



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Studio dell'instabilità di Rossby nei dischi circumstellari

Relatore

Prof. Francesco Marzari

Laureanda

Fabiola Antonietta Gerosa

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Obiettivo della tesi	2
1.2	Struttura della tesi	2
2	Teoria lineare	3
2.1	Equazione per l'instabilità e relazione di dispersione	3
2.2	Risultati	6
2.2.1	Salto a scalino in disco barotropico	6
2.2.2	Salto gaussiano in disco barotropico	8
2.2.3	Salto a scalino in disco non barotropico	9
2.3	Commenti e considerazioni	10
3	Teoria non lineare	13
3.1	Simulazioni e risultati	13
3.2	Commenti e considerazioni	18
4	Disco tridimensionale	21
4.1	Teoria lineare	21
4.2	Simulazioni	24
4.3	Cattura della polvere	27
4.4	Commenti e considerazioni	30
5	Conclusioni	31
	Bibliografia	33

Capitolo 1

Introduzione

I dischi circumstellari sono strutture formate da gas e polveri in orbita attorno ad una stella grazie all'attrazione gravitazionale esercitata da questa. Questi dischi vengono anche chiamati di accrescimento poiché in essi si instaurano dei meccanismi che causano flusso di materia verso il corpo centrale. In particolare, è fondamentale a riguardo il trasporto di momento angolare al di fuori del disco per permettere alle particelle di spiraleggiare verso il centro. Inoltre in essi si possono formare planetesimi, ossia oggetti rocciosi dovuti all'aggregazione di polvere che saranno lo step intermedio per la creazione di sistemi planetari.

In questo lavoro andrò ad analizzare l'instabilità di Rossby, avente origine da una perturbazione non assisimmetrica che crea vortici che servono a trasportare momento angolare all'esterno e a concentrare particelle nel loro centro. Questa teoria fu sviluppata grazie alla collaborazione di diversi scienziati a partire dal 1999, in analogia con la teoria di Rossby per le onde planetarie.

Le onde di Rossby sono strutture associate a zone di alta pressione tramite le quali il calore si propaga nell'atmosfera, ma che si possono ritrovare anche negli oceani. Esse furono identificate e studiate per la prima volta dal meteorologo svedese Carl-Gustaf Rossby nel 1939 (*articolo* [1]). Queste onde sono strettamente legate al concetto di vorticità potenziale, una quantità importante per la dinamica di fluidi rotanti, definita come $\mathcal{H} = \frac{(\nabla \times v) \cdot \hat{z}}{\Sigma} \approx \frac{\kappa^2}{2\Sigma\Omega}$, dove Σ è la densità superficiale, v è la velocità del fluido, Ω è la frequenza di rotazione e κ è la frequenza epicyclica radiale. Partendo infatti dalla conservazione di questa quantità, si può scrivere la fondamentale relazione di dispersione per il momento angolare $\Delta\omega = \frac{-\beta k_x}{k^2 + 1/a^2}$, con k numero d'onda e a il raggio di Rossby, che ci dà molte informazioni sull'onda, come la velocità di fase o la velocità di gruppo.

Al momento esistono varie teorie sul trasporto di momento angolare all'esterno, tra cui la più accreditata è quella della MRI (Magnetohydrodynamical rotational instability, descritta nell'*articolo* [2]) che individua la combinazione di un campo magnetico e della rotazione differenziale del disco come fonte della viscosità. Grazie alla MRI infatti si crea turbolenza nel disco, che causa a sua volta il sorgere di una "viscosità turbolenta", tramite la quale il momento angolare verrà rimosso per via dell'attrito tra le diverse regioni del disco. Questo fenomeno avviene però solo sotto particolari condizioni (es disco caldo e plasma

molto ionizzato) che risultano non soddisfatte in parecchi dischi. La questione rimane perciò ancora aperta e lo sforzo è quello di trovare una teoria che sia interamente idrodinamica.

Allo stesso modo ci sono molto studi che indagano la formazione di planetesimi nei dischi poiché, a causa delle elevate velocità relative tra le particelle di polvere, le collisioni tra esse non sembrano poter giustificare la formazione di aggregati di dimensioni maggiori. Una delle spiegazioni più conosciute è la Gravitational instability, in cui una massa si contrae e collassa, a causa della gravità, portando alla formazione di corpi di 10-15 km. Un'altra è la Streaming instability, in cui si ipotizza la presenza di grandi particelle di polvere, chiamate superparticelle, che si accoppiano mutuamente con il gas in modo molto forte, avendo come conseguenza una minore frammentazione dei solidi durante le collisioni a causa della riduzione della loro velocità relativa. Entrambe le teorie presentano numerosi problemi, a partire dalle difficili condizioni richieste per l'instaurarsi delle instabilità stesse. Si pensa che quindi la formazione di vortici nel disco possa essere il giusto scenario per la concentrazione di solidi.

1.1 Obiettivo della tesi

Obiettivo della tesi è descrivere dettagliatamente la teoria dell'instabilità di Rossby, elaborandone i vari aspetti, studiandone le conseguenze e risultati ottenuti a riguardo e cercando di capire la sua importanza nella possibilità di risolvere alcuni problemi dell'astrofisica dei dischi circumstellari tutt'oggi ancora aperti.

1.2 Struttura della tesi

La tesi è divisa in tre capitoli. Nel *capitolo 2* verrà trattata la teoria lineare della RWI, così come teorizzata per la prima volta da Lovelace et al. nell'*articolo* [3] e da Li et al. nell'*articolo* [4], riassumendone poi i risultati. Se ne descriveranno anche le conseguenze e si procederà infine a un confronto con altre instabilità. Nel *capitolo 3* si seguirà il lavoro di Li et al. (contenuto nell'*articolo* [5]) per capire l'evoluzione non lineare della teoria nel contesto della comprensione del meccanismo di trasporto del momento angolare e di accrescimento del disco. Si parlerà inoltre della saturazione dell'instabilità, rifacendoci all'*articolo* [6] di Meheut et al. Infine nel *capitolo 4* si parlerà dell'evoluzione dell'instabilità di Rossby nei dischi tridimensionali, usando la teoria di Meheut et al. (contenuta nell'*articolo* [7]) e le sue varie simulazioni a riguardo (*articoli* [8], [9] e [10]) per studiare l'evoluzione dei vortici di Rossby nei dischi reali e la loro utilità nella concentrazione di solidi per arrivare alla formazione di planetesimi. Infine, nell'ultimo capitolo, si esporranno le conclusioni del presente lavoro.

Capitolo 2

Teoria lineare

In questo lavoro si utilizzano ipotesi semplificate, considerando dischi kepleriani non magnetizzati, con autogravità trascurabile e sottili (per cui si userà un'approssimazione bidimensionale). Partiamo considerando un disco in equilibrio in cui il profilo di densità presenta un eccesso ad un certo raggio r_0 . Esso è dovuto a materia che si accumula in una certa zona creando un salto di larghezza Δ_r e ampiezza \mathcal{A} . Si analizzano due tipi di salti:

$$\begin{aligned} \text{a scalino (SJ)} \quad & \frac{\Sigma}{\Sigma_0} = 1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \left[\tanh\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right) + 1 \right] \\ \text{e gaussiano (BG)} \quad & \frac{\Sigma}{\Sigma_0} = 1 + (\mathcal{A}-1) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Inoltre consideriamo sia dischi barotropici, per i quali $P = P(\Sigma)$, che dischi non barotropici per i quali $P = P(\Sigma, T)$. In questo secondo caso andrà anche fornito il profilo di temperatura del disco che a sua volta potrà avere un salto a scalino o gaussiano. In tutti i casi si potrà poi ricavare il profilo di pressione assumendo un'equazione di stato per i gas ideali $P \propto \Sigma T$.

2.1 Equazione per l'instabilità e relazione di dispersione

Si scelga un sistema di coordinate cilindriche (r, ϕ, z) e si consideri un disco con equilibrio iniziale stazionario ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), assisimmetrico ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$), con velocità del flusso pari a $v = v_\phi(r)\hat{\phi}$, mentre v_r viene trascurato. Infine il potenziale gravitazionale è dato da $\Phi(r) = -GM/r$ e l'equazione per l'equilibrio radiale risulta quindi essere $\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{1}{\Sigma} \frac{dP}{dr} + \frac{d\Phi}{dr}$.

Partiamo dalle equazioni di Eulero e andiamo a perturbarle al primo ordine. Consideriamo la densità di massa $\tilde{\Sigma} = \Sigma + \delta\Sigma(r, \phi, t)$, la pressione $\tilde{P} = P + \delta P(r, \phi, t)$ e la velocità del flusso $\tilde{v} = v + \delta v(r, \phi, t)$. Ovviamente nel limite per dischi sottili si lavora con densità e pressione già integrate verticalmente. Abbiamo quindi l'equazione di continuità per il disco perturbato:

$$\frac{D\tilde{\Sigma}}{Dt} + \tilde{\Sigma} \nabla \cdot \tilde{v} = 0 \tag{2.1}$$

e l'equazione del momento:

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = -\frac{1}{\tilde{\Sigma}}\nabla\tilde{P} - \nabla\Phi \quad (2.2)$$

dove $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$ è la derivata materiale. Assumendo poi che il flusso del nostro disco abbia comportamento adiabatico, si ottiene l'equazione:

$$\frac{D}{Dt} \frac{\tilde{P}}{(\tilde{\Sigma})^\Gamma} = 0 \quad (2.3)$$

detta anche equazione di isoentropia, avendo definito l'entropia del disco $S=P/\Sigma^\Gamma$, dove Γ è l'indice adiabatico. Di conseguenza la velocità del suono nel disco è data da $c_s^2 = (\Gamma P/\Sigma)$.

