq i'$;
• $(I_\nu)_{i,i'}^{i,i'} = (q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}-n-1})$	se $i < j = l = i'$.

Tabella 4.1: Tabella dei coefficienti di I_ν .

Ricordiamo in ultimo che $S = (I_\nu, f, \lambda, \mu)$ è un operatore di Yang-Baxter arricchito, con $f = \text{diag}(f_i)$, $f_i = q^{2\bar{i}-n-1}$, $\lambda = q^{n+\nu}$ e $\mu = 1$. L'idea a questo punto è quella di utilizzare il teorema 4.6.7: poniamo pertanto $\gamma_i = q^{\bar{i}-\frac{n+1}{2}}$.

Dimostrazione del teorema 4.5.4. La prima cosa da dimostrare è che S soddisfa le ipotesi del teorema 4.6.7. Cominciamo col dimostrare che S soddisfa le condizioni (n.i)-(n.ii)-(n.iii).

- (n.i): $\gamma_{i'} = \gamma_i^{-1}$: infatti

$$\gamma_{i'} = q^{\bar{i}'-\frac{n+1}{2}} = q^{n+1-\bar{i}-\frac{n+1}{2}} = q^{\frac{n+1}{2}-\bar{i}} = \gamma_i^{-1}.$$

- (n.ii): $(I_\nu)_{i,j}^{k,l} = (I_\nu)_{l',k'}^{j',i'}$: lo si può far vedere usando la Tabella 4.1. Gli unici casi non banali da verificare sono gli ultimi tre:

$$- \begin{cases} (I_\nu)_{i,j}^{i,j} = q - q^{-1} & \text{se } i < j \neq i' \\ (I_\nu)_{j',i'}^{j',i'} = q - q^{-1} & \text{se } j' < i' \neq j \end{cases}$$

E notando che le relazioni $i < j \neq i'$, $j' < i' \neq j$, sono equivalenti, l'uguaglianza scende immediata.

$$- \begin{cases} (I_\nu)_{i,i'}^{k,k'} = (q^{-1} - q)\varepsilon(i)\varepsilon(k')q^{\bar{i}-\bar{k}'} & \text{se } i < k' \neq i' \\ (I_\nu)_{k,k'}^{i,i'} = (q^{-1} - q)\varepsilon(k)\varepsilon(i')q^{\bar{k}-\bar{i}'} & \text{se } k < i' \neq k' \end{cases}$$

• $(I_\nu^{-1})_{i,i}^{i,i} = q^{-1}$	se $i \neq i'$;
• $(I_\nu^{-1})_{i',i'}^{i',i'} = 1$	se $i = i'$;
• $(I_\nu^{-1})_{i,j}^{j,i} = 1$	se $i \neq j, j'$;
• $(I_\nu^{-1})_{i,i'}^{i',i} = q$	se $i \neq i'$;
• $(I_\nu^{-1})_{i,j}^{i,j} = q^{-1} - q$	se $i > j \neq i'$;
• $(I_\nu^{-1})_{i,i'}^{k,k'} = (q - q^{-1})\varepsilon(i)\varepsilon(k')q^{\bar{i}-\bar{k}'}$	se $i > k' \neq i'$;
• $(I_\nu^{-1})_{i,i'}^{i,i'} = (q^{-1} - q)(1 + \nu q^{2\bar{i}-n-1})$	se $i > j = l = i'$.

Tabella 4.2: Tabella dei coefficienti di I_ν^{-1} .

