Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Risoluzione di singolarità per curve algebriche

Relatore:
Prof.ssa Luisa Fiorot

Laureanda:
Chiara Mandatelli
Matricola 1218020

Anno Accademico 2021-2022
23 settembre 2022

L'uomo è l'occhio attraverso cui
l'universo ha imparato a osservare se stesso.
VICTOR FREDERICK WEISSKOPF

Indice

Introduzione

Data una curva algebrica irriducibile, cioè definita come l'insieme degli zeri di un polinomio, in generale essa non è liscia; ovvero presenta, sebbene in numero finito, dei punti con molteplicità maggiore di 1. Lo scopo finale di questa tesi è dunque di mostrare che per ogni curva algebrica ne esiste una liscia, e quindi priva di punti singolari tale che tra le due curve esiste un morfismo birazionale. Si vedrà nel corso dell'elaborato che un morfismo birazionale rappresenta una classe di equivalenza di particolari mappe tra varietà, dette morfismi. Per definire un morfismo birazionale tra due curve bisogna prima introdurre il concetto di varietà, quindi lo si farà prima per gli spazi affini nel secondo capitolo e poi per spazi più generali nel terzo capitolo.

Dato che una curva algebrica è un caso particolare di insieme algebrico, nel capitolo 1 si faranno alcuni richiami dal corso di curve algebriche piane su tali insiemi e sulla loro irriducibilità, si richiamerà l'essenziale equivalenza tra insiemi algebrici ridotti e ideali radicali dell'anello dei polinomi. Si darà particolare risalto alle curve algebriche piane, per cui sarà più avanti necessario richiamare il concetto di complesso tangente e di molteplicità di un punto della curva.

Nel secondo capitolo viene quindi definita una varietà affine, che è un insieme algebrico affine irriducibile. Si introdurranno inoltre le mappe polinomiali, sono delle funzioni tra varietà affini che possono essere descritte da polinomi per ogni punto del dominio della varietà di partenza. È utile osservare che per le varietà, siano affini o più generali, è comodo utilizzare la topologia di Zariski.

Si darà quindi una definizione centrale: quella di anello delle coordinate affini relativo a una varietà affine, esso risulta essere l'insieme dei polinomi in n variabili quozientato l'ideale generato dalla varietà affine. Si vedrà come vi sia una naturale corrispondenza tra le mappe polinomiali tra due varietà e gli omomorfismi tra i loro rispettivi anelli delle coordinate. Dunque si dimostrerà che due varietà affini sono isomorfe tra loro se e solo se lo sono i loro anelli delle coordinate.

Dato l'anello delle coordinate di una varietà V si definisce poi il suo campo quoziente, detto campo delle funzioni razionali su V, e si definiranno i sottoanelli locali di tale campo come l'insieme delle funzioni razionali definite per i punti della varietà, essi sono in particolare anelli di valutazione discreta di cui si darà una breve caratterizzazione.

Nel terzo capitolo si introdurranno quindi le varietà nel senso più generale, ovvero definite all'interno di spazi misti, prodotti di spazi proiettivi con spazi affini, come sottoinsiemi aperti di un insieme algebrico irriducibile. Analogamente a quanto fatto per quelle affini si introdurranno gli anelli delle coordinate, il loro campo quoziente, che viene detto campo delle funzioni. Si arriva dunque alla definizione di morfismo tra varietà, esso risulta essere l'analogo di una mappa polinomiale per varietà generali. Quindi anche qui seguirà una corrispondenza tra morfismi di varietà e omomorfismi tra anelli di coordinate; si osserverà inoltre che l'essere un morfismo è in realtà una proprietà locale.

Si andranno poi a studiare le dimensioni delle varietà, definite come il grado di trascendenza del campo delle funzioni della varietà sul campo di base k, il quale sarà sempre supposto essere algebricamente chiuso. In particolare nel caso di $\mathbb{A}^2$ tutti i sottoinsiemi chiusi di tale spazio sono identificati univocamente dalla loro dimensione, in particolare si dimostra che una curva algebrica piana ha dimensione 1.

Si arriverà dunque alla definizioni di mappa razionale e di mappa birazionale, essa è una mappa razionale per cui esiste un isomorfismo tra due aperti delle rispettive varietà . Da queste definizioni seguono due importanti conseguenze: primo che due varietà sono birazionalmente equivalenti se e solo se i loro campi di funzioni sono isomorfi; secondo che ogni curva è birazionalmente equivalente a una curva piana. Questo risultato permetterà di ridursi al caso di curve piane, e di risolvere le singolarità per questa classe specifica di curve.

Si conclude quindi con l'ultimo capitolo in cui si dimostra come si risolvono effettivamente le singolarità di una curva e come si trova la corrispondente curva non singolare ad essa birazionalmente equivalente. L'idea generale è di "rimuovere" il punto singolare e al suo posto inserire una retta proiettiva, quindi le direzioni delle rette tangenti alla curva nel punto singolare corrisponderanno a un punto su tale retta proiettiva. La risoluzione di singolarità apparterrà alla varietà ottenuta aggiungendo la retta proiettiva al piano a cui è stato tolto il punto singolare.

Si vedrà quindi l'importanza della molteplicità delle tangenti ai punti singolari della curva e come con questo metodo sia necessario che tutte le tangenti dei punti singolari siano ordinarie. Chiaramente ciò non è vero per ogni curva algebrica, un esempio ne è dato dalla curva cuspidale; avranno quindi un ruolo importante le trasformazioni quadratiche, di cui qui si dà solo un breve accenno, e che permetteranno di ridursi a curve piane con tangenti ordinarie. Con questo processo, facendo il blow-up di ogni punto singolare della curva localmente, si sarà ottenuta la risoluzione di singolarità cercata.

Capitolo 1

Richiami

Quando si considerano gli zeri di un polinomio in una variabile a coefficienti in k essi sono in numero finito e sono, in particolare per $k = \mathbb{C}$, determinati dal *Teorema fondamentale dell'algebra*, ma se si prende un polinomio in due o più variabili le cose si complicano e allora in generale gli zeri del polinomio sono in numero infinito. Tale insieme di zeri si può vedere come un oggetto geometrico detto ipersuperficie nello spazio $\mathbb{A}^n_{\bar{k}}$, e in particolare per n=2 come una curva algebrica piana.

1.1 Insiemi algebrici

Tali insiemi vengono definiti come insiemi algebrici. Iniziamo dunque la trattazione con alcuni richiami sugli insiemi algebrici visti nel corso di curve algebriche piane. Sia k un campo e sia $\bar{k}$ la sua chiusura algebrica.

Definizione 1.1. Sia $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ un polinomio in n variabili non costante. Si definisce

$$V(f) \overset{\text{def}}{=} \{P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n_{\bar{k}} \mid f(P) = f(p_1, \dots, p_n) = 0\} \subseteq \mathbb{A}^n_{\bar{k}},$$

essa è detta *ipersuperficie* associata a f.

Un'ipersuperficie in $\mathbb{A}^2_{\bar{k}}$ è detta una *curva algebrica piana affine*.

Più in generale si ha:

Definizione 1.2. Dato S un sottoinsieme di polinomi in $k[T_1, \dots, T_n]$, sia

$$V(S) \overset{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{A}^n_{\bar{k}} \mid f(P) = 0 \ \forall f \in S\} = \bigcap_{f \in S} V(f).$$

Inoltre un sottoinsieme $X \subset \mathbb{A}^n_{\bar{k}}$ è un *insieme algebrico* se $X = V(S)$ per qualche S insieme di polinomi.

Definizione 1.3. Vale una definizione analoga per $g \in k[X_0, \ldots, X_n]$ polinomio omogeneo,

$$V(g) = \{P \in \mathbb{P}^n_{\bar{k}} \mid g(P) = 0\}.$$

Inoltre se $I \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ è omogeneo, ovvero se I è generato da polinomi omogenei, allora $V(I) = \{P \in \mathbb{P}^n_{\bar{k}} \mid g(P) = 0 \ \forall g \in I\}$ è *insieme algebrico in* $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$.

Proposizione 1.4. *Da queste definizioni seguono alcune proprietà:*

1. *Se I è un ideale in $k[T_1, \ldots, T_n]$ generato da S, allora $V(S) = V(I)$. Quindi ogni insieme algebrico è uguale a $V(I)$ per qualche ideale I.*
2. *Sia $I = (f_1, \ldots, f_r) \trianglelefteq k[T_1, \ldots, T_n]$ ideale finitamente generato da $f_1, \ldots, f_r$, allora $V(I) = \bigcap_{i=1}^r V(f_i)$.*
3. *Dati $f, g \in k[T_1, \ldots, T_n]$ allora $V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Inoltre $V(I) \cup V(J) = V(\{fg \mid f \in I, g \in J\})$, quindi ogni unione finita di insiemi algebrici è un insieme algebrico.*
4. *Sia $\{I_\alpha\}$ una famiglia di ideali, allora $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$, ovvero l'intersezione qualunque di insiemi algebrici è un insieme algebrico.*
5. *Se $I \subseteq J$ ideali, allora $V(I) \supseteq V(J)$.*
6. *$V(f^n) = V(f) \ \forall n \geq 1$ per $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$.*
7. *$V(0) = \mathbb{A}^n_{\bar{k}}, V(1) = \emptyset, V(T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$ con $a_i \in k$. Quindi ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{A}^n_{\bar{k}}$ è un insieme algebrico.*

Dai punti (3), (4), (7) della proposizione sopra si nota che gli insiemi algebrici possono essere visti come i chiusi di una topologia, essa è detta *Topologia di Zariski*.

Data questa definizione di insieme algebrico è utile ricordare il seguente teorema che evidenzia come ogni insieme algebrico $V(I) = \mathbb{A}^n_{\bar{k}}$, con $I \trianglelefteq k[T_1, \ldots, T_n]$, sia intersezione finita di ipersuperfici.

Teorema 1.5 (della base di Hilbert). *L'anello dei polinomi $k[T_1, \ldots, T_n]$ è Noetheriano, ovvero ogni ideale di $k[T_1, \ldots, T_n]$ è finitamente generato.*

Si introducono quindi le seguenti definizioni che sono in qualche modo opposte rispetto a quella di insieme algebrico:

Definizione 1.6. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{A}^n_{\bar{k}}$. Si pone

$$I(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f(P) = 0 \ \forall P \in A\}.$$

Si osserva che $I(A)$ forma un ideale in $k[T_1, \ldots, T_n]$, detto l'*ideale* di A.

Definizione 1.7. Sia I ideale di R, con R anello commutativo. Si definisce il *radicale* di I come

$$\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in R \mid f^n \in I, \exists n > 0\}$$

Dalla definizione di radicale seguono un paio di osservazioni: in primo luogo si ha che, dato $I \trianglelefteq R$, allora $\sqrt{I} \trianglelefteq R$; inoltre in generale vale che $I \subseteq \sqrt{I}$.

Proposizione 1.8. *Analogamente a quanto fatto per gli insiemi algebrici, seguono da questa definizione alcune proprietà:*

1. *Se $X \subseteq Y$, allora $I(X) \supseteq I(Y)$.*
2. *$I(\emptyset) = k[T_1, \dots, T_n]$, $I(\mathbb{A}^n_k) = (0)$ se k è un campo infinito.*
3. *$I(V(S)) \supseteq S$ per ogni insieme S di polinomi, e $V(I(X)) \supseteq X$ per ogni insieme X di punti.*
4. *$V(I(V(S))) = V(S)$ per ogni insieme S di polinomi, e $I(V(I(X))) = I(X)$ per ogni insieme X di punti. Quindi se W è un insieme algebrico allora $W = V(I(W))$, e se J è l'ideale di un insieme algebrico allora $J = I(V(J))$.*
5. *$I(X)$ è un ideale radicale per ogni $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$.*

Si ha dunque una corrispondenza tra insiemi algebrici di $\mathbb{A}^n_k$ e ideali di $k[T_1, \dots, T_n]$. Tale corrispondenza in generale non è biunivoca, basta prendere infatti il seguente:

Esempio 1.9. Sia $k[x]$ e $J = (x^n)$ con $n \geq 2$, allora $V(J) = \{0\} \subset \mathbb{A}^1_k$ e $I(V(J)) = (x)$. Dunque $I(V(J)) \supset J$ propriamente.

Definizione 1.10. Un ideale $I \trianglelefteq R$ si dice *radicale* o *ridotto* se $I = \sqrt{I}$.

Proposizione 1.11. *Dato un ideale $I \trianglelefteq k[T_1, \dots, T_n]$ allora $V(I) = V(\sqrt{I})$.*

Teorema 1.12 (**degli zeri di Hilbert, versione debole**)**.** *Sia $I \trianglelefteq k[T_1, \dots, T_n]$, allora $V(I) = \emptyset$ se e solo se $I = k[T_1, \dots, T_n]$.*

Teorema 1.13 (**degli zeri di Hilbert, versione forte**)**.** *Sia $I \trianglelefteq k[T_1, \dots, T_n]$, allora $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*

Dunque se J è un ideale radicale in $k[T_1, \dots, T_n]$, allora $I(V(J)) = J$, ovvero esiste una corrispondenza biunivoca tra ideali radicali e insiemi algerici.

1.2 Riducibilità di insiemi algebrici

Si discute ora la riducibilità degli insiemi algebrici.

Definizione 1.14. Un insieme algebrico $V(f)$ si dice *riducibile* se esistono $\emptyset \neq V(f_1), V(f_2) \subset V(f)$ con $V(f_1) \neq V(f_2)$ tali che $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$.

Contrariamente $V(f)$ si dice *irriducibile* se non è riducibile, ovvero se per ogni decomposizione $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$, con $\emptyset \neq V(f_1), V(f_2) \subset V(f)$ si ha necessariamente che $V(f_i) = V(f)$ per $i \in \{1, 2\}$.

I seguenti teoremi sono necessari per decomporre ogni insieme algebrico in componenti irriducibili.

Teorema 1.15. *Per ogni campo k l'anello dei polinomi $k[T_1, \dots, T_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica, quindi ogni $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ non costante si scrive in modo unico come $f = p_1 \dots p_n$ con $p_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ irriducibili a meno di riordino dei fattori e di moltiplicazione per unità.*

Lemma 1.16 (di Study). *Sia $f \in k[T_1, \dots, T_n], f = p_1 \dots p_n$ con $p_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ irriducibili non associati. Allora $V(f) \subseteq V(g)$ se e solo se $f \mid g$ (ovvero se e solo se $(g) \subseteq (f)$).*

Lemma 1.17. *Sia $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ un polinomio ridotto, ovvero $f = p_1 \dots p_r$ con $p_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ a due a due non associati e irriducibili. Allora l'ipersuperficie $V(f)$ è irriducibile se e solo se f è irriducibile.*

Corollario 1.18. *Sia $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ un polinomio non costante, e $f = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ la decomposizione di f in fattori irriducibili. Allora $V(f) = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_r)$ è la decomposizione di $V(f)$ in componenti irriducibili.*

Si osserva inoltre che vale la seguente:

Proposizione 1.19. *Un insieme algebrico $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ è irriducibile se e solo se $I(V)$ è ideale primo.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Se $I(V)$ non è ideale primo allora esistono $F_1, F_2 \in k[T_1, \dots, T_n]$ tali che $F_1F_2 \in I(V)$ e $F_1, F_2 \notin I(V)$. Allora $V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$, infatti: l'inclusione ($\supseteq$) è ovvia; al contrario sia $P \in V$, dunque $F_1F_2(P) = 0$ dato che $F_1F_2 \in I(V)$, allora $F_1(P) = 0$ oppure $F_2(P) = 0$, quindi $P \in V(F_1)$ o $P \in V(F_2)$ rispettivamente e si ha quindi l'altra inclusione come si voleva. Si ha poi che $V \cap V(F_1) \subsetneq V$, infatti $F_1 \notin I(V) \Rightarrow \exists Q \in V$ tale che $F_1(Q) \neq 0$, quindi $Q \in V \setminus V \cap V(F_1)$ come si voleva. Vale analogamente che $V \cap V(F_2) \subsetneq V$. Allora V è riducibile.

($\Leftarrow$): Se V è riducibile, allora $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1, V_2 \subsetneq V, V_1 \neq V_2$. Allora $I(V_i) \supsetneq I(V)$, sia $F_i \in I(V_i) \setminus I(V)$ per $i = 1, 2$. Si mostra che $F_1F_2 \in I(V)$:

sia $P \in V$, allora $P \in V_1$ e/o $P \in V_2$; se $P \in V_1 \Rightarrow F_1(P) = 0 \Rightarrow F_2F_2(P) = 0$ come si voleva, e analogamente per $P \in V_2$. Dunque $I(V)$ non è ideale primo. $\square$

1.3 Intersezione tra curve e sottovarietà lineari

Si dà di seguito una breve introduzione sui divisori, che sono utili a definire la molteplicità di intersezione tra una curva e una sottovarietà lineare, in particolare una retta.

Definizione 1.20. Il *gruppo dei divisori* $\mathrm{Div}(\mathbb{A})$ (rispettivamente $\mathrm{Div}(\mathbb{P})$) di uno spazio affine $\mathbb{A}_k$ (risp. $\mathbb{P}_k$) è il gruppo abeliano libero generato dall'insieme delle ipersuperficie irriducibili di $\mathbb{A}$ (risp. di $\mathbb{P}$) $V = V(f)$ con $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ (risp. $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$) irriducibile.

Definizione 1.21. Dato $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$, $f = \prod_{j=1}^r p_j^{n_j}$ con $n_j \geq 1$ e p_j a due a due non associati, allora

$$D = \mathrm{div}(f) = \sum_{j=1}^{r} n_j V(p_j) = \sum_{j=1}^{r} n_j V_j \in \mathrm{Div}(\mathbb{A}_k^n)$$

Si definisce inoltre

$$n_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{ord}_{V_j}(D) = \text{ordine o molteplicità di } D \text{ in } V_j$$

Un divisore D come sopra si dice *effettivo* se $n_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, r$.

Sia L una sottovarietà lineare in $\mathbb{P}_k^n$, e sia $D = \mathrm{div}(g)$ un divisore effettivo con $g \in k[X_0, \ldots, X_n]$, l'intersezione tra L e D si indica con $L \cdot D \in \mathrm{Div}(L)$. Fissato un sistema di riferimento su $\mathbb{P}_k^n$ in cui L ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{con } A \in M_{(n+1)\times(m+1)}.$$

Posto $D = \mathrm{div}(g(x_0, \ldots, x_n))$, si ha $L \cdot D = \mathrm{div}(g(A\bar{y}))$, con $\bar{y} = (y_0, \ldots, y_m)$.