Andiamo ora a linearizzare le equazioni, considerando perturbazioni del tipo $\propto f(r)\exp(im\phi - i\omega t)$, ossia non-assisimmetriche e dipendenti dal tempo, dove m è il numero azimutale e ω è la frequenza del modo. Definisco inoltre $\Psi = \delta P/\Sigma$, che da qui in poi sarà la variabile chiave. Dall'equazione (2.1) ottengo:

$$i\Delta\omega\delta\Sigma = \nabla \cdot (\Sigma\delta v) \quad (2.4)$$

dove $\Delta\omega = \omega - m\Omega$, con $\Omega = v_\phi/r \approx (GM/r^3)^{(1/2)}$ la frequenza kepleriana. Dalla (2.2):

$$\Sigma\delta v_r = i\mathcal{F}\left[\frac{\Delta\omega}{\Omega}\left(\Psi' - \frac{\Psi}{L_s}\right) - 2k_\phi\Psi\right] \quad (2.5)$$

e

$$\Sigma\delta v_\phi = \mathcal{F}\left[-k_\phi\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega} + \frac{c_s^2}{\Delta\omega\Omega L_s L_p}\right)\Psi + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2}\left(\Psi' - \frac{\Psi}{L_s}\right)\right] \quad (2.6)$$

dove $k_\phi = m/r$ è il numero d'onda azimutale, $\kappa^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d(r^4\Omega^2)}{dr}$ la frequenza radiale epicyclica che per un disco in modo kepleriano è $\approx \Omega$, $L_s = \Gamma/[\frac{d}{dr}\ln(\frac{P}{\Sigma^\Gamma})]$ la scala di lunghezza della variazione di entropia e $L_p = \Gamma/[\frac{d}{dr}\ln P]$ la scala di lunghezza della variazione di pressione. Inoltre $\mathcal{F}(r) = \frac{\Sigma\Omega}{\kappa^2 - \Delta\omega^2 - c_s^2/(L_s L_p)} \approx \frac{\Sigma\Omega}{\kappa^2} = \frac{1}{2\mathcal{H}}$, dove \mathcal{H} è la vorticità potenziale. Dalla (2.3) abbiamo infine:

$$\delta\Sigma = \frac{\Sigma}{c_s^2}\Psi + i\frac{\Sigma\delta v_r}{\Delta\omega L_s} \quad (2.7)$$

Da queste quattro equazioni si ricava

$$\Psi'' + B(r)\Psi' + C(r)\Psi = 0 \quad (2.8)$$

dove $B(r) = \frac{1}{r} + \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} - \frac{\Omega'}{\Omega}$ e $C(r) = -k_\phi^2 - \frac{\kappa^2 - \Delta\omega^2}{c_s^2} - 2k_\phi \frac{\Omega\mathcal{F}'}{\Delta\omega\mathcal{F}} - \frac{1-L'_s}{L_s^2} - \frac{B(r)+4k_\phi\Omega/\Delta\omega}{L_s} - \frac{k_\phi^2 c_s^2/\Delta\omega^2 - 1}{L_s L_p}$.

Si deve ora risolvere l'equazione (2.8) per trovare quando è possibile il sorgere dell'instabilità, che è in generale un'equazione differenziale complessa del secondo ordine. Per avere una soluzione analitica si considerano la variabile Ψ dipendente da r tramite $\Psi \propto \exp(ik_r r)$ e si approssima $\mathcal{F} \approx \Sigma/\Omega$. Si esplicitano quindi i termini dominanti ottenendo:

$$\frac{k^2\Sigma}{\Omega^2}\Psi + \frac{\Sigma}{c_s^2}\Psi + \frac{2k_\phi\Sigma}{\Delta\omega\Omega}(\ln\mathcal{L})'\Psi + \frac{k_\phi^2 h^2 \Sigma}{\Delta\omega^2 L_s L_p}\Psi = 0 \quad (2.9)$$

2.1. EQUAZIONE PER L'INSTABILITÀ E RELAZIONE DI DISPERSIONE 5

con $k^2 = k_r^2 + k_\phi^2$ e $h = c_s/\Omega$. Si arriva quindi a:

$$\Delta\omega = -\frac{k_\phi c_s^2/\Omega}{1+k^2 h^2} \left[(\ln\mathcal{L})' \pm \sqrt{[(\ln\mathcal{L})']^2 - \frac{1+k^2 h^2}{L_s L_p}} \right] \quad (2.10)$$

Questa equazione è detta relazione di dispersione, in analogia con la relazione di dispersione per le onde di Rossby. Nelle precedenti equazioni abbiamo utilizzato la funzione $\mathcal{L}(r) = \mathcal{F}(r)S(r)^{2/\Gamma} \approx (\Sigma\Omega/\kappa^2)S^{2/\Gamma}$. Dalla teoria sappiamo che l'instabilità è possibile solo se la parte immaginaria dell'equazione (2.10) è diversa da zero (ossia se $[(\ln\mathcal{L})']^2 < \frac{1+k^2 h^2}{L_s L_p}$) e se contemporaneamente la parte reale si annulla, in modo da avere un'onda con frequenza puramente immaginaria. Avremo quindi instabilità solo se $[\ln(\mathcal{L}(r))]'$ si azzeri ad un certo raggio r , ossia se $\mathcal{L}(r)$ presenta un massimo o un minimo. Per avere un tale estremo basta che nel disco sia presente un estremo di densità, temperatura, pressione o vorticità, ricordando che $\mathcal{F} = \frac{1}{2H}$, e tutti i salti considerati nel presente lavoro (scalino e gaussiano) andranno a soddisfare questa condizione necessaria.

In particolare, riscrivendo

$$\mathcal{L}(r) \approx \frac{\Sigma\Omega S^{2/\Gamma}}{\kappa^2} \propto \frac{\Omega}{\kappa} \Sigma^{(2/\Gamma)-2} T^{2/\Gamma} \quad (2.11)$$

notiamo subito che per i dischi non barotropici un estremo di $\mathcal{L}(r)$ sarà maggiormente dovuto a una variazione di $T(r)$ che di $\Sigma(r)$.

A questo punto possiamo ricavare il massimo tasso di accrescimento dell'instabilità $\omega_i = \text{Im}(\omega)$, imponendo $(\ln\mathcal{L})' = 0$ nell'equazione (2.10)

$$\frac{\max(\omega_i)}{\Omega} \approx \frac{k_\phi h}{(1+k^2 h^2)^{1/2}} \frac{c_s}{v_\phi} \left(\frac{r^2}{L_s L_p} \right)^{1/2} \quad (2.12)$$

Dall'equazione (2.10) si nota inoltre che per un massimo di $\mathcal{L}(r)$ la velocità di gruppo radiale $v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k_r} = \frac{\partial\Delta\omega}{\partial k_r} \approx \frac{2k_r k_\phi \Omega c_s^4}{(\Omega^2 + k^2 c_s^2)^2} (\ln\mathcal{L})'$ è > 0 per $r < r_0$, essendo $\mathcal{L} > 0$ in questa zona, e viceversa per $r > r_0$. L'onda sarà quindi sempre diretta verso r_0 nel caso di un massimo. Per un minimo invece avviene l'esatto opposto e l'onda si propaga allontanandosi da r_0 . Saremo quindi interessati al primo caso in cui le onde saranno intrappolate vicino a r_0 , rendendo non più necessaria la richiesta di avere condizioni al contorno riflettenti agli estremi del disco, necessaria invece per altre teorie (es Papaloizou & Pringle instability, articolo [12], in cui l'onda si amplifica passando più volte attraverso il raggio di corotazione, grazie alle numerose riflessioni operate dagli estremi), ma chiaramente non fisica.

2.2 Risultati

L'equazione (2.8) è stata risolta tramite metodi numerici nell'articolo [4]. Si è discretizzata l'equazione, andando così ad ottenere una matrice tridiagonale. Se ne sono quindi calcolati gli autovalori complessi ω tramite il metodo di Nyquist, per poi ricavare le radici e i poli e poter così risolvere l'equazione per la corrispondente funzione d'onda Ψ . Per questa risoluzione è necessario porre le giuste condizioni al contorno. Sono state scelte condizioni periodiche nella direzione azimutale e condizioni radiative per la direzione radiale, tali per cui l'onda può propagarsi liberamente verso l'esterno, minimizzando gli effetti di riflessione agli estremi. Inoltre, per quanto detto fino ad ora sulle onde intrappolate vicino a r_0 , si capisce che gli estremi del disco saranno molto lontani dal luogo del salto, per cui si ha che i risultati essenzialmente non dipendono dal raggio r_1 dell'estremo interno e r_2 di quello esterno. In questo caso si sono scelti $r_1/r_0 = 0.6$ e $r_2/r_0 = 1.4$.

Nei risultati computazionali presentati successivamente il salto è stato posizionato al raggio $r_0 = 1$, si è scelto l'indice adiabatico $\Gamma = 5/3$, tipico dei gas monoatomici, e la larghezza del salto $\Delta r/r_0 = 0.05$. Sono stati inoltre scelti dei valori di ampiezza \mathcal{A} tali che i salti possano superare il valore di soglia per l'instabilità. Infine la scelta del modo è stata fatta nel range $3 \leq m \leq 6$ in cui si trovano i maggiori valori di tasso di accrescimento ω_i .

2.2.1 Salto a scalino in disco barotropico

Partiamo dal caso barotropico notando che l'equazione (2.8) andrà notevolmente a semplificarsi poiché sotto queste condizioni si ha $L_s \rightarrow \infty$. È stato scelto un salto di ampiezza $\mathcal{A} = 0.65$. Scelto $m = 3$ si trova che il modo più instabile ha $\omega_i/\Omega_0 \approx 0.154$ e frequenza reale $\omega_r/(m\Omega_0) \approx 0.92$.

Consideriamo ora l'equazione (2.8) semplificata, poiché $B(r)$ risulta molto minore di $C(r)$, per cui $\psi'' + C(r)\psi = 0$, dove quindi $C(r)$ sarà il potenziale effettivo in analogia con la meccanica quantistica. Dalla figura (2.1) vediamo che la regione $0.95 < r/r_0 < 1.05$ risente maggiormente della presenza del salto e nella figura (2.2) si nota che in questa zona il potenziale efficace ha parte reale negativa, che corrisponde alla possibilità di creazione di stati legati. Nella regione $r/r_0 < 0.8$ il potenziale va come $-r^3$, nella regione $r/r_0 > 1.2$ va come $-\text{const}$. Ciò che resta da indagare sono invece le zone intermedie, dove il potenziale è positivo. A causa di ciò le onde restano intrappolate all'interno della regione $0.95 < r/r_0 < 1.05$. Esiste però una probabilità non nulla di passaggio attraverso le barriere di potenziale così che l'onda riesca a propagarsi verso le zone interne ed esterne del disco tramite effetto tunnel. In figura (2.3) vediamo le autofunzioni ricavate risolvendo l'equazione, che come si nota hanno ampiezza massima in corrispondenza del raggio in cui si è trovato il potenziale maggiormente negativo, che poi diminuisce allontanandosi da r_0 .

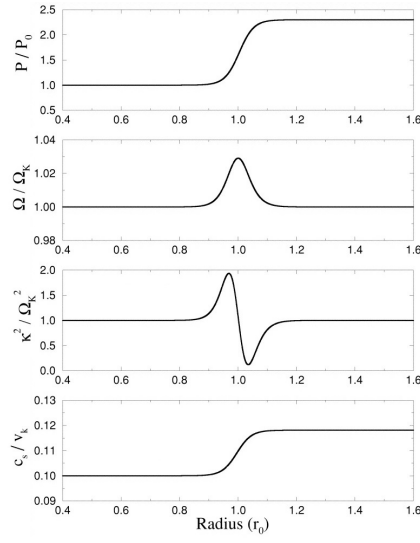


Figura 2.1: Parametri iniziali per il salto a scalino nella pressione di un disco barotropico.