La tesi segue dalle relazioni

- * $\varepsilon(i)\varepsilon(k') = \varepsilon(k)\varepsilon(i')$;
- * $q^{\bar{k}-\bar{i}'} = q^{(n+1-\bar{k}')-(n+1-\bar{i})} = q^{\bar{i}-\bar{k}'}$;
- * $i < k' \neq i' \Leftrightarrow k < i' \neq k'$.

$$- \begin{cases} (I_\nu)_{i,i'}^{i,i'} = (q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}-n-1}) & \text{se } i < i' \\ (I_\nu)_{(i')',i'}^{(i')',i'} = (I_\nu)_{i,i'}^{i,i'} = (q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}-n-1}) & \text{se } i < i' \end{cases}$$

- (n.iii): $(I_\nu)_{i,j}^{k,l} \neq 0 \Rightarrow \gamma_i\gamma_j = \gamma_k\gamma_l$: anche questa verifica si fa utilizzando la tabella 4.1: in tutti i casi eccetto il penultimo le coppie non ordinate $\{i, j\}$ e $\{k, l\}$ coincidono, per cui la tesi risulta verificata. Nel penultimo caso invece, un rapido calcolo ci permette di concludere:

$$\gamma_i\gamma_{i'} = q^{\bar{i}-\frac{(n+1)}{2}} q^{\bar{i}'-\frac{(n+1)}{2}} = q^{(\bar{i}+\bar{i}')-(n+1)} = 1 = \gamma_k\gamma_{k'}.$$

Per quanto riguarda la condizione ausiliaria (4.31), avremo bisogno di confrontare la tabella 4.1 con la tabella 4.2. Purtroppo una verifica diretta ci permette di constatare che (4.31) non è sempre verificata, ma vale invece la seguente condizione sostitutiva:

$$(I_\nu^{-1})_{i,j}^{k,l} = \varepsilon(i)\varepsilon(l)\gamma_i\gamma_l^{-1}(I_\nu)_{k',i}^{l,j'} \quad (4.38)$$

Dato che la verifica di (4.38) non è immediata, la svolgiamo per tutti i membri: mostriamo che tutti quanti la soddisfano.

$$* \begin{cases} (I_\nu^{-1})_{i,i}^{i,i} = q^{-1} & \text{se } i \neq i' \\ \varepsilon(i)\varepsilon(i)\gamma_i\gamma_i^{-1}(I_\nu)_{i',i}^{i,i'} = \varepsilon(i)q^{-1} = q^{-1} & \text{se } i' \neq i \end{cases}$$

$$* \begin{cases} (I_\nu^{-1})_{i',i'}^{i',i'} = 1 & \text{se } i = i' \\ \varepsilon(i')\varepsilon(i')\gamma_{i'}\gamma_{i'}^{-1}(I_\nu)_{i,i'}^{i',i'} = 1 & \text{se } i' = i \end{cases}$$

ricordiamo che in questo caso $i' = i = \frac{n+1}{2}$.

$$* \begin{cases} (I_\nu^{-1})_{i,j}^{j,i} = 1 & \text{se } i \neq j, j' \\ \varepsilon(i)\varepsilon(i)\gamma_i\gamma_i^{-1}(I_\nu)_{j,i}^{i,j'} = 1 & \text{se } j' \neq i, i' \end{cases}$$

$$* \begin{cases} (I_\nu^{-1})_{i,i'}^{i',i} = q & \text{se } i \neq i' \\ \varepsilon(i)\varepsilon(i)\gamma_i\gamma_i^{-1}(I_\nu)_{i',i'}^{i',i} = q & \text{se } i' \neq i \end{cases}$$

$$* \begin{cases} (I_\nu^{-1})_{i,j}^{i,j} = q^{-1} - q & \text{se } i > j \neq i' \\ \varepsilon(i)\varepsilon(j)\gamma_i\gamma_j^{-1}(I_\nu)_{i',i}^{j,j'} = \\ = \varepsilon(i)\varepsilon(j)q^{\bar{i}-\bar{j}}(\varepsilon(i')\varepsilon(j')q^{\bar{i}'-\bar{j}'}(q^{-1}-q)) \\ = \cancel{q^{(\bar{i}+\bar{i}')-(\bar{j}+\bar{j}')}}(q^{-1}-q) = q^{-1}-q & \text{se } i' < j' \neq i \end{cases}$$

Le condizioni $i > j \neq i'$, $i' < j' \neq i$ sono equivalenti.