Definizione 1.22. Dato $D = \mathrm{div}(g)$ effettivo, e data r retta in $\mathbb{P}_k^n$ passante per il punto P, si definisce la *molteplicità di intersezione* di r con D in P:

$$e_P(r \cdot D) = \text{ordine del divisore } r \cdot D \text{ in } P$$

Inoltre è utile ricordare un'importante disuguaglianza:

Teorema 1.23 (Disuguaglianza fondamentale)**.** *Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ due curve algebriche piane proiettive prive di componenti comuni, sia $P \in \mathrm{Supp}(\mathcal{C}_1) \cap \mathrm{Supp}(\mathcal{C}_2)$, si ha:*

$$m_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \geq m_P(\mathcal{C}_1) \cdot m_P(\mathcal{C}_2);$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ non hanno tangenti comuni in P.

1.4 Molteplicità di un punto in una curva algebrica affine

Definizione 1.24. Sia $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ polinomio che definisce una curva $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^n_k$. Sia $P \in \mathcal{C} = V(f)$, esso è detto *punto semplice* o *liscio* se

$$\mathrm{grad}_P(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_n}(P)\right) \neq (0, \dots, 0).$$

Al contrario si dice che P è punto *singolare*.

Una curva si dice *liscia* se non ha punti singolari.

Se $\mathcal{C}$ è liscia in P allora la retta

$$T_P\,\mathcal{C} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n_k \mid \frac{\partial f}{\partial t_1}(P)x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_n}(P)x_n = 0\right\}$$

è detta la *tangente a $\mathcal{C}$ in P*.

Per semplicità si dà di seguito un criterio per calcolare la molteplicità di un punto P appartenente alla curva $\mathcal{C} = V(f)$, con $f \in k[T_1, \dots, T_n]$.

Supponiamo innanzitutto di avere $P = (0, \dots, 0) \in \mathcal{C}$, si scomponga $f = f_m + f_{m+1} + \cdots + f_d$ con $f_m \neq 0$ e $f_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ polinomi omogenei di grado i, dunque $d = \deg(f)$. Allora la *molteplicità* di P in $\mathcal{C}$ è $m_P(\mathcal{C}) = m$ e il *complesso tangente* è dato da $V(f_m)$.

Sia ora $P = (p_1, \dots, p_n)$ un punto qualsiasi della curva $\mathcal{C}$, allora si consideri la traslazione $T = (T_1 + p_1, \dots, T_n + p_n)$ e la curva traslata del vettore P, ovvero definita dal polinomio $g(T_1, \dots, T_n) = f(T_1 + p_1, \dots, T_n + p_n) = g_m + \cdots + g_d$. Allora si ha $m_P(\mathcal{C}) = m_O(\mathcal{C}^T) = m$ (dove $O = (0, \dots, 0)$ è l'origine e $\mathcal{C}^T$ indica la curva traslata), e $V(g_m(T_1, \dots, T_n))$ è il relativo complesso tangente.

Si supponga ora di avere $\mathcal{C} = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\bar{k}}$ una curva algebrica piana; sia $P \in \mathcal{C}$ e $V(h)$ il suo rispettivo complesso tangente calcolato come detto sopra. Dato che f e h sono polinomi in due variabili e $\bar{k}$ è algebricamente chiuso allora, scomponendo h in fattori irriducibili, si ha $h = \prod L_i^{r_i}$ dove L_i sono rette distinte e r_i le rispettive molteplicità. Allora L_i sono le *rette tangenti* a $\mathcal{C}$ in P e r_i è la rispettiva *molteplicità della tangente*. Si dice che L_i è una tangente *ordinaria* o *semplice* se $r_i = 1$, *doppia* se $r_i = 2$, *tripla* se $r_i = 3$ e così via.

1.5 Moduli

Si dà qui di seguito un'introduzione sui moduli che saranno necessari più avanti per provare alcuni risultati.

Definizione 1.25. Sia R un anello commutativo, un *R-modulo* è un gruppo commutativo M, dotato dell'operazione di gruppo $+$ e con elemento neutro $0 = 0_M$, su cui è definita un'operazione di prodotto per scalari, ovvero una mappa da $R \times M \longrightarrow M$, che soddisfa:

1. $(a + b) * m = a * m + b * m$ con $a, b \in R, m \in M$;
2. $a * (m + n) = a * m + a * n$ con $a \in R, m, n \in M$;
3. $(ab) * m = a * (b * m)$ con $a, b \in R, m \in M$;
4. $1_R * m = m$ con $m \in M$ dove 1_R è l'identità dell'anello R.

Per semplificare la notazione poniamo $am = a * m$.

Un sottogruppo N di un R-modulo M è chiamato un *sottomodulo* se $am \in N$ per ogni $a \in R, m \in N$. In tal caso N è un R-modulo.

Se S è un insieme di elementi di un R-modulo M, il *sottomodulo generato* da S è definito da $\{\sum r_i s_i \mid r_i \in R, s_i \in S\}$, è il più piccolo sottomodulo di M che contiene S. Se $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ è finito, il sottomodulo generato da S si denota con $\sum Rs_i$.

Il modulo M si dice *finitamente generato* se $M = \sum_{i=1}^{n} s_i R$ per qualche $s_1, \ldots, s_n \in M$. Si osserva che, se R è un campo, questo concetto coincide con la nozione di spazio vettoriale finitamente generato .

Sia R un sottoanello di un anello S, allora ci sono diversi modi di considerare la finitezza di S sopra R dipendentemente dal fatto di considerare S come un R-modulo, un anello o un campo.

(A) S è detto un *modulo-finito* sopra R, se S è finitamente generato come R-modulo. Se R e S sono campi, e S è un modulo finito sopra R, si denoterà la dimensione di S sopra R con $[S : R]$.

(B) Siano $v_1, \ldots, v_n \in S$, sia $\varphi\colon R[X_1, \ldots, X_n] \to S$ l'omomorfismo di anelli che manda X_i in v_i. L'immagine di φ è data da $R[v_1, \ldots, v_n]$, è un sottoanello di S contenente R e $v_1, \ldots, v_n$, infatti $R[v_1, \ldots, v_n] = \{\sum a_{(i)} v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n} \mid a_{(i)} \in R\}$. L'anello S è un *anello-finito* sopra R se $S = R[v_1, \ldots, v_n]$ per qualche $v_1, \ldots, v_n \in S$.

(C) Supponiamo che R e S siano campi. Se $v_1, \ldots, v_n \in S$, sia $R(v_1, \ldots, v_n)$ il campo quoziente di $R[v_1, \ldots, v_n]$. Si considera $R(v_1, \ldots, v_n)$ come sottocampo di S, esso è il più piccolo sottocampo di S contenente R e $v_1, \ldots, v_n$. Il campo S si dice *estensione di campi finitamente generata* di R se $S = R(v_1, \ldots, v_n)$ per qualche $v_1, \ldots, v_n \in S$.

1.6 Chiusura integrale

Definizione 1.26. Sia R un sottoanello di un anello S, un elemento $v \in S$ è detto *intero* (o *integrale*) sopra R se esiste un polinomio monico $F = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in R[X]$ tale che $F(v) = 0$. Se R e S sono campi, si dice che v è *algebrico* sopra R se v è integrale sopra R.

Proposizione 1.27. *Sia R un sottoanello di un dominio S, $v \in S$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) v è integrale sopra R.

(2) $R[v]$ è un modulo-finito sopra R.

(3) Esiste un sottoanello R' di S contenente $R[v]$ che è modulo-finito sopra R.

Dimostrazione. **(1) implica (2)**: v integrale su $R \Rightarrow \exists F = X^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in R[X]$ polinomio monico tale che $F(v) = 0$. Da ciò deriva che $v^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}v^i$ e quindi tutte le potenze di ordine superiore di n in v si possono scrivere come R-combinazioni linerari di $\{v, \ldots, v^{n-1}\}$. Se $v^n + a_1v^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, allora $v^n = -a_1v^{n-1} - \cdots - a_n$, quindi $v^n = \sum_{i=0}^{n-1} Rv^i$. Segue che $v^m = \sum_{i=0}^{n-1} Rv^i$ per ogni m, quindi $R[v] = \sum_{i=0}^{n-1} Rv^i$, dunque $R[v]$ è modulo-finito sopra R.

(2) implica (3): Basta prendere $R' = R[v]$; allora $R[v]$ è sottoanello di S dato che R è sottoanello di S e $v \in S$, ed è modulo finito su R per ipotesi.

(3) implica (1): Sia R' modulo-finito su R generato dagli elementi $\{w_1, \ldots, w_n\}$, ovvero $R' = \sum_{i=1}^{n} Rw_i$ e contenente $R[v]$. Inoltre dato che R' è sottoanello di S si può scrivere $vw_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}w_j$ $\forall i = 1, \ldots, n$ con $a_{ij} \in R$. Definendo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} v - a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & v - a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & & v - a_{nn} \end{pmatrix},$$

si ha che il vettore $(w_1 \ldots w_n)$ appartiene al kernel della matrice A. Dunque $\det(A) = 0$ è un polinomio che si annulla in v; inoltre tale polinomio è monico dato che v appare solo nella diagonale della matrice A. Quindi v è intero su R. $\square$

Corollario 1.28. *L'insieme degli elementi di S che sono integrali sopra R formano un sottoanello di S contenente R, detto la chiusura integrale di R in S.*

Dimostrazione. Banalmente l'insieme degli elementi di S interi su R contiene R, infatti dato $a \in R$ allora $F = X - a \in R[X]$ è polinomio monico che si annulla in a.

Siano a, b elementi interi su R, allora b è intero su $R[a]$ dato che $R[a] \subset R$, quindi $R[a, b]$ è modulo-finito sopra $R[a]$ dalla proposizione sopra. Allora $R[a, b]$ è modulo-finito sopra R: sia infatti $R[a, b] = \sum_{i=0}^{n} R[a]v_i$ con $\{v_1, \ldots, v_n\} \in R[a, b]$ e $R[a] = \sum_{j=0}^{m} Rw_i$ con $\{w_1, \ldots, w_n\} \in R[a]$, allora $R[a, b] = \sum_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,m}} Rv_i w_j$ come si voleva. Dato che $a + b, a - b, ab \in R[a, b]$ allora sempre dalla proposizione sopra segue che tali elementi sono interi sopra R. $\square$

Si dice che S è *integrale* sopra R se ogni elemento di S è intero sopra R; se R e S sono campi allora si dice che S e *estensione algebrica* di R.

1.7 Estensione di campi

Si supponga di avere K sottocampo di un campo L, e sia $L = K(v)$ per qualche $v \in L$. Sia $\varphi\colon K[X] \to L$ l'omomorfismo che manda X in v, e sia $\mathrm{Ker}(\varphi) = (F)$, con $F \in K[X]$, ciò deriva dal fatto che $K[X]$ è PID e $\mathrm{Ker}(\varphi) \trianglelefteq K[X]$. Allora $K[X]/(F)$ è isomorfo a $K[v]$, quindi (F) è ideale primo. Si hanno due possibili casi:

Caso 1 Sia $F = 0$, allora $K[v]$ è isomorfo a $K[X]$, quindi $K(v) = L$ è isomorfo a $K(X)$ e in questo caso L non è un anello-finito o un modulo-finito sopra K.

Caso 2 Sia $F \neq 0$ e si può assumere F monico. Allora dato che (F) è primo e $K[X]$ UFD si ha F irriducibile e (F) massimale; dunque $K[v]$ è un campo e allora $K[v] = K(v)$. Inoltre $F(v) = 0$, quindi v è algebrico sopra K e $L = K[v]$ è modulo-finito sopra K: ciò si può dimostrare in modo analogo a quanto fatto per la proposizione 1.27.

Capitolo 2

Varietà affini

D'ora in poi si supporrà di avere k un campo algebricamente chiuso; gli insiemi algebrici affini saranno definiti in $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_k$ per qualche n. Un insieme algebrico affine irriducibile sarà chiamato *varietà affine*.

Si considereranno inoltre anelli e campi contenenti k come sottoanello, e dato un omomorfismo $\varphi\colon R \to S$ tra anelli si intende un omomorfismo d'anelli tale che $\varphi(\lambda) = \lambda$ per ogni $\lambda \in k$.

Per il momento, dato che si tratteranno solo varietà affini si chiameranno semplicemente varietà.

2.1 Anello delle coordinate

Sia $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà non vuota, allora $I(V)$ è un ideale primo in $k[X_1, \ldots, X_n]$ per la proposizione 1.19, quindi $k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ è un dominio di integrità.

Definizione 2.1. Si pone

$$\Gamma(V) := \frac{k[X_1, \ldots, X_n]}{I(V)},$$

esso è detto *anello delle coordinate affini* di V.

Inoltre per ogni insieme non vuoto V, sia $\mathfrak{F}(V, k)$ l'insieme delle funzioni da V in k. Allora $\mathfrak{F}(V, k)$ è un anello con le operazioni definite in modo puntuale, ovvero: dati $f, g \in \mathfrak{F}(V, k)$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\forall x \in V$.

Identificheremo k con il sottoanello di $\mathfrak{F}(V, k)$ composto dalle funzioni costanti, ovvero dato $v \in k$ ad esso si associa la funzione che manda ogni $x \in k$ nell'elemento v.

Definizione 2.2. Sia $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà, una funzione $f \in \mathfrak{F}(V,k)$ è detta una *funzione polinomiale* se esiste un polinomio $F \in k[X_1,\dots,X_n]$ tale che $f(a_1,\dots,a_n) = F(a_1,\dots,a_n)\ \forall (a_1,\dots,a_n) \in V$.

Le funzioni polinomiali formano un sottoanello di $\mathfrak{F}(V,k)$ contente k: ciò deriva da come sono state definite le operazioni su $\mathfrak{F}(V,k)$, e chiaramente tale sottoanello contiene k dato che ogni costante è un polinomio.

Si osserva che due polinomi $F, G \in k[X_1,\dots,X_n]$ determinano la stessa funzione se e solo se $(F-G)(a_1,\dots,a_n) = 0\ \forall (a_1,\dots,a_n) \in V$, ovvero se e solo se $F - G \in I(V)$.

Si può quindi identificare $\Gamma(V)$ con il sottoanello di $\mathfrak{F}(V,k)$ contenente tutte le funzioni polinomiali su V.

Allora ogni elemento di $\Gamma(V)$ si può vedere in due modi: come una classe di equivalenza di polinomi in $k[X_1,\dots,X_n]$ modulo $I(V)$; oppure come una funzione polinomiale su V, ovvero che sugli elementi di V assume la forma di un polinomio.

Si può osservare che se $V = \mathbb{A}^n_k$ allora $f \in \mathfrak{F}(V,k)$ è una funzione polinomiale se e solo se è un polinomio.

2.2 Mappe polinomiali

Definizione 2.3. Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$ varietà. Una mappa $\varphi\colon V \to W$ è detta *mappa polinomiale* se esistono polinomi $T_1,\dots,T_m \in k[X_1,\dots,X_n]$ tali che $\varphi(a_1,\dots,a_n) = (T_1(a_1,\dots,a_n),\dots,T_m(a_1,\dots,a_n))\ \forall (a_1,\dots,a_n) \in V$

Ogni mappa $\varphi\colon V \to W$ induce un omomorfismo $\tilde{\varphi}\colon \mathfrak{F}(W,k) \to \mathfrak{F}(V,k)$ ponendo $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$. Se φ è una mappa polinomiale allora $\tilde{\varphi}(\Gamma(W)) \subseteq \Gamma(V)$, quindi $\tilde{\varphi}$ si può restringere ad un omomorfismo da $\Gamma(W)$ a $\Gamma(V)$.

Se $f \in \Gamma(W)$ è la classe resto di un polinomio F modulo $I(W)$, allora $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$ è la classe resto modulo $I(V)$ del polinomio $F(T_1,\dots,T_m)$.

Se $V = \mathbb{A}^n, W = \mathbb{A}^m$ e $T_1,\dots,T_m \in k[X_1,\dots,X_n]$ determinano una mappa polinomiale $T\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, allora i T_i sono determinati in modo univoco da T, e si scrive quindi $T = (T_1,\dots,T_m)$.

Proposizione 2.4. *Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ varietà affini. Esiste una corrispondenza naturale tra le mappe polinomiali $\varphi\colon V \to W$ e gli omomorfismi $\tilde{\varphi}\colon \Gamma(W) \to \Gamma(V)$. Ogni tale φ è la restrizione di una mappa polinomiale da $\mathbb{A}^n$ ad $\mathbb{A}^m$.*

Dimostrazione. Si è già osservato in precedenza come data una mappa polinomiale φ si possa associare tramite la composizione l'omomorfismo relativo.

Viceversa sia $\alpha\colon \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ un omomorfismo, con

$$\Gamma(W) = \frac{k[Y_1, \dots, Y_m]}{I(W)}, \Gamma(V) = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I(V)}$$

.

Si può supporre che Y_i siano ridotti in $\Gamma(W)$ modulo $I(W)$, dunque si pone: $[T_i(X_1, \dots, X_n)] = [T_i] := \alpha(Y_i), i = 1, \dots, m$ sono polinomi nelle variabili $X_1, \dots, X_n$.

Allora $T = (T_1, \dots, T_m)\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ è una mappa polinomiale che induce l'omomorfismo $\tilde{T}\colon \Gamma(\mathbb{A}^m) = k[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$. Si osserva che, dato $f \in \Gamma(W)$, si ha $\tilde{T}(f) = f \circ T = f(T_1, \dots, T_m) = f(\alpha(Y_1), \dots, \alpha(Y_m)) = \alpha(f) \in \Gamma(V)$, quindi $\tilde{T}(I(W)) \subseteq I(V)$ e $T(V) \subseteq W$. Allora T si può restringere a una mappa polinomiale $\varphi\colon V \to W$, che a sua volta induce l'omomorfismo corrispondente $\tilde{\varphi}$, esso si è verificato essere uguale all'omomorfismo α come voluto. □

Definizione 2.5. Una mappa polinomiale $\varphi\colon V \to W$ è un *isomorfismo* se esiste una mappa polinomiale da $\psi\colon W \to V$ tale che $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

Osservazione 2.6. *Un'importante conseguenza della proposizione precedente è che due varietà affini sono isomorfe se e solo se i loro anelli delle coordinate sono isomorfi su k.*

Osservazione 2.7. *Sia $\varphi\colon V \to W$ una mappa polinomiale tra varietà, con $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$, determinata dai polinomi $T_1, \dots, T_m \in k[X_1, \dots, X_n]$. Allora per ogni $Q \in \varphi(V)$ si ha che φ si restringe a una mappa $\bar{\varphi}\colon \varphi^{-1}(Q) \to Q$ indotta dai polinomi $T_1, \dots, T_m$.*

Infatti $Q = (q_i, \dots, q_m) \in W$ è una varietà, allora

$$\varphi^{-1}(Q) = V(T_1(X_1, \dots, X_n) - q_1, \dots, T_m(X_1, \dots, X_n) - q_m)$$

è un insieme algebrico di $\mathbb{A}^n$.

