

ELABORATO SCRITTO

Controllo di un satellite in orbita

Laureando:

Andrea Comina

Matricola 578563

Relatore:

Prof. Mauro Bisiacco

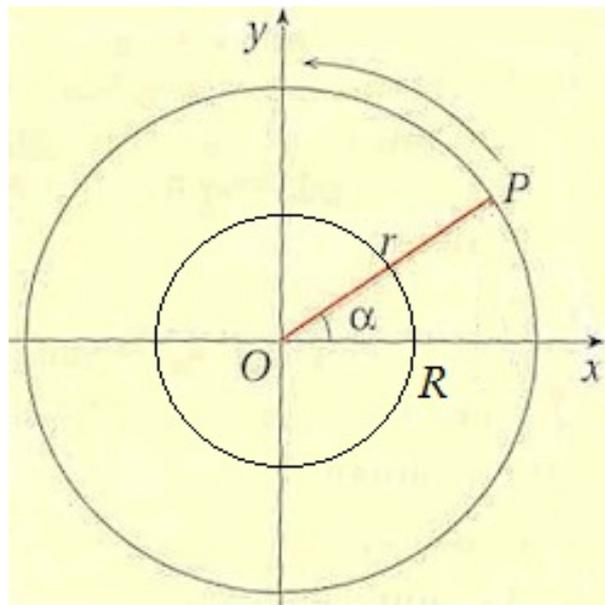
Indice

1	Introduzione	5
2	Controllo in retroazione dallo stato	7
2.0.1	Individuazione del modello di stato	7
2.0.2	Linearizzazione ed andamento del modello	8
2.0.3	Controllore statico	10
2.0.4	Simulazioni	11
3	Controllo in retroazione dall'uscita	31
4	Bibliografia	35

Capitolo 1

Introduzione

Si intende studiare il comportamento di un satellite di massa prefissata in orbita attorno alla Terra. Questo corpo orbitante è soggetto al campo gravitazionale secondo una relazione inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro terrestre. Per individuare il modello si impone un sistema di riferimento ortogonale appartenente al piano dell'orbita con l'origine coincidente con il centro della Terra. Vengono indicate le due variabili r e α , distanza dal centro del sistema di riferimento e angolo rispetto all'asse delle ascisse.



Il satellite viene posto in un'orbita circolare geostazionaria ed in essa rimane se non soggetto ad azioni di forze esterne. La fuoriuscita dall'orbita geostazionaria può essere dovuta alle condizioni iniziali diverse od alla presenza di agenti esterni. Per ovviare a tale scostamento dall'orbita geostazionaria si può agire mediante forze schematizzate secondo una componente radiale ed una tangenziale, che costituiscono gli ingressi u e v del nostro sistema. I passi volti allo studio del modello sono i seguenti:

- stesura del modello di equazioni differenziali descrivente il sistema;
- a seguito di un'operazione di linearizzazione, processo di costruzione del modello di stato e calcolo della funzione di trasferimento relativa al modello ingresso-uscita;
- individuazione di un controllo in retroazione dallo stato ed uno in retroazione negativa dall'uscita;
- analisi qualitativa delle due situazioni presentate. Impostando di volta in volta varie condizioni iniziali e ingressi.

Capitolo 2

Controllo in retroazione dallo stato

2.0.1 Individuazione del modello di stato

Partendo dal sistema di riferimento, indicato nell'introduzione, si ricavano le espressioni che descrivono il moto del satellite

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ \dot{x} = \dot{r} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}$$

da queste si può ulteriormente procedere per ricavare le relazioni descrittive l'andamento radiale e tangenziale del corpo orbitante

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_t = r \dot{\alpha} \\ a_r = \ddot{x} \cos \alpha + \ddot{y} \sin \alpha = \ddot{r} - r \dot{\alpha}^2 \\ a_t = \ddot{y} \cos \alpha - \ddot{x} \sin \alpha = r \ddot{\alpha} + 2 \dot{r} \dot{\alpha} \end{cases}$$

Un ulteriore passo verso una rappresentazione più funzionale del sistema si ottiene impiegando le equazioni della forza gravitazionale. Considerando M la massa della Terra e G la costante di gravitazione universale, si ottengono le espressioni relative all'accelerazione radiale e tangenziale

$$\ddot{r} - r \dot{\alpha}^2 = -\frac{GM}{r^2} + \frac{v}{m}$$

$$2 \dot{r} \dot{\alpha} + r \ddot{\alpha} = \frac{u}{m}$$

Esplicitando in funzione delle accelerazioni

$$\ddot{r} = r \dot{\alpha}^2 - \frac{GM}{r^2} + \frac{v}{m}$$

$$\ddot{\alpha} = -2 \frac{\dot{r} \dot{\alpha}}{r} + \frac{u}{mr}$$

Ora è possibile, individuando le variabili di stato, impostare il modello di stato relativo al sistema in esame. La scelta, relativa alle variabili di stato, è la seguente: $x_1 = r$ $x_2 = \dot{r}$ $x_3 = \alpha$ $x_4 = \dot{\alpha}$, e porta al seguente modello non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 - \frac{GM}{x_1^2} + \frac{v}{m} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2 \frac{x_2 x_4}{x_1^2} + \frac{u}{x_1 m} \end{cases}$$

2.0.2 Linearizzazione ed andamento del modello

Per comprendere il comportamento del sistema si procede alla linearizzazione del modello trovato. Si è scelto di effettuare la linearizzazione nell'intorno di un'orbita circolare, quindi con ben determinati valori di ρ e ω , ottenendo per le variabili di stato le seguenti relazioni

$$\begin{cases} x_1 = \rho \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \omega t + \phi \\ x_4 = \omega \end{cases}$$

Si riportano alcune considerazioni relative ai valori che le variabili di stato possono assumere in modo da mantenere la correttezza delle espressioni. Il parametro ρ (raggio) deve risultare strettamente positivo per la validità matematica, in più deve essere maggiore del raggio terrestre altrimenti si perderebbe il significato fisico delle equazioni (collisione con la superficie terrestre). Altro vincolo che le soluzioni costituite da orbite circolari deve soddisfare è la seguente relazione tra ω e ρ

$$\rho \omega^2 - \frac{GM}{\rho^2} = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{\rho^3}}$$

Una volta individuata l'orbita di equilibrio per il sistema, si andrà a studiare il sistema che rappresenta piccoli scostamenti da questa. Le nuove variabili di stato presentano le seguenti relazioni con le originarie: $r = x_1 = \rho + z_1$ $\dot{r} = x_2 = 0 + z_2$ $\alpha = x_3 = \omega t + \phi + z_3$ $\dot{\alpha} = x_4 = \omega + z_4$. Il modello risulta ora essere il seguente

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ (\rho + z_1)(\omega + z_4)^2 - \frac{GM}{(\rho + z_1)^2} + \frac{v}{m} \\ z_4 \\ -2 \frac{z_2(\omega + z_4)}{\rho + z_1} + \frac{u}{(\rho + z_1)m} \end{bmatrix}$$

Si rileva che, essendo il nostro punto di equilibrio una traiettoria, dovrebbe portare ad un sistema negli scostamenti dipendente in modo esplicito dal tempo. Tale fatto non avviene, in quanto l'unica variabile con dipendenza temporale negli andamenti nominali (x_3) non appare nelle equazioni differenziali.

Si può procedere alla linearizzazione di questo modello, ricavando in primo luogo lo Jacobiano ed ottenendo la seguente matrice di stato

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\rho\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ricava, mediante la medesima operazione la matrice relativa agli ingressi

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\rho} \end{bmatrix}$$

Infine risulta conveniente impiegare, quale uscita, la variabile di stato x_3 relativa alla variazione dell'angolo del satellite, in quanto risulta essere la più facilmente misurabile dalla superficie terrestre. Successivamente, per realizzare il controllo in retroazione, ricaveremo le altre variabili di stato con uno stimatore asintotico. Per realizzare lo stimatore in questione il sistema deve essere rivelabile. Tale proprietà si traduce nella condizione necessaria e sufficiente dell'esistenza di una matrice L tale che $F + LH$ sia asintoticamente stabile. Per ricavare la matrice L si è partiti considerando il sistema duale a quello d'origine. $F_d = F^T$, $G_d = H^T$, $H_d = G^T$, $J_d = J^T$ sono le nuove matrici e sfruttando le proprietà di equivalenza relative alla rivelabilità si valuta la raggiungibilità di questo sistema duale. Una volta verificata la raggiungibilità si è individuata

$$L = \left[\frac{8m\omega}{3} \quad 0 \quad -4\omega \quad -5\omega^2 \right]$$

che alloca gli autovalori di $F + LH$ nelle radici del polinomio $(s + \omega)^4$. Il funzionamento di questa matrice è di prendere in ingresso l'uscita x_3 del sistema e gli ingressi u e v , per restituire una stima delle altre variabili di stato del sistema. Stime che successivamente vengono impiegate in ingresso al dispositivo di controllo K . Tornando alla rappresentazione complessiva linearizzata del sistema si ha

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\rho\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\rho} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si intende ora individuare l'evoluzione libera a cui è soggetto il sistema in modo da procedere successivamente all'eventuale realizzazione di un controllore che mantenga il satellite nell'orbita impostata. Il polinomio caratteristico della matrice di stato risulta $\Delta_F(s) = s^2(s^2 + \omega^2)$ con i conseguenti autovalori $\lambda_i = +i\omega, -i\omega, 0, 0$. Dato che non vi è concordanza tra molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 0 si ottiene la seguente forma di Jordan

$$F_J = \begin{bmatrix} +i\omega & & & \\ & -i\omega & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

con la relativa matrice esponenziale

$$e^{F_J t} = \begin{bmatrix} e^{+i\omega t} & & & \\ & e^{-i\omega t} & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

i modi risultanti sono $1, t, \cos \omega t, \sin \omega t$ i quali non garantiscono alcuna stabilità, né asintotica né semplice.