$$* \begin{cases} (I_\nu^{-1})_{i,i}^{k,k'} = \varepsilon(i)\varepsilon(k')q^{\bar{i}-\bar{k}'}(q-q^{-1}) & \text{se } i > k' \neq i' \\ \varepsilon(i)\varepsilon(k')\gamma_i\gamma_{k'}^{-1}(I_\nu)_{k',i}^{k',i} = \\ = \varepsilon(i)\varepsilon(k')q^{\bar{i}-\bar{k}'}(q-q^{-1}) & \text{se } k' < i \neq k \end{cases}$$

$$* \left\{ \begin{array}{ll} (I_\nu^{-1})_{i,i'}^{i,i'} = (q^{-1} - q)(1 + \nu q^{2\bar{i}-n-1}) & \text{se } i > i' \\ \varepsilon(i')\varepsilon(i)\gamma_{i'}\gamma_i^{-1}(I_\nu)_{i',i}^{i',i} = \\ \quad = -\nu q^{\bar{i}-\bar{i}'}(q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}'-n-1}) \\ \quad = -\nu q^{2\bar{i}-n-1}(q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}'-n-1}) \\ \quad = -(q - q^{-1})(\nu q^{2\bar{i}-n-1} + \nu^2 q^{2(\bar{i}'+\bar{i})-2(n+1)}) \\ \quad = -(q - q^{-1})(\nu q^{2\bar{i}-n-1} + 1) & \text{se } i' < i. \end{array} \right.$$

Nel caso in cui $\nu = -1$ comunque non ci sono problemi, perchè $\varepsilon(i)\varepsilon(l) = 1$ per ogni $i, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, e quindi le condizioni (4.31) e (4.38) sono equivalenti. Dimostriamo quindi ora il caso $\nu = -1$, sul caso $\nu = 1$ ci torneremo più avanti. Per comodità da ora in avanti porremo $I_{-1} = I$. Data una proiezione orientata L , con D corrispondente non orientata, per il teorema 4.6.7 abbiamo che

$$\tilde{Q}_{n,-1}(D) = \lambda^{\mathfrak{w}(L)} Q_{n,-1}(L) = \sum_{i \in \text{CSt}(D)} \Pi(i) \int_D i,$$

e questo prova direttamente che $\tilde{Q}_{n,-1}$ non dipende dalla scelta dell'orientamento. Proviamo ora che $\tilde{Q}_{n,-1}$ soddisfa la relazione (4.19): per snellire le notazioni poniamo

$$\tilde{Q}(D) = \sum_{i \in \text{CSt}(D)} \Pi(i) \int_D i.$$

Dobbiamo quindi provare che

$$\tilde{Q}(D_+) - \tilde{Q}(D_-) = (q - q^{-1})(\tilde{Q}(D_0) - \tilde{Q}(D_\infty)),$$

o schematicamente

$$\tilde{Q}(\searrow \swarrow) - \tilde{Q}(\swarrow \searrow) = (q - q^{-1})(\tilde{Q}(\cap) - \tilde{Q}(\cup)).$$

Per semplicità, da ora in avanti supporremo che n sia pari: in questo modo è sempre vero che $i \neq i'$. Andiamo a sviluppare $\tilde{Q}(D_+)$: denotiamo con u il vertice aggiuntivo di D_+ , coinvolto nella skein relation, come nella figura 4.11, e siano $a, b, c, e d$, gli archi di Γ_{D_+} incidenti in u ed orientati come in figura 4.13. Poniamo poi $i = i(a)$, $j = i(b)$, $k = i(c)$, $l = i(d)$: ci interessano solo i casi in cui $\pi_u(i) = I_{i,j}^{k,l} \neq 0$, che possono essere ricavati, utilizzando la tabella 4.1 e che noi riportiamo qui sotto.