A meno di considerare le componenti irriducibili di $\varphi^{-1}(Q)$ tale restrizione induce, dalla proposizione appena vista, un omomorfismo $\psi_Q\colon \Gamma(Q) \to \Gamma(\varphi^{-1}(Q))$, definita da $f \mapsto f \circ \bar{\varphi}$, con $f \circ \bar{\varphi} = f \circ \varphi$ perché altrimenti, dalla corrispondenza tra mappe polinomiali e omomorfismi tra i relativi anelli delle coordinate, si avrebbe che $\bar{\varphi}$ non è restrizione di φ.

2.3 Cambio di coordinate

Se $T = (T_1, \dots, T_m)$ è una mappa polinomiale da $\mathbb{A}^n$ ad $\mathbb{A}^m$, e F è un polinomio in $k[X_1, \dots, X_n]$, si pone $F^T = \tilde{T}(F) = F(T_1, \dots, T_m)$.

Per un ideale I in $k[Y_1, \dots, Y_m]$ e un insieme algebrico V in $\mathbb{A}^m$:
• I^T denoterà l'ideale in $k[X_1, \dots, X_n]$ generato da $\{F^T \mid F \in I\}$;
• V^T denoterà l'insieme algebrico $T^{-1}(V) = V(I^T)$, dove $I = I(V)$.

Se V è l'ipersuperficie relativa ad F, allora V^T è l'ipersuperficie associata a F^T, se F^T è non costante.

Definizione 2.8. Un *cambio di coordinate affini* in $\mathbb{A}^n$ è una mappa polinomiale $T = (T_1, \dots, T_m) \colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ tale che ogni T_i è un polinomio di grado 1 e T è biettiva.

Se $T_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}X_j + a_{i0}$, allora $T = T'' \circ T'$, dove T' è mappa bilineare, cioè $T'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}X_j$, e T'' è una traslazione, ovvero $T''_i = X_i + a_{i0}$. Dato che ogni traslazione ha un'inversa, che è anch'essa una traslazione, segue che T è biettiva se e solo se T' è invertibile.

Se T e U sono due cambi di coordinate affini su $\mathbb{A}^n$, allora lo sono anche $T \circ U$ e T^{-1}.

Si osserva inoltre che T è isomorfismo della varietà $\mathbb{A}^n$ su se stessa.

2.4 Funzioni razionali e anelli locali

Definizione 2.9. Sia V una varietà non vuota di $\mathbb{A}^n$, $\Gamma(V)$ il suo anello delle coordinate affini. Dato che $\Gamma(V)$ è un dominio, possiamo definire il suo campo quoziente. Tale campo è chiamato *campo delle funzioni razionali su* V e si denota con $k(V)$. Un elemento di $k(V)$ è una *funzione razionale* su V.

Se f è una funzione razionale su V, e sia dato $P \in V$, diciamo che f è *definita* in P se esistono $a, b \in \Gamma(V)$ tali che $f = a/b$ con $b(P) \neq 0$.

Osserviamo che ci possono essere diversi modi di scrivere f come rapporto di funzioni polinomiali. Allora f è definita in P se è possibile trovare un "denominatore" per f che non si annulli in P.

Se $\Gamma(V)$ è UFD si può scrivere f in modo essenzialmente unico come $f = \frac{a}{b}$ dove a e b non hanno fattori comuni, allora f è definita in P se e solo se $b(P) \neq 0$.

Esempio 2.10. Sia $V = V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}^4_k$. Allora

$$\Gamma(V) = k[X, Y, Z, W]/(XW - YZ).$$

Siano $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}$ i residui di $X, Y, Z, W \in \Gamma(V)$; allora $\bar{x}/\bar{y} = \bar{z}/\bar{w} = f \in k(V)$ è definita in $P = (x_0, y_0, z_0, w_0) \in V$ se $y_0 \neq 0$ oppure $w_0 \neq 0$. In particolare si osserva che $\Gamma(V)$ non è UFD e dunque esiste più di una possibile rappresentazione per f.

Definizione 2.11. Sia $P \in V$, definiamo $\mathcal{O}_P(V)$ come l'insieme delle funzioni razionali su V che sono definite in P. Si può verificare che $\mathcal{O}_P(V)$ forma un sottoanello di $k(V)$ contenente $\Gamma(V)$, in particolare valgono le seguenti inclusioni:

$$k \subseteq \Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_P(V) \subseteq k(V).$$

L'anello $\mathcal{O}_P(V)$ è chiamato *anello locale di V in P*.

Proposizione 2.12. *(1) L'insieme dei poli di una funzione razionale è un sottoinsieme algebrico di V.*

(2) $\Gamma(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V)$.

Dimostrazione. **(1)**: Si supponga $V \subseteq \mathbb{A}^n$, e per $G \in k[X_1, \dots, X_n]$ si denoti con $\bar{G}$ la classe resto di G in $\Gamma(V)$.

Sia $f \in k(V)$ una funzione razionale su V, si definisce:

$$J_f = \{G \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \bar{G}f \in \Gamma(V)\}.$$

Allora $V(J_f)$ è l'insieme dei punti dove f non è definita. Si osserva innanzitutto che dato $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ e $P \in V$ allora $F(P) = 0$ se e solo se $\bar{F}(P) = 0$, infatti per $P \in V$ si ha $F = \bar{F} + H, H \in I(V)$ e $H(P) = 0$ per definizione. Sia P polo per f, allora per ogni rappresentazione $f = a_\lambda / b_\lambda, a_\lambda, b_\lambda \in k[X_1, \dots, X_n], \lambda \in \Lambda$ si ha $b_\lambda(P) = 0$. Sia $G \in J_f$ allora $\exists \lambda \in \Lambda$ tale che $\bar{G}\frac{a_\lambda}{b_\lambda} \in \Gamma(V) \Rightarrow b_\lambda \mid \bar{G} \Rightarrow \bar{G}(P) = 0 \Rightarrow P \in V(J_f)$.

Sia $P \in V(J_f)$; allora $b_\lambda \in J_f \ \forall \lambda \in \Lambda$, infatti basta scrivere $f = \frac{a_\lambda}{b_\lambda}$ dove si suppone b_λ già ridotto modulo $I(V)$, allora $b_\lambda(P) = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda$, ovvero P è polo per f.

(2): L'inclusione ($\subseteq$) è ovvia dato che $\Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_P(V) \ \forall P \in V$. Sia invece $f \in \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V)$, allora l'insieme dei poli di f è vuoto, ovvero $V(J_f) = \emptyset$, quindi dal teorema degli zeri di Hilbert (teorema 1.12) si ha che $1 \in J_f$. Quindi per come è definito J_f si ha $f = 1 \cdot f \in \Gamma(V)$ come si voleva. □

Supponiamo $f \in \mathcal{O}_P(V)$, possiamo definire il valore di f in P come segue: scriviamo $f = a/b$, con $a, b \in \Gamma(V), b(P) \neq 0$ e poniamo $f(P) = a(P)/b(P)$. Il valore di $f(P)$ è indipendente dalla scelta di a e b.

Definizione 2.13. L'ideale $\mathfrak{m}_P(V) = \{f \in \mathcal{O}_P(V) \mid f(P) = 0\}$ è chiamato l'*ideale massimale di V in P*. Esso è il nucleo dell'omomorfismo di valutazione $\mathcal{O}_P(V) \to k$ che manda $f \mapsto f(P)$.

Quindi $\dfrac{\mathcal{O}_P(V)}{\mathfrak{m}_P(V)}$ è isomorfo a k.

Si osserva che un elemento $f \in \mathcal{O}_P(V)$ è un'unità in $\mathcal{O}_P(V)$ se e solo se $f(P) \neq 0$, quindi: $\mathfrak{m}_P(V) = \{\text{non unità di } \mathcal{O}_P(V)\}$.

Lemma 2.14. *Le seguenti condizioni su un anello R sono equivalenti:*

(1) L'insieme delle non unità in R forma un ideale;

(2) R ha un unico ideale massimale che contiene ogni ideale proprio di R.

Dimostrazione. Si ponga $\mathfrak{m} = \{\text{non unità di } R\}$. Sia I ideale proprio di R, se I non fosse contenuto in $\mathfrak{m}$ allora esisterebbe $a \in I$ invertibile, ma allora $1 \in I$ e quindi $I = R$ contro l'ipotesi su I.

Ora, se $\mathfrak{m}$ è ideale per R allora esso è l'unico ideale massimale di R dato che contiene ogni ideale proprio di R.

Viceversa, sia $\mathcal{M}$ l'ideale massimale di R, allora chiaramente $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{m}$ perché altrimenti si avrebbe $\mathcal{M} = R$. D'altra parte sia $x \in \mathfrak{m}$ e si consideri $(x) \trianglelefteq R$ l'ideale generato da x, esso è ideale proprio perché altrimenti si avrebbe x invertibile contro l'ipotesi. Allora $(x) \subseteq \mathcal{M}$, e quindi $x \in \mathcal{M}$. □

Definizione 2.15. Un anello che soddisfa le condizioni del lemma è chiamato *anello locale*, le unità sono quegli elementi che non appartengono all'ideale massimale.

Abbiamo visto che $\mathcal{O}_P(V)$ è un anello locale e $\mathfrak{m}_P(V)$ è il suo ideale massimale.

Tutte le proprietà di V che dipendono solo da un intorno di P si riflettono su $\mathcal{O}_P(V)$.

Proposizione 2.16. *$\mathcal{O}_P(V)$ è un dominio locale Noetheriano, cioè ogni ideale proprio di $\mathcal{O}_P(V)$ è finitamente generato.*

Dimostrazione. Chiaramente $\mathcal{O}_P(V)$ è un dominio locale per quanto detto sopra, bisogna mostrare che ogni ideale è finitamente generato. Si vede che $k[X_1, \dots, X_n]$ Noetheriano implica $\Gamma(V)$ Noetheriano, siano quindi $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(V)$ dei generatori per l'ideale $I \cap \Gamma(V)$ in $\Gamma(V)$, si vuole mostrare che questi sono dei generatori anche per I in $\mathcal{O}_P(V)$.

Sia $f \in I$, allora esiste $b \in \Gamma(V)$ tale che $b(P) \neq 0$ e $bf \in \Gamma(V)$, allora $bf \in I \cap \Gamma(V)$. Quindi $bf = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i$, $a_i \in \Gamma(V)$, ma allora $f = \sum_{i=1}^{r} (a_i/b) f_i$ come si voleva. □

2.5 Anelli di valutazione discreta

Proposizione 2.17. *Sia R un dominio che non è un campo. Se R è Noetheriano e locale, e l'ideale massimale è principale, allora esiste un elemento* *irriducibile $t \in R$ tale che ogni elemento non nullo $z \in R$ può essere scritto in modo unico nella forma $z = t^n u$ con u unità in R e $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di R, esso è composto dalle non-unità di R dato che R è locale; si consideri t generatore di $\mathfrak{m}$.

Dimostriamo innanzitutto l'unicità della scrittura: si supponga di avere $ut^n = vt^m$ con u, v unità di R e $n \geq m$ interi non negativi. Allora $ut^{n-m} = v$ è un'unità, quindi $n = m$ e $v = u$; infatti se fosse $n \neq m$ allora $v \in \mathfrak{m}$ che non è possibile dato che $\mathfrak{m}$ contiene solo le non-unità di R.

Passiamo ora all'esistenza, si può supporre di avere z non-unità altrimenti si è già concluso. Allora, siccome $\mathfrak{m}$ è principale si ha $z = z_1 t$ per qualche $z_1 \in R$. Se z_1 è un'unità si è concluso, altrimenti si può scrivere $z_1 = z_2 t$ come fatto precedentemente.

Continuando in questo modo, se per assurdo si trova una sequenza infinita $z_1, z_2, \ldots$ di non-unità di R con $z_i = z_{i+1} t$, allora essendo R Noetheriano si ha che la catena di ideali $(z_1) \subset (z_2) \subset \ldots$ deve avere un massimale. Quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(z_{n+1}) = (z_n)$, allora $z_{n+1} = v z_n$ con $v \in R$. Segue che $z_n = vtz_n \Rightarrow vt = 1$, ma questo è assurdo perchè t non è un'unità di R. Allora si deve avere che $z_j \in R$ è un'unità per qualche $j \in \mathbb{N}$, e quindi $z = z_j t^{j-1}$ come si voleva. □

Definizione 2.18. Un anello R che soddisfa le condizioni sopra è detto un *anello di valutazione discreto* (DVR). Un elemento $t \in R$ come nel punto (2) della proposizione sopra è detto *parametro uniformizzante* per R; ogni altro parametro uniformizzante è della forma ut, con u unità in R.

Sia K il campo quoziente di R, allora quando t è fissato ogni elemento non nullo $z \in K$ ha un'unica espressione $z = t^n u$, con u unità di R, $n \in \mathbb{Z}$. L'esponente n di u è detto l'*ordine* di z, scritto $n = \mathrm{ord}(z)$. Si pone $\mathrm{ord}(0) = \infty$.

Si osserva che $R = \{z \in K \mid \mathrm{ord}(z) \geq 0\}$ e $\mathfrak{m} = \{z \in K \mid \mathrm{ord}(z) > 0\}$ ideale massimale in R.

Definizione 2.19. Una *valutazione discreta* su un campo K è una funzione $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \infty$ che soddisfa:

1. $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$,
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$,
3. $v(ab) = v(a) + v(b)$.

Allora si può dimostrare che l'insieme $R = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ è un anello di valutazione discreta con ideale massimale $\mathfrak{m} = \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ e campo quoziente K. Viceversa, dato R anello di valutazione discreta con campo quoziente K, allora la funzione ordine $\mathrm{ord}\colon K \to \mathbb{Z} \cup \infty$ è una valutazione discreta su K.

2.6 Spazio multiproiettivo

Definizione 2.20. Si consideri lo spazio $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$, un polinomio $F \in k[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r, \bar{Y}]$, dove ciascuna delle multivariabili $\bar{X}_i$ è riferita allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{n_i}$ e la multivariabile $\bar{Y}$ è riferita allo spazio affine $\mathbb{A}^m$, è *biomogeneo* se è omogeneo rispetto a ciascuna delle multivariabili $\bar{X}_i$ per $i = 1, \ldots, n$, mentre non c'è nessuna restrizione rispetto alla multivariabile Y.

Dato un polinomio biomogeneo F, si dirà che esso ha grado $(i_1, \ldots, i_r)$ se F ha grado i_j quando viene considerato come un polinomio omogeneo nella multivariabile $\bar{X}_j$, ovvero è omogeneo di grado i_j rispetto alle variabili $X_{j0}, \ldots, X_{jn_j}$.

Definizione 2.21. Sia S un insieme di polinomi biomogenei in $k[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r, \bar{Y}]$, si pone

$$V(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_r, y) \in \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m \mid F(x_1, \ldots, x_r, y) = 0 \, \forall F \in S\}.$$

Allora un sottoinsieme V di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$ è un *insieme algebrico* se $V = V(S)$ per qualche $S \subseteq k[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r, \bar{Y}]$.

Definizione 2.22. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$ si definisce:

$$I(V) = \{F \in k[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r, \bar{Y}] \text{biomogeneo} \mid F(z) = 0 \, \forall z = (x_1, \ldots, x_r, y) \in V\}$$

Sia ora $I \subseteq k[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r, \bar{Y}]$ un ideale, esso è *biomogeneo* se per ogni $F \in k[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r, \bar{Y}], F = \sum F_{i_1,\ldots,i_r} \in I$, con $F_{i_1,\ldots,i_r}$ biomogenei di grado $(i_1, \ldots, i_r)$, si ha $F_{i_1,\ldots,i_r} \in I$.

Definizione 2.23. Dato $V \subseteq \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$ un insieme algebrico irriducibile, di definisce l'*anello delle coordinate biomogenee*

$$\Gamma(V) = k[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r, \bar{Y}]/I(V),$$

e $k(V)$ il suo campo quoziente.

Capitolo 3

Varietà, morfismi e mappe razionali

3.1 Topologia di Zariski e Varietà

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$, la *topologia di Zariski* su X è definita nel modo seguente: un insieme $U \subseteq X$ è aperto se $X \setminus U$ è un sottoinsieme algebrico di X. Il fatto che questa definizione soddisfi le proprietà di una topologia segue dalle proprietà degli insiemi algebrici (vedere proposizione 1.4), come già osservato nel primo capitolo.

Ogni sottoinsieme V di X è dotato della topologia indotta. In particolare, se V è una varietà di X, un sottoinsieme di V è chiuso se e solo se è algebrico.

Se $X = \mathbb{A}^1$ o $\mathbb{P}^1$, i sottoinsiemi chiusi propri di X sono solo i sottoinsiemi finiti. Se $X = \mathbb{A}^2$ o $\mathbb{P}^2$, i sottoinsiemi chiusi propri sono costituiti da unioni finite di punti e curve.

Si osserva che dati due insiemi aperti non vuoti U_1, U_2 in una varietà V, si ha $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, altrimenti si avrebbe $V = (V \setminus U_1) \cup (V \setminus U_2)$ sarebbe riducibile. Quindi se P e Q sono punti distinti di V, non ci sono intorni aperti disgiunti che li contengono, quindi V non è spazio di Hausdorff. Inoltre ogni sottoinsieme aperto non vuoto di una varietà V è denso in V.

Definizione 3.1. Sia V un insieme algebrico irriducibile non vuoto in $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$. Ogni sottoinsieme aperto X di V è detto *varietà*. Su di esso è data la topologia indotta da V, ed è chiamata la topologia di Zariski su X.

Definizione 3.2. Si definisce $k(X) = k(V)$ come il campo delle funzioni razionali su X, se $P \in X$ definiamo $\mathcal{O}_P(X)$ come $\mathcal{O}_P(V)$, l'*anello locale* di X in P.

Sia Y è un insieme chiuso di X, si dice che Y è *irriducibile* se Y non è l'unione di due sottoinsiemi chiusi propri, allora Y è anch'esso una varietà.

Basta mostrare che Y è un sottoinsieme aperto di un insieme algebrico irriducibile non vuoto in $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$. Consideriamo quindi $\bar{Y}$, la chiusura di Y in V, si verifica che $\bar{Y}$ è irriducibile in V e che $Y = \bar{Y} \cap X$, quindi Y è aperto in $\bar{Y}$.

Definizione 3.3. Sia X una varietà in $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$.

Dato Y un sottoinsieme chiuso irriducibile di X, allora tale Y è chiamato *sottovarietà chiusa* di X.

Se U è un sottoinsieme aperto di X, allora U è aperto in V, quindi anche U è una varietà, e si dirà che U è una *sottovarietà aperta* di X.

Sia X una varietà, U un sottoinsieme aperto non vuoto di X. Definiamo $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, o semplicemente $\Gamma(U)$, come l'insieme delle funzioni razionali su X che sono definite per ogni $P \in U$, ovvero $\Gamma(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_P(X)$.