2.0.3 Controllore statico

Grazie all'impiego dello stimatore trovato precedentemente e rappresentato dalla matrice L , si può procedere alla realizzazione di un controllore dallo stato. Questo dovrà soddisfare la richiesta di mantenimento del satellite sulla verticale. In primo luogo si deve verificare la condizione di raggiungibilità del sistema in esame, proprietà soddisfatta in quanto la matrice di raggiungibilità

$$R = [G | FG | F^2G | F^3G]$$

presenta rango 4 pari alla dimensione del sistema. Si ha quindi la possibilità di allocare gli autovalori dove lo si ritiene conveniente. A seguito della verifica della raggiungibilità si è osservato che tale proprietà si verifica anche considerando il solo ingresso tangenziale, quando la matrice degli ingressi è costituita solo da g_2 . Si può procedere, quindi, alla realizzazione di un controllo che impiega il solo ingresso u . Una decisione semplice è allocare tutti i quattro autovalori in $-\omega$, pertanto si procede verso l'individuazione di una matrice $F + g_2K$ che abbia come polinomio caratteristico $\Delta_{F+g_2K}(s) = (s + \omega)^4$, garantendo la stabilità del sistema. Con la condizione posta sugli

autovalori ed a seguito di alcuni passaggi matriciali si ottiene la matrice di controllo in retroazione

$$K_1 = \begin{bmatrix} -8m\omega^2 & -\frac{8m\omega}{3} & \frac{m\rho\omega^2}{3} & -4\rho\omega m \end{bmatrix}$$

e la matrice di stato del sistema retroazionato seguente:

$$F + g_2 K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\omega^2}{\rho} & -\frac{14\omega}{3\rho} & \frac{\omega^2}{3} & -3\omega \end{bmatrix}$$

Vi è la possibilità di implementare un controllore che impiega entrambi gli ingressi v e u . Si procede allocando gli autovalori ugualmente in $-\omega$ e mediante l'applicazione del lemma di Heyman si ottengono infinite matrici di controllo K_2 . Si presenta di seguito l'espressione di tale matrice:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -(3 + 2/b)m\omega^2 & -4m\omega & m\rho\omega^2(2 - b) & m\rho\omega(1 - 1/b - b/4) \\ 0 & 0 & -bm\rho\omega^2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

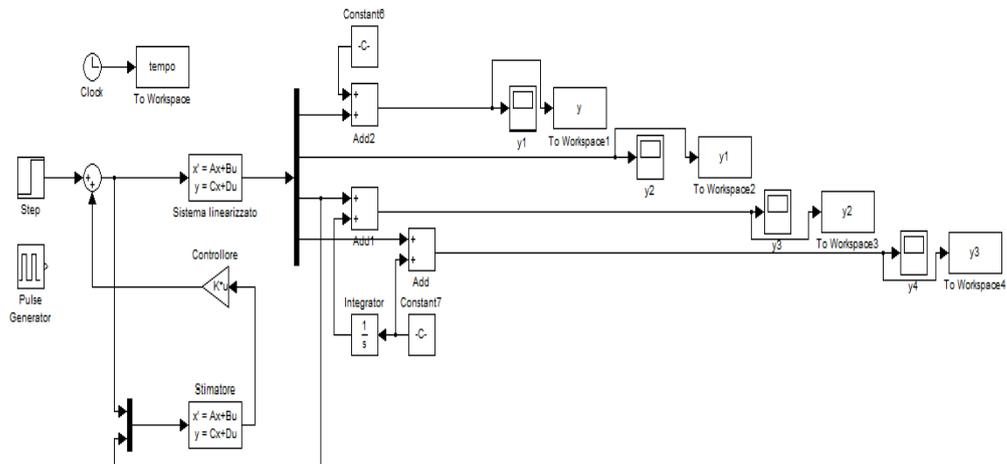
Tale matrice di controllo porta alla matrice di stato del sistema retroazionato seguente:

$$F + GK_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2\omega^2/b & -4\omega & m\rho\omega^2(2 - b) & \rho\omega(3 - 1/b - b/4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega/\rho & -b\omega^2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

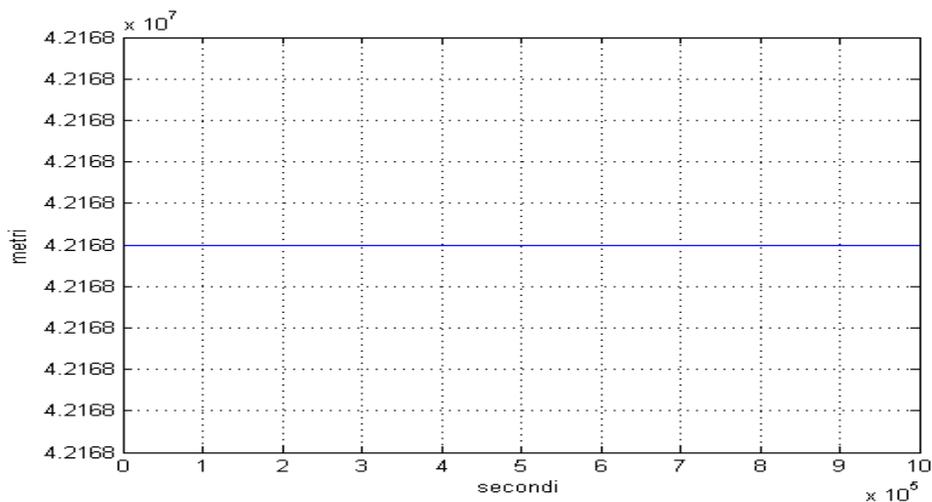
La variazione del parametro non nullo b permette l'individuazione di infinite matrici di controllo. Mediante la modifica del valore b si può ottenere il controllore con le prestazioni migliori, cioè accorciare i tempi di raggiungimento dell'equilibrio ed eliminare le elongazioni. In seguito, nella sezione relativa alle simulazioni, verrà approfondita la relazione tra b e gli andamenti nominali delle variabili di stato.

2.0.4 Simulazioni

A seguito della trasposizione del modello e dei relativi controlli in ambiente Simulink si procede con lo studio del comportamento di questi. Si propongono diverse simulazioni, a partire da condizioni iniziali nulle ed ingressi nulli, per passare poi a condizioni iniziali diverse da zero ed infine impiegare degli ingressi a gradino ed impulsivi. Si ricorda che si sta operando la simulazione sul sistema linearizzato in un intorno dell'orbita di equilibrio. Il comportamento del sistema non linearizzato lo si vedrà in seguito e si effettuerà una comparazione degli andamenti temporali delle varie variabili di stato.

Schema del controllore K_1 linearizzato

Andamento del raggio con condizioni iniziali ed ingressi nulli

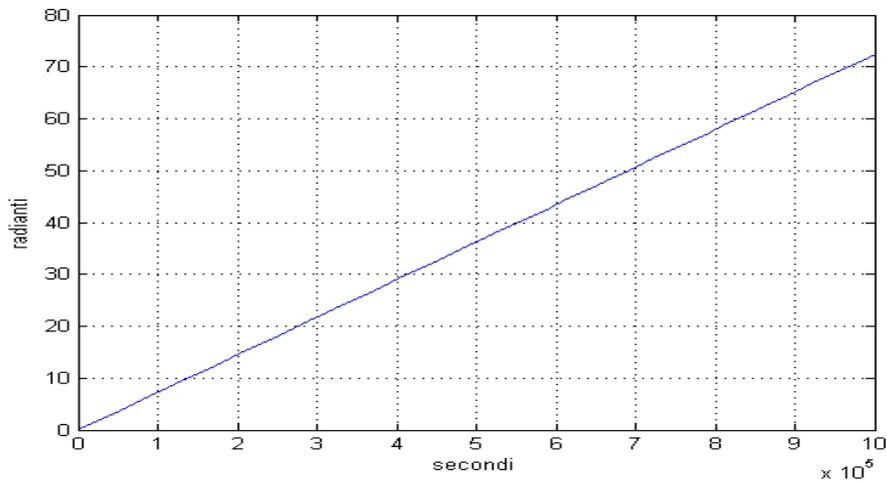


Andamenti corrispondenti all'impiego del controllore K_1 sul sistema lineare

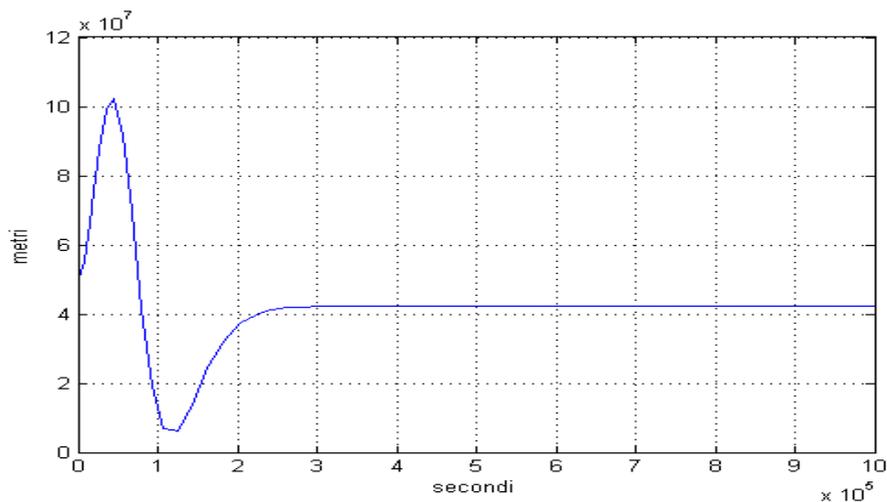
Si riportano gli andamenti di raggio ed angolo relativi a condizioni iniziali nulle e senza la presenza di ingressi. Viene mantenuto l'equilibrio, in altre parole non vi sono variazioni dalla posizione di partenza (orbita circolare geostazionaria)