1. $I_{i,i}^{i,i} = q$ se $i = j = k = l$;
2. $I_{i,j}^{j,i} = 1$ se $i = l, j = k \neq i, i'$;
3. $I_{i,i'}^{i',i} = q^{-1}$ se $i = l, j = k = i'$;
4. $I_{i,j}^{i,j} = q - q^{-1}$ se $k = i < j = l \neq i'$;
5. $I_{i,i'}^{k,k'} = (q^{-1} - q)\gamma_i\gamma_{k'}^{-1}$ se $j' = i < k' = l \neq i'$;
6. $I_{i,i'}^{i,i'} = (q - q^{-1})(1 - \gamma_i^2)$ se $k = i < i' = j = l$.

L'insieme $\text{CSt}(D_+)$ viene pertanto partizionato in sei sottoinsiemi, A_1, A_2, \dots, A_6 che denotano rispettivamente i sei casi sopra riportati. Segue

$$\tilde{Q}(D_+) = \sum_{i \in \text{CSt}(D_+)} \Pi(i) \int_{D_+} i = \sum_{n=1}^6 \left(\sum_{i \in A_n} \Pi(i) \int_{D_+} i \right)$$

o schematicamente

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\bowtie) = & \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad i \end{array} \right) + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} j \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad j \end{array} \right) + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i' \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad i' \end{array} \right) + \\ & + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad j \end{array} \right) + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} k \quad k' \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad i' \end{array} \right) + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \quad i' \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad i' \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Andiamo a trattare i sei casi singolarmente:

- A_1 : Ogni stato $i \in A_1$ determina uno ed un unico stato $i^* \in \text{CSt}(D_0)$ come in figura 4.26.

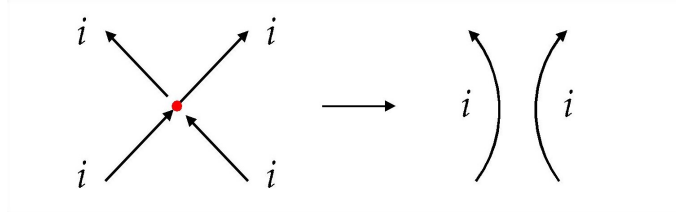


Figura 4.26: Ogni stato $i \in A_1$ determina univocamente uno ed un solo stato $i^* \in \text{CSt}(D_0)$.

In particolare valgono le relazioni

$$\begin{aligned}
- \int_{D_+} i &= \int_{D_0} i^* \\
- \Pi(i) &= q\Pi(i^*)
\end{aligned}$$

per cui

$$\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \searrow \\ i \end{array}\right) = \sum_{i \in A_1} \Pi(i) \int_{D_+} i = \sum_{i \in A_1} q\Pi(i^*) \int_{D_0} i^* = q\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \searrow \\ i \end{array}\right).$$

- A_2 : Per quanto riguarda A_2 , ogni stato $i \in A_2$ non determina alcuno stato $i^* \in \text{CSt}(D_0)$, nè alcuno stato $i_* \in \text{CSt}(D_\infty)$, poichè $j \neq i, i'$.
- A_3 : Ogni stato $i \in A_3$ determina uno stato contributivo $i_* \in \text{CSt}(D_\infty)$, come in figura 4.27.

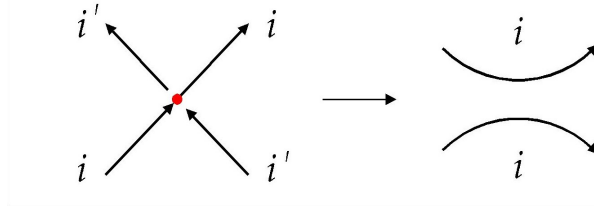


Figura 4.27: Ogni stato $i \in A_3$ determina univocamente uno ed un solo stato $i_* \in \text{CSt}(D_\infty)$. Questo è dovuto al fatto che $i(b) = i(c) = i'$: invertendo l'orientamento degli archi b, c si ottiene $i = i(b') = i(c')$.