L'anello $\Gamma(U)$ è un sottoanello di $k(X)$, e se $U' \subseteq U$ allora $\Gamma(U') \supseteq \Gamma(U)$. Osserviamo che se $U = X$ è una varietà affine, allora $\Gamma(X)$ è l'anello delle coordinate di X, quindi questa notazione è consistente.

Se $z \in \Gamma(U), z$ determina una funzione da U in k detta *k-valutazione* su U: per $P \in U$ e $z \in \mathcal{O}_P(X)$ allora il valore $z(P)$ è ben definito. Sia $\mathfrak{F}(U, k)$ l'anello di tutte le k-valutazioni su U, la mappa che associa una funzione per ogni $z \in \Gamma(U)$ è un omomorfismo di anelli da $\Gamma(U)$ in $\mathfrak{F}(U, k)$. Come fatto in precedenza si vuole identificare $\Gamma(U)$ con la sua immagine in $\mathfrak{F}(U, k)$, in tal modo si potrà considerare $\Gamma(U)$ come il sottoanello delle funzioni su U. Per fare ciò è necessario che la mappa da $\Gamma(U)$ a $\mathfrak{F}(U, k)$ sia iniettiva.

Proposizione 3.4. *Sia V una varietà affine definita come nel secondo capitolo, $f \in \Gamma(V)$. Allora:*

(1) $V(f) = \{P \in V \mid f(P) = 0\}$ è un sottoinsieme chiuso di V, e $V(f) \neq V$ a meno che $f = 0$ in $\Gamma(V)$.

(2) Sia U un sottoinsieme denso di V e $f(P) = 0 \ \forall P \in U$, allora $f = 0$ in $\Gamma(V)$.

(3) Sia U un sottoinsieme aperto di $V, z \in k(V)$. Supponendo che $z \in \mathcal{O}_P(V) \ \forall P \in U$, si ha che $U(z) = \{P \in U \mid Z(P) \neq 0\}$ è aperto in U.

Dimostrazione. **(1)** Se $f(Q) = 0 \ \forall Q \in V \Rightarrow f \in I(V) \Rightarrow f = 0$ in $\Gamma(V)$. Quindi si ha che $V(f) \subsetneq V$. Sia ora $V_f = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\}$ insieme algebrico in $\mathbb{A}^n$ e quindi chiuso per la topologia di Zariski, allora $V(f) = V \cup V_f \Rightarrow V(f)$ è un sottoinsieme chiuso di V.

(2) Se per assurdo si ha $f \neq 0$ in $\Gamma(V)$ allora dal punto precedente segue che $V(f)$ è un sottoinsieme chiuso ed è contenuto propriamente in V, quindi $V \setminus V(f) \neq \emptyset$ è aperto in V. Siccome U è denso allora $(V \setminus V(f)) \cap U \neq \emptyset$, e quindi esiste $P \in V \setminus V(f)$ tale che $f(P) = 0$ ma questa è una contraddizione.

(3) Dal fatto che $z \in \mathcal{O}_P(V)$ $\forall P \in U$ si ha che il valore $z(P)$ è ben definito per $P \in U$, allora si consideri l'insieme $V_z = \{P \in \mathbb{A}^n \mid z(P) = 0\}$ è chiuso in V, quindi $V_z^{\complement}$ è aperto in V, segue che $U(z) = (V_z^{\complement}) \cup U$ è aperto in U. $\square$

Proposizione 3.5. *Sia U un sottoinsieme aperto della varietà X. Supponiamo $z \in \Gamma(U)$ e $z(P) = 0$ $\forall P \in U$, allora $z = 0$ in $\Gamma(U)$.*

Dimostrazione. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$, si può sostituire X con la sua chiusura e dunque assumere che X sia chiuso. Allora esiste un insieme di indici $\{i_1, \ldots, i_r\}$ tale che $X \cap (U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_r} \times \mathbb{A}^m) \neq \emptyset$ dove U_{i_j} è aperto fondamentale per $\mathbb{P}^{n_j}$, altrimenti si avrebbe $X = \emptyset$.

Dato che i rispettivi anelli delle coordinate sono isomorfi si considerino ora al posto di X e U rispettivamente la corrispondente varietà affine $\varphi^{-1}(X)$ e l'insieme aperto $\varphi^{-1}(U)$, dove $\varphi\colon \mathbb{A}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_r} \times \mathbb{A}^m \to U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_r} \times \mathbb{A}^m$.

Quindi si ha ora che U è un sottoinsieme aperto in una varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}^N$. Allora U è denso in X e $z(P) = 0$ per ogni $P \in U$, dunque si conclude per il secondo punto della proposizione precedente. $\square$

3.2 Morfismi di varietà

Sia $\varphi\colon X \to Y$ una qualunque mappa tra insiemi, la composizione con φ dà un omomorfismo di anelli $\tilde{\varphi}\colon \mathfrak{F}(Y,k) \to \mathfrak{F}(X,k), \tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$.

Definizione 3.6. Siano X e Y varietà. Un *morfismo* da X a Y è una mappa $\varphi\colon X \to Y$ tale che:

(1) φ è continua;

(2) per ogni sottoinsieme aperto U di Y, se $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ allora $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$ sta in $\Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$

Un *isomorfismo* $\varphi\colon X \to Y$ tra due varietà è un morfismo che ammette un morfismo inverso $\psi\colon Y \to X$ tale che $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X, \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Quindi un isomorfismo è necessariamente biettivo con φ e ψ continue.

Si osserva che dati due morfismi f, g, allora la loro composizione $f \circ g$ è ancora un morfismo.

Definizione 3.7. Una varietà che sia isomorfa ad una sottovarietà chiusa di $\mathbb{A}^n$ (o rispettivamente $\mathbb{P}^n$) è chiamata una *varietà affine* (rispettivamente *varietà proiettiva*).

Quando si scriverà "$X \subseteq \mathbb{A}^n$ è una varietà affine" si intenderà che X è una sottovarietà chiusa di $\mathbb{A}^n$; mentre se di dirà solo che "X è una varietà affine" si intende che X è una varietà nel senso generale definita come nel paragrafo sopra, e in tal caso esiste un isomorfismo tra X e una sottovarietà chiusa di $\mathbb{A}^n$. Si procederà analogamente nel caso di varietà proiettive.

Osservazione 3.8. *Sia X una varietà affine, ovvero esiste una sottovarietà chiusa $X' \subseteq \mathbb{A}^n$ e un isomorfismo $\varphi\colon X \to X'$. Allora esso induce un isomorfismo tra $\Gamma(X)$ e $\Gamma(X')$.*

Infatti sia $\tilde{\varphi}\colon \Gamma(X') \to \Gamma(X)$ definito da $f \mapsto f \circ \varphi$, è ben definito infatti per $f \in \Gamma(X')$ allora dalla definizione di morfismo segue che: $f \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}(X')) = \Gamma(X)$; inoltre $\tilde{\varphi}$ è omomorfismo per come sono state definite le operazioni sull'annello delle coordinate. Viceversa sia ora $\varphi^{-1}\colon X' \to X$ il morfismo inverso di φ, analogamente a prima esso induce un omomorfismo $\widetilde{\varphi^{-1}}\colon \Gamma(X) \to \Gamma(X')$. Chiaramente si ha che $\widetilde{\varphi^{-1}} = (\tilde{\varphi})^{-1}$.

Proposizione 3.9. *Siano X e Y varietà affini. C'è una naturale corrispondenza biunivoca tra morfismi $\varphi\colon X \to Y$ e gli omomorfismi $\tilde{\varphi}\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$, un morfismo tra X e Y è una mappa polinomiale tra X e Y.*

Dimostrazione. Si supponga innanzitutto di avere $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ varietà affini, allora si osserva che:

(i) una mappa polinomiale $\varphi\colon X \to Y$ è un morfismo, infatti è banalmente continua.

Per verificare la seconda condizione dei morfismi, si ricorda che φ induce un omomorfismo $\psi_Q\colon \Gamma(Q) \to \Gamma(\varphi^{-1}(Q))$ (vedere osservazione 2.7). Sia ora U un aperto di Y, e sia $f \in \Gamma(U, Y) = \bigcap_{Q\in U} \mathcal{O}_Q(Y)$, quindi $f \in \mathcal{O}_Q(Y) = \Gamma(Q)$ $\forall Q \in U$, allora dall'omomorfismo ψ_Q si ha $f \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}(Q)) = \bigcap_{P\in\varphi^{-1}(Q)} \mathcal{O}_P(X)$ per ogni $Q \in U$, segue che

$$f \circ \varphi \in \bigcap_{Q\in U} \bigcap_{P\in\varphi^{-1}(Q)} \mathcal{O}_P(X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), X)$$

come si voleva.

(ii) tale morfismo $\varphi\colon X \to Y$ induce un unico omomorfismo $\tilde{\varphi}\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$: si definisce $\tilde{\varphi}$ analogamente a quanto fatto in precedenza ponendo $f \mapsto f \circ \varphi$, allora Y è aperto in Y quindi dalla definizione di morfismo si ha che per $f \in \Gamma(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}(Y)) = \Gamma(X)$.

(iii) l'omomorfismo $\tilde{\varphi}\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ è indotto da un'unica mappa polinomiale $\psi\colon X \to Y$, ciò è dovuto alla corrispondenza descritta nella proposizione 2.4. Dall'unicità di $\tilde{\varphi}$ segue che $\psi = \varphi$, ovvero ψ è morfismo tra X e Y.

Supponiamo ora X e Y varietà affini generiche, si è già visto che dalla definizione di morfismo segue che per ogni $\varphi\colon X \to Y$ morfismo di varietà allora $\tilde{\varphi}\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X), f \mapsto f \circ \varphi$ è omomorfismo.

Viceversa, sia $\gamma\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ omomorfismo. Si considerino $\alpha\colon X \to X'$ e $\beta\colon Y \to Y'$ isomorfismi con le sottovarietà affini chiuse $X' \subseteq \mathbb{A}^n, Y' \subseteq \mathbb{A}^m$, e $\bar{\alpha}\colon \Gamma(X') \to \Gamma(X), \bar{\beta}\colon \Gamma(Y') \to \Gamma(Y)$ isomorfismi. Allora sia $\delta\colon \Gamma(Y') \to \Gamma(X')$ tale che il diagramma seguente commuta:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(Y) \arrow[r, "\gamma"] & \Gamma(X) \\ \Gamma(Y') \arrow[u, "\bar{\beta}"] \arrow[r, "\delta"] & \Gamma(X') \arrow[u, "\bar{\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

ovvero $\delta = (\bar{\alpha})^{-1} \circ \gamma \circ \bar{\beta}$, è omomorfismo di anelli. Allora dal caso precedente esso è in corrispondenza con un morfismo $\varphi\colon X' \to Y'$. Allora anche $\psi = \beta^{-1} \circ \varphi \circ \alpha$ è un morfismo dato che è composizione di morfismi, quindi si ha che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\varphi"] & Y' \\ X \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\psi"] & Y \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Tale ψ è il morfismo cercato, infatti si verifica che $\tilde{\psi} = \gamma$: sia $f \in \Gamma(Y), \tilde{\psi}(f) = f \circ \psi = f \circ \beta^{-1} \circ \varphi \circ \alpha = \bar{\alpha}(f \circ \beta^{-1} \circ \varphi) = \bar{\alpha}(\delta(f \circ \beta^{-1})) = \bar{\alpha}(\delta(\bar{\beta}^{-1}(f))) = \gamma(f)$. □

Proposizione 3.10. *Sia V una sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^n, \varphi_i\colon \mathbb{A}^n \to U_i \subseteq \mathbb{P}^n$. Allora $V_i = \varphi^{-1}(V)$ è una sottovarietà chiusa di $\mathbb{A}^n$, e $\varphi_i|_{V_i}\colon V_i \to V \cap U_i$ è isomorfismo.*

Una varietà proiettiva è unione di un numero finito di varietà affini aperte.

Dimostrazione. Si ha $\varphi_i\colon \mathbb{A}^n \to U_i, (a_1, \dots, a_n) \mapsto [a_1 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_i : \dots, a_n]$, si ricorda che φ_i è un isomorfismo. Inoltre $V \cap U_i$ è chiuso in U_i, dato che su U_i è data la topologia di Zariski indotta da $\mathbb{P}^n$. Allora $V_i = \varphi_i^{-1}(V) = \varphi_i^{-1}(V \cap U_i)$ è chiuso in $\mathbb{A}^n$ dato che φ_i è continua, e descrive una sottovarietà: i polinomi che la definiscono sono i disomogeneizzati dei polinomi che definiscono V rispetto alla variabile i. Siccome φ_i è isomorfismo allora V_i e $V \cap U_i$ sono isomorfi.

Sia ora W una varietà proiettiva, e sia $\varphi\colon W \to V$ isomorfismo con $V \subseteq \mathbb{P}^n$ sottovarietà chiusa. Allora da quanto appena detto si ha che $V = (V \cap$

$U_1) \cup \cdots \cup (V \cap U_n)$, dall'isomorfismo tra W e V, si trova $W = \varphi^{-1}(V \cap U_1) \cup \cdots \cup \varphi^{-1}(V \cap U_n)$. Ogni $\varphi^{-1}(V \cap U_i)$ è isomorfo a $V \cap U_i$ che si è provato essere varietà affini; inoltre dato che $V \cap U_i$ sono aperti in V, allora $\varphi^{-1}(V \cap U_i)$ sono aperti in W come si voleva. □

Dalla definizione di morfismo tra varietà si può osservare che l'essere un morfismo è una proprietà locale, infatti vale la seguente:

Proposizione 3.11. *Siano X, Y varietà, $f\colon X \to Y$ una mappa. Inoltre sia $X = \bigcup_\alpha U_\alpha, Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$, con U_α, V_α sottovarietà aperte, e si suppone $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ $\forall \alpha$. Allora f è un morfismo se e solo se ogni restrizione $f_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ di f è un morfismo.*

Dimostrazione. Se f è morfismo allora segue banalmente che ogni $f_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ è morfismo per ogni α.

Viceversa, posto $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$, allora:

• f è continua, infatti sia A aperto in Y allora

$$f^{-1}(A) = \bigcup_\alpha (f^{-1}(A) \cap U_\alpha) = \bigcup_\alpha (f_\alpha^{-1}(A \cap U_\alpha)),$$

è aperto dato che ogni $f_\alpha^{-1}(A)$ è aperto.

• si vuole mostrare che per ogni aperto W di Y, se $h \in \Gamma(W)$, allora $h \circ f \in \Gamma(f^{-1}(W))$. Si può scrivere $W = \bigcup_\alpha (W \cap V_\alpha) = \bigcup_\alpha W_\alpha$; sia ora $h \in \Gamma(W)$, segue che

$$h \in \bigcap_{Q \in W} \mathcal{O}_Q(Y) \subseteq \bigcap_{Q \in W_\alpha} \mathcal{O}_Q(Y) = \Gamma(W_\alpha)\ \forall \alpha,$$

allora $h \circ f_\alpha \in \Gamma(f_\alpha^{-1}(W_\alpha))$ $\forall \alpha$.

Si osserva ora che

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(\bigcup_\alpha W_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(W_\alpha) = \bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}(W_\alpha) \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha,$$

e inoltre

$$\Gamma(f^{-1}(W)) = \bigcap_{P \in f^{-1}(W)} \mathcal{O}_P(X) = \bigcap_\alpha \bigcap_{P \in f_\alpha^{-1}(W_\alpha)} \mathcal{O}_P(X).$$

Da qui segue che $h \circ f \in \Gamma(f_\alpha^{-1}(W_\alpha))$ $\forall \alpha$, infatti f è uguale a f_α localmente e si è visto che $f_\alpha \in \Gamma(f_\alpha^{-1}(W_\alpha))$ per ogni α. □

Proposizione 3.12. *Ogni sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ è una varietà proiettiva. Ogni varietà è isomorfa ad una sottovarietà aperta di una varietà proiettiva.*

Dimostrazione. Per induzione su r basta provare che ogni sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è una varietà proiettiva, ovvero che è isomorfa a una sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^N$ per qualche N. Infatti sia una sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ per ipotesi induttiva è isomorfa a una varietà proiettiva di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_{r-1}}$, tale varietà può essere vista come una sottovarietà chiusa in $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_{r-1}}$.

Si considera quindi l'*immersione di Segre* $S\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ con $N = nm + n + m$ e dove un punto di $\mathbb{P}^N$ è definito dalle coordinate $[Z_{00} : Z_{01} : \cdots : Z_{0m} : Z_{10} : \cdots : Z_{nm}]$. S è definita da:

$$S([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m]) = [x_0y_0 : x_0y_1 : \cdots : x_0y_m : x_1y_0 : \cdots : x_ny_m]$$

Si verifica che S mappa $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ in modo iniettivo su una varietà proiettiva $V \subseteq \mathbb{P}^N$. Tale varietà V è definita da

$$V(Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj} \mid i, k = 0, \ldots, n, j, l = 0, \ldots, m),$$

dove Z_{ij} identifica la coordinata ij-esima di $\mathbb{P}^N$.

Si verifica quindi che $S\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to V$ è un isomorfismo di varietà, allora ogni chiuso di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ verrà mandato in un chiuso in V, e dunque sarà una varietà proiettiva in $\mathbb{P}^N$. Allora basta mostrare che la restrizione $U_i \times U_j \to V \cap U_{ij}$ è un isomorfismo per ogni $i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m$, infatti $U_i \times U_j$ sono aperti che ricoprono $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e $V \cap U_{ij}$ ricoprono V. Lo si dimostra per $i = 0 = j$, e gli altri casi sono analoghi; siccome $U_0 \times U_0$ e $V \cap U_{00}$ sono varietà affini allora è equivalente provare che i relativi anelli delle coordinate sono isomorfi.

Si può identificare $\Gamma(U_0 \times U_0)$ con $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ e $\Gamma(V \cap U_{00})$ con $k[Z_{01} : \cdots : Z_{nm}]/(\{Z_{jk} - Z_{j0}Z_{0k} \mid j, k > 0\})$. Si considera quindi l'omomorfismo di anelli dato da: $X_i \mapsto Z_{i0}$, e $Y_j \mapsto Z_{0j}$, questo si verifica essere un isomorfismo. Esso è indotto da S^{-1}, quindi S^{-1} è isomorfismo di varietà e di conseguenza anche S.

Ora si osserva che la seconda affermazione segue dalla prima dato che $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^n$ è isomorfo a una sottovarietà aperta A di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{P}^n$. Allora data X varietà in $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^n$, aperto di un insieme V chiuso di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^n$, V e X vengono rispettivamente mappati da tale isomorfismo in un chiuso V' di A e in X' aperto di V'. Si può sostituisce V' con la sua chiusura, quindi V' è una sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{P}^n$, e dal punto precedente è una varietà proiettiva. Quindi X' è una sottovarietà aperta di una varietà proiettiva. □

Si osserva che una sottovarietà chiusa di una varietà affine è anch'essa una varietà affine. Inoltre una sottovarietà aperta di una varietà affine può essere anch'essa affine.