Si procede impostando diversi valori iniziali prima per il raggio, successivamente per l'angolo ed infine per entrambi in contemporanea. Si richiama una considerazione fatta in precedenza. Non si vuole che il satellite colli da con la superficie terrestre (raggio circa pari a $6.4Km$), vincolo che va rispettato anche in fase di assestamento. Si riporta nelle figure seguenti l'andamento di raggio e angolo a seguito di una variazione iniziale del pri-

Andamento dell'angolo con condizioni iniziali ed ingressi nulli



Andamento del raggio con condizione iniziale radiale pari a 9×10^6 metri



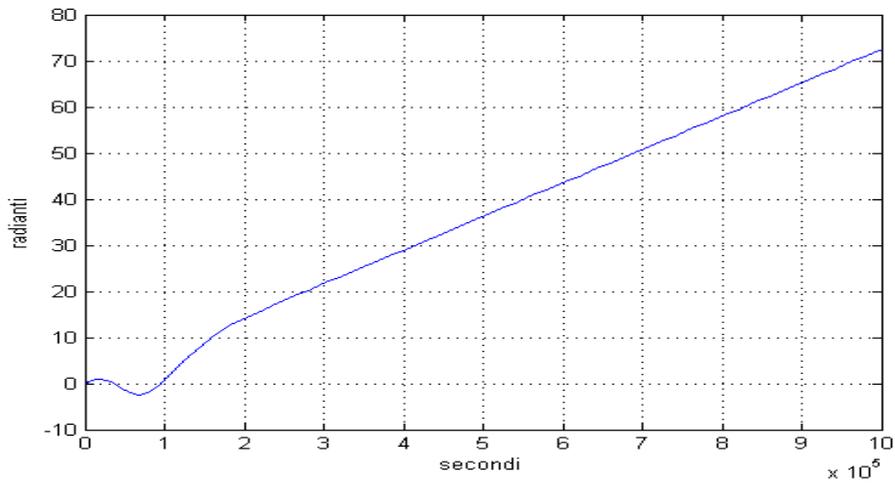
mo pari a 9×10^6 metri dall'orbita di equilibrio. Si nota che questo caso presenta il problema di collisione con la Terra, tuttavia la presenza di una sovralongazione seguita da una sottoelongazione rappresenta l'andamento che si ha anche nella situazione di rispetto dei vincoli.

Per quanto riguarda l'angolo si ha presenza di sovralongazione e successiva sottoelongazione che portano al raggiungimento dell'andamento lineare.

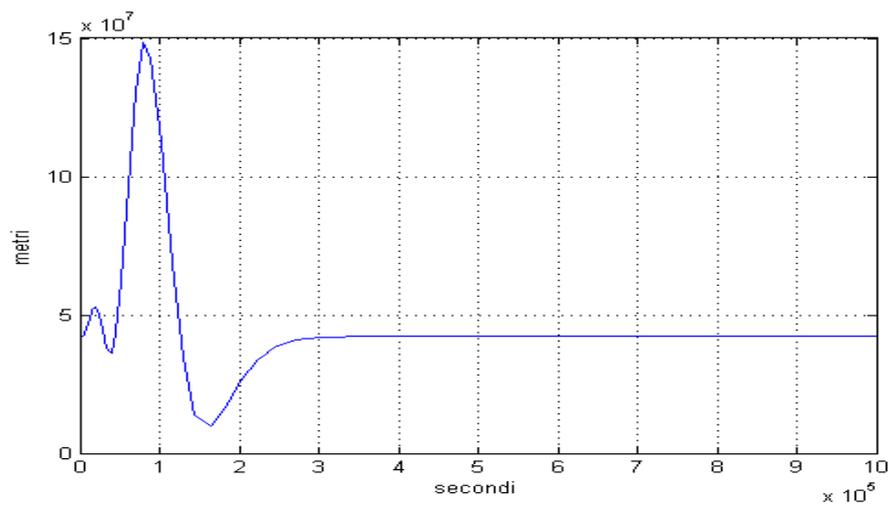
Si presentano i grafici relativi ad una variazione positiva dell'angolo iniziale, risulta che il raggio subisce tre elongazioni prima dell'assestamento. Confrontando questo grafico con quello relativo ad una variazione del raggio iniziale, si nota come la sovralongazione sia più accentuata, tuttavia la stabilizzazione si svolge con tempi molto simili.

Riguardo al comportamento dell'angolo, si rileva che rispetto all'anda-

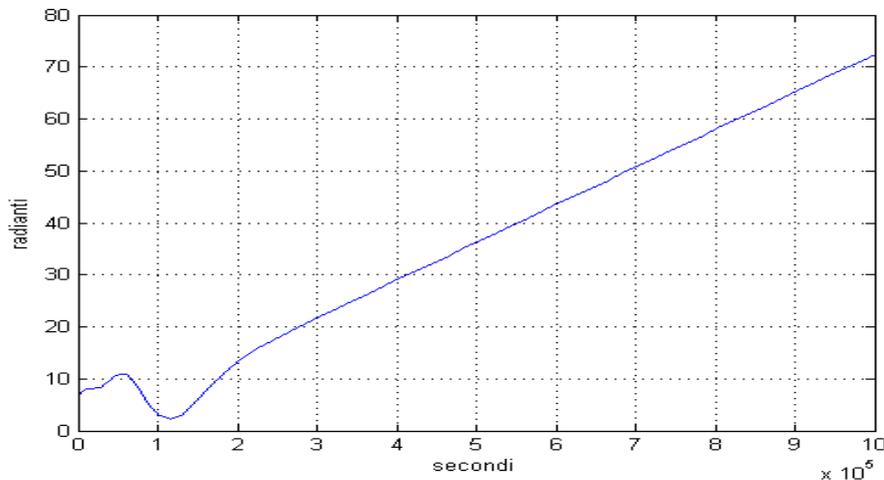
Andamento dell'angolo con condizione iniziale radiale pari a 9×10^6 metri



Andamento del raggio con condizione iniziale angolare variata positivamente



Andamento dell'angolo con condizione iniziale angolare variata positivamente



mento nel caso precedente non risulta esservi solo una marcata sottoelongazione ma anche una precedente fase di sovraelongazione. Anche in questa situazione i tempi di raggiungimento dell'evoluzione a regime si mantengono inalterati rispetto al caso con raggio iniziale variato.

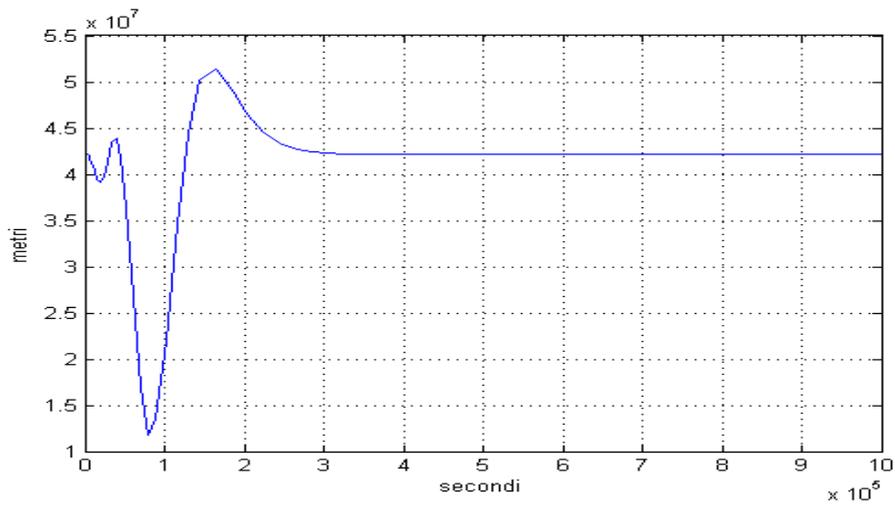
Si riportano i grafici relativi alla situazione in cui la variazione iniziale dell'angolo risulti di segno negativo. Notevole risulta l'impatto sull'andamento radiale, soggetto ad una fase di sottoelongazione marcata. Anche in tale caso la tempistica di assestamento si mantiene pressoché inalterata.

Si valutano ora gli effetti suscitati, su raggio ed angolo, da una variazione iniziale della velocità angolare ω . Essa provoca sul raggio una fase di assestamento caratterizzata da una durata temporale che si mantiene in linea con la casistica precedente. La modifica in esame non influisce minimamente sull'andamento angolare.