Procediamo ora coi calcoli:

$$\begin{aligned}
- \int_{D_+} i &= \int_{D_\infty} i_* \\
- \Pi(i) &= q^{-1}\Pi(i_*)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i' \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \searrow \\ i' \end{array}\right) = q^{-1}\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \searrow \\ i \end{array}\right).$$

- A_4 : Ogni stato $i \in A_4$ determina uno stato contributivo $i^* \in \text{CSt}(D_0)$ in senso analogo a quanto visto nei casi precedenti. In particolare

$$\begin{aligned}
- \int_{D_+} i &= \int_{D_0} i^* \\
- \Pi(i) &= (q - q^{-1})\Pi(i^*)
\end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \searrow \\ j \end{array}\right) = (q - q^{-1})\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \searrow \\ j \end{array}\right) \quad \text{per ogni } i < j \neq i'.$$

- A_5 : Ogni stato $i \in A_5$ determina uno stato contributivo $i_* \in \text{CSt}(D_\infty)$ in senso analogo a quanto visto nei casi precedenti. In particolare

$$\begin{aligned} - \gamma_i \gamma_{k'}^{-1} \int_{D_+} i &= \int_{D_\infty} i_* \\ - \Pi(i) &= (q^{-1} - q) \gamma_i \gamma_{k'}^{-1} \Pi(i_*) \end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow^k \\ \bullet \\ \searrow_{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) = (q^{-1} - q) \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \curvearrowright^{k'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) = (q^{-1} - q) \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \curvearrowright^j \\ \leftarrow_i \end{array} \right) \quad \text{per ogni } i < j \neq i'.$$

- A_6 : Ogni stato $i \in A_6$ determina due stati: il primo lo denoteremo con i^* e giace in $\text{CSt}(D_0)$, l'altro appartiene a D_∞ e lo denoteremo con i_* . In particolare

$$\begin{aligned} - \int_{D_+} i &= \int_{D_0} i^*, \quad \gamma_i^2 \int_{D_+} i = \int_{D_\infty} i_* \\ - \Pi(i) &= (q - q^{-1})(1 - \gamma_i^2) \Pi(i^*), \\ - \Pi(i) &= (q - q^{-1})(1 - \gamma_i^2) \Pi(i_*). \end{aligned}$$

Da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow^i \\ \bullet \\ \searrow_{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) = (q - q^{-1})(1 - \gamma_i^2) \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow_{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) \\ \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow^i \\ \bullet \\ \searrow_{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) = (q - q^{-1})(1 - \gamma_i^2) \gamma_i^{-2} \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \curvearrowright^{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) \end{cases}$$

Una via percorribile a questo punto, per eliminare i termini γ_i , è quella di risolvere il sistema e ricavare γ_i^2 , oppure γ_i^{-2} , da una delle due equazioni. Tuttavia, se moltiplichiamo la seconda equazione per γ_i^2 e la sottraiamo alla prima, otteniamo subito

$$\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow^i \\ \bullet \\ \searrow_{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) = (q - q^{-1}) \left[\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow_{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) - \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \curvearrowright^{i'} \\ \leftarrow_i \end{array} \right) \right] \quad \text{per ogni } i < i'.$$

Sintetizzando i risultati fin qui ottenuti:

- A_1 : $\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow^i \\ \bullet \\ \searrow_i \\ \leftarrow_i \end{array} \right) = q \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow_i \\ \leftarrow_i \end{array} \right),$
- A_3 : $\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \nearrow^{i'} \\ \bullet \\ \searrow_i \\ \leftarrow_{i'} \end{array} \right) = q^{-1} \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} \curvearrowright^i \\ \leftarrow_{i'} \end{array} \right),$