Proposizione 3.13. *Sia V una varietà affine, e sia $f \in \Gamma(V), f \neq 0$. Sia $V_f = \{P \in V \mid f(P) \neq 0\}$ una sottovarietà aperta di V. Allora:*

(1) $\Gamma(V_f) = \Gamma(V)\left[\frac{1}{f}\right] = \left\{\dfrac{a}{f^r} \in k(V) \mid a \in \Gamma(V), r \in \mathbb{Z}\right\}$*;*

(2) V_f è una varietà affine.

Dimostrazione. Si può assumere $V \subset \mathbb{A}^n$; sia $I = I(V), \Gamma(V) = k[T_1, \ldots, T_n]/I$ e sia $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ il cui residuo $\bar{F}$ modulo I sia f.

(1) Sia $z \in \Gamma(V_f)$, i cui poli sono descritti dall'insieme $V(J)$ con $J = \{G \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid \bar{G}z \in \Gamma(V)\}$. Dato $P \in V(J) \Rightarrow P$ è polo per $z \in \Gamma(V_f) = \bigcap_{P \in V_f} \mathcal{O}_P(V) \Rightarrow P \notin V_f \Rightarrow f(P) = 0 \Rightarrow F(p) = 0$. Dunque $V(J) \subset V(F) \Rightarrow \sqrt{J} = I(V(J)) \supset (F)$ dal teorema di Hilbert, allora $F \in \sqrt{J} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}$ tale che $F^N \in J$. Segue che $f^N z = a \in \Gamma(V) \Rightarrow z = \frac{a}{f^N} \in \Gamma(V)[\frac{1}{f}]$.

Viceversa sia $\frac{a}{f^N} \in k(V)$, con $a \in \Gamma(V), N \in \mathbb{Z}$, allora $\frac{a}{f^N}$ è ben definita $\forall P \in V_f \Rightarrow \frac{a}{f^N} \in \mathcal{O}_P(V) \forall P \in V_f \Rightarrow \frac{a}{f^N} \in \Gamma(V_f)$ come si voleva.

(2) Sia I' l'ideale in $k[t_1, \ldots, t_{n+1}]$ generato da I e da $t_{n+1}F - 1$, e $V' = V(I') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$.

Sia $\alpha\colon k[t_1, \ldots, t_{n+1}] \to \Gamma(V_f)$, definita da $t_i \mapsto \bar{t}_i, i = 1, \ldots, n$, e $t_{n+1} \mapsto \frac{1}{F}$. Allora α è suriettiva dal punto (1) e $\ker \alpha = I'$, infatti $\alpha(t_{n+1}F - 1) = 0$ e $I \subseteq \ker \alpha$ per come è definita la mappa α, infatti essa è uguale alla composizione $k[T_1, \ldots, T_n][t_{n+1}] \twoheadrightarrow \frac{k[T_1,\ldots,T_n]}{I}[t_{n+1}] \to \Gamma(V)[1/F]$. Dunque I' è ideale primo e allora V' è una varietà; inoltre α induce un isomorfismo $\bar{\alpha}\colon k[t_1, \ldots, t_{n+1}]/\ker \alpha = \Gamma(V') \to \Gamma(V_f)$.

Ora la proiezione $(t_1, \ldots, t_{n+1}) \to (t_1, \ldots, t_n)$ induce un morfismo $\varphi\colon V' \to V_f$, si ha che φ è biettiva e $\tilde{\varphi} = (\bar{\alpha})^{-1}$. Se W è chiuso in V', definito dall'annullarsi dei polinomi $G_\beta(t_1, \ldots, t_{n+1})$, allora $\varphi(W)$ è chiuso in V_f, definito dall'annullarsi dei polinomi $F^N G_\beta(t_1, \ldots, t_n, 1/F)$ con $N > \deg(G_\beta)$, da qui segue che φ^{-1} è continua. Inoltre, dalla proposizione 3.9, φ^{-1} è morfismo dato che $\tilde{\varphi}$ è isomorfismo d'anelli. □

Corollario 3.14. *Sia X una varietà, U un intorno di un punto $P \in X$. Allora esiste un intorno V di P, con $V \subset U$ tale che V è una varietà affine.*

Dimostrazione. Si può supporre che X sia aperto in una varietà proiettiva $X' \subseteq \mathbb{P}^n$, e $P \in U$ si può sostituire X con $X' \cap U_i$ e U con $U \cap U_i$ per qualche $i \leq n$. Quindi si può supporre che $X \subseteq \mathbb{A}^n$ sia varietà affine.

Siccome U è aperto si ha $X \setminus U$ è sottoinsieme algebrico di $\mathbb{A}^n$, allora esiste un polinomio $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ tale che $F(Q) = 0\ \forall Q \in X \setminus U$ e $F(P) \neq 0$. Sia ora f il residuo di F in $\Gamma(X)$ modulo $I(X)$, allora $P \in X_f$ che è varietà affine dalla proposizione precedente, e chiaramente $X_f \subseteq U$. □

3.3 Prodotti e grafi

Siano $A = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^n, B = \mathbb{P}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^m$ spazi misti. Allora $A \times B = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n+m}$ è anch'esso uno spazio misto.

Se $U_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^n$ e $U_{j_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^m$ sono le usuali sottovarietà affini aperte che coprono A e B, allora $U_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n+m}$ sono sottovarietà affini aperte che coprono $A \times B$.

Proposizione 3.15. *Sia $V \subseteq A, W \subseteq B$ sottovarietà chiuse. Allora $V \times W$ è una sottovarietà chiusa di $A \times B$.*

Dimostrazione. L'unica difficoltà è mostrare che $V \times W$ è irriducibile in $A \times B$. Si supponga per assurdo di avere $V \times W = Z_1 \cup Z_2$, con Z_i chiusi in $A \times B$, si definisce $U_i = \{y \in W \mid V \times \{y\} \not\subset Z_i\}$. Allora $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, infatti se per assurdo esiste $y \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow V \times \{y\} \not\subset Z_1$ e $V \times \{y\} \not\subset Z_2 \Rightarrow V \times \{y\} \cap Z_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$, quindi si può scrivere $V \times \{y\} = (Z_1 \cap V \times \{y\}) \cup (Z_2 \cap V \times \{y\})$ unione di insiemi non vuoti e allora $V \times \{y\}$ è riducibile, ma ciò non è possibile dato che V è irriducibile. Si mostra quindi che U_i sono aperti, lo si vede per U_1 e vale analogamente per U_2. Infatti siano $F_\alpha(X, Y)$ le multiforme che definiscono Z_1, se $y \in U_1$ allora per qualche α e $x \in V$ si ha $F_\alpha(x, y) \neq 0$; sia $G_\alpha(Y) = F_\alpha(x, Y)$, allora $\{y' \in W \mid G_\alpha(y') \neq 0\}$ è un intorno aperto di y in U_1. Un insieme contenente un intorno di ogni suo punto è aperto, quindi U_i sono aperti.

Essendo aperti nella varietà W devono avere intersezione non vuota, a meno che almeno uno dei due sia vuoto. Allora si può supporre $U_1 = \emptyset$, e quindi $\forall y \in W$ vale $V \times \{y\} \subseteq Z_1 \Rightarrow V \times W \subseteq Z_1$, e quindi $V \times W$ è irriducibile. □

Siano X e Y varietà, con X aperta in $V \subseteq A$, Y aperta in $W \subseteq B$ e V, W, A, B come sopra. Allora $X \times Y$ è aperto in $V \times W$, quindi $X \times Y$ è una varietà.

Si osserva che il prodotto di due varietà affini è una varietà affine, e il prodotto di due varietà proiettive è una varietà proiettiva.

Proposizione 3.16. *(1) Le proiezioni $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$ e $\mathrm{pr}_2 \colon X \times Y \to Y$ sono morfismi di varietà.*

(2) Se $f \colon Z \to X, g \colon Z \to Y$ sono morfismi, allora $(f, g) \colon Z \to X \times Y$ definito da $(f, g)(z) = (f(z), g(z))$ è un morfismo.

(3) Se $f \colon X' \to X, g \colon Y' \to Y$ sono morfismi, allora $f \times g \colon X' \times Y' \to X \times Y$ definito da $(f \times g)(x', y') = (f(x'), g(y'))$ è un morfismo.

(4) La diagonale $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid y = x\}$ è una sottovarietà chiusa di $X \times X$; la mappa $\delta_X \colon X \to \Delta_X$ che associa $x \mapsto (x, x)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. **(1)** X e Y si possono ricoprire con sottovarietà affini aperte, allora dal fatto che essere un morfismo è una proprietà locale (vedere proposizione 3.11) ci si riconduce ad avere $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$. In questo caso i morfismi sono mappe polinomiali (prop. 3.9) e allora risulta evidente che le proiezioni sono mappe polinomiali.

(2) Analogamente a quanto appena fatto si ha che X, Y, Z si possono ricoprire da sottovarietà affini aperte, e ci si riconduce nuovamente ad avere $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m, Z \subseteq \mathbb{A}^r$. La conclusione è immediata dato che il prodotto di mappe polinomiali è una mappa polinomiale.

(3) Si considerino i due morfismi $f \circ \mathrm{pr}_1 \colon X' \times Y' \to X$, $g \circ \mathrm{pr}_2 \colon X' \times Y' \to Y$ che associano rispettivamente $(x', y') \mapsto f(x')$ e $(x', y') \mapsto g(x')$. Allora $(f \times g)(x', y') = (f \circ \mathrm{pr}_1((x', y')), g \circ \mathrm{pr}_2((x', y')))$, segue quindi che $f \times g$ è un morfismo dal punto (2).

(4) Siccome la mappa identità $\mathrm{id}_X \colon X \to X, x \mapsto x$ è chiaramente un morfismo, allora sempre dal punto (2) si ha:$\delta_X \colon X \to X \times X, x \mapsto (x, x)$ è un morfismo con immagine in Δ_X. Inoltre la proiezione $\mathrm{pr}_1 \colon \Delta_X \subset X \times X \to X, (x, x) \mapsto x$ è un morfismo ed è l'inverso di δ_X che è quindi isomorfismo. □

Corollario 3.17. *Se $f, g \colon X \to Y$ sono morfismi di varietà, allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X. Se f e g coincidono su un insieme denso di X, allora $f = g$.*

Dimostrazione. Si consideri $(f, g) \colon X \to Y \times Y, x \mapsto (f(x), g(x))$, è un morfismo dal secondo punto della proposizione precedente. Allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_Y)$ che è chiuso in X dato che (f, g) è continua e Δ_Y è chiuso in $Y \times Y$.

La seconda affermazione segue dal primo punto della proposizione 3.4. □

Definizione 3.18. Se $f \colon X \to Y$ è un morfismo di varietà, allora il *grafico* di f è definito da: $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$.

Proposizione 3.19. *$G(f)$ è una sottovarietà chiusa di $X \times Y$. La proiezione di $X \times Y$ su X si restringe a un isomorfismo di $G(f)$ su X.*

Dimostrazione. Si consideri ora la funzione $f \times \mathrm{id}_Y \colon X \times Y \to Y \times Y, (x, y) \mapsto (f(x), y)$, è un morfismo dal punto (3) della proposizione precedente, quindi è continua. Dunque $G(f) = (f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ dunque è un insieme chiuso in $X \times Y$, inoltre è irriducibile essendo isomorfo alla varietà X.

Data la proiezione $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$, essa si può restringere a $G(f)$, che ha come inversa $(\mathrm{id}_X, f) \colon X \to G(f) \subset X \times Y, x \mapsto (x, f(x))$ è un morfismo. □

3.4 Campi di funzioni algebriche e dimensione di varietà

Definizione 3.20. Sia K un'estensione di campi finitamente generata di k. Il *grado di trascendenza* di K sopra k, denotato con $\deg_k K$, è definito come il più piccolo intero n tale che per qualche $x_1, \dots, x_n \in K$, K è algebrico sopra $k(x_1, \dots, x_n)$.

Si dirà che K è un *campo di funzioni algebriche* in n variabili sopra k.

Proposizione 3.21. *Sia K un campo di funzioni algebriche in una variabile sopra k, e sia $x \in K \setminus k$, allora:*

(1) K è algebrico sopra $k(x)$;

(2) (se $\operatorname{char} k = 0$) Esiste un elemento $y \in K$ tale che $K = k(x, y)$;

(3) Se R è un dominio con campo quoziente K, $k \subset R$ e $\mathfrak{p}$ è un ideale primo in $R, 0 \neq \mathfrak{p} \neq R$, allora l'omomorfismo naturale da k a $R/\mathfrak{p}$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. **(1)** Sia $t \in K$ tale che K sia algebrico sopra $k(t)$. Dunque esiste un polinomio $F \in k(t)[X]$ tale che $F(x) = 0$, e a meno di fare denominatore comune si può supporre che i coefficienti di F siano in $k[t]$ invece di $k(t)$. Siccome $x \notin k$ allora t deve apparire in F con grado maggiore di 1, allora si può vedere F come polinomio in $k(x)[t]$ che si annulla in t. Quindi $k(t, x)$ è algebrico sopra $k(x)$ e K è algebrico sopra $k(t, x)$. Allora K è algebrico sopra $k(x)$.

(2) Si ricorda il *Teorema dell'elemento primitivo*: sia K un campo con $\operatorname{char}(k) = 0$, L un'estensione algebrica finita di K; allora esiste $z \in L$ tale che $L = K(z)$.

Allora K è campo di funzioni algebriche in una variabile sopra k, quindi K è un'estensione di campi finitamente generata, inoltre K è algebrico sopra $k(x)$; dunque per il teorema appena citato si ha che esiste $y \in K$ tale che $K = k(x, y)$.

(3) Si ha l'omomorfismo $\begin{tikzcd} k \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left] & R \arrow[r, two heads] & R/\mathfrak{p} \end{tikzcd}$

Mostriamo che tale mappa è suriettiva: sia per assurdo $x \in R$ il cui $\bar{x}$ residuo in $R/\mathfrak{p}$ non sia in k, e sia $0 \neq y \in \mathfrak{p}$. Siccome K è algebrico sopra $k(x)$ per il punto (1), esiste un polinomio $F = \sum a_i(X)Y^i \in K[X, Y]$ tale che $F(x, y) = 0$. Se si sceglie F del minor grado possibile allora si ha che $a_0(X) \neq 0$, altrimenti si avrebbe $F = Y \sum a_i(X)Y^{i-1}$ e siccome si è supposto $y \neq 0$ allora esso sarà zero di $\sum a_i(X)Y^{i-1}$. Allora $a_0(x) \in \mathfrak{p}$, perché si può scrivere $a_0(x) = -\sum a_i(x)y^i$; segue quindi che $a_0(\bar{x}) \neq 0$, ovvero $\bar{x}$ è algebrico sopra k. Questo è assurdo perché k è algebricamente chiuso e allora, dato $G \in k[X]$ polinomio che si annulla in x, esso contiene tutte le radici di G, tra cui x. $\square$

Definizione 3.22. Se X è una varietà, $k(X)$ è un'estensione di k finitamente generata. Definiamo la *dimensione* di X come $\deg_k k(X)$.

Una varietà di dimensione 1 è chiamata *curva*, di dimensione 2 una *superficie*, etc.

Si osserva che una "curva" è assunta come una varietà, mentre una "curva piana" può avere più componenti (anche componenti multiple).

Nella proposizione seguente si vede che, per le sottovarietà di $\mathbb{A}^2$ o $\mathbb{P}^2$, la definizione concorda con quella appena data.

Proposizione 3.23. *Sia $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine non vuota, allora V è un punto se e solo se $\Gamma(V) = k$.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere $V = P = (p_1, \dots, p_n)$ un punto, allora $P = \bigcap_{i=1}^n V(T_i - p_i)$ e quindi $I(P) \supseteq (T_1 - p_1, \dots, T_n - p_n)$. Dunque dato $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ di grado d si ponga $f_i(T_1, \dots, T_n) = f(T_1, \dots, T_n) - f(T_1 - p_1, \dots, T_n - p_n)$; si ha che f è congruo a f_1 in $\Gamma(V)$ e $f_1(T_1, \dots, T_n)$ ha grado strettamente minore di d per come è stato definito. Si può dunque procedere iterativamente definendo:

$$f_i(T_1, \dots, T_n) = f_{i-1}(T_1, \dots, T_n) - f_{i-1}(T_1 - p_1, \dots, T_n - p_n),$$

e dato che ogni $f_i(T_1 - p_1, \dots, T_n - p_n) \in I(V)$ per $i = 1, \dots, d$, si ha che $f = f_1 = \cdots = f_d$ in $\Gamma(V)$. D'altra parte, con al massimo d iterazioni, si arriva a un polinomio equivalente a f di grado 0, ovvero una costante. Quindi $\Gamma(V) = k$ come si voleva.

Viceversa sia $\Gamma(V) = k[T_1, \dots, T_n]/I(V) = k$, allora $T_i = a_i \in k$ $\forall i = 1, \dots, n$, ovvero $T_i - a_i \in I(V)$ $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow (T_i - a_i) \subseteq I(V)$ $\forall i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow V(T_i - a_i) \supseteq V$ $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow V \subseteq \bigcap_{i=1}^n V(T_i - p_i) = P$, quindi $V = P = (a_1, \dots, a_n)$. □

Si osserva che ciò è vero anche per $\Gamma(V)$ isomorfo a k.

Proposizione 3.24. ***(1)*** *Se U è una sottovarietà aperta di X, allora* $\dim U = \dim X$.

(2) *Se V^* è la chiusura proiettiva di una varietà affine V, allora* $\dim V = \dim V^*$.

(3) *Una varietà ha dimensione 0 se e solo se è un punto.*

(4) *Ogni sottovarietà chiusa propria di una curva è un punto.*

(5) *Una sottovarietà chiusa di $\mathbb{A}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{P}^2$) ha dimensione uno se e solo se è una curva piana affine (rispettivamente proiettiva).*

Dimostrazione. **(1)** Si osserva che U e X sono entrambi sottoinsiemi aperti di uno stesso insieme algebrico irriducibile non vuoto $V \subseteq \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$, e quindi dalla definizione di campo di funzioni segue che $k(U) = k(V) = k(X)$, e dunque $\dim U = \dim X$.

(2) V è una sottovarietà aperta di V^*, quindi dal punto (1) segue che $\dim V = \dim V^*$.

(3) Si può supporre V affine dai punti precedenti, allora $\dim V = 0$ se e solo se $k(V)$ è algebrico su k, ovvero se e solo se $k(V) = k$. Infatti se $k(V) = k$ allora banalmente $k(V)$ è algebrico su k; viceversa se $k(V)$ è algebrico su k sia $x \in k(V)$ e $F \in k[X]$ polinomio che si annulla in x, siccome k è algebricamente chiuso contiene tutte le radici di F e quindi anche x. Dunque $k \supseteq k(V)$, e l'inclusione opposta è ovvia.