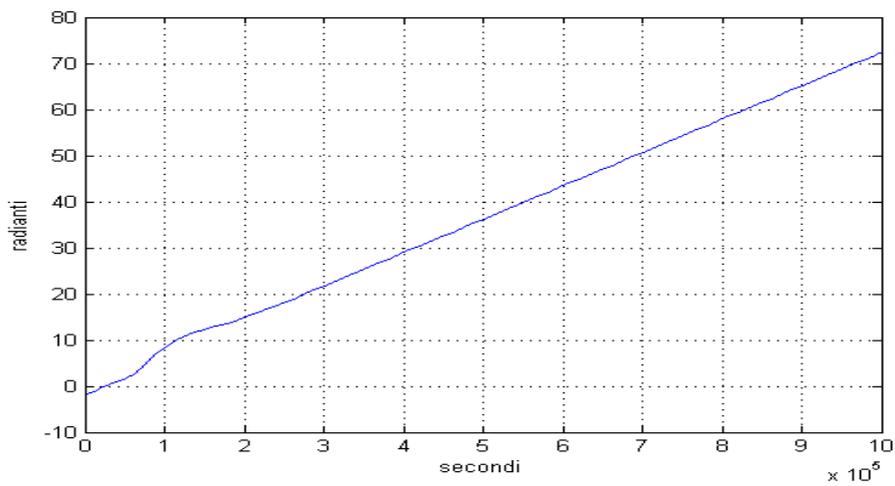
Infine si presentano due casi in cui sono presenti sia variazioni iniziali simultanee di raggio ed angolo sia ingressi. La prima variante ha ingresso a gradino e la seconda ha in ingresso una serie di impulsi. Gli andamenti in esame non variano significativamente rispetto a quelli privi di ingressi, se non appunto nel momento in cui entrano in gioco questi ultimi.

Vi sono due osservazioni importanti. La prima è che in tutti i casi esaminati i tempi della fase di assestamento sia per il raggio che per l'angolo si mantengono circa uguali. $3 \times 10^5 sec$ per il raggio e $2 \times 10^5 sec$ per l'angolo. Secondariamente, nelle situazioni in cui ad essere variato è l'angolo iniziale si rileva un andamento del raggio con elongazioni più marcate, forse ad indicare come una modifica a livello angolare risulti essere maggiormente incisiva sull'abbandono dell'orbita di equilibrio.

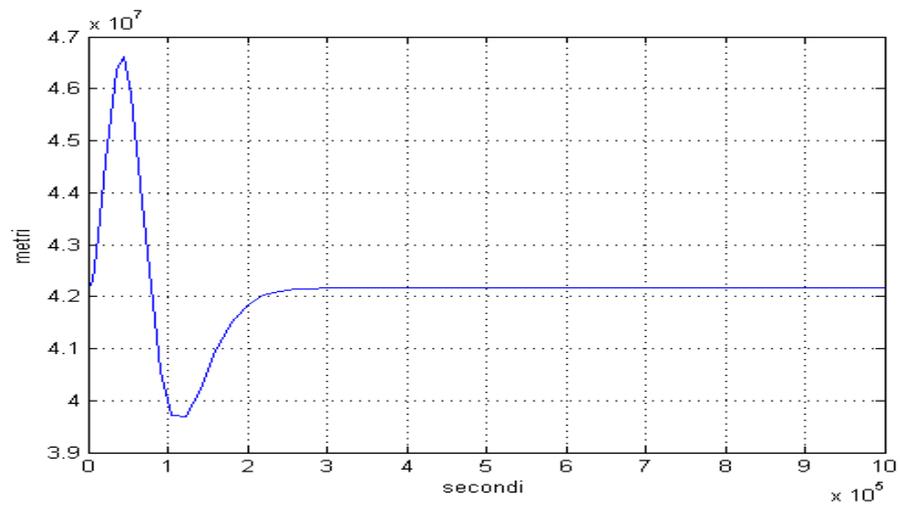
Andamento del raggio con condizione iniziale angolare variata negativamente



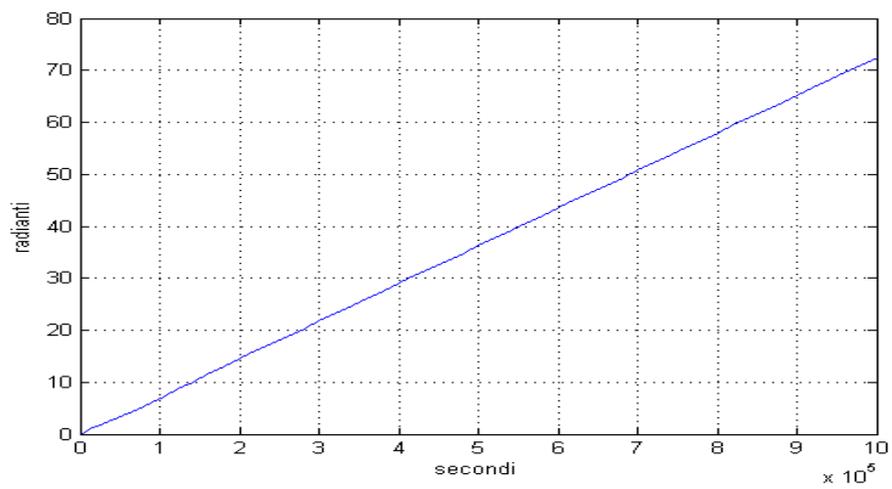
Andamento dell'angolo con condizione iniziale angolare variata negativamente



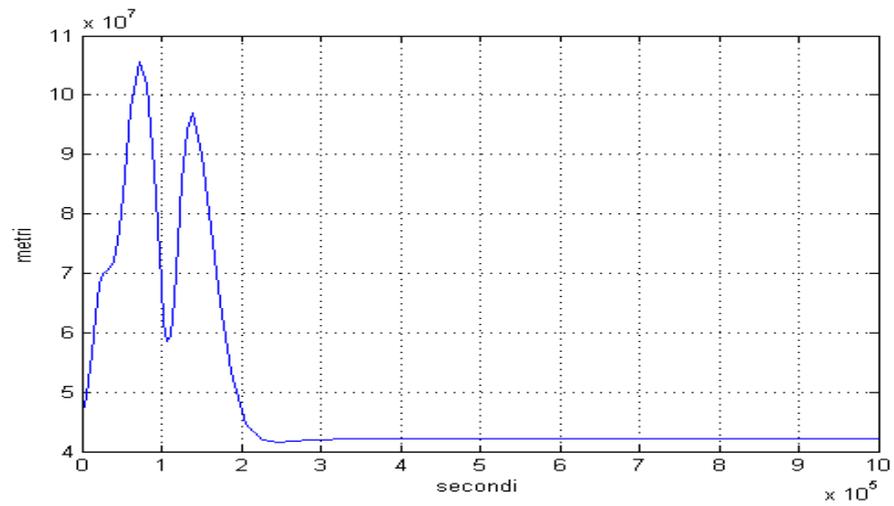
Andamento del raggio con condizione iniziale velocità angolare variata



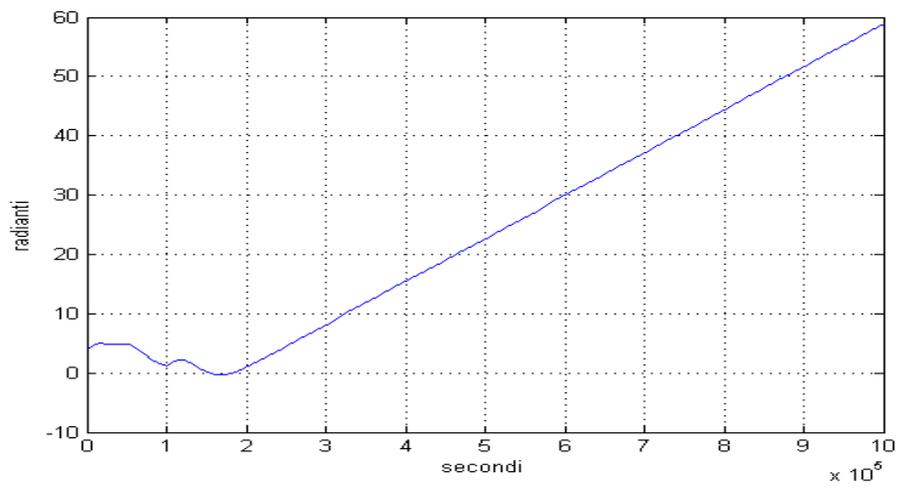
Andamento del angolo con condizione iniziale velocità angolare variata



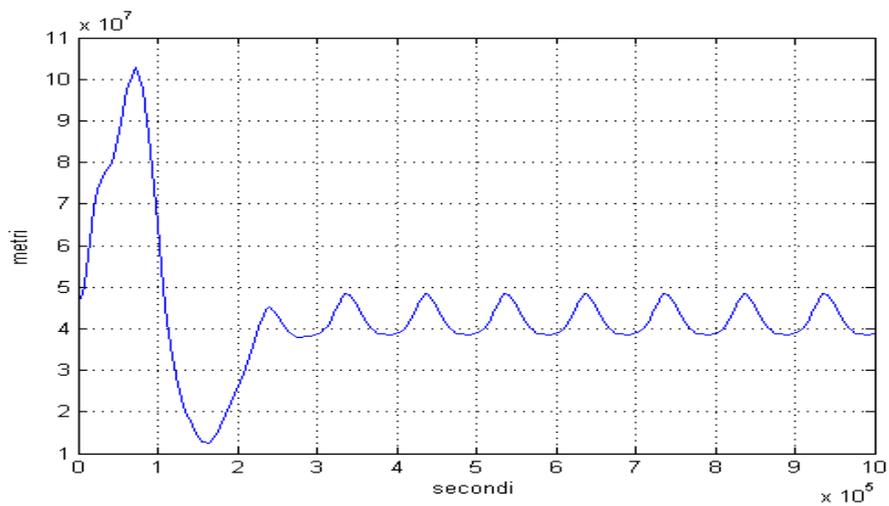
Andamento del raggio con condizione iniziali radiali e angolari variate e presenza di gradino in ingresso