- A_4 : $\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i & j \\ \nearrow & \nwarrow \\ \bullet & \\ \searrow & \swarrow \\ i & j \end{array}\right) = (q - q^{-1})\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ i < j \neq i' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j \\ \nwarrow \\ i < j \neq i' \end{array}\right),$
- A_5 : $\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} k & k' \\ \nearrow & \nwarrow \\ \bullet & \\ \searrow & \swarrow \\ i & i' \end{array}\right) = (q^{-1} - q)\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} j \\ \smile \\ i \\ \smile \\ i < j \neq i' \end{array}\right),$
- A_6 : $\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i & i' \\ \nearrow & \nwarrow \\ \bullet & \\ \searrow & \swarrow \\ i & i' \end{array}\right) = (q - q^{-1})\left[\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ i < i' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} i' \\ \nwarrow \\ i < i' \end{array}\right) - \tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i' \\ \smile \\ i \\ \smile \\ i < i' \end{array}\right)\right].$

Sommando insieme i vari pezzi otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\times) &= q\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ i < j \neq i' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j \\ \nwarrow \\ i < j \neq i' \end{array}\right) + \tilde{Q}\left(\begin{array}{c} j & i \\ \nearrow & \nwarrow \\ \bullet & \\ \searrow & \swarrow \\ i & j \end{array}\right) + q^{-1}\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \smile \\ i \\ \smile \\ i < j \end{array}\right) + \\ &+ (q - q^{-1})\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ i < j \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j \\ \nwarrow \\ i < j \end{array}\right) + (q^{-1} - q)\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} j \\ \smile \\ i \\ \smile \\ i < j \end{array}\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ora dobbiamo calcolare in modo analogo $\tilde{Q}(D_-)$: lo si può fare utilizzando la tabella 4.2, che riportiamo qui sotto.

1. $(I^{-1})_{i,i}^{i,i} = q^{-1}$ se $i = j = k = l$;
2. $(I^{-1})_{i,j}^{j,i} = 1$ se $i = l, j = k \neq i, i'$;
3. $(I^{-1})_{i,i'}^{i',i} = q$ se $i = l, j = k = i'$;
4. $(I^{-1})_{i,j}^{i,j} = q^{-1} - q$ se $k = i > j = l \neq i'$;
5. $(I^{-1})_{i,i'}^{k,k'} = (q - q^{-1})\gamma_i\gamma_{k'}^{-1}$ se $j' = i > k' = l \neq i'$;
6. $(I^{-1})_{i,i'}^{i,i'} = (q^{-1} - q)(1 - \gamma_i^2)$ se $k = i > i' = j = l$.

Per cui l'insieme $\text{CSt}(D_-)$ viene partizionato in sei sottoinsiemi A_1, A_2, \dots, A_6 , che denotano rispettivamente i sei casi sopra riportati. I calcoli sono identici al caso $\tilde{Q}(D_+)$, ne riportiamo qui sotto i risultati:

- A_1 : $\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i & i \\ \nearrow & \nwarrow \\ \bullet & \\ \searrow & \swarrow \\ i & i \end{array}\right) = q^{-1}\tilde{Q}\left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} i \\ \nwarrow \\ i \end{array}\right),$

- $A_3: \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i' \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i \end{array} \right) = q \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \end{array} \right),$
- $A_4: \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ j \\ i > j \neq i' \end{array} \right) = (q^{-1} - q) \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ \cdot \\ \searrow \\ j \\ i > j \neq i' \end{array} \right),$
- $A_5: \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i' \\ i > k' \neq i' \end{array} \right) = (q - q^{-1}) \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} j \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \\ i > j \neq i' \end{array} \right),$
- $A_6: \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i' \\ i > i' \end{array} \right) = (q^{-1} - q) \left[\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ \cdot \\ \searrow \\ i' \\ i > i' \end{array} \right) - \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i' \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \\ i > i' \end{array} \right) \right].$

Sommando assieme i vari pezzi otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\times) &= q^{-1} \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ \cdot \\ \searrow \\ i \end{array} \right) + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} j \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i \\ j \neq i, i' \end{array} \right) + q \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \end{array} \right) + \\ &+ (q^{-1} - q) \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ \cdot \\ \searrow \\ j \\ i > j \end{array} \right) + (q - q^{-1}) \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} j \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \\ i > j \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