Ora se $k(V) = k$ si ha $\Gamma(V) = k$, questo segue dalla catena di inclusioni seguente: $k = k(V) \supseteq \Gamma(V) \supseteq k \Rightarrow \Gamma(V) = k$; viceversa se $\Gamma(V) = k$, essendo k campo e $k(V)$ il campo quoziente di $\Gamma(V)$ si ha $k(V) = k$. Riassumendo si ha $\dim V = 0 \Leftrightarrow \Gamma(V) = k \Leftrightarrow V$ è un punto, per la proposizione precedente.

(4) Come prima si assume V varietà affine. Se W è una sottovarietà chiusa di V, allora sia $R = \Gamma(V)$ e $\mathfrak{p} = I(W)/I(V)$ l'ideale primo di R corrispondente a W. Si può considerare la mappa $\varphi\colon \Gamma(V) \to \Gamma(W)$ indotto dall'immersione $j\colon W \to V$, essendo j una mappa polinomiale dalla corrispondenza tra mappe polinomiali e omomorfismi tra anelli di coordinate (vedere prop. 2.4), si ha che φ è omomorfismo. Inoltre si può osservare che è suriettivo e che $\ker \varphi = I(W)/I(V)$, segue quindi che $\Gamma(W) = R/\mathfrak{p}$. Dal punto (3) della proposizione 3.21 si ha che $\Gamma(W)$ è isomorfo a k, e si è visto che in tal caso W è un punto.

(5) Siccome le uniche sottovarietà chiuse di $\mathbb{A}^2$ sono punti, curve algebriche o $\mathbb{A}^2$ stesso, si ha che se $\dim V = 1$ allora dal punto (3) V non può essere un punto, e d'altra parte $V \neq \mathbb{A}^2$ perché $\dim \mathbb{A}^2 = 2$.

Sia $V = V(F)$ una curva piana affine, con $F \in k[X, Y]$ polinomio ridotto non costante; si può scrivere $F(X, Y) = \sum_{i=0}^{d} a_i(X) Y^i$ con $d > 0$. Essendo $\Gamma(V) = K[X, Y]/(F) = k[x, y]$, dove x e y sono le classi resto di X e di Y rispettivamente in $\Gamma(V)$, segue che $F(x, y) = 0$. Ora, detto $k(x)$ il più piccolo sottocampo di $k(V)$ contenente x, allora y è algebrico sopra $k(x)$, infatti è uno zero del polinomio $F(x, Y) \in k(x)[Y]$. Quindi $\dim V = \deg_k k(x, y) = \deg_k k(x, y) \leq 1$, d'altre parte $\dim V > 0$ dato che V non è un punto, dunque $\dim V = 1$. □

3.5 Mappe razionali

Definizione 3.25. Siano X, Y due varietà. Due morfismi $f_i \colon U_i \to Y$ da sottovarietà aperte U_i di X ad Y si dicono equivalenti se le loro restrizioni ad $U_1 \cap U_2$ coincidono. Dato che $U_1 \cap U_2$ è denso in X, ogni f_i è determinata dalla sua restrizione ad $U_1 \cap U_2$.

Una classe di equivalenza di tali morfismi è chiamata una *mappa razionale* da X a Y.

Il *dominio* di una mappa razionale è l'unione di tutte le sottovarietà aperte U_α di X tali che $f_\alpha \colon U_\alpha \to Y$ appartiene alla classe di equivalenza della mappa razionale.

Se U è il dominio di una mappa razionale, la mappa $f \colon U \to Y$ definita da $f_{|U_\alpha} = f_\alpha$ è un morfismo che appartiene alla classe della mappa razionale , ogni morfismo equivalente è una restrizione di f. Quindi una mappa razionale da X a Y può essere definita anche come un morfismo f da una sottovarietà aperta U di X a Y tale che f non può essere estesa a un morfismo definito su un sottoinsieme aperto di X più grande di U a Y.

Definizione 3.26. Una mappa razionale da X a Y è detta *dominante* se $f(U)$ è denso in Y, dove $f \colon U \to Y$ è qualunque morfismo della classe di equivalenza della mappa razionale.

Si può vedere che questa definizione è indipendente dalla scelta di U

Definizione 3.27. Se A e B sono anelli locali, e A è un sottoanello di B, diciamo che B *domina* A se l'ideale massimale di B contiene l'ideale massimale di A.

Proposizione 3.28. *(1) Sia F una mappa razionale dominante da X a Y. Sia $U \subseteq X, V \subseteq Y$ insiemi aperti affini, e $f \colon U \to V$ un morfismo che rappresenta F. Allora la mappa indotta $\tilde{f} \colon \Gamma(V) \to \Gamma(U)$ è iniettiva, quindi $\tilde{f}$ si estende ad un omomorfismo iniettivo da $k(Y) = k(V)$ a $k(X) = k(U)$. Inoltre questo omomorfismo è indipendente dalla scelta di f, ed è denotato con $\tilde{F}$.*

(2) Se P appartiene al dominio di F, e $F(P) = Q$, allora $\mathcal{O}_P(X)$ domina $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(Y))$. Viceversa, se $P \in X, Q \in Y$ e $\mathcal{O}_P(X)$ domina $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(Y))$, allora P appartiene al dominio di F e $F(P) = Q$.

(3) Ogni omomorfismo da $k(Y)$ a $k(X)$ è indotto da un'unica mappa razionale dominante da X a Y.

Dimostrazione. **(1)** Dato che F è mappa dominante oltre ad avere U denso in X si ha $f(U)$ denso in Y, quindi in particolare $f(U)$ denso in V. Si considera la mappa $\tilde{f}\colon \Gamma(V) \to \Gamma(U)$ definita da $g \mapsto g \circ f$; è ben definita, infatti dato che V è aperto e f è morfismo, se $g \in \Gamma(V)$, allora $g \circ f \in \Gamma(f^{-1}(V)) = \Gamma(U)$. Mostriamo ora che è iniettiva: sia $g \in \Gamma(V)$ tale che $g \circ f = 0$ in $\Gamma(U)$, allora $g \circ f(u) = 0$ $\forall u \in U$; siccome $f(U)$ è denso in V, allora $g(v) = 0$ $\forall v \in V$, ovvero $g = 0$ in $\Gamma(V)$ per la proposizione 3.4.

Ora $\tilde{f}$ si estende a un omomorfismo iniettivo $\tilde{f}\colon k(V) \to k(U)$, infatti un elemento di $k(V)$ si può scrivere nella forma $h/g, h, g \in \Gamma(V)$, e dunque $h/g \mapsto h \circ f/g \circ f$. Inoltre $\tilde{f}$ è indipendente dalla scelta di f all'interno della classe di equivalenza di F, infatti sia f_1 nella stessa classe di equivalenza di f con dominio U_1, allora $f(U \cap U_1) = f_1(U \cap U_1)$ e quindi essendo $U \cap U_1$ denso in X si ha $g \circ f = g \circ f_1$ in $k(U) = k(U \cap U_1) = k(U_1)$.

(2) Dato P appartenente al dominio di F, si ricorda che $\mathfrak{m}_P(X) = \{g \in \mathcal{O}_P(X) \mid g(P) = 0\}$ l'ideale massimale di X in P. Allora $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(Y)) \subseteq \mathcal{O}_P(X)$, infatti dato $g \in \mathcal{O}_Q(Y)$, con $g = g_1/g_2, g_i \in \Gamma(V)$ e $g_2(Q) \neq 0$ si ha $\tilde{F}(g) = g_1 \circ f/g_2 \circ f$ e $(g_2 \circ f)(P) = g_2(f(P)) = g_2(Q) \neq 0$, ovvero $\tilde{F}(g) \in \mathcal{O}_P(X)$. Si mostra ora che il massimale di $\mathcal{O}_Q(Y)$ va nel massimale di $\mathcal{O}_P(X)$, infatti sia come sopra $g \in \mathfrak{m}_Q((Y))$, con $g = g_1/g_2, g_1, g_2 \in \Gamma(V), g_2(Q) \neq 0$ e $g_1(Q) = 0$. Allora $\tilde{F}(g) = g_1 \circ f/g_2 \circ f$ e $g_1(f(P)) = g_1(Q) = 0$, quindi $\tilde{F}(g) \in \mathfrak{m}_P(X)$.

Viceversa si supponga di avere che $\mathcal{O}_P(X)$ domina $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(Y))$, si prendano intorni affini V di P e W di Q. Sia $\Gamma(W) = k[y_1, \ldots, y_n]$, allora $\tilde{F}(y_i) = a_i/b_i, a_i.b_i \in \Gamma(V)$ e, siccome $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(W)) \subseteq \mathcal{O}_P(V)$ si ha che $b_i(P) \neq 0$. Si ponga $b = b_1 \ldots b_n$, allora dato che si può scrivere $\Gamma(V_b) = \Gamma(V)[\frac{1}{b}]$ (vedere prop. 3.13) si ha $\tilde{F}(\Gamma(W)) \subseteq \Gamma(V_b)$. Dunque dalla proposizione 3.9 l'omomorfismo $\tilde{F}\colon \Gamma(W) \to \Gamma(V_b)$ è indotto da un unico morfismo $f\colon V_b \to W$. Sia ora $g \in \Gamma(W)$ che si annulla in Q, allora $g \in \mathfrak{m}_Q(W)$; siccome $\mathcal{O}_P(X)$ domina $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(Y))$ segue che $\tilde{F}(g) \subseteq \mathfrak{m}_p(V)$, ovvero $(g \circ f)(P) = 0$. Quindi $f(P) = Q$ per l'arbitrarietà degli intorni V e W.

(3) Si possono assumere X e Y affini; dato l'omomorfismo $\varphi\colon k(Y) \to k(X)$ procedendo analogamente a quanto fatto nel punto (2) si che $\varphi(\Gamma(Y)) \subseteq \Gamma(X_b)$ per qualche $b \in \Gamma(X)$, si pone $\tilde{f}$ la restrizione di φ a $\Gamma(Y)$. Si osserva che $\tilde{f}$ è omomorfismo iniettivo dato che lo è φ essendo un omomorfismo di campi, inoltre dalla proposizione 3.9, $\tilde{f}$ è indotto da un unico morfismo $f\colon X_b \to Y$.

Sia ora $WY \setminus V(G), G \neq 0$ aperto di una base della topologia di Zariski su Y. Se per assurdo $f(X_b) \cap W = \emptyset$, allora $f(X_b) \subseteq V(G) \Rightarrow G(f(P)) = (G \circ f)(P) = 0$ $\forall P \in X_b$, segue che $G \circ f = 0$ in $\Gamma(X_b)$, ma questo è assurdo dato che $\tilde{f}$ è iniettiva. □

Definizione 3.29. Una mappa razionale F da X a Y è detta *birazionale* se esistono insiemi aperti $U \subseteq X, V \subseteq Y$, e un isomorfismo $f\colon U \to V$ che rappresenta F.

Diremo quindi che X e Y sono *birazionalmente equivalenti* se esiste una mappa birazionale da X a Y. Questa è una relazione di equivalenza.

Si osserva che una varietà è birazionalmente equivalente ad ogni sua sottovarietà aperta. Inoltre le varietà $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{P}^n$ sono birazionalmente equivalenti.

Proposizione 3.30. *Due varietà sono birazionalmente equivalenti se e solo se i loro campi di funzioni sono isomorfi.*

Dimostrazione. Siano X e Y due varietà birazionalmente equivalenti, quindi esistono insiemi aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ e $f\colon U \to V$ isomorfismo, in particolare f è una mappa razionale dominante. Quindi dal punto (1) della proposizione precedente si che f induce un omomorfismo da $k(V)$ a $k(U)$; dunque, procedendo analogamente per f^{-1} e si trova un omomorfismo tra $k(U)$ e $k(V)$, tali omomorfismi sono l'uno l'inverso dell'altro dalla prop. 3.9. Segue che $k(U) = k(X)$ è isomorfo a $k(V) = k(Y)$.

Viceversa, sia $\varphi\colon k(X) \to k(Y)$ isomorfismo, si può supporre X e Y affini. Allora analogamente a quanto fatto della dimostrazione della proposizione precedente si ha: $\varphi(\Gamma(X)) \subseteq \Gamma(Y_b)$ per qualche $b \in \Gamma(Y)$, e $\varphi^{-1}(\Gamma(Y)) \subseteq \Gamma(X_d)$ per qualche $d \in \Gamma(X)$.

Allora φ si restringe a un isomorfismo tra $\Gamma((X_d)_{\varphi^{-1}(b)})$ e $\Gamma((Y_b)_{\varphi(d)})$. Sempre dalla proposizione 3.9 segue che $(X_d)_{\varphi^{-1}(b)}$ è isomorfo a $(Y_b)_{\varphi(d)}$, che sono due aperti di X e Y rispettivamente; dunque tale isomorfismo è un rappresentante della mappa birazionale tra X e Y. □

Corollario 3.31. *Ogni curva è birazionalmente equivalente a una curva piana.*

Dimostrazione. Sia V una curva, allora dal secondo punto della proposizione 3.21 si ha che $k(V) = k(x, y)$ per qualche $x, y \in k(V)$. Sia I il nucleo dell'omomorfismo suriettivo che va da $k[X, Y]$ a $k[x, y] \subseteq k(V)$ che associa $X \mapsto x, Y \mapsto y$; allora I è ideale primo. Posto $V' = V(I) \subseteq \mathbb{A}^2$ è una varietà. Siccome $\Gamma(V') = k[X, Y]/I$ è isomorfo a $k[x, y]$, segue che $k(V')$ è isomorfo a $k(x, y) = k(V)$. Quindi $\dim V' = 1$, e allora V' è una curva piana dalla proposizione 3.24 punto (5); e V e V' sono birazionalmente equivalenti. □

Definizione 3.32. Una varietà è detta *birazionale* se è birazionalmente equivalente ad $\mathbb{A}^n$ o $\mathbb{P}^n$ per qualche n.

Capitolo 4

Risoluzione di singolarità

4.1 Mappe razionali su curve

Definizione 4.1. Un punto P su una curva arbitraria $\mathcal{C}$ è chiamato *punto semplice* se $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un anello di valutazione discreta.

Se $\mathcal{C}$ è una curva piana questa definizione concorda con quella data in precedenza nel capitolo 1 (vedere definizione 1.24). Infatti vale il seguente:

Teorema 4.2. *Sia P un punto di una curva irriducibile piana $\mathcal{C}$, allora P è punto liscio se e solo se $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un anello di valutazione discreta.*

Sia P punto semplice della curva $\mathcal{C}$, si indica con $\mathrm{ord}_P^{\mathcal{C}}$ la funzione ordine su $k(\mathcal{C})$ definita dall'anello di valutazione discreta $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, si è visto nel secondo capitolo che tale funzione è una valutazione discreta.

Definizione 4.3. Sia K campo contenente k, si dirà che A è un *anello locale di K* se A è un sottoanello di K, K è il campo quoziente di A, e A contiene k.

Per esempio, se V è una varietà, $P \in V$, allora $\mathcal{O}_P(V)$ è un anello locale di $k(V)$.

Analogamente, si intenderà d'ora in avanti che un anello di valutazione discreta di K è un anello di valutazione che sia un anello locale di K.

Teorema 4.4. *Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva, $K = k(\mathcal{C})$. Supponiamo L un campo contenente K, e R un anello di valutazione discreta di L, assumiamo inoltre $R \not\supset K$. Allora esiste un unico punto $P \in \mathcal{C}$ tale che R domina $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$.*

Dimostrazione. *Unicità*: Se per assurdo R domina $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ e $\mathcal{O}_Q(\mathcal{C})$, con $P \neq Q$. Quindi sia $f \in \mathfrak{m}_P(\mathcal{C})$ e $1/f \in \mathcal{O}_Q(\mathcal{C})$, ovvero f si annulla in P ma non in Q. Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di R, siccome R domina sia $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ che $\mathcal{O}_Q(\mathcal{C})$ si ha:

- $f \in \mathfrak{m}_P(\mathcal{C}) \Rightarrow f \in \mathfrak{m} \Rightarrow \mathrm{ord}_R(f) > 0$,
- $1/f \in \mathcal{O}_Q(\mathcal{C}) \Rightarrow 1/f \in R \Rightarrow \mathrm{ord}_R(1/f) \geq 0$ e $\mathrm{ord}_R f \leq 0$,

e dunque si ha una contraddizione.

Esistenza: Si può assumere $\mathcal{C}$ sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^n$, e che $\mathcal{C} \cap U_i \neq \emptyset\ \forall i = 0, \dots, n$ (altrimenti si riduce n). Allora $\Gamma(\mathcal{C}) = k[X_0, \dots, X_n]/I(\mathcal{C}) = k[x_0, \dots, x_n]$, dove x_i è la classe resto di X_i in $\Gamma(\mathcal{C})$; allora $x_i \neq 0$ perché altrimenti si avrebbe $\mathcal{C} \cap U_i = \emptyset$. Sia $N = \max_{i,j} \mathrm{ord}(x_i/x_j)$, si può supporre a meno di cambio di coordinate che $N = \mathrm{ord}(x_j/x_n)$ per qualche j. Allora per ogni i si ha: $\mathrm{ord}\left(\frac{x_i}{x_n}\right) = \mathrm{ord}\left(\frac{x_j}{x_n} \cdot \frac{x_i}{x_j}\right) = N - \mathrm{ord}\left(\frac{x_j}{x_i}\right) \geq 0$.

Sia ora $\mathcal{C}_*$ la curva affine corrispondente a $\mathcal{C} \cap U_n$, allora si può identificare $\Gamma(\mathcal{C}_*)$ con $k[x_0/x_n, \dots, x_{n-1}/x_n]$, quindi $R \supseteq \Gamma(\mathcal{C}_*)$ dato che ogni elemento di $\Gamma(\mathcal{C}_*)$ ha ordine ≥ 0.

Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di R, e si ponga $J = \mathfrak{m} \cap \Gamma(\mathcal{C}_*)$; segue che J è ideale primo e quindi J corrisponde a una sottovarietà chiusa W di $\mathcal{C}_*$. Se si avesse $W = \mathcal{C}_*$, allora $J = 0$ e quindi ogni elemento non nullo di $\Gamma(\mathcal{C}_*)$ sarebbe invertibile, ma allora $\Gamma(\mathcal{C}_*) = k(\mathcal{C}_*) = K$ e quindi $R \supset K$ contro l'ipotesi.