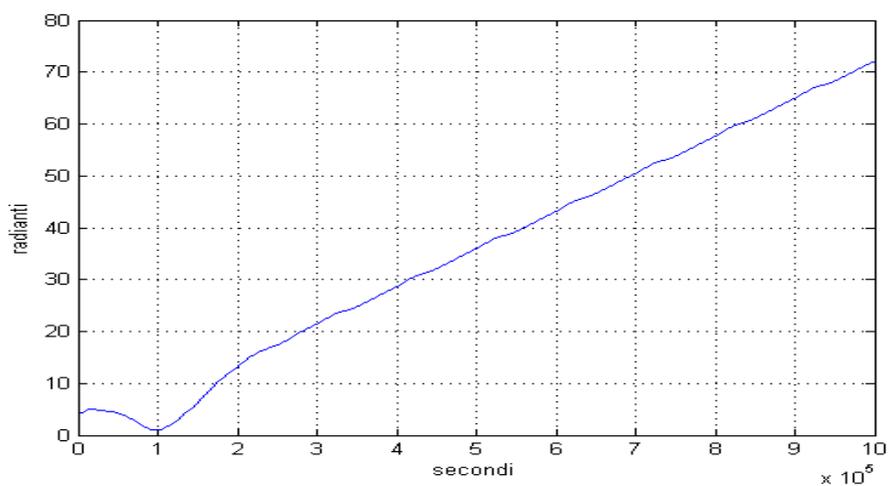
Andamento dell'angolo con condizione iniziali radiali e angolari variate e presenza di gradino in ingresso

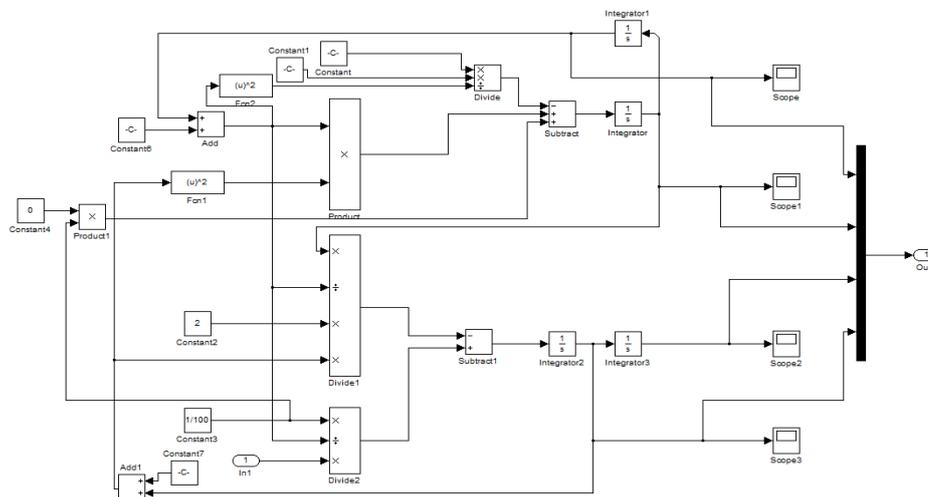
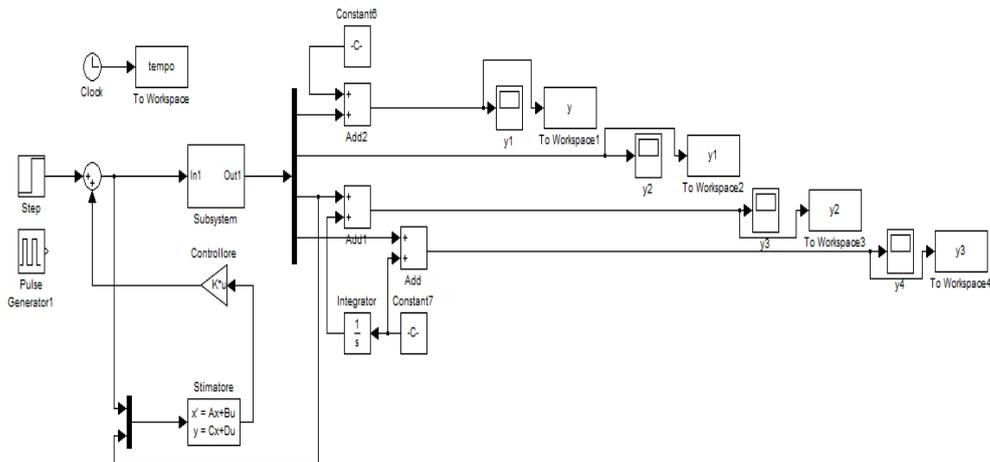


Andamento del raggio con condizione iniziali radiali e angolari variate e presenza di serie di impulsi in ingresso



Andamento dell'angolo con condizione iniziali radiali e angolari variate e presenza di serie di impulsi in ingresso



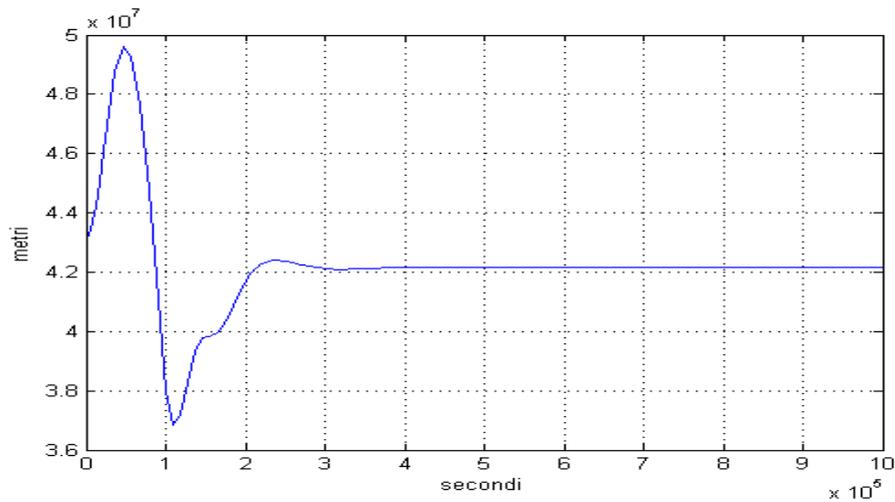
Schema del controllore K_1 non linearizzato

Andamenti corrispondenti all'impiego del controllore K_1 sul sistema non lineare

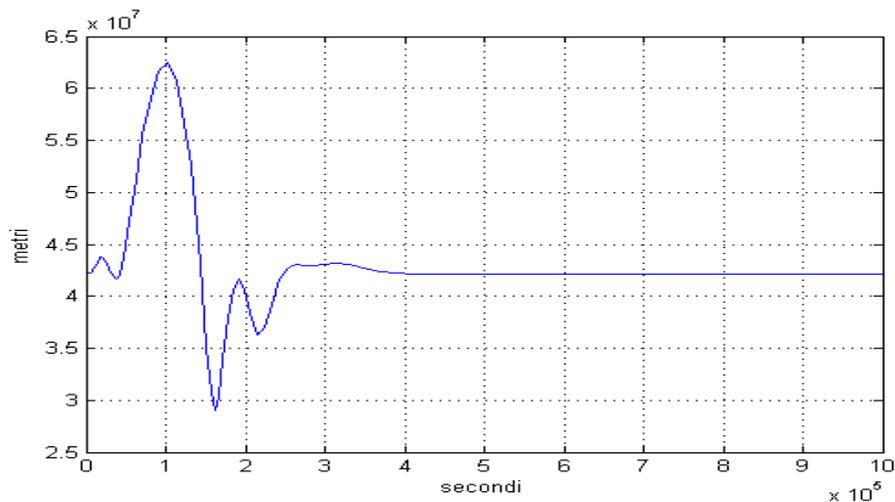
Si intendono ora riportare alcune considerazioni riguardo il funzionamento del controllore K_1 , trovato in precedenza, rispetto al sistema non linearizzato attorno all'orbita di equilibrio. L'affidabilità di K_1 è stata già provata, ora si deve procedere a verificare gli effetti delle variazioni sulle condizioni iniziali relative al sistema fisico reale. Si procede con una serie di simulazioni che rispecchiano la casistica proposta per il sistema linearizzato. Nella situazione in cui non vi sia alcuna modifica delle condizioni iniziali del sistema si rileva che non vi è, come nel caso lineare, alcuna fase di assestamento.

Imponendo una variazione iniziale del raggio, per la quale viene mantenuta la stabilità, si ottiene un andamento temporale che, rispetto al sistema lineare, si differenzia. Il grafico del raggio presenta nella fase di assestamento un numero superiore di elongazioni ed inoltre è evidente che la situazione

Andamento del raggio con condizioni iniziali radiali variate



Andamento del raggio con condizioni iniziali angolari variate positivamente

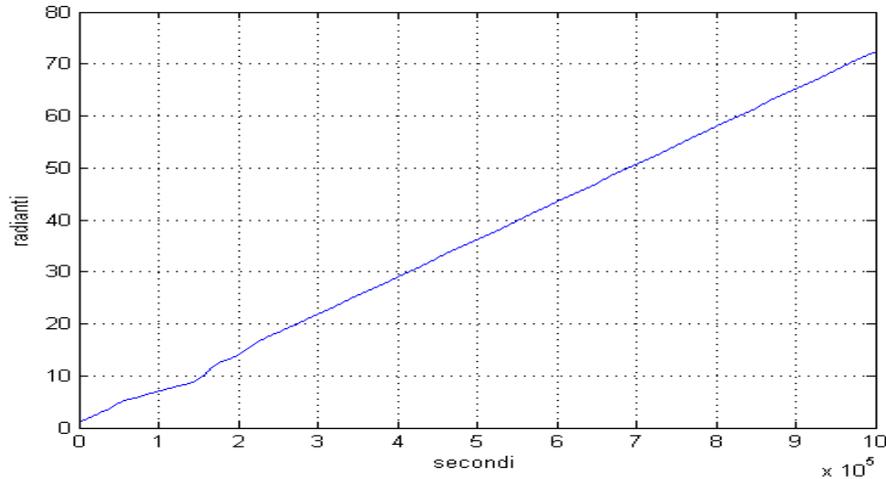


di regime si raggiunge con tempi più lunghi, pari a $4 \times 10^5 \text{ sec}$. Con riferimento all'angolo, la fase di assestamento risulta meno evidente, sempre comparata con lo studio lineare.