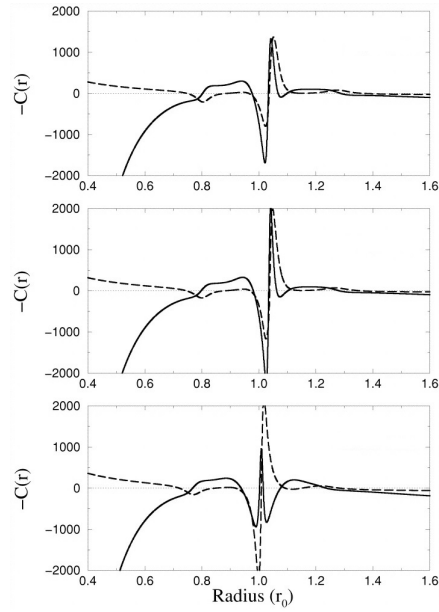


Figura 2.2: In figura vediamo il potenziale efficace $-C(r)$ per i vari casi, di cui la linea continua è la parte reale, quella tratteggiata è la parte complessa. Dall'alto al basso abbiamo: salto a scalino in disco barotropico, salto a scalino in disco non barotropico e salto gaussiano in disco barotropico.

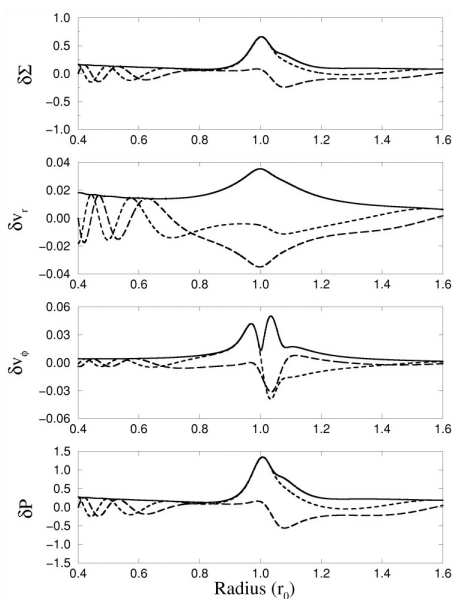


Figura 2.3: In figura vediamo le autofunzioni radiali per il salto a scalino nel disco barotropico, dove la linea continua rappresenta l'ampiezza, quella tratteggiata la parte reale e quella tratteggiata lunga l'immaginaria.

2.2.2 Salto gaussiano in disco barotropico

È stato scelto un salto di ampiezza $\mathcal{A} = 1.25$. In questo caso per $m = 3$ si trova $\omega_i/\Omega_0 \approx 0.21$ e $\omega_r/(m\Omega_0) \approx 0.98$.

In questo caso l'instabilità ha un tasso di accrescimento più alto degli altri casi poiché il salto gaussiano riesce ad intrappolare meglio le onde. Questo si nota confrontando le *figure* (2.1) e (2.4): $d(\Omega/\Omega_k)/dr$ è maggiore di zero ad entrambi gli estremi del salto, per cui $\kappa^2 > \Omega_K^2$ a questi estremi, che si traduce in ben due zone in cui le onde possono essere confinate, come visibile in *figura* (2.2). Il risultato è particolarmente interessante poiché l'evoluzione non lineare dell'instabilità sarà proprio dovuta all'interazione delle due onde. Le autofunzioni vengono mostrate in *figura* (2.5) e si trova ancora consistenza tra i risultati.

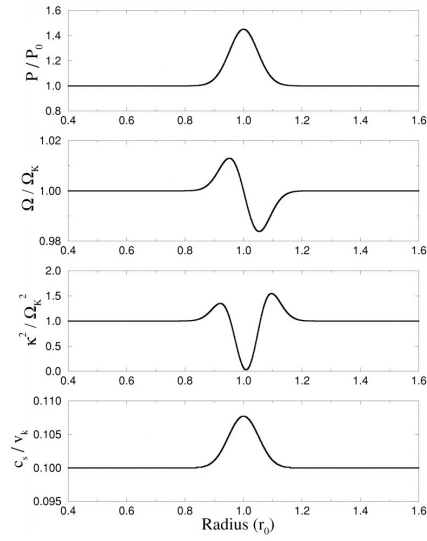


Figura 2.4: Parametri iniziali per il salto gaussiano nella pressione di un disco barotropico.

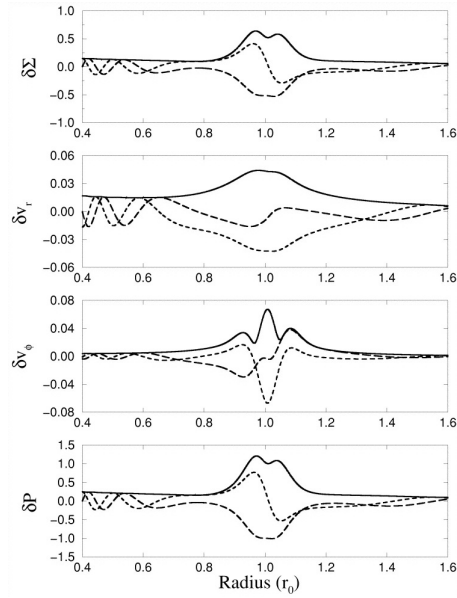


Figura 2.5: In figura vediamo le autofunzioni radiali per il salto gaussiano nel disco barotropico, con la stessa legenda utilizzata prima.

2.2.3 Salto a scalino in disco non barotropico

Per completezza andiamo anche ad analizzare un caso in cui consideriamo il nostro fluido non barotropico. È stato scelto un salto di ampiezza $\mathcal{A} = 0.52$.

Per $m = 3$ si ottiene $\omega_i/\Omega_0 \approx 0.176$ e $\omega_r/(m\Omega_0) \approx 0.93$.

Questo caso ha sostanzialmente gli stessi risultati del primo caso, pur necessitando di un'ampiezza del salto minore che si traduce in un miglior intrappolamento delle onde come visibile in *figura (2.2)*. Il motivo è che nel caso non barotropico consideriamo anche un salto nella temperatura che come abbiamo già visto nell'*equazione (2.11)* è più efficace di un salto in $\Sigma(r)$.

2.3 Commenti e considerazioni

Uno dei risultati più interessanti su questa teoria è che, come già detto, ci sono vari modi in cui la stabilità può instaurarsi (salti nel profilo di densità, temperatura o pressione, o più in generale a causa di un estremo della vorticità) ed è quindi molto facile trovare un disco in cui la richiesta di un estremo in $\mathcal{L}(r)$ sia soddisfatta. Ad esempio, può instaurarsi un salto di densità ai bordi delle "zone morte", porzioni del disco con bassa viscosità. Si ha che la zona interna dei dischi è ionizzata per via delle collisioni, la zona esterna per via dei raggi cosmici, ma ci sono zone intermedie in cui il gas è così poco ionizzato da non essere accoppiato col campo magnetico, di modo che la MRI non riesce ad agire e l'accrescimento dovrebbe essere qui inibito per via della conseguente bassa viscosità. Queste zone morte sono invece state studiate approfonditamente nell'*articolo [13]* e si vede dalle varie simulazioni che la loro presenza causa un salto di densità nel profilo del disco: il gas si accumula agli estremi della zona, essendo l'accrescimento molto più basso all'interno. Questo fa scattare l'instabilità di Rossby che riuscirà a questo punto a mantenere l'accrescimento alto anche nella zona morta. La RWI ha infatti la particolarità di non essere inibita dalle basse viscosità, ma si è anzi visto che è addirittura più efficace in questi casi che nei casi di dischi molto viscosi (*articolo [14]*). Un altro meccanismo in grado di triggerare l'instabilità è la formazione di pianeti che creano gap nel disco, ai cui estremi si formano onde di shock in grado di causare un estremo nella vorticità potenziale. Altri possono ancora essere: la presenza di una "snow line", nei dintorni della quale si creano salti nell'entropia, o l'alternanza di zone attive e quiescenti nei sistemi binari X-Ray.

Siamo ora interessati al confronto tra varie instabilità. Per iniziare, abbiamo già visto come le condizioni sulla RWI siano molto più realistiche di quelle necessarie per altre instabilità idrodinamiche, come la Papaloizou & Pringle instability. L'instabilità di Rossby ha poi la caratteristica vantaggiosa di non necessitare di plasma completamente ionizzato per essere attiva, fatto che la distingue sostanzialmente dalla MRI, e risulta quindi fondamentale per spiegare l'accrescimento dei dischi formati da fluidi con diverse caratteristiche.

Infine, questa teoria è interessante perché si trova da molti studi che, per via della bassa soglia e dell'alto tasso di accrescimento, l'RWI è l'instabilità predominante in vari dischi, risultando più importante di altre perturbazioni. Ad esempio è interessante notare che il criterio di Solberg-Hoiland

$$\kappa^2(r) + \frac{1}{\Sigma} \frac{dP}{dr} \left(\frac{1}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dr} - \frac{1}{\Gamma P} \frac{dP}{dr} \right) > 0 \quad (2.13)$$

condizione locale per la stabilità assisimmetrica, viene violato solo per valori di ampiezza del salto \mathcal{A} superiori ad un certo valore $\mathcal{A}_{critico}$ molto alto, mentre per

una perturbazione non-assisimmetrica questo valore critico risulta decisamente inferiore. Ci saranno quindi casi in cui il disco sarà stabile per perturbazioni assisimmetriche, ma sarà comunque soggetto a instabilità di Rossby.

In generale, capiamo bene da questi confronti l'importanza della RWI nello spiegare l'accrescimento di molti dischi, non analizzabili con altre teorie.

Capitolo 3

Teoria non lineare

L' applicazione non lineare dell'instabilità di Rossby serve a spiegare il trasporto del momento angolare verso l'esterno e il conseguente accrescimento di materia verso la stella. Generalmente si trovano tre fasi nell'evoluzione di dischi sotto l'influenza di instabilità:

- perturbazione iniziale e sua crescita esponenziale
- produzione di vortici anticiclonici
- interazione dei vortici col flusso di background e formazione di spirali globali

Questi ultimi due stadi sono importanti per il trasporto di momento angolare e per l'accrescimento e verranno analizzati in questo capitolo. Parleremo inoltre dell'evoluzione dei vortici nel tempo, della loro saturazione e unione.