Quindi $W = \{P\}$ dal punto (4) della proposizione 3.24. Si verifica quindi che R domina $\mathcal{O}_P(\mathcal{C}_*) = \mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, si mostra infatti che $\mathcal{O}_P(\mathcal{C}_*)$ si immerge in R: un elemento di $\mathcal{O}_P(\mathcal{C}_*)$ si scrive come f/g, con $f, g \in \Gamma(\mathcal{C}_*)$ e $g \notin J$ (altrimenti $g(P) = 0$), quindi $g \notin \mathfrak{m}$, ma dato che $g \in \Gamma(\mathcal{C}_*) \subset R$, allora g è invertibile in $R \Rightarrow 1/g \in R \Rightarrow f/g \in R$. □

Corollario 4.5. *Sia F una mappa razionale da una curva $\mathcal{C}'$ a una curva proiettiva $\mathcal{C}$. Allora il dominio di F include ogni punto liscio di $\mathcal{C}'$, quindi se $\mathcal{C}'$ è non singolare allora F è un morfismo.*

Dimostrazione. Se F non è una mappa dominante allora è costante, infatti: sia $f\colon U \to \mathcal{C}$ un morfismo che la rappresenta, allora $f(U)$ deve essere chiuso in $\mathcal{C}$ perché ogni aperto di una varietà è denso in essa, ma gli unici sottoinsiemi chiusi propri di una curva sono unione finita di punti (vedere prop. 3.24), dunque essendo $f(U)$ irriducibile allora $f(U) = \{P\}$ per qualche $P \in \mathcal{C}$. Se F è costante allora il suo dominio è tutta $\mathcal{C}'$, e quindi comprende anche tutti i punti lisci di $\mathcal{C}'$.

Si assume ora F mappa dominante, allora dalla proposizione 3.28 punto (1) si ha che F induce un omomorfismo tra $k(\mathcal{C})$ e $k(\mathcal{C}')$, quindi posto $K = k(\mathcal{C})$ e $L = k(\mathcal{C}')$ allora K si immerge in L.

Sia ora $P \in \mathcal{C}'$ punto liscio, posto $R = \mathcal{O}_P(\mathcal{C}')$ esso è anello di valutazione discreta di L. Ora, si assuma per assurdo di avere $K \subseteq R \subseteq L$. Allora dato che K e L sono campi di funzioni di curve, essi hanno grado di trascendenza 1, di conseguenza L è algebrico su K, altrimenti si avrebbe che L ha grado di trascendenza 2. Ciò implica che R è un campo, ma questo è assurdo perché un anello di valutazione discreta non è un campo. Quindi si ha che $R \not\supset K$, allora dal teorema segue che esiste un unico punto $Q \in \mathcal{C}$ tale che R domina $\mathcal{O}_Q(\mathcal{C})$. Allora sempre dalla proposizione 3.28 punto (2) si ha che $F(P) = Q$ e quindi P appartiene al dominio di F.

Sia ora $\mathcal{C}'$ non singolare, allora ogni punto di $\mathcal{C}'$ appartiene al dominio di F, e quindi F è morfismo. □

Corollario 4.6. *Se $\mathcal{C}$ è una curva proiettiva e $\mathcal{C}'$ una curva non singolare, allora c'è una biezione naturale tra i morfismi dominanti $f\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ e gli omomorfismi $\tilde{f}\colon k(\mathcal{C}) \to k(\mathcal{C}')$.*

Dimostrazione. Sia f morfismo dominante, in particolare f è una mappa razionale dominante. Si è già visto che questa induce un omomorfismo $\tilde{f}\colon k(\mathcal{C}) \to k(\mathcal{C}')$ (proposizione 3.28 punto (1)).

Viceversa dato $\tilde{f}$ omomorfismo tra $k(\mathcal{C})$ e $k(\mathcal{C}')$ è indotto da un'unica mappa razionale dominante $f\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$. Siccome $\mathcal{C}'$ è non singolare allora il dominio di f è tutta la curva $\mathcal{C}'$, ovvero f è morfismo dominante. □

Corollario 4.7. *Due curve proiettive non singolari sono isomorfe se e solo se i loro campi di funzioni sono isomorfi.*

Dimostrazione. Dato che le due curve sono non singolari allora un isomorfismo tra di esse è equivalente ad una mappa birazionale, inoltre dal fatto che se esiste una mappa birazionale tra due varietà allora i rispettivi campi di funzioni sono isomorfi (vedere proposizione 3.30) segue la conclusione. □

Corollario 4.8. *Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva non singolare, $K = k(\mathcal{C})$. Allora c'è una biezione naturale tra i punti di $\mathcal{C}$ e gli anelli di valutazione discreta di K. Se $P \in \mathcal{C}$ allora $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è il corrispondente anello di valutazione discreta.*

Dimostrazione. Dato che $\mathcal{C}$ è una curva non singolare allora per ogni punto $P \in \mathcal{C}$, $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un anello di valutazione discreta.

Viceversa sia R un altro anello di valutazione discreta, allora si può applicare il teorema sopra con $L = K$ e $K = K$, allora $R \not\supset K$ e quindi le ipotesi sono verificate. Segue quindi che esiste un unico $P \in \mathcal{C}$ tale che R domina $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, allora $R = \mathcal{O}_P(\mathcal{C})$. Infatti, posto $\mathcal{O}_P(\mathcal{C}) = S$, se per assurdo esiste $f \in R \setminus S$, allora $\operatorname{ord}_R(f) \geq 0$, d'altra parte $f \notin S \Rightarrow 1/f \in S$ con $\operatorname{ord}_S(1/f) > 0$, ovvero $1/f$ appartiene al massimale di S ma siccome R domina S si ha che $1/f$ appartiene anche al massimale di R, quindi $\operatorname{ord}_R(1/f) > 0$, ma allora $\operatorname{ord}_R(f) < 0$ e si ha una contraddizione. □

4.2 Blowing-up di un punto in $\mathbb{A}^2$

Risolvere una singolarità di una curva proiettiva $\mathcal{C}$ significa trovare una curva proiettiva non singolare X e una mappa birazionale $f\colon X \to \mathcal{C}$.

In questa sezione si vedrà un esempio di come fare il blow-up di un punto di una curva contenuta nel piano affine.

Data una curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, l'idea generale per costruirne la risoluzione è la seguente: sia P un punto multiplo di $\mathcal{C}$, allora si rimuove il punto P da $\mathbb{P}^2$ e lo si sostituisce con una retta proiettiva L. I punti di L corrisponderanno ai coefficienti angolari delle rette passanti per P. Questo può essere fatto in modo che il risultante "piano scoppiato" $B = (\mathbb{P}^2 \setminus \{P\}) \cup L$ sia ancora una varietà, in particolare è una varietà coperta da insiemi aperti isomorfi ad $\mathbb{A}^2$. Allora la curva $\mathcal{C}$ è birazionalmente equivalente alla curva $\mathcal{C}'$ su B, con $\mathcal{C}' \setminus (\mathcal{C}' \cap L)$ isomorfo a $\mathcal{C} \setminus \{P\}$, d'altra parte $\mathcal{C}'$ avrà dei punti singolari "migliori" rispetto a $\mathcal{C}$, si capirà in seguito in che senso migliori.

Prendiamo $P = (0,0) \in \mathbb{A}^2$, e $U = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x \neq 0\}$, e definiamo il morfismo $f\colon U \to \mathbb{A}^1 = k$ dato da $f(x,y) = y/x$. Sia $G \subseteq U \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^3$ il grafico di f, allora

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \mid z = y/x, x \neq 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \mid y = xz, x \neq 0\}.$$

Si considera ora $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \mid y = xz\}$, è la chiusura di G in $\mathbb{A}^3$, dato che $Y - XZ$ è irriducibile allora B è una varietà (affine).

Sia inoltre $\pi\colon B \to \mathbb{A}^2$ la restrizione della proiezione da $\mathbb{A}^3$ ad $\mathbb{A}^2$ che manda $\pi(x,y,z) = (x,y)$, essendo la proiezione un morfismo allora anche π è morfismo tra varietà. Allora $\pi(B) = U \cup \{P\}$, infatti:

- se $x = 0 \Rightarrow y = xz = 0 \Rightarrow (0,0,z) \mapsto (0,0) = P$;
- se $x \neq 0 \Rightarrow \pi(x,y,z) = (x,y) \in U$, inoltre sia $(x,y) \in U$, allora $x \neq 0$ e si può scrivere $z = y/x$ e $\pi^{-1}(x,y) = (x,y,y/x) \in G \subseteq B$.

In particolare $\pi^{-1}(U) = G$, da cui segue che π si restringe a un isomorfismo tra $\pi^{-1}(U)$ e U; si pone $L = \pi^{-1}(P) = \{(0,0,z) \mid z \in k\}$. Si osserva che G è una sottovarietà aperta di B, mentre L è una sottovarietà chiusa di B.

Sia ora $\varphi\colon \mathbb{A}^2 \to B$, definita da $\varphi(x,z) = (x,xz,z)$, φ è un isomorfismo di $\mathbb{A}^2$ su B, la proiezione sul piano (x,z) è l'inversa di φ. Si definisce inoltre $\psi = \pi \circ \varphi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, quindi $\psi(x,z) = (x,xz)$. Quindi si ha che il seguente diagramma commuta:

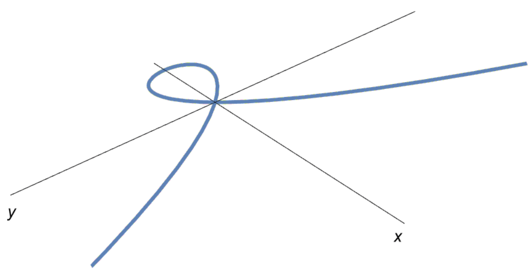
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathbb{A}^2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi"] & & \mathbb{A}^2 \end{tikzcd}$$

Sia $E = \psi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(\pi^{-1}(P)) = \varphi^{-1}(L) = \{(x,z) \in \mathbb{A}^2 \mid x = 0\}$; allora $\psi\colon \mathbb{A}^2 \setminus E \to U$ è un isomorfismo, infatti si è visto che U è isomorfo a $\pi^{-1}(U)$

che è a sua volta isomorfo a $\{(x,z) \in \mathbb{A}^2 \mid x \neq 0\} = \mathbb{A}^2 \setminus E$. Allora ψ è una mappa birazionale, inoltre il suo dominio è tutto $\mathbb{A}^2$ quindi, in particolare, è un morfismo birazionale del piano in sè.

Sia $\mathcal{C} \neq V(X)$ una curva in $\mathbb{A}^2$, si pone $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap U$, una sottovarietà aperta di $\mathcal{C}$; sia $\mathcal{C}'_0 = \psi^{-1}(\mathcal{C}_0)$ e $\mathcal{C}'$ la chiusura di $\mathcal{C}'_0$ in $\mathbb{A}^2$. Sia $f\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ la restrizione di ψ a $\mathcal{C}'$, allora f è un morfismo birazionale da $\mathcal{C}'$ in $\mathcal{C}$ dato che $\mathcal{C}'_0$ e $\mathcal{C}_0$ sono isomorfi. Da cui segue che $k(\mathcal{C}) = k(x,y)$ e $k(\mathcal{C}') = k(x,z)$ sono isomorfi tramite $\tilde{f}$, basta sostituire $y = xz$, dove x, y, z sono le classi resto di X, Y, Z in $\Gamma(\mathcal{C})$.

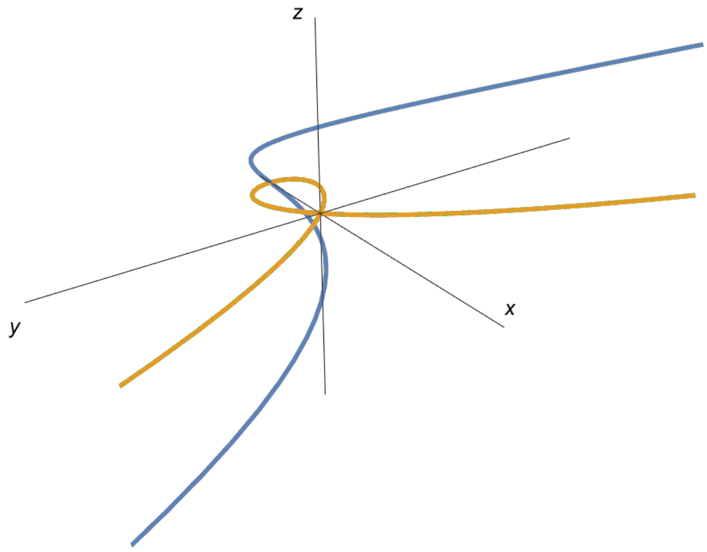
Esempio 4.9. Si considera la curva $\mathcal{C} = V(Y^2 - X^2(X+1))$, ovvero la *curva nodale*. Allora $P = (0,0) \in \mathbb{A}^2$ è punto singolare per tale curva. Per $k = \mathbb{C}$, si può vedere la parte reale della curva $\mathcal{C}$ nella figura seguente:



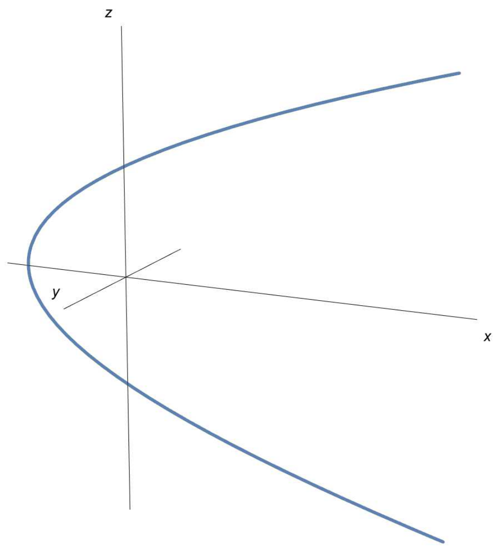
Se si rimuove il punto P da $\mathcal{C}$ allora la chiusura di $\pi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{P\})$ in B è una curva non singolare $\mathcal{C}'$ definita dal sistema

$$\begin{cases} z^2 - x - 1 = 0 \\ y = xz \end{cases},$$

con due punti che stanno sopra il punto doppio P di $\mathcal{C}$, ovvero $P_1 = (0,0,1)$ e $P_2 = (0,0,-1)$, e si è dunque risolta la singolarità.



Inoltre se si proietta B sul piano (x, z) si vede che B è isomorfo ad un piano affine e $\mathcal{C}'$ diventa una parabola $V(Z^2 - X - 1)$.



Ritornando al caso generale si osservano ora alcuni fatti:

(1) Sia $\mathcal{C} = V(F)$, si scrive $F = F_r + F_{r+1} + \cdots + F_n$, dove F_i sono polinomi omogenei di grado i in $k[X, Y]$, $r = m_P(\mathcal{C})$ e $n = \deg(\mathcal{C})$. Allora $\mathcal{C}' = V(F')$, dove $F'(X, Z) = F_r(1, Z) + XF_{r+1}(1, Z) + \cdots + X^{n-r}F_n(1, Z)$. Infatti tramite l'isomorfismo $\tilde{f}$ si ha:

$$F(X, XZ) = X^r F_r(1, Z) + X^{r+1}F_{r+1}(1, Z) + \cdots + X^n F_n(1, Z) = X^r F'(X, Z),$$

siccome $F_r(1, Z) \neq 0$, perché altrimenti P avrebbe molteplicità maggiore di r, si ha che X non divide F'.

Se per assurdo $F' = GH$, allora $F(X, Y) = X^r G(X, Y/X)H(X, Y/X)$ sarebbe riducibile e $\mathcal{C}$ non sarebbe una varietà; allora F' è irriducibile. Inoltre si ha che $\mathcal{C}'_0 \subseteq V(F')$, in particolare $\mathcal{C}'_0 \simeq \mathcal{C}_0 = V(F) \cap U$, dato che $\mathcal{C} = V(F)$ è la chiusura di $\mathcal{C}_0$ allora $V(F')$ è la chiusura di $\mathcal{C}'_0$, ovvero $\mathcal{C}' = V(F')$.

(2) Si assume ora X non tangente a $\mathcal{C}$ in P, e moltiplicando F per una costante si può assumere $F_r(X, Y) = \prod_{i=1}^{s}(Y - \alpha_i X)^{r_i}$, dove $Y - \alpha_i X$ sono le tangenti a $\mathcal{C}$ in P, e $\sum_{i=1}^{s} r_i = r$. Allora $f^{-1}(P) = \{P_1, \dots, P_s\}$, con $P_i = (0, \alpha_i)$. Infatti

$$f^{-1}(P) = \psi^{-1}(P) \cap \mathcal{C}' = E \cap \mathcal{C}' = \{(0, \alpha) \mid F_r(1, \alpha) = 0\}.$$

Allora ogni $P_i \in \mathcal{C}' \cap E$, quindi ha senso calcolarne la molteplicità di intersezione, in particolare si ha che:

$$m_{P_i}(\mathcal{C}') \leq m_{P_i}(\mathcal{C}', E) = r_i,$$

dove la prima disuguaglianza deriva dalla *disuguaglianza fondamentale*; mentre la seconda uguaglianza deriva dal fatto che E è una sottovarietà lineare, in particolare è una retta quindi si può calcolare tale molteplicità come visto nel primo capitolo e ricordando la definizione di F'.

Segue chiaramente che se le tangenti a $\mathcal{C}$ in P sono ordinarie, ovvero hanno molteplicità 1, allora $m_{P_i}(\mathcal{C}') = 1$, cioè P_i è punto liscio in $\mathcal{C}'$.

(3) Esiste un intorno affine W di P su $\mathcal{C}$ tale che $W' = f^{-1}(W)$ è una sottovarietà affine aperta di $\mathcal{C}'$, $f(W') = W$.

Sia $F = \sum_{i+j \geq r} a_{ij} X^i Y^j$, e sia $H = \sum_{j \geq r} a_{0j} Y^{j-r}$; con h si indicherà la classe resto di H in $\Gamma(\mathcal{C})$. Allora $H(0, 0) = a_{0r} = 1 \neq 0$ per come si è supposto F_r.

Ricordando che data una varietà X e $b \in \Gamma(X)$ si pone $X_b = \{P \in X \mid b(P) \neq 0\}$ e $\Gamma(X_b) = \Gamma(X)[1/b]$ (vedere proposizione 3.13), si ha che $P \in \mathcal{C}_h := W$. Quindi W è intorno aperto affine di P in $\mathcal{C}$; sia $W' = f^{-1}(W) = f^{-1}(\mathcal{C}_h) = \{Q \in \mathcal{C}' \mid h(f(Q)) \neq 0\}$, è anch'essa una sottovarietà aperta affine di $\mathcal{C}'$.

Inoltre $\Gamma(W')$ è un modulo finito sopra $\Gamma(W)$ e $x^{r-1}\Gamma(W') \subseteq \Gamma(W)$. Infatti si ricorda che $k(\mathcal{C}) = k(x, y)$ e $k(\mathcal{C}') = k(x, z)$,allora segue che $\Gamma(W') \subseteq \Gamma(W)[z]$. Per concludere basta trovare un'equazione $z^r + b_i z^{r-1} + \dots + b_r = 0$, con $b_i \in \Gamma(W)$; in tale modo si ha che z è integrale sopra $\Gamma(W)$ e allora dalla proposizione 1.27 si ha che $\Gamma(W)[z]$ è modulo finito sopra $\Gamma(W)$, e quindi anche $\Gamma(W')$ è modulo finito sopra $\Gamma(W)$.