Si studia ora l'andamento di raggio ed angolo nel caso in cui l'angolo iniziale subisca una variazione positiva. Si nota come anche una minima variazione (1 rad) causi sul comportamento radiale una marcata sovraelongazione e diverse elongazioni minori, relativamente all'angolo si rileva solo una lieve sottoelongazione. Anche in questo caso si allungano i tempi della stabilizzazione rispetto alla situazione lineare, con tempi dell'ordine di $4 \times 10^5 \text{ sec}$.

A seguito della visione dei grafici relativi alle variazioni iniziali angolari risulta evidente come queste risultino di più difficile gestione da parte del

Andamento dell'angolo con condizioni iniziali angolari variate positivamente



controllore, rispetto alle variazioni iniziali di tipo radiale.

Si procede con lo studio degli andamenti conseguenti alla presenza di ingresso. L'analisi riguarda un gradino di ampiezza $10N$ posizionato al tempo $3 * 10^5 sec$. Il grafico dell'angolo presenta una lunga fase di assestamento, prolungata dall'intervento del gradino. Ricordando che il sistema impiegato ha sia condizioni iniziali radiali sia angolari variate, la fase di stabilizzazione risulta caratterizzata da ripetute e rapide elongazioni, inoltre è presente la marcata e lunga sovraelongazione conseguente all'ingresso. I tempi di assestamento vengono dilatati fino a $6 * 10^5 sec$.

Infine si riportano alcune considerazioni. In primo luogo si rileva come a differenza del modello linearizzato quello fisico reale non presenta il solo vincolo di non collisione con la superficie terrestre, ma è anche caratterizzato dalla possibilità di abbandono dell'orbita di equilibrio nel caso gli scostamenti iniziali superino di volta in volta determinati valori. L'effettivo funzionamento del controllore trovato si limita ad un intorno dell'orbita di equilibrio, quindi ha efficacia solo locale. A sostegno di tale valutazione si riportano i grafici relativi ad i valori limite per raggio ed angolo.

Il grafico dell'andamento radiale, relativo al sistema con scostamento iniziale radiale di $3.70 * 10^6 metri$, viene seguito da quello con variazione iniziale del raggio pari a $3.71 * 10^6 metri$.

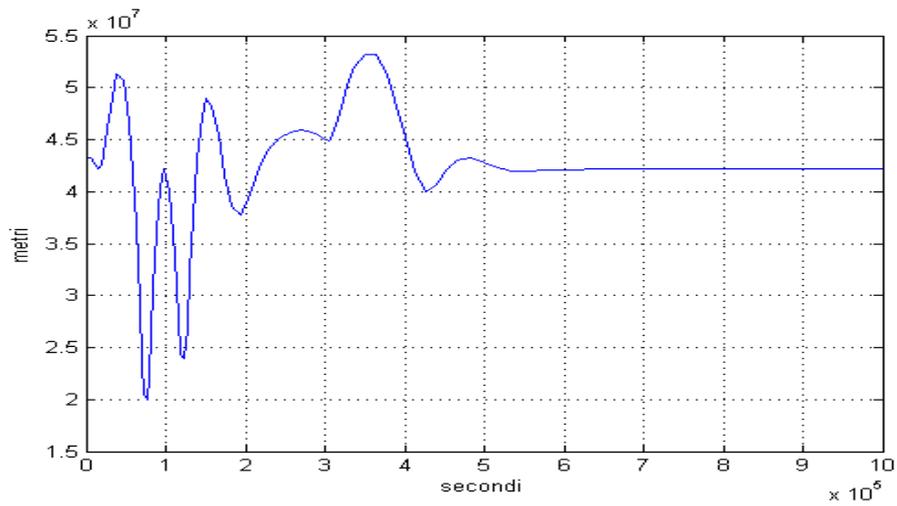
Risulta che tale valore radiale indica il limite critico, oltre al quale il controllore non riesce a mantenere il satellite in orbita.

Di seguito si riportano gli andamenti radiali con condizioni iniziali angolari rispettivamente pari a $1.67 radianti$ e $1.68 radianti$.

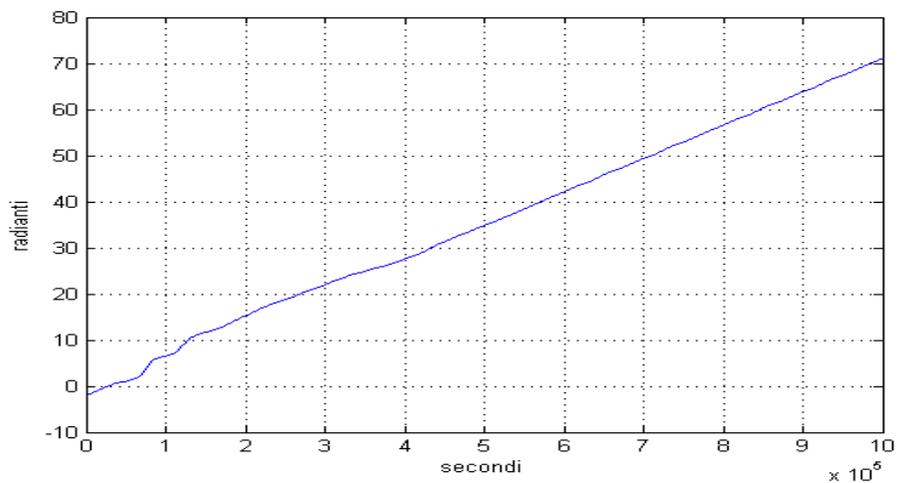
Risulta che tale valore angolare indica il limite critico, oltre al quale il controllore non riesce a mantenere il satellite in orbita.

Altro punto notevole risulta quello relativo ai tempi di assestamento

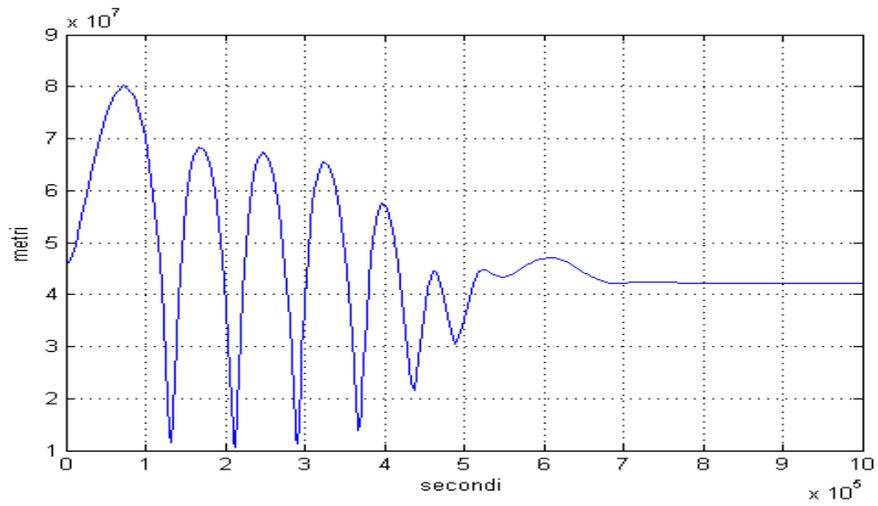
Andamento del raggio con ingresso gradino di ampiezza $10N$, posizionato al tempo $3 \times 10^5 \text{sec}$



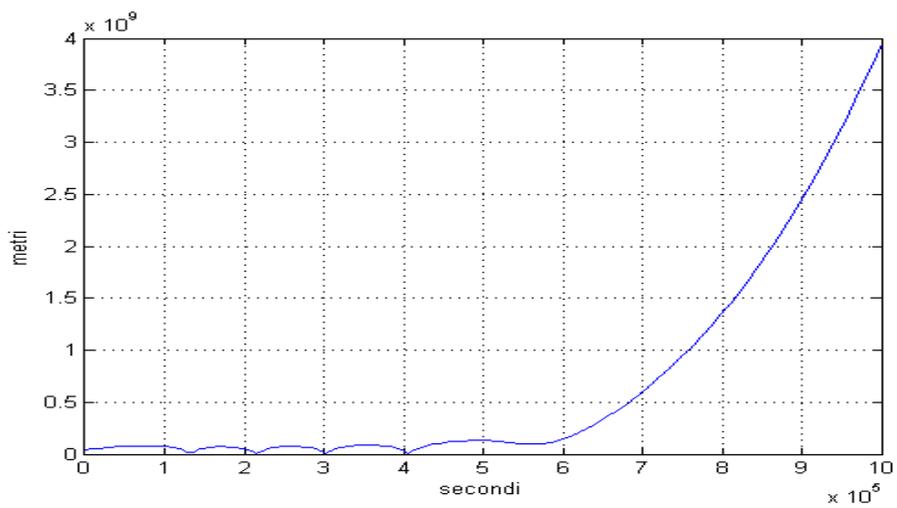
Andamento dell'angolo con ingresso gradino di ampiezza $10N$, posizionato al tempo $3 \times 10^5 \text{sec}$