3.1 Simulazioni e risultati

Consideriamo ancora un disco bidimensionale, non magnetizzato e non sottoposto ad autogravità, su cui agiscono le stesse condizioni iniziali del *capitolo 2*, con salti gaussiani o a scalino nel profilo di densità e di temperatura del disco, e conseguentemente nella pressione. Le equazioni di Eulero perturbate sono state risolte nell'*articolo* [5] tramite il metodo numerico di Masset(2000), adattato al nostro caso specifico. Si sono impostate le stesse condizioni al contorno della teoria lineare ma con $r_1/r_0 = 0.4$ e $r_2/r_0 = 2.0$. Sono state quindi fatte 12 diverse simulazioni usando tempi scala $t=126$ in unità di rivoluzioni a r_0 , che corrispondono a 20 orbite a r_0 , 80 a r_1 , 7 a r_2 . Questo tempo permette alla perturbazione iniziale di evolversi e successivamente alla interazione non lineare di svilupparsi. Ognuna di queste simulazioni ha perturbazione iniziale, valore di \mathcal{A} , valori di Δr e m diversi. È stata infine fatta un'ultima simulazione partendo da una perturbazione iniziale random per un tempo $t=200$.

Cominciamo col dire che i risultati trovati nelle simulazioni per le prime orbite sono in perfetto accordo con i risultati della teoria lineare. In *figura* (3.1) si vede chiaramente una crescita esponenziale, come ci aspettiamo, e si possono ricavare i valori di ω_r e ω_i perfettamente compatibili con i valori sopra predetti.

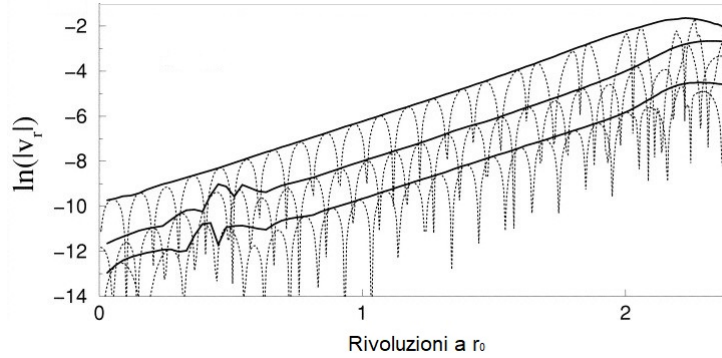


Figura 3.1: In figura un esempio delle prime orbite di una delle simulazioni a tre punti fissati: in alto $(1.0, 0, 0)$, in centro $(0.7, 0, 0)$, in basso $(1.3, 0, 0)$. Le linee continue ci danno la crescita dell'onda, le curve tratteggiate l'ampiezza della velocità radiale.

Ora però ci concentreremo sull'evoluzione non lineare. In figura (3.2) si possono vedere gli effetti globali dell'instabilità sul disco in due diverse simulazioni. Da queste simulazioni si nota la presenza di vortici e onde di shock nei pressi di r_0 . I vortici generano poi onde che si propagano alla velocità del suono verso l'interno e l'esterno, grazie all'effetto tunnel di cui sopra parlato, che, nell'incontro con in flusso di background del disco, evolvono in spirali di densità globali.

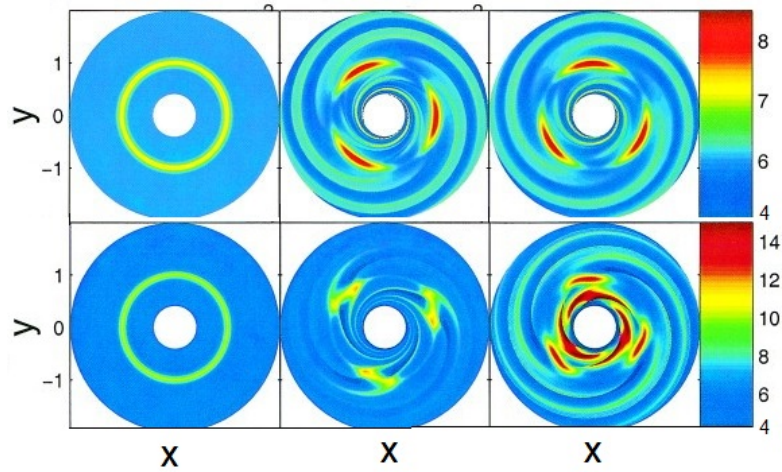


Figura 3.2: Nella figura in alto possiamo vedere l'evoluzione del disco per 0, 7 e 20 orbite. Nella figura in basso invece si sono scelti i tempi di 0, 3 e 20 orbite. Il disco è studiato sul piano (x, y) e codice colore è legato alla pressione.

Concentriamoci innanzitutto sulla formazione di vortici. Tra le varie simulazioni scegliamo due barotropiche con salto gaussiano, aventi $\Delta r = 0.05$ e rispettivamente $\mathcal{A} = 1.12$ e $\mathcal{A} = 1.35$. Scegliamo di analizzare solo salti gaussiani

perché, per quanto detto nel *capitolo 2*, daranno origine a zone di alta pressione ben localizzate e quindi più semplici da analizzare. Nella prima simulazione, corrispondente alla porzione in alto della *figura (3.2)* abbiamo di conseguenza un growth rate $\omega_i = 0.1$, nella seconda, sempre visibile in *figura (3.2)* ma in basso, abbiamo $\omega_i = 0.27$. Questo giustifica i tempi di evoluzione più brevi della seconda simulazione. Inoltre per entrambe è stato scelto il modo azimutale $m = 3$ che corrisponde al numero di vortici formati. Il flusso principale nel disco rimane comunque di tipo kepleriano, ma si vede chiaramente la formazione di vortici anticiclonici, corrispondenti a zone di alta pressione, conseguenza diretta dell'instabilità di Rossby. Sostanzialmente ciò che succede è che quando si crea un gradiente non-assisimmetrico di pressione, v_ϕ diminuisce se la forza $-\partial P/\partial\phi$ è negativa, per cui il bilancio tra gravità e rotazione si rompe e il flusso si muove verso l'interno. Il flusso si muove invece verso l'esterno quando la forza è positiva e l'insieme dei due effetti dà la formazione degli anticicloni. Dopo essersi formati i vortici restano bloccati nei dintorni di r_0 e si muoveranno attorno al disco con velocità molto simile al flusso di background, ma dipendente dal modo azimutale m . Per questo motivo l'ultima simulazione, avente perturbazione iniziale random, data dalla presenza simultanea di diversi modi azimutali, porta al lento merging dei vortici iniziali fino ad avere un unico vortice finale, come visibile in *figura (3.3)*.

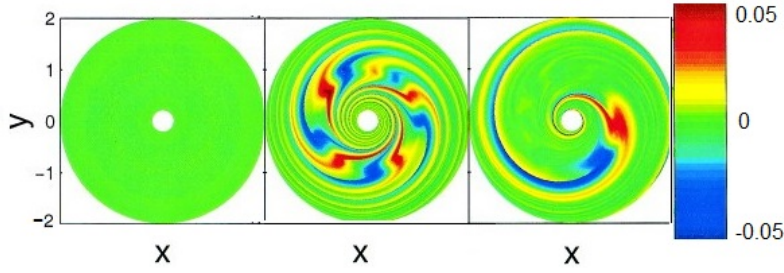


Figura 3.3: Simulazione con condizioni iniziali random per 0, 4 e 32 orbite. Il codice colore riguarda questa volta la velocità radiale e un singolo vortice è dato dall'insieme di una zona blu e una rossa.

Parliamo ora della formazione di onde di shock. Si parla di shock quando un'onda si muove più velocemente della velocità del suono locale. Per cui, presi due punti r_1 e r_2 equidistanti da r_0 , richiediamo che $v_\phi(r_2) - v_\phi(r_1) \geq 2c_s$, ottenendo la condizione di shock nei dischi kepleriani:

$$\frac{|r_2 - r_1|}{r_0} \geq 2 \frac{c_s}{v_\phi(r_0)} \quad (3.1)$$

La prima delle simulazioni resta nei limiti, mentre il secondo vortice ha larghezza radiale che supera la *condizione (3.1)* dando origine alla formazione di shocks. Dalla *figura (3.4)* vediamo 4 braccia. A e C sono shocks: creano un grosso salto di pressione, producono molta entropia e le loro linee di flusso cambiano direzione rapidamente. B e D sono invece dati dall'incontro tra le onde di shock e il flusso di background, non danno variazione di entropia nonostante l'importante variazione di pressione e hanno linee di flusso morbide. Nella prima

simulazione non si creano invece shock e di conseguenza non si hanno grossi cambiamenti di entropia.

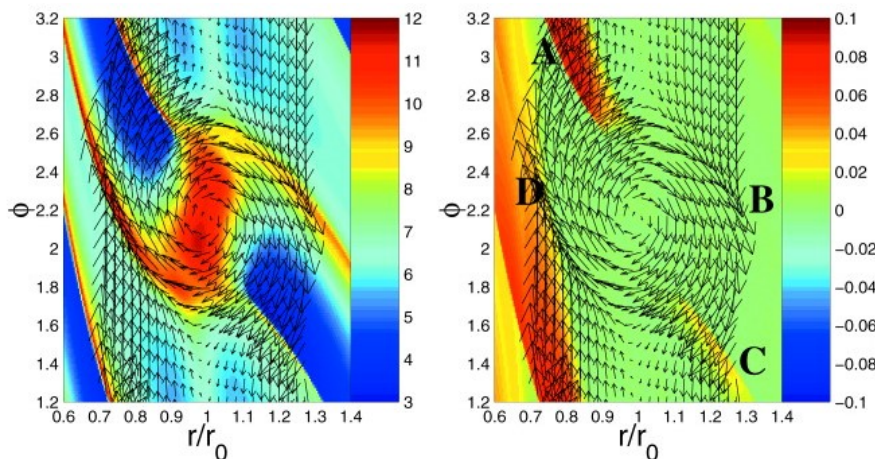


Figura 3.4: Visione ravvicinata di uno dei vortici della seconda simulazione dopo 3 orbite nel piano (r, ϕ) . Il codice colore dell'immagine a sinistra è sempre legato alla pressione, quello dell'immagine a destra è legato all'entropia.