A questo punto ci basta sottrarre (4.41) a (4.40), in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\times) - \tilde{Q}(\succ) &= (q - q^{-1}) \left[\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ \cdot \\ \searrow \\ i \end{array} \right) + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ \cdot \\ \searrow \\ j \\ i < j \end{array} \right) + \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ \cdot \\ \searrow \\ j \\ i > j \end{array} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \end{array} \right) - \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \\ i < j \end{array} \right) - \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} i \\ \smile \\ \cdot \\ \frown \\ i \\ i > j \end{array} \right) \right] \quad (4.42) \\ &= (q - q^{-1}) [\tilde{Q}(\cdot) - \tilde{Q}(\succ)]. \end{aligned}$$

Si noti che nello svolgimento di (4.42) abbiamo sottinteso l'identità

$$\tilde{Q} \left(\begin{array}{c} j \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i \\ j \neq i, i' \end{array} \right) = \tilde{Q} \left(\begin{array}{c} j \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i \\ j \neq i, i' \end{array} \right).$$

Questo conclude la prova del caso $\nu = -1$. Per quanto riguarda il caso $\nu = 1$, l'idea è di modificare leggermente I_1 in modo che questa soddisfi (4.31). Poniamo $I = I_1$, e poniamo poi

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= q \sum_i E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{i \neq j, j'} \varepsilon(i) \varepsilon(j) E_{i,j} \otimes E_{j,i} - q^{-1} \sum_i E_{i,i'} \otimes E_{i',i} \\ &\quad + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} + (q - q^{-1}) \sum_{i < k'} q^{\bar{i} - \bar{k}'} E_{i,k} \otimes E_{i',k'}.\end{aligned}$$

I coefficienti di I ed \tilde{I} sono connessi dalla seguente relazione

$$\tilde{I}_{i,j}^{k,l} = \varepsilon(i) \varepsilon(k) I_{i,j}^{k,l}. \quad (4.43)$$

Questo implica che \tilde{I} è invertibile, e i coefficienti dell'inversa possono essere espressi come segue

$$(\tilde{I}^{-1})_{i,j}^{k,l} = \varepsilon(i) \varepsilon(k) (I^{-1})_{i,j}^{k,l}. \quad (4.44)$$

Se $I_{i,j}^{k,l} \neq 0$, ci sono solo due possibilità:

- i. Le coppie ordinate $(\varepsilon(i), \varepsilon(j))$ e $(\varepsilon(k), \varepsilon(l))$ coincidono;
- ii. Nel caso in cui non si verifichi i, allora $\varepsilon(j) = -\varepsilon(i)$, e le coppie ordinate $(\varepsilon(i), \varepsilon(j))$ e $(\varepsilon(l), \varepsilon(k))$ coincidono.

In particolare, quando si verifica il punto i, allora $\tilde{I}_{i,j}^{k,l} = I_{i,j}^{k,l}$, in caso contrario si verifica il punto ii e vale l'uguaglianza $\tilde{I}_{i,j}^{k,l} = -I_{i,j}^{k,l}$. Lo stesso enunciato è valido per i coefficienti $(\tilde{I}^{-1})_{i,j}^{k,l}$ e $(I^{-1})_{i,j}^{k,l}$.

Siano $z : V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes m}$ una composizione di morfismi I_i e I_i^{-1} , e $\tilde{z} : V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes m}$ la corrispondente composizione di \tilde{I}_i e \tilde{I}_i^{-1} . Il morfismo $I_i \in \text{End}(V^{\otimes m})$ è definito utilizzando le notazioni riportate in (1.9), ovvero sia

$$I_i(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) := v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes I(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes \dots \otimes v_m.$$