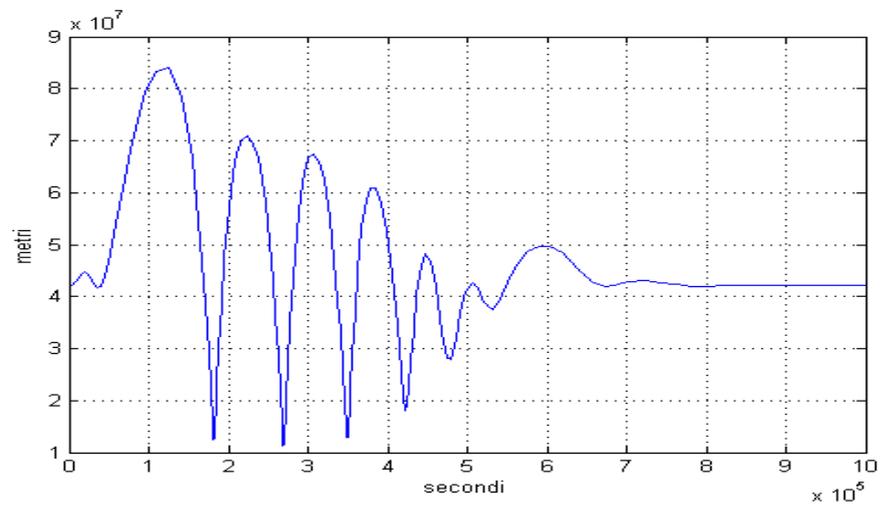
Andamento del raggio con condizione iniziale radiale variata di $3.70 * 10^6 \text{metri}$



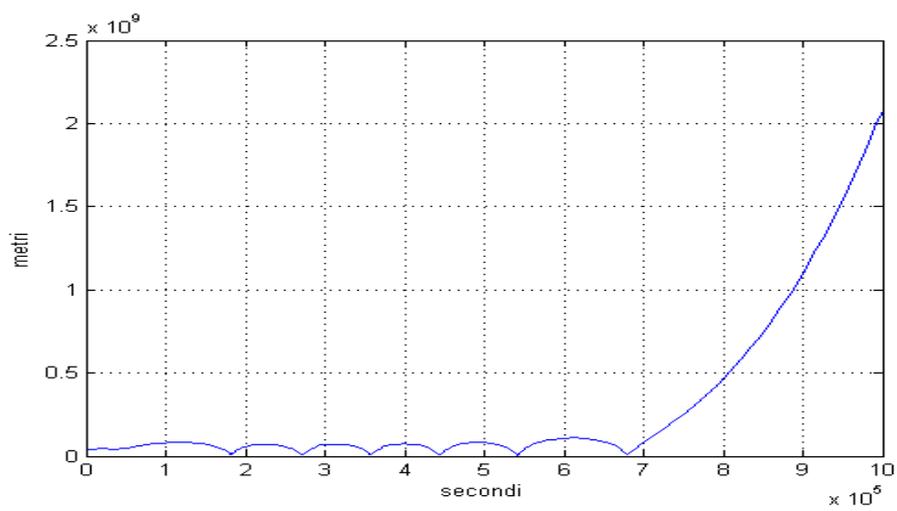
Andamento del raggio con condizione iniziale radiale variata di $3.71 * 10^6 \text{metri}$



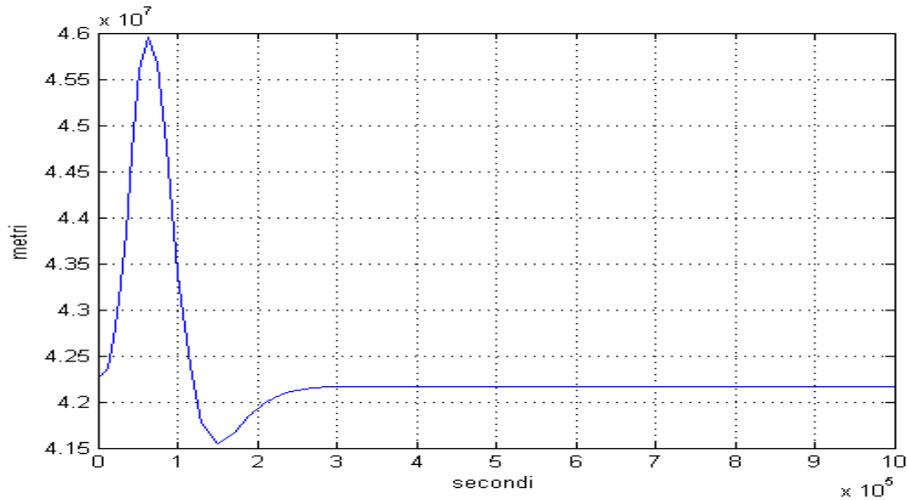
Andamento del raggio con condizione iniziale angolare pari a 1.67 radianti



Andamento del raggio con condizione iniziale angolare pari a 1.68 radianti



Andamento del raggio con condizione iniziale radiale variata e $b = 20$



che risultano dilatati, come più volte precedentemente menzionato. Dalla comparazione dei grafici tra casistica lineare e non lineare, risulta che in particolare per il raggio la fase di assestamento presenta un numero superiore di elongazioni, quindi maggiori difficoltà nell'assestamento.

Andamenti corrispondenti all'impiego del controllore K_2

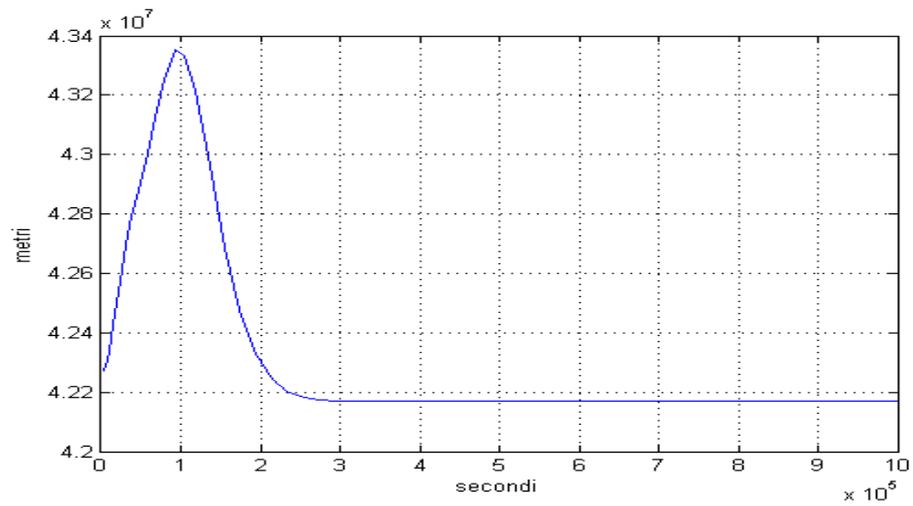
Si riportano di seguito i grafici risultanti dall'impiego del controllore K_2 nelle modalità con $b = 20$ e $b = 1.5$. Risulta così possibile valutare come la variazione di b modifichi il comportamento del sistema. La comparazione verrà svolta proponendo le medesime variazioni delle condizioni iniziali ed il medesimo ingresso in ambedue i casi. Si riporteranno solo grafici relativi all'andamento radiale, in quanto gli andamenti angolari non presentano comportamenti anomali di rilievo.

Nella situazione con mutate condizioni iniziali radiali si mantengono i medesimi tempi di assestamento, ma risultano differenti le modalità con cui viene raggiunta la situazione di regime. Per il parametro $b = 20$ si ha una sovraelongazione seguita da una sottoelongazione, mentre per $b = 1.5$ si ha solo una fase di sovraelongazione. Rispetto al sistema controllato dal solo ingresso tangenziale, K_2 risulta migliore nella gestione di diverse condizioni iniziali del raggio. Particolari valori di b possono incidere riducendo il numero di oscillazioni in fase di assestamento.

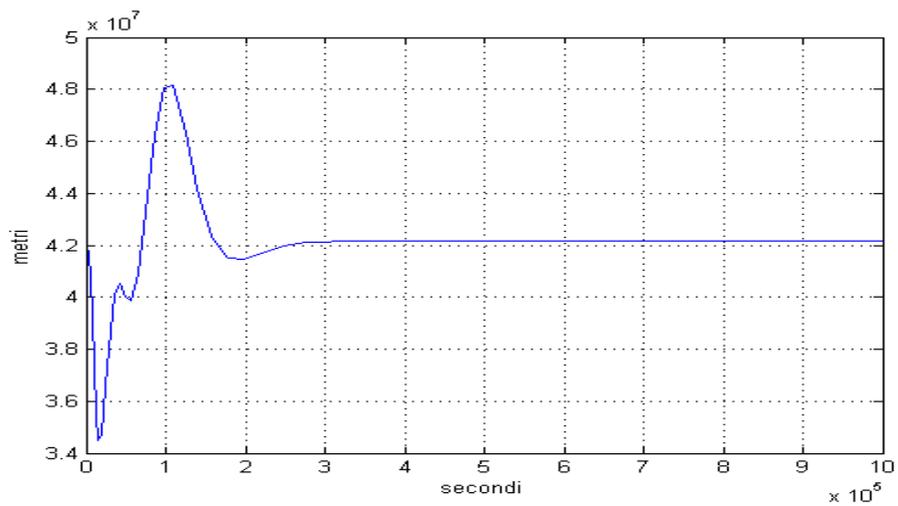
L'andamento del raggio in presenza di una modifica delle condizioni iniziali angolari presenta andamento simile nei due casi. Si nota che la variazione applicata è pari a $0.1rad$ e che per valori superiori si ottiene l'abbandono dell'orbita. Si propende a considerare il controllore K_2 non particolarmente efficace nella gestione di variazioni dell'angolo.