Parliamo infine del trasporto del momento angolare: esso ovviamente si conserva ma si può ridistribuire nel disco. Possiamo scrivere il flusso radiale di momento angolare:

$$r^2(v_\phi \langle \Sigma \delta v_r \rangle + \langle \Sigma \delta v_r \delta v_\phi \rangle) \quad (3.2)$$

dove $\langle \rangle$ rappresenta la media su ϕ e $T_{r\phi} = \langle \Sigma \delta v_r \delta v_\phi \rangle$ è chiamato il tensore di Reynolds. Il primo termine indica il flusso radiale di materia, il secondo il trasporto radiale di momento angolare. Perché il momento venga trasportato verso l'esterno, δv_r e δv_ϕ devono avere correlazione positiva. Nel nostro caso abbiamo che vicino ai vortici il gradiente di pressione nella direzione azimutale, essendo non nullo, causa una variazione di v_ϕ , che causa a sua volta una variazione di v_r a causa dell'equilibrio radiale, per cui si ottiene sempre una correlazione positiva tra i due termini. Per quantificare il ruolo dei vortici nel trasporto del momento angolare, possiamo definire la seguente quantità:

$$\langle \alpha \rangle = \langle T_{r\phi} / P \rangle \quad (3.3)$$

e riportiamo in *figura* (3.5) e (3.6) il trasporto di momento angolare rispettivamente per la prima e la seconda simulazione. Per la seconda si può vedere che il trasporto maggiore di momento angolare si ha in vicinanza delle regioni di shock e che in generale ha un'efficienza circa 30 volte maggiore della prima, ma per entrambe le simulazioni è interessante notare che il tensore di Reynold risulta essere positivo e che il trasporto si mantiene ancora molto forte anche dopo 20 orbite.

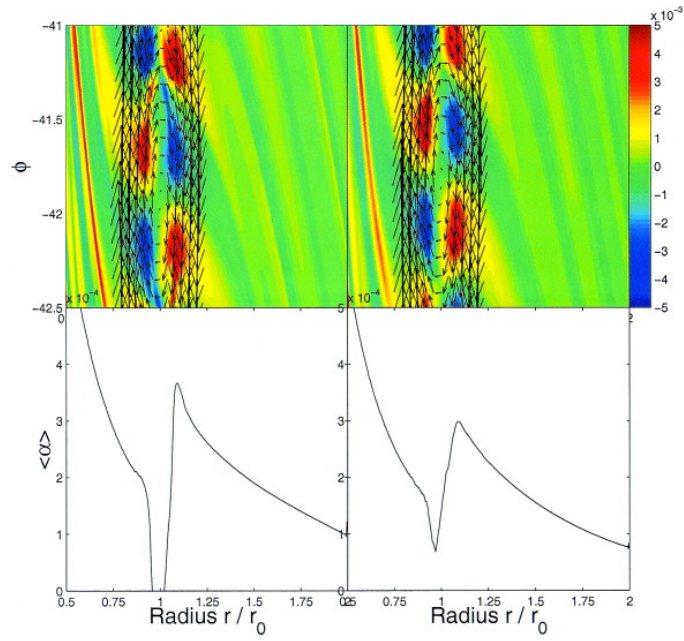


Figura 3.5: Risultati per il trasporto del momento angolare per la prima simulazione a 7 orbite (sinistra) e 20 (destra). Il codice colore della figura in alto sta per la distribuzione di $\langle \alpha \rangle$ nel piano (r, ϕ) .

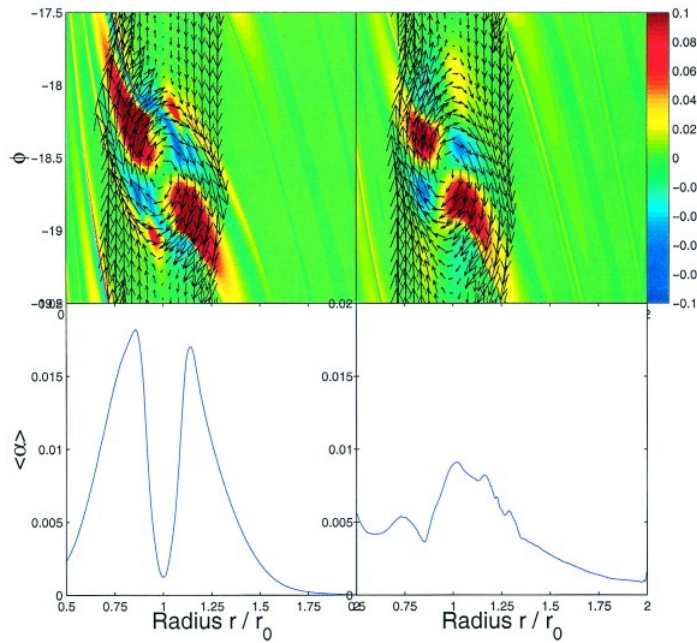


Figura 3.6: Risultati per il trasporto del momento angolare per la seconda simulazione a 3 orbite (sinistra) e 20 (destra). Il codice colore della figura in alto sta per la distribuzione di $\langle \alpha \rangle$ nel piano (r, ϕ) .

Inoltre abbiamo già detto che dai vortici si propagano le spirali di densità che si diffondono in tutto il disco, permettendo il trasporto globale del momento angolare. Infatti, sebbene $\langle \alpha \rangle$ risulti più bassa in corrispondenza delle spirali rispetto ai dintorni dei vortici, continua comunque a rimanere positiva. L'effetto delle spirali sul trasporto del momento angolare si poteva già notare in *figura* (3.2), dove la pressione nella zona interna del disco mostra un aumento generale, segno chiaro della presenza di flusso di materia verso l'interno, ossia di accrescimento.

3.2 Commenti e considerazioni

In questo capitolo siamo riusciti a giustificare l'importanza dell'instabilità di Rossby per il trasporto globale del momento angolare, fatto che lo distingue da altre teorie che lavorano su scala prettamente locale, rendendola spesso più efficace.

Tra i risultati ottenuti, quello più interessante riguarda il trasporto di momento angolare. Abbiamo definito in *equazione* 3.3 una quantità molto utile per studiare l'accrescimento del disco. Questa α è l'analogo del parametro di Shakura-Sunyaev (definito e descritto nell'*articolo* [15]), tramite il quale si ricava la viscosità del disco tramite $\nu = \alpha c_s h$. La presenza quindi di un α positivo e, in alcune zone del disco, dal valore molto alto, implica un notevole aumento della viscosità. Si può quindi parlare dell'instabilità di Rossby come sorgente di viscosità, aspetto presente anche nella teoria della MRI, che però abbiamo già visto non essere applicabile in tutti i dischi. Questo effetto è stato studiato più approfonditamente per altri tipi di instabilità, soprattutto per la vertical shear instability, dovuta alla diminuzione della velocità angolare mentre ci si muove dal piano mediano del disco lungo la direzione verticale (*articolo* [16]), ma può essere facilmente applicato anche al nostro caso.

Un altro aspetto interessante della teoria non lineare è che grazie ad essa si riesce a spiegare il meccanismo di saturazione dell'instabilità. Si vede che dopo qualche orbita la crescita esponenziale si blocca per poi dare inizio allo sviluppo non lineare con la formazione di vortici. Ci chiediamo qui cosa dia origine a questa interruzione. La teoria alla base di questo studio deriva dal criterio standard per un plasma di particelle. Se consideriamo una particella di fluido in un'onda di Rossby, la sua velocità di rotazione nel vortice dipenderà dalla vorticità $\omega_v = (\nabla \times v) \cdot \hat{z}$ e il tempo di rotazione è stimato essere:

$$\tau \approx 2/|\omega_v| \quad (3.4)$$

e questo moto circolatorio nel vortice risulta molto più importante del moto attorno al disco, andando a modificare la struttura radiale del disco nei pressi del vortice. L'approccio lineare alla RWI funziona solo fino a quando il tempo-scala della crescita esponenziale comparabile con τ , ossia fino al momento in cui:

$$|\omega_v|/2 \approx \omega_i \quad (3.5)$$

Per studiare meglio questo meccanismo nell'*articolo* [6] sono anche state fatte 20 simulazioni con salto gaussiano, $2 \leq m \leq 5$ e metodo numerico (AMRVAC code), di cui parleremo meglio in seguito. Riportiamo alcuni dei risultati in *figura* (3.7), da cui si vede bene la crescita esponenziale iniziale, fino al momento di saturazione, anch'esso riportato in figura e che ricalca abbastanza bene

le simulazioni. In realtà, per bassi numeri azimutali, la vorticità massima è stata leggermente sovrastimata. Questo è probabilmente dovuto al fatto che l'equazione (3.4) è ricavata per un moto circolatorio, i vortici con bassi m hanno invece forme molto allungate. Al contrario, per $m = 4, 5$ la vorticità è sovrastimata, probabilmente a causa della perdita di energia dovuta alle spirali di densità che si propagano al di fuori dei vortici, di ampiezza molto più importante per alti numeri azimutali. Per rendercene conto basta confrontare la figura (3.2) con la figura (3.8), dovuta a una simulazione con condizioni iniziali molto simili a quelle considerate nella simulazione in basso in figura (3.2), ma con $m = 5$.

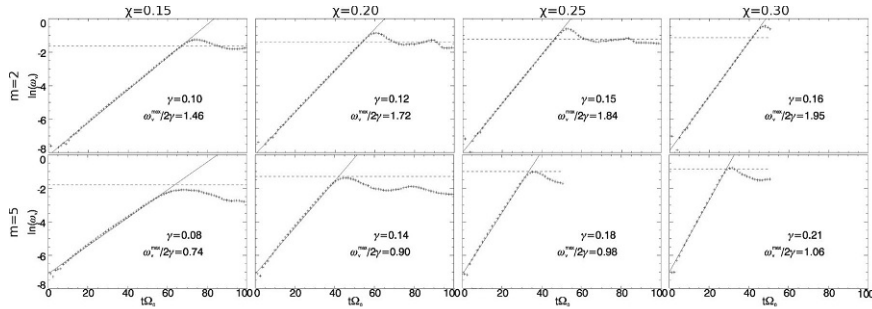


Figura 3.7: Ampiezza delle vorticità delle onde di Rossby in funzione del tempo. La linea tratteggiata corrisponde all'ampiezza di saturazione.

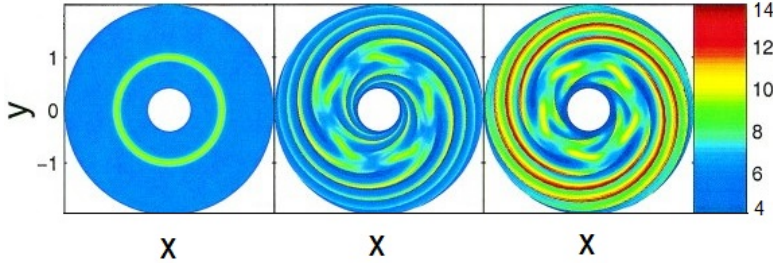


Figura 3.8: Evoluzione del disco per 0, 3 e 20 orbite. Il disco è studiato sul piano (x, y) e il codice colore è legato alla pressione.

In ogni caso l'assunzione in equazione (3.5) risulta funzionare bene, anche se approssimativamente, e si considera questo come un buon criterio per la saturazione.

Capitolo 4

Disco tridimensionale

Fino ad ora abbiamo considerato il disco sottile, ma ovviamente la nostra trattazione non può essere completa se non considerando anche il comportamento dei vortici in un disco tridimensionale. In particolare ci interessiamo ora del loro comportamento lungo la dimensione verticale, che mostrerà la presenza di strutture interessanti. La formazione di vortici nei dischi tridimensionali è di particolare importanza per la formazione di planetesimi dell'ordine del km, la cui origine è ancora un problema aperto nelle teorie per la formazione dei pianeti. Infatti la polvere fa fatica a raggrupparsi in solidi poiché le mutue collisioni tendono a distruggerli. Inoltre, pur ignorando questa problematica iniziale, i solidi di diametro $\approx 1m$, risentendo di un vento dovuto al gas drag, spiraleggiano verso la stella in tempi troppo brevi perché si formino oggetti di dimensione maggiore. Un vortice anticiclonico con vita lunga può invece essere molto utile per concentrare al suo interno la polvere e aiutare così la creazione dei planetesimi.

4.1 Teoria lineare

Partiamo ancora dalle equazioni di Eulero, ma per un disco tridimensionale, e scriviamole sempre in coordinate cilindriche. Avrò:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (v\rho) = 0 \quad (4.1)$$

e

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (v\rho v) + \nabla P = -\rho \nabla \Phi \quad (4.2)$$

dove ρ è la densità e $\Phi = -GM/(r^2 + z^2)^{1/2}$ è il potenziale gravitazionale. Andiamo a perturbare linearmente le equazioni, considerando sempre perturbazioni del tipo $\propto \exp(im\phi - i\omega t)$. In questo caso per semplicità, si studia il disco in approssimazione isoterma, tale per cui $c_s^2 = \delta P/\delta\rho$, e potremo riscrivere le equazioni di Eulero per la variabile chiave $\Psi = \delta P/\rho$, ottenendo:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = i\Delta\omega\delta v_r + 2\Omega\delta v_\phi \quad (4.3)$$

$$\frac{im}{r}\Psi = i\Delta\omega\delta v_\phi + \frac{\kappa^2\delta v_r}{2\Omega} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = i\Delta\omega\delta v_z \quad (4.5)$$

$$-i\Delta\omega\frac{\rho}{c_s^2}\Psi + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho\delta v_r)}{\partial r} + \frac{im\rho\delta v_\phi}{r} + \frac{\partial(\rho\delta v_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

Vogliamo ora separare la dipendenza da z e andiamo quindi a espandere le perturbazioni tramite i polinomi di Hermite ottenendo:

$$\begin{aligned} \Psi(r, z) &= \sum_n \Psi_n(r) H_n(Z) \\ \delta v_r(r, z) &= \sum_n \delta v_{rn}(r) H_n(Z) \\ \delta v_\phi(r, z) &= \sum_n \delta v_{\phi n}(r) H_n(Z) \\ \delta v_z(r, z) &= \sum_n \delta v_{zn}(r) H'_n(Z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

con $Z=z/h$ e inserendo in (4.3)-(4.6) ho

$$\frac{d\Psi_n}{dr} - \frac{n\mu\Psi_n}{r} - \frac{(n+1)(n+2)\mu\Psi_{n+2}}{r} = i\Delta\omega\delta v_{rn} + 2\Omega\delta v_{\phi n} \quad (4.8)$$

$$\frac{im}{r}\Psi_n = i\Delta\omega\delta v_{\phi n} + \frac{\kappa^2\delta v_{rn}}{2\Omega} \quad (4.9)$$

$$\frac{\Psi_n}{h} = i\Delta\omega\delta v_{zn} \quad (4.10)$$

$$-i\Delta\omega\frac{\Psi_n}{c_s^2} + \left(\frac{d}{dr}\ln r\Sigma + \frac{n\mu}{r}\right)\delta v_{rn} + \frac{\mu\delta v_{rn-2}}{r} + \frac{d}{dr}\delta v_{rn} + \frac{im\delta v_{\phi n}}{r} - \frac{n\delta v_{zn}}{h} = 0 \quad (4.11)$$

con $\mu = \frac{d(\ln h)}{d(\ln r)}$. Per $n=0$ ritrovo le equazioni per il disco bidimensionale, mentre in questo caso espandiamo fino a $n=2$.

Si va a risolvere questo set di equazioni per un disco barotropico, considerando esclusivamente un salto nel profilo di densità di tipo gaussiano posizionato a $r_0 = 1$ con $\Delta r/r_0 = 0.05$, $\mathcal{A} = 1.25$. Il problema lineare è stato risolto nell'*articolo* [7] tramite il metodo di rilassamento, utilizzando sempre condizioni al contorno radiative e scegliendo $r_1/r_0 = 0.4$ e $r_2/r_0 = 1.6$. Ciò che si trova è che il tasso di crescita delle onde nel disco tridimensionale è solo di poco più basso che nell'approssimazione bidimensionale, indipendentemente dal modo azimutale preso in considerazione, come visibile in *figura* (4.1). Questa diminuzione è dovuta al fatto che la componente della scomposizione di Hermite con $n=2$, tende a "risucchiare" le onde nei pressi di r_0 , riducendone il momento angolare.

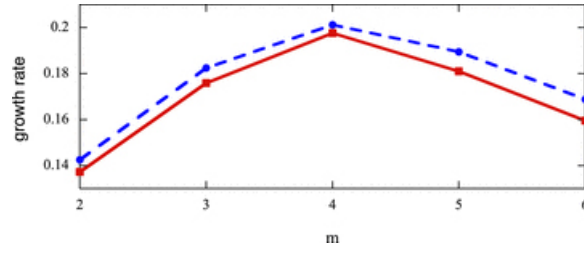


Figura 4.1: Tasso di crescita delle onde per il disco 2D (in blu) e il disco 3D (in rosso).

Riportiamo in figura (4.2) le varie autofunzioni per le due componenti, scelto il modo $m = 4$. Per il caso con $n=0$ ritroviamo quanto già visto nel capitolo 1 con ampiezza massima nei pressi del salto ma non nulla allontanandosi da esso. Per $n=2$ si nota che nella zona del salto le varie autofunzioni restano dominate dalla componente $n=0$, mentre δv_z , avendo origine solo dalla seconda espansione, ha un comportamento non trascurabile in questa zona, con ampiezza piccola ma diversa da 0. Per questo è importante includere la terza dimensione nella trattazione.

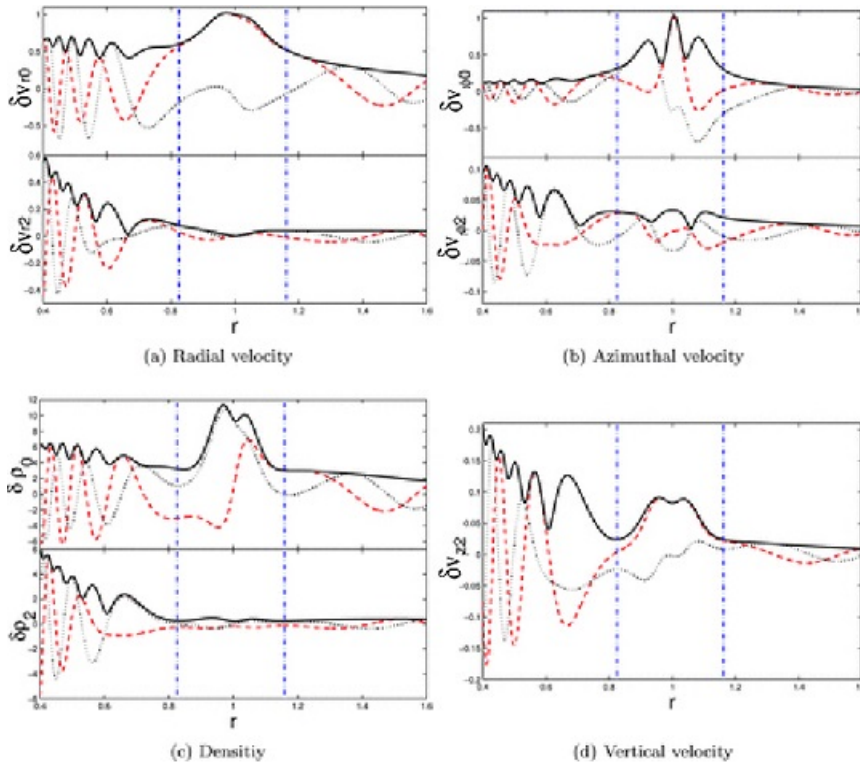


Figura 4.2: Autofunzioni per $m=4$. La linea grigia rappresenta la parte reale, la rossa l'immaginaria e la nera l'ampiezza.

4.2 Simulazioni

Sono state fatte, negli *articoli* [7] e [8], varie simulazioni non lineari che ci devono servire come confronto con la teoria ma anche per capire l'evoluzione non lineare. In tutte le simulazioni successive si considera solo la parte superiore del disco perché il piano mediano risulta essere un piano di simmetria per l'instabilità. Si è scelto di utilizzare il metodo numerico AMRVAC, molto flessibile e che permette l'adattamento delle impostazioni nel corso della simulazione stessa. Le condizioni al contorno sono simili a quelle usate fino ad ora, con l'accortezza di scegliere estensioni radiali e verticali abbastanza ampie da permettere alle onde di svilupparsi senza risentire dell'influenza degli estremi.

Operiamo innanzitutto un confronto con la teoria lineare fino ad ora esposta. La simulazione segue la crescita esponenziale e i tassi di accrescimento ricavati per i vari modi azimutali sono in accordo con i valori corrispondenti ricavati dalla teoria, come visibile in *figura* (4.3). Si pensa che i valori per $m \geq 4$ ricavati dalla teoria lineare, maggiori degli ω_i delle simulazioni, siano dovuti al troncamento operato per $n > 2$. In *figura* (4.4) si riportano poi i risultati raccolti con le simulazioni e confrontando con quelli in *figura* (4.2) si nota il perfetto accordo tra i due. Bisogna prestare attenzione al fatto che, nonostante nelle simulazioni non siano state separate le componenti $n=0$ e $n=2$, sappiamo già che $n=0$ va sempre a dominare, a parte che per δv_z , assicurando la bontà del confronto. Teoria e simulazioni sono quindi, anche nel caso tridimensionale, in perfetto accordo.