Per trovare tale equazione si ricorda che:

$$
\begin{aligned}
F'(x,z) = \frac{F(x,xz)}{x^r} &= \sum_{i+j\geq r} a_{ij} x^{i+j-r} z^j \\
&= \sum_{\substack{i+j\geq r \\ i<r}} a_{ij} y^{i+j-r} z^{r-i} + \sum_{\substack{i+j\geq r \\ i\geq r}} a_{ij} x^{i-r} y^j,
\end{aligned}
$$

dove nella prima parte si è sostituito $x = y/z$ e nella seconda $z = y/x$. Dato che $F'(x,z) = 0$ in $\Gamma(W')$, allora $F'(y,z)/h(y) = 0$ in $\Gamma(W')$, e si ottiene quindi un'equazione del tipo $z^r + b_i z^{r-1} + \cdots + b_r = 0$ con $b_i = (\sum_{i+j\geq r} a_{ij} y^{i+j-r})/h$ per $i < r$, e $b_r = (\sum a_{ij} x^{i-r} y^j)/h$.

Si osserva inoltre che $x^{r-1}\Gamma(W') \subseteq \Gamma(W)$, basta provare che $x^{r-1}z^i \in \Gamma(W)\ \forall i \leq r-1$; si ha: $x^{r-1}z^i = x^{r-i-1}y^i \in \Gamma(W) \Leftrightarrow r-i-1 \geq 0 \Leftrightarrow i \leq r-1$.

Si osserva che W e W' si possono prendere arbitrariamente piccoli.

4.3 Blowing-up di punti in $\mathbb{P}^2$

Dato che una curva piana proiettiva $\mathcal{C}$ ha un numero finito di punti singolari, in particolare se $d = \deg \mathcal{C}$ allora ce ne sono al più $(d-1)(d-2)/2$, si può generalizzare quanto appena fatto considerando punti $P_1, \ldots, P_t$ in $\mathbb{P}^2$, si mostra di seguito come farne il blow-up.

Per semplicità si assume che $P_i \in U_3 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0\}$, quindi si possono mettere nella forma $P_i = [a_{i1} : a_{i2} : 1]$.

Sia $U = \mathbb{P}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_t\}$, si definiscono i morfismi $f_i \colon U \to \mathbb{P}^1$ dati da:

$$f_i([x_1 : x_2 : x_3]) = [x_1 - a_{i1}x_3 : x_2 - a_{i2}x_3].$$

Si osserva che ogni f_i è ben definita per ogni punto $P \neq P_i$, quindi il dominio di f_i si può estendere a $\mathbb{P}^2 \setminus \{P_i\}$. Sia ora $f = (f_1, \ldots, f_t) \colon U \to \underbrace{\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1}_{t \text{volte}}$ il prodotto delle f_i, esso è un morfismo per la proposizione 3.16 punto (2); sia inoltre $G \subseteq U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ il grafico di f.

Siano X_1, X_2, X_3 le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2$ e Y_{i1}, Y_{i2} le coordinate omogenee per l'i-esima copia di $\mathbb{P}^1$. Sia

$$B = V(\{Y_{i1}(X_2 - a_{i2}X_3) - Y_{i2}(X_1 - a_{i1}X_3) \mid i = 1, \ldots, t\}) \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1.$$

Allora $B \supseteq G$ infatti un punto di G ha coordinate

$$\{[x_1 : x_2 : x_3]\} \times \{[x_1 - a_{11}x_3 : x_2 - a_{12}x_3]\} \times \cdots \times \{[x_1 - a_{t1}x_3 : x_2 - a_{t2}x_3]\},$$

con $[x_1 : x_2 : x_3] \in U$, e si vede facilmente che le equazioni che definiscono B sono verificate per ogni $i = 1, \ldots, t$. Inoltre si vedrà poi che B è la chiusura di G in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$.

Sia $\pi \colon B \to \mathbb{P}^2$ la restrizione della proiezione da $\mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ a $\mathbb{P}^2$, si definisce $E_i = \pi^{-1}(P_i)$. Si osservano dunque i seguenti fatti:

(1) $E_i = \{P_i\} \times \{f_1(P_i)\} \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \{f_t(P_i)\}$, dove $\mathbb{P}^1$ appare al posto i-esimo. Quindi E_i è isomorfo a $\mathbb{P}^1$, si osserva quindi che ogni E_i rappresenta la retta proiettiva L della sezione precedente.

(2) $B \setminus \bigcup_{i=1}^t E_i = B \cap (U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1) = G$, l'ultima disuguaglianza deriva da quanto già osservato precedentemente. Chiaramente $B \cap (U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1) \subseteq B \setminus \bigcup_{i=1}^t E_i$, perché se $Q = (\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_t) \in U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ allora $\bar{x} \notin \{P_1, \ldots, P_t\} \Rightarrow Q \notin E_i \ \forall i = 1, \ldots, t$. Viceversa sia $Q = (\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_t) \in B \cap (U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1)^{\complement} \Rightarrow \bar{x} = P_i$ per qualche i, allora siccome $Q \in B$ si deve avere $Q \in E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^t E_i$.

Quindi π si restringe a un isomorfismo tra $B \setminus \bigcup_{i=1}^t E_i$ e U, infatti $\pi^{-1}(\bar{x}) = (\bar{x}, f_1(\bar{x}), \ldots, f_t(\bar{x}))$.

(3) Se T è un qualsiasi cambio di coordinate proiettivo di $\mathbb{P}^2$, con $T(P_i) = P'_i$, e $f'_i \colon \mathbb{P}^2 \setminus \{P'_1, \ldots, P'_t\} \to \mathbb{P}^1$ sono definiti usando P'_i al posto di P_i, allora esistono dei cambi di coordinate proiettivi T_i su $\mathbb{P}^1$ tali che $T_i \circ f_i = f'_i \circ T$. Si definiscono i T_i in modo indipendente l'uno dall'altro: in un particolare sistema di riferimento si può supporre di avere $P_i = [0 : 0 : 1]$ e $P'_i = [a_{i1} : a_{i2} : 1]$, allora il cambio di coordinate T sarà della forma

$$T = (aX + bY + a_{i1}Z, cX + dY + a_{i2}Z, eX + fY + Z).$$

Preso

$$T_i = ((a - a_{i1}e)X + (b - a_{i1}f)Y, (c - a_{i2}e)X + (d - a_{i2}f)Y),$$

e ricordando che $f_i([x : y : z]) = [x : y]$, $f'_i([x : y : z]) = [x - a_{i1}z : y - a_{i2}z]$, si può verificare che T_i soddisfa la condizione $T_i \circ f_i = f'_i \circ T$.

In tal modo si definisce ogni T_i al variare di $i = 1, \ldots, t$. Se $f' = (f'_1, \ldots, f'_t)$, allora $(T_1 \times \cdots \times T_t) \circ (f_1 \times \cdots \times f_t) = (T_1 \circ f_i \times \cdots \times T_t \circ f_t) = (f'_i \circ T \times \cdots \times f'_t \circ T) = f' \circ T$. Inoltre $T \times T_1 \times \cdots \times T_t$ manda G, B, E_i in modo isomorfo sui corrispondenti G', B', E'_i costruiti a partire da f'.

(4) Se T_i è un cambio di coordinate proiettivo di $\mathbb{P}^1$ per qualche i, allora esiste un cambio di coordinate proiettivo di $\mathbb{P}^2$ tale che $T(P_i) = P_i$ e $f_i \circ T = T_i \circ f_i$. Infatti ci si può porre in un sistema di riferimento in cui $P_i = [0 : 0 : 1]$, e dato $T_i = (aX + bY, cX + dY)$ il cambio di coordinate su $\mathbb{P}^1$, allora si può verificare che

$$T = (aX + bY, cX + dY, Z),$$

soddisfa $f_i \circ T = T_i \circ f_i$, dove $f_i([x : y : z]) = [x : y]$.

(5) Si vuole studiare π in un intorno di un punto $Q \in E_i$ per qualche i; si può assumere $i = 1$, inoltre si può assumere di avere $P_1 = [0 : 0 : 1]$, e Q corrispondente a $[\lambda : 1] \in \mathbb{P}^1, \lambda \in k$ (eventualmente anche $\lambda = 0$), ovvero $Q = \{P_1\} \times [\lambda : 1] \times \{f_2(P_1)\} \times \cdots \times \{f_t(P_1)\}$.

Sia $\varphi_3 \colon \mathbb{A}^2 \to U_3 \subseteq \mathbb{P}^2$ l'usuale isomorfismo: $\varphi_3(x, y) = [x : y : 1]$. Sia $V = U_3 \setminus \{P_2, \ldots, P_t\}, W = \varphi_3^{-1}(V)$.

Sia $\psi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definito come nella sezione precedente da $\psi(x, z) = (x, xz)$; e sia $W' = \psi^{-1}(W)$. Si definisce $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ ponendo:

$$\varphi(x, z) = [x : xz : 1] \times [1 : z] \times f_2([x : xz : 1]) \times \cdots \times f_t([x : xz : 1]).$$

Allora φ è un morfismo essendo prodotto di morfismi, e $\pi \circ \varphi = \varphi_3 \circ \psi$, infatti:

$$\begin{aligned}(\pi \circ \varphi)(x, z) &= \pi([x : xz : 1] \times [1 : z] \times \cdots \times f_t([x : xz : 1]) = [x : xz]\\ (\varphi_3 \circ \psi)(x, z) &= \varphi_3(x, xz) = [x : xz : 1].\end{aligned}$$

Sia $V' = \varphi(W') = (\pi^{-1} \circ \varphi_3 \circ \psi)(W') = (\pi^{-1} \circ \varphi_3)(W) = \pi^{-1}(V)$ è aperto perché π è continua. Quindi $\pi^{-1}(V) = B \cap V \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 = B \setminus (\bigcup_{i>1} E_i \cup V(X_3)) \Rightarrow V' \supseteq E_1 \ni Q$, segue che tale V' è un intorno di Q in B.

(6) B è la chiusura di G in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$, e dunque B è una varietà. Infatti se S è un qualunque insieme chiuso in $\mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ che contiene G, allora dato che φ è continua $\varphi^{-1}(S)$ è chiuso in W' e contiene $\varphi^{-1}(G)$. Si dimostra che vale l'uguaglianza seguente: $\varphi^{-1}(G) = W' \setminus V(X)$, infatti:

- sia $P = (x, z) \in W' \cap V(X)$, allora $P = (0, z), \varphi(P) = P_1 \times [1 : z] \times f_2(P_1) \times \cdots \times f_t(P_1) \notin G$ perché $P_1 \notin U$ e $G \subseteq U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$, quindi $(W' \setminus V(X))^{\complement} \supseteq (\varphi^{-1}(G))^{\complement} \Rightarrow \varphi^{-1}(G) \subseteq W' \setminus V(X)$;
- sia $P \in W' \setminus V(X)$, allora $P = (x, z) \in W' \Leftrightarrow \varphi_3(\psi(x, z)) = [x : xz : 1] \in V \Leftrightarrow [x : xz : 1] \notin \{P_2, \ldots, P_t\}$, inoltre dato che $P \notin V(X) \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow [x : xz : 1] \neq P_1$. Ora, $f_1([x : xz : 1]) = [x : xz] = [1 : z]$, allora$\varphi(P) = [x : xz : 1] \times f_1([x : xz : 1]) \cdots \times f_t([x : xz : 1]) \in G \Rightarrow P \in \varphi^{-1}(G)$ e si è quindi dimostrata anche l'inclusione opposta.

Dato che $W' \setminus V(X)$ è aperto in W' è anche denso, quindi la chiusura di $\varphi^{-1}(G) = W' \Rightarrow \varphi^{-1}(S) = W'$. Segue che $S = \varphi(W') = V'$, quindi $Q \in S$, e essendo Q punto arbitrario di $B \setminus G$, allora $S \supseteq B$.

(7) Il morfismo da $\mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \setminus V(X_3 Y_{11})$ a $\mathbb{A}^2$ che manda $[x_1 : x_2 : x_3] \times [y_{11} : y_{12}] \times \ldots$ in $(x_1/x_3, y_{12}/y_{11})$, quando ristretto a V' è il morfismo inverso di φ, infatti:

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\frac{x_1}{x_3}, \frac{y_{12}}{y_{11}}\Big) &= \Big[\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{y_{12}}{y_{11}} : 1\Big] \times \Big[1 : \frac{y_{12}}{y_{11}}\Big] \times \ldots\\ &= \Big[x_1 : x_1 \cdot \frac{y_{12}}{y_{11}} : x_3\Big] \times [y_{11} : y_{12}] \times \ldots,\end{aligned}$$

siccome $V' \subseteq B$ allora i punti di V' devono soddisfare le equazioni che definiscono B e per $i = 1$, sempre con $P_1 = [0 : 0 : 1]$, segue che $x_2 = x_1 y_{12}/y_{11}$, quindi si ottiene quanto voluto. Quindi si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2 \arrow[d, "\psi"] & \supset & W' \arrow[r, "\varphi", "\approx"'] \arrow[d] & V' \arrow[d] & \subset & B \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{A}^2 & \supset & W \arrow[r, "\varphi_3", "\approx"'] & V & \subset & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

Si ha quindi che localmente $\pi\colon B \to \mathbb{P}^2$ è come la mappa $\psi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ della sezione precedente.

(8) Sia $\mathcal{C}$ un curva irriducibile in $\mathbb{P}^2$, siano $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap U$, e $\mathcal{C}'_0 = \pi^{-1}(\mathcal{C}_0) \subseteq G$, e sia $\mathcal{C}'$ la chiusura di $\mathcal{C}'_0$ in B. Allora π si restringe a un morfismo birazionale $f\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, infatti si ha un isomorfismo da $\mathcal{C}'_0$ a $\mathcal{C}_0$, aperti di $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente, tale isomorfismo è dovuto al fatto che $\mathcal{C}'_0 \subseteq G$ e dal punto (2) π si restringe a un isomorfismo tra G e U. Dal punto (7) si ha che f localmente assomiglia alla corrispondente mappa affine della sezione precedente.

Si può ora dimostrare la seguente:

Proposizione 4.10. *Sia $\mathcal{C}$ una curva piana irriducibile proiettiva, e si supponga che tutti i punti singolari di $\mathcal{C}$ siano ordinari, ovvero con tangenti distinte. Allora esiste una curva proiettiva non singolare $\mathcal{C}'$ e un morfismo birazionale f da $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Siano $P_1, \ldots, P_t$ i punti multipli di $\mathcal{C}$, si applicano i punti precedenti (1)-(8); quindi, fissato un $i = 1, \ldots, t$ si guarda $f\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ localmente intorno a ogni punto appartenente a $f^{-1}(P_i)$, si può quindi applicare il punto (2) della sezione precedente e si vede che ogni punto della controimmagine di P_i ha molteplicità 1 in $\mathcal{C}'$ dato che le tangenti dei punti P_i si sono supposte ordinarie. Ovvero si scoppiano tutti i punti P_i localmente per ogni i, e si è quindi risolta la singolarità. □

4.4 Modelli non singolari di curve

In generale la curva $\mathcal{C}'$ costruita con i passi appena visti, nonostante abbia migliori singolarità rispetto a $\mathcal{C}$, può avere ancora punti multipli nel caso in cui le tangenti alla curva nei punti singolari non siano ordinarie. Inoltre non è più una curva piana, dunque il processo non si può applicare nuovamente alla curva $\mathcal{C}'$ per ottenere una curva "migliore" $\mathcal{C}''$.

Per avere solo punti singolari ordinari nella curva $\mathcal{C}$ si utilizzano le *trasformazioni quadratiche*, di cui se ne dà solo un accenno. Dati i punti fondamentali $P = [0 : 0 : 1], P' = [0 : 1 : 0], P'' = [1 : 0 : 0]$, si definisce la mappa $Q\colon \mathbb{P}^2 \setminus \{P, P', P''\} \to \mathbb{P}^2$ dove $Q([x : y : z]) = [yz : xz : xy]$. Si può verificare che $Q = Q^{-1}$ su $U = \mathbb{P}^2 \setminus V(XYZ)$, in particolare Q è una mappa birazionale di $\mathbb{P}^2$ in sè stesso, Q è detta *trasformazione quadratica standard*. Partendo da Q, dato un qualsiasi cambio di coordinate proiettivo T, la composizione $Q \circ T$ è detta *trasformazione quadratica*. Vale il seguente:

Teorema 4.11. *Con una sequenza finita di trasformazioni quadratiche ogni curva piana irriducibile proiettiva può essere trasformata in una curva in cui tutti i punti singolari sono ordinari, ovvero le cui tangenti hanno tutte molteplicità 1.*

Teorema 4.12. *Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva. Allora esiste una curva proiettiva non singolare X e un morfismo birazionale f da X a $\mathcal{C}$. Se $f'\colon X' \to \mathcal{C}$ è un altro morfismo birazionale, allora esiste un unico isomorfismo $g\colon X \to X'$ tale che $f' \circ g = f$.*

Dimostrazione. Per l'esistenza della curva X si sfruttano una serie di risultati precedentemente visti. Dal corollario 3.31 segue che $\mathcal{C}$ è birazionalmente equivalente a una curva piana $\mathcal{C}'$, sia $f'\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tale mappa; dal teorema sopra, tramite l'utilizzo delle trasformazioni quadratiche, si può supporre che tale curva piana abbia solo punti singolari ordinari. Ora, dalla proposizione 4.10, si ottiene una curva non singolare X e un morfismo birazionale $f''\colon X \to \mathcal{C}'$; dunque esiste una mappa birazionale $f = f' \circ f''$ da X a $\mathcal{C}$. Che tale mappa sia un morfismo segue dal corollario 4.5, e dal fatto che X è curva liscia.

Sia ora $f'\colon X' \to \mathcal{C}$ è un altro morfismo birazionale, siano U, V, W aperti di $\mathcal{C}, X, X'$ rispettivamente tali che $f\colon V \to U, f'\colon W \to U$ sono isomorfismi. Si ponga $g = (f')^{-1} \circ f\colon V \to W$ è isomorfismo, dunque $g\colon X \to X'$ è una mappa birazionale e, dato che X è non singolare dal corollario 4.5, g è morfismo birazionale. Facendo un ragionamento analogo per g^{-1} si ottiene che anch'esso è morfismo birazionale, quindi g è isomorfismo.

Sia $g\colon X \to X'$ isomorfismo tale che $f' \circ g = f$, allora $k(X)$ è isomorfo a $k(X')$. Quindi dal corollario 4.6, essendo X e X' entrambe non singolari, tale isomorfismo g è unico. $\square$

Bibliografia

[1] W. Fulton, *Algebraic curves*, Advanced Book Classics, An introduction to algebraic geometry, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989, Online last version (January 2008).

[2] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Text in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.