Si presentano i grafici relativi all'applicazione di ingressi a gradino relativamente al raggio ed alla pulsazione angolare. Si rileva un nuovo compor-

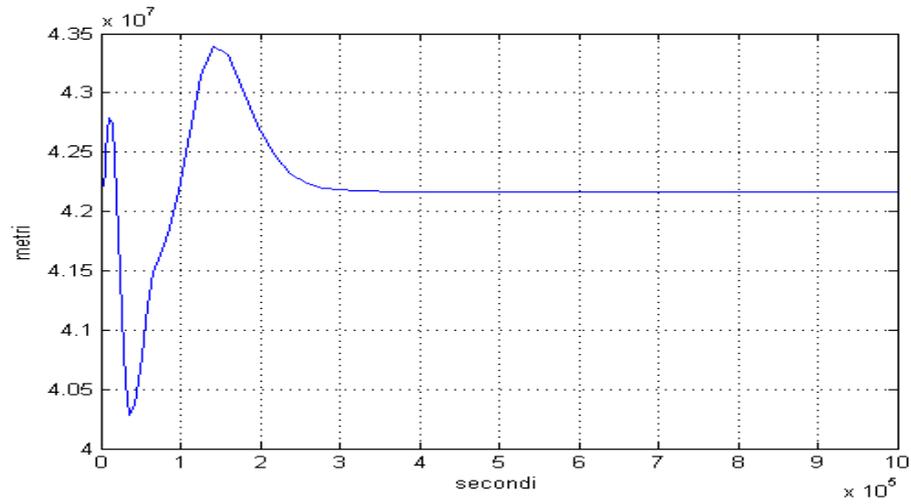
Andamento del raggio con condizione iniziale radiale variata e $b = 1.5$



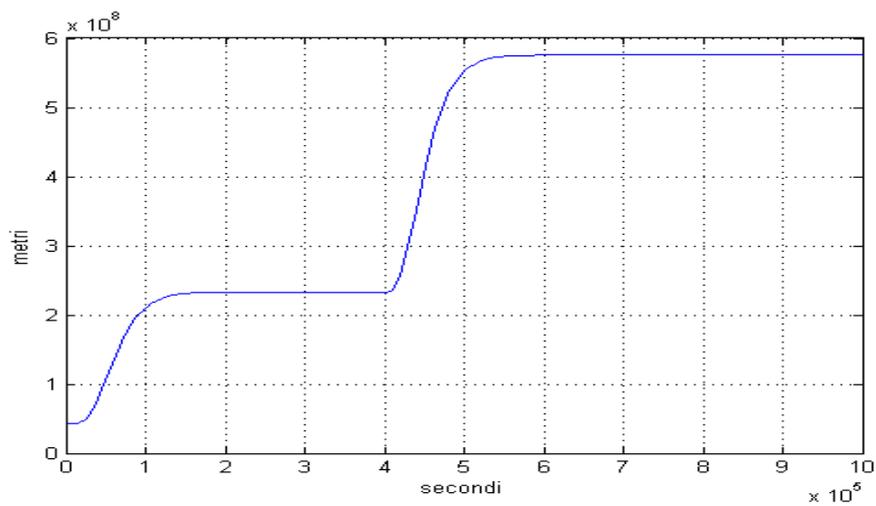
Andamento del raggio con condizione iniziale angolare variata di 0.1 rad e $b = 20$



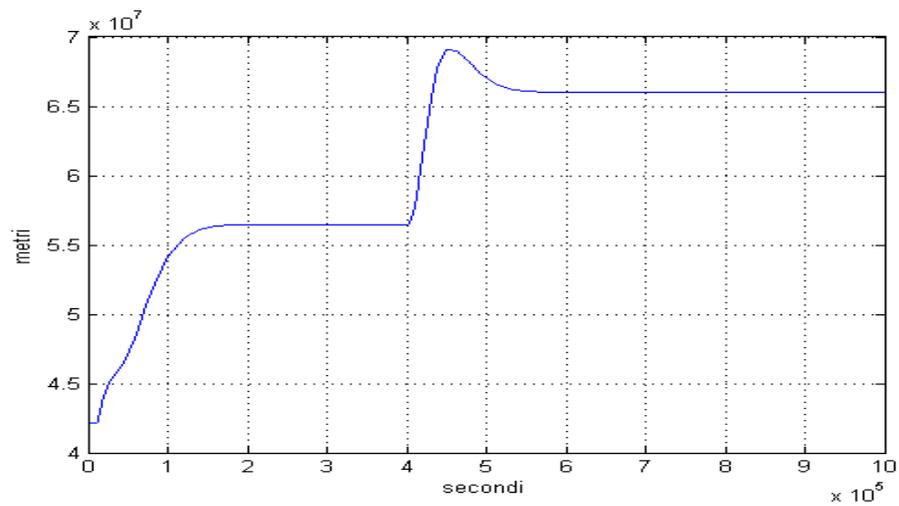
Andamento del raggio con condizione iniziale angolare variata di 0.1rad e $b = 1.5$



Andamento del raggio con ingresso a gradino sul raggio e sulla velocità angolare e $b = 20$



Andamento del raggio con ingresso a gradino sul raggio e sulla velocità angolare e $b = 1.5$



tamento. La presenza di ingressi nel sistema controllato da K_2 permette di portare il satellite in una nuova orbita di equilibrio.

Infine, considerando l'impiego di K_2 sul sistema non lineare, si rileva la correttezza del controllore. Il funzionamento presenta validità con variazioni delle condizioni iniziali molto limitate rispetto a quelle tollerate dal controllore K_1 , analizzato in precedenza.

Capitolo 3

Controllo in retroazione dall'uscita

Si intende individuare un dispositivo capace di controllare l'uscita angolare mediante l'ingresso tangenziale. Il primo passo svolto è l'individuazione della funzione di trasferimento del sistema in esame. Il sistema è definito dalle seguenti matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\rho\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\rho} \end{bmatrix}$$

$$H = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$J = [0 \quad 0]$$

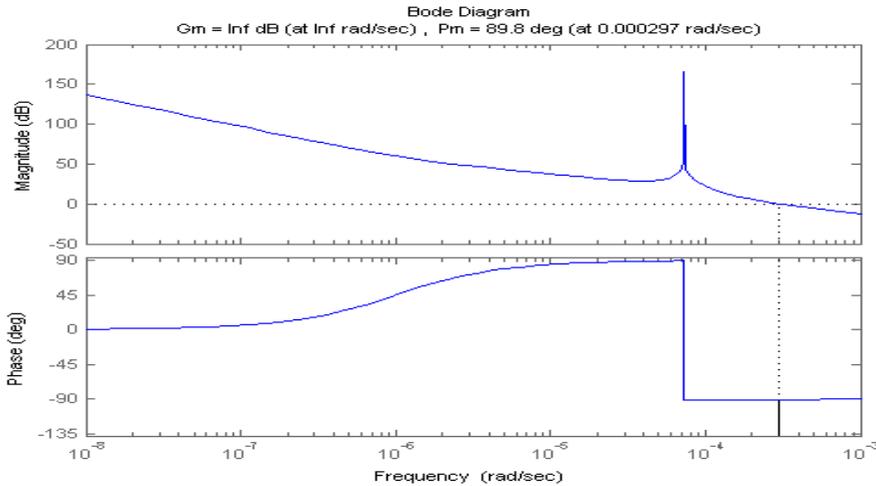
Si procede applicando la trasformata di Laplace al sistema seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Ju \end{cases}$$

Si ottiene la seguente funzione di trasferimento $G(s) = H(sI - F)^{-1}G + J$, in particolare, inserendo le matrici note, risulta:

$$G(s) = \frac{-3(1 + \frac{s}{\sqrt{3}f})(1 + \frac{s}{\sqrt{3}f})}{mR(s^2)(1 + \frac{s^2}{f^2})}$$

Relazione in cui $m = 100Kg$, $R = 42168000m$ e $f = 7.2446 * 10^{-5} \frac{rad}{sec}$.

Diagramma di Bode di $C(s)G(s)$ 

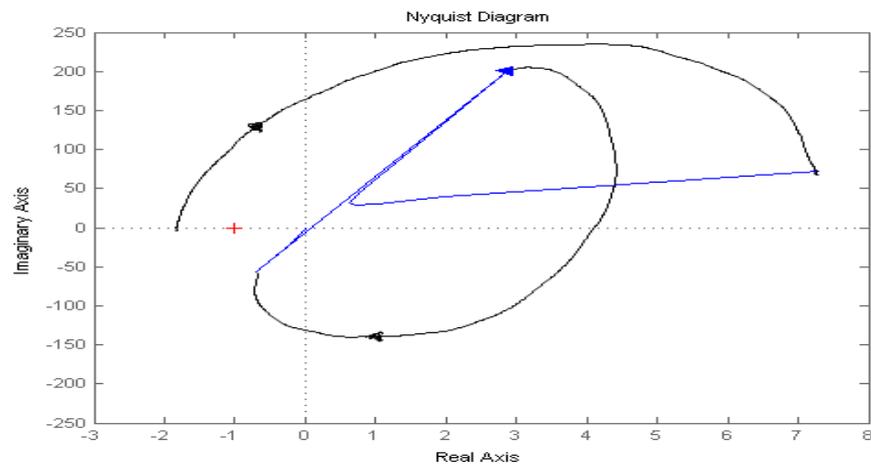
Si intende ora individuare un controllore $C(s)$ tale che permetta alla funzione di trasferimento in catena chiusa $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ di soddisfare le seguenti