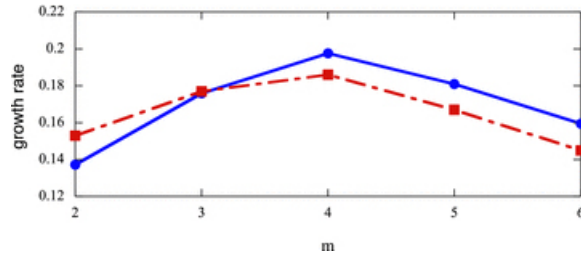


Figura 4.3: Tasso di crescita delle onde per l'analisi lineare (in blu) e per la simulazione non lineare (in rosso).

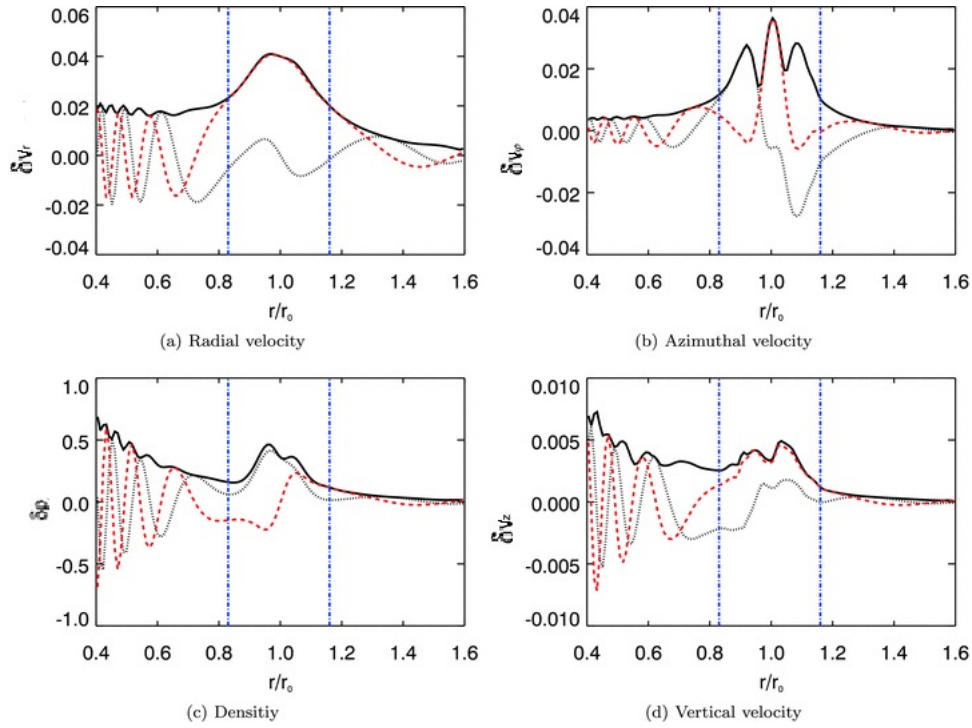


Figura 4.4: Autofunzioni per $m=4$ con stessa legenda di prima.

Andiamo ora a concentrarci sull'evoluzione dell'instabilità. Sul piano mediano ritroviamo ciò che si era già visto nelle simulazioni 2D. Si nota la crescita esponenziale, la formazione di vortici e di spirali di densità, come visibile in *figura* (4.5). Sul piano verticale, riportato in *figura* (4.6), si trovano invece dei moti convettivi, che ci aspettiamo abbiano un ruolo importante nel concentrare la polvere.

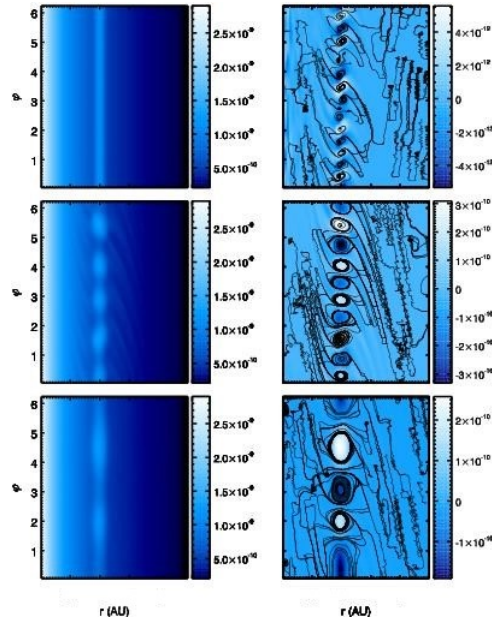


Figura 4.5: Simulazione per $t=100$, 300 e 800 dall'alto al basso. A sinistra il codice colore è legato alla densità, a destra sono riportate le linee di flusso della velocità e il codice colore è legato alla velocità.

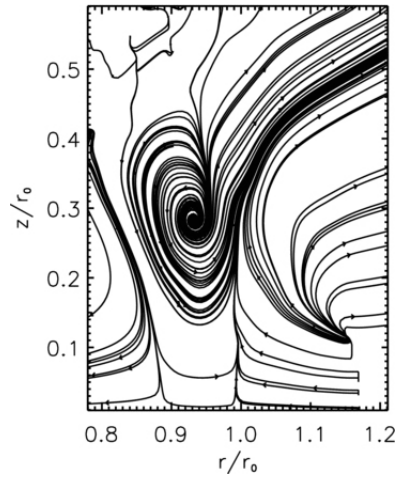


Figura 4.6: linee di flusso per la velocità nel piano verticale.

Ci si è infine interessati all'evoluzione a lungo termine dei vortici, analizzando una simulazione dell'*articolo* [9] lasciata correre per un tempo $t=4000$, corrispondente a 123 rotazioni. Ciò che sappiamo è che, grazie alle spirali che si propagano a partire dal vortice, il momento angolare verrà ridistribuito nel disco e si avrà un generale accrescimento verso l'interno. Questo accrescimento tende però ovviamente a rimuovere l'eccesso nella distribuzione di densità nei pressi di r_0 . Saranno quindi gli effetti dell'instabilità stessa ad affievolire la RWI e a

causare il decadimento dei vortici, a meno che non subentri un ulteriore meccanismo che possa continuamente riformare il salto. I vortici riescono comunque a sopravvivere ancora per più di una rotazione, ma risultano completamente distrutti alla fine della simulazione, come visibile in *figura* (4.7).

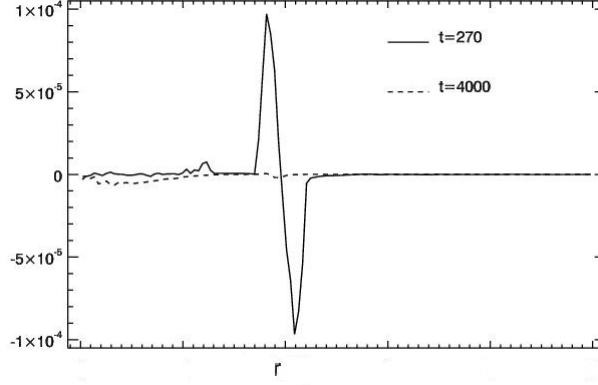


Figura 4.7: *Accrescimento radiale in funzione del raggio, nei primi momenti della simulazione e alla fine della stessa.*

4.3 Cattura della polvere

È infine stato fatto uno studio per seguire il comportamento dei solidi all'interno dei vortici. Il metodo utilizzato nell'*articolo* [10] è sempre il codice AMRVAC, con le solite condizioni al contorno. In questa simulazione, dopo un tempo $t=300$, l'instabilità raggiunge il punto di saturazione. A questo punto si decide di aggiungere una popolazione di polvere per seguirne l'evoluzione negli anticicloni e il tempo $t=300$ diventerà il nostro t_0 . Diventa quindi necessario introdurre nuove equazioni per l'evoluzione congiunta di polvere e gas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla (v \cdot \rho v) + \nabla P &= -\rho \nabla \Phi + \rho_d f_d \\
 \frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_d v_d) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho_d v_d}{\partial t} + \nabla (v_d \cdot \rho_d v_d) &= -\rho_d \nabla \Phi - \rho_d f_d
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

con ρ_d e v_d riferiti alla polvere. Inoltre f_d è la forza di drag tra il gas e la polvere, definita a partire da

$$f_d = \frac{(v - v_d)}{\tau_s} \tag{4.13}$$

dove τ_s è il tempo di accoppiamento tra gas e polvere. Assumendo i solidi sferici con raggio δ_p e densità interna ρ_p , ci andiamo a posizionare nel regime di

Epstein con

$$\tau_s = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\rho_p \delta_p}{c_s \rho} \quad (4.14)$$

Sono quindi state fatte più simulazioni con popolazioni diverse di polvere, con raggi da 0.1 cm a 5 cm. Le popolazioni introdotte hanno densità iniziale pari all' 1% della densità del gas, con velocità puramente kepleriana e distribuzione assisimmetrica. Partiamo osservando il piano mediano del disco dalla *figura* (4.8). Per la polvere di dimensione molto bassa non si ha concentrazione, i granelli si accoppieranno fortemente al gas e ne andranno a seguire le linee di flusso. Si vede invece che la concentrazione delle polveri di grandezza intermedia (2-3 cm) è modificata dalla presenza dei vortici. Essi inizialmente attraversano una fase transitoria in cui sembrano espellere la polvere dal centro, aumentando la densità intorno agli anticicloni, per poi concentrarli al loro interno nella zona di alta pressione e l'intero processo è riportato in *figura* (4.9). Lo stesso succede per le particelle di circa 1 cm, ma con tempistiche diverse: sono ancora nella fase transitoria alla fine della simulazione. Si hanno infine le particelle grandi (5 cm) che raggiungono una concentrazione all'interno dell'anticiclone molto elevata, con densità pari a quella del gas. È importante notare che invece i vortici non sembrano essere modificati dalla presenza della polvere.

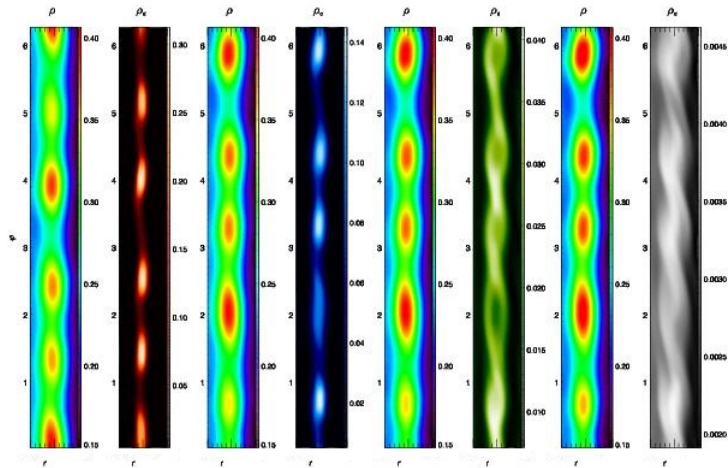


Figura 4.8: Densità nel piano mediano per gas e polvere per le famiglie di 5 cm, 2 cm, 1 cm e 0.1 cm (da sinistra a destra) dopo 3 orbite.

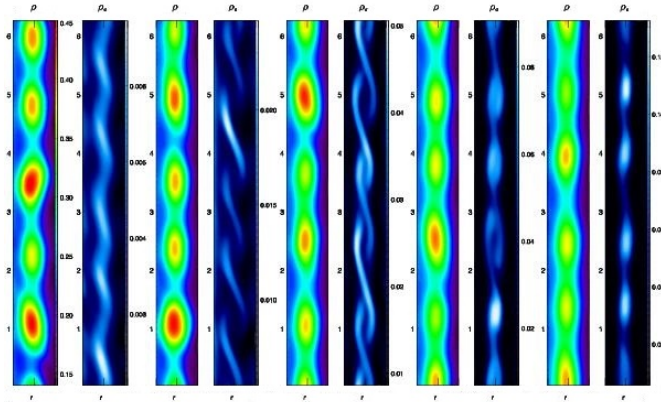


Figura 4.9: *Densità nel piano mediano per gas e polvere di 2 cm a 0.3, 0.9, 1.5, 2.1 e 2.7 orbite (da sinistra a destra).*

Considerando il disco anche nella sua terza dimensione, si possono ancora notare in *figura* (4.10) comportamenti diversi in base alle diverse popolazioni di polvere. Le particelle più grandi sono concentrate con densità altissima in una zona molto sottile, sostanzialmente assimilabile col piano mediano. Le particelle più piccole sono invece distribuite molto di più sul piano verticale, raggiungendo densità maggiori al di sopra del piano mediano che nello stesso. Questo comportamento è dovuto alla distribuzione verticale dei vortici di gas, che causano un incremento della velocità della polvere verso l'alto, come visibile in *figura* (4.11). Inoltre la densità del gas diminuisce verso l'alto, per cui il rapporto ρ_d/ρ non può che aumentare con l'altezza. La distribuzione verticale del gas invece non viene modificata dalla presenza della polvere.

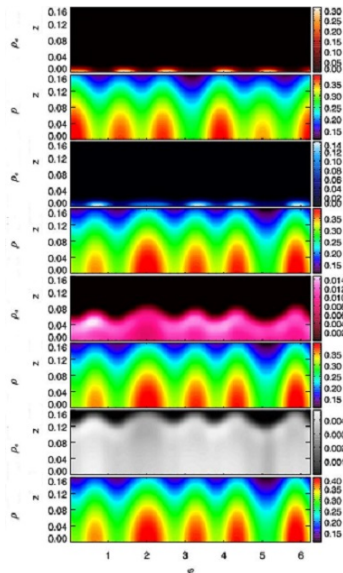


Figura 4.10: *Densità nel piano verticale per gas e polvere per le famiglie di 5 cm, 2 cm, 0.5 cm e 0.1 cm (dall'alto al basso) dopo 3 orbite.*

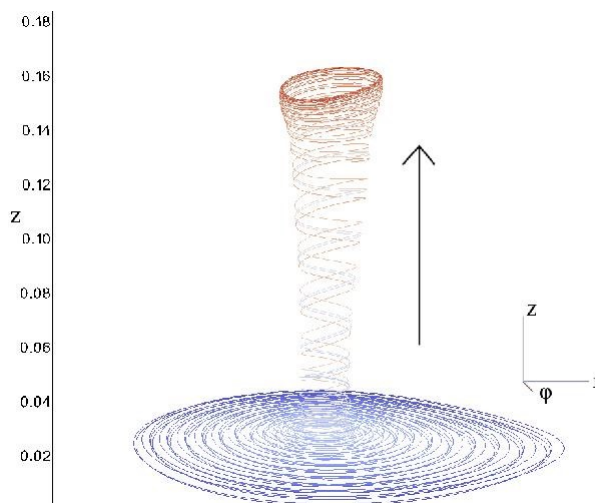


Figura 4.11: Alcune linee di flusso che passano vicino al centro dell'anticiclone a $t=300$. Il flusso si sta muovendo verso l'alto.

L'unico effetto che ha la polvere sul gas si ha solo per le particelle da 5 cm che, raggiungendo la stessa densità del gas, riescono ad accelerarlo e a ridurre di conseguenza l'ampiezza del vortice. Questo effetto è interessante perché potrebbe triggerare altre instabilità, ad esempio la Streaming instability, essendo qui presente un accoppiamento reciproco tra gas e polvere molto elevato. In questo modo si riescono quindi a soddisfare le condizioni sufficienti perché si instauri un'altra instabilità, anch'essa in grado di portare alla formazione di planetesimi: gli effetti sul disco vanno a "raddoppiare".

4.4 Commenti e considerazioni

Lo studio dell'instabilità di Rossby nel disco tridimensionale ci fa capire principalmente due cose.

La prima è che tutto ciò che finora è stato detto sulla formazione dei vortici e il loro ruolo nel trasporto di momento angolare è ancora valido nel caso più realistico di dischi tridimensionali, visto l'ottimo accordo tra i risultati per dischi 2D e 3D sul piano mediano. Inoltre grazie a queste simulazioni si è anche studiata l'evoluzione a lungo termine, capendone il meccanismo di decadimento.

Come seconda e più importante scoperta, si è trovato che i vortici di Rossby sono una possibile spiegazione per la creazione di planetesimi a partire da polveri di circa 5 cm, poiché in questo caso si raggiungono alte concentrazioni di particelle nel piano mediano: si stima che la materia catturata in ogni anticiclone è pari alla massa di Marte. Per le particelle più piccole invece si ha una competizione tra l'innalzamento dovuto alla RWI e la sedimentazione verso il piano mediano dovuta alla gravità che rende più complicata la formazione di aggregati maggiori. In ogni caso questo studio ci permette di spiegare come sia possibile la formazione di planetesimi in dischi dove le altre instabilità non possono agire o comunque risultano poco efficienti.

Capitolo 5

Conclusioni

Nel presente lavoro è stato studiato e approfondito il fenomeno dell'instabilità di Rossby nei dischi circumstellari. Se ne è innanzitutto ripercorsa e analizzata la teoria 2D alla base, che riesce a dimostrare come le condizioni per l'instaurarsi di questa instabilità siano facilmente attuabili in molti dischi, portando alla formazione di onde localizzate nei pressi del salto iniziale. Grazie all'analisi di varie simulazioni, si è poi capita l'importanza dello sviluppo dell'instabilità nella formazione di vortici e onde di densità in grado di causare un flusso globale di materia verso l'interno del disco e il conseguente accrescimento verso la stella. Si sono poi ripercorsi gli stessi passaggi anche nello studio di dischi tridimensionali, ritrovando un accordo sostanziale con quanto detto prima, oltre a interessanti sviluppi verticali dell'instabilità. Infine si sono analizzati i risultati legati a simulazioni sul comportamento della polvere in questi vortici tridimensionali, capendo che in alcuni casi l'instabilità di Rossby può servire a spiegare la formazione di agglomerati dell'ordine del km che, nella loro evoluzione, possono portare alla creazione di planetesimi. Per concludere, l'instabilità di Rossby risulta essere un meccanismo promettente per la spiegazione di alcuni problemi irrisolti dell'astrofisica dei dischi circumstellari.

Bibliografia

- [1] C.-G. Rossby, *Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action*, Journal of Marine Research 2, 1: 38-55, 1939
- [2] S.A. Balbus, *Magnetohydrodynamics of protostellar disks*, University of Chicago Press, *Physical processes in circumstellar disks around young stars*: 237-282, Maggio 2011
- [3] R.V.E. Lovelace, H. Li, S.A. Colgate and A.F. Nelson, *Rossby wave instability of keplerian accretion disks*, The Astrophysical Journal, 513: 805-810, 10 Marzo 1999
- [4] H. Li, J.M. Finn, R.V.E. Lovelace and S.A. Colgate, *Rossby wave instability of thin accretion disks - II. Detailed linear theory*, The Astrophysical Journal, 533: 1023-1034, 20 Aprile 2000
- [5] H. Li, A.A. Colgate, B. Wendroff and R. Liska, *Rossby wave instability of thin accretion disks - III. Nonlinear simulations*, The Astrophysical Journal, 551: 874-896, 20 Aprile 2001
- [6] H. Meheut, R.V.E. Lovelace and D. Lai, *How strong are the Rossby vortices?*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 430: 1988-1993, 11 Aprile 2013
- [7] H. Meheut, C. Yu and D. Lai, *Rossby wave instability in three dimensional discs*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 422: 2399-2406, 21 Maggio 2012
- [8] H. Meheut, F. Casse, P. Varniere and M. Tagger, *Rossby wave instability and three-dimensional vortices in accretion disks*, Astronomy & Astrophysics, 516, A31, 23 Giugno 2010
- [9] H. Meheut, R. Keppens, F. Casse and W. Benz, *Formation and long-term evolution of 3D vortices in protoplanetary discs*, Astronomy & Astrophysics, 542, A9, 25 Maggio 2012
- [10] H. Meheut, Z. Meliani, P. Varniere and W. Benz, *Dust-trapping Rossby vortices in protoplanetary disks*, Astronomy & Astrophysics, 545, A134, 20 Set-

tembre 2012

[11] H. Meheut, *The Rossby wave instability in protoplanetary disks*, The European Physical Journal Web of Conferences, 46, 03001, 11 Aprile 2013

[12] J.C.B. Papaloizou and J.E. Pringle, *The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 208: 721-750, 15 Giugno 1984

[13] P. Variniere and M. Tagger, *Reviving dead zones in accretion disks by Rossby vortices at their boundaries*, Astronomy & Astrophysics, 446, L13-L16, 1 Febbraio 2006

[14] M. Gholipur and M. Nejad-Asghar, *Rossby-wave instability in viscous discs*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 441: 1910-1915, 1 Luglio 2014

[15] N.I. Shakura and R.A. Sunyaev, *Black holes in binary systems, observational appearance*, Astronomy & Astrophysics, 24: 337-355, 1973

[16] M.H.R. Stroll, W. Kley and G. Picogna, *Anisotropic hydrodynamic turbulence in accretion disks*, Astronomy & Astrophysics, 559, L6, 2 Marzo 2017

[17] R.V.E. Lovelace and M.M. Romanova *Rossby wave instability in astrophysical discs*, Fluid Dynamics Research (IOP Publishing: The Japan Society of Fluid Mechanics), 46, 041041, 9 Aprile 2014

[18] M.J. Thompson, *An introduction to Astrophysical fluid dynamics*, Imperial College Press, 2006