Usiamo poi i simboli \mathbf{i} , \mathbf{j} per denotare rispettivamente i multiindici (i_1, \dots, i_m) e (j_1, \dots, j_m) . In particolare quindi valgono le notazioni $z_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_m} = z_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$, e $\tilde{z}_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_m} = \tilde{z}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$. I coefficienti di z e \tilde{z} sono connessi come segue:

- Se $z_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} = 0$ allora $\tilde{z}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} = 0$;
- Se $z_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} \neq 0$ allora le successioni $(\varepsilon(i_1), \dots, \varepsilon(i_m))$ e $(\varepsilon(j_1), \dots, \varepsilon(j_m))$ possono essere ottenute l'una partendo dall'altra attraverso un opportuno numero, di "trasposizioni", $(1, -1) \leftrightarrow (-1, 1)$. Denotiamo tale numero con $p(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. In particolare vale quindi

$$\tilde{z}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} = (-1)^{p(\mathbf{i}, \mathbf{j})} z_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}.$$

Questo prova che \tilde{I} è un operatore di Yang-Baxter, e che gli stessi f, λ, μ della proposizione 4.5.2 (caso $\nu = 1$) lo rendono arricchito. L'identità $p(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 0$ inoltre implica che (I, f, λ, μ) e $(\tilde{I}, f, \lambda, \mu)$ danno origine allo stesso invariante. Usando opportunamente le condizioni (4.38), (4.43), e (4.44) otteniamo poi l'uguaglianza

$$\begin{aligned}
(\tilde{I}^{-1})_{i,j}^{k,l} &= \varepsilon(i)\varepsilon(k)(I^{-1})_{i,j}^{k,l} \\
&= \cancel{\varepsilon(i)}\varepsilon(k)\cancel{\varepsilon(i)}\varepsilon(l)\gamma_i\gamma_l^{-1} I_{k',i}^{l,j'} \\
&= \varepsilon(k)\varepsilon(l)\gamma_i\gamma_l^{-1} I_{k',i}^{l,j'} \\
&= \varepsilon(k)\cancel{\varepsilon(l)}\varepsilon(k')\cancel{\varepsilon(l)}\gamma_i\gamma_l^{-1} \tilde{I}_{k',i}^{l,j'} \\
&= \varepsilon(k)\varepsilon(k')\gamma_i\gamma_l^{-1} \tilde{I}_{k',i}^{l,j'} = -\gamma_i\gamma_l^{-1} \tilde{I}_{k',i}^{l,j'}.
\end{aligned}$$

A questo punto bisogna solo verificare che l'operatore di Yang-Baxter arricchito $(\sqrt{-1}\tilde{I}, f, \sqrt{-1}\lambda, \mu)$ e la successione $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ soddisfano le condizioni (n.i)-(n.ii)-(n.iii) e (4.31): questo ci permette di applicare il teorema 4.6.7, e quindi di ottenere un invariante di nodi non orientati che denotiamo con $Q_{n,1}$. Lo stesso identico argomento del caso $\nu = -1$ ora può essere applicato al caso $\nu = 1$. I calcoli sono identici al caso $\nu = -1$.

Bibliografia

- [Ab] E. ABE, *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, 1980.
- [Ad] C. C. ADAMS, *The KnotBook - An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, AMS, 2004.
- [CP] V. CHARI, A. PRESSLEY, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994.
- [Ka] L. KAUFFMAN, *New Invariants in the Theory of Knots*, American Mathematical Monthly, Volume 95, Issue 3, 195-242, Mar., 1988.
- [KRT] C. KASSEL, M. ROSSO, V. TURAEV, *Quantum Groups and Knot Invariants*, Panoramas et Syntheses 5, SMF 1997.
- [SS] S. SHNIDER, S. STERNBERG, *Quantum Groups - from coalgebras to Drinfeld algebras*, International Press, Cambridge, Mass., 1994.
- [Tj] T. TJIN, *An introduction to quantized Lie groups and Algebras*, Int.J.Mod.Phys. A7, 6175-6213, 1992.
- [Tu] V. TURAEV, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. 92, 527-553, 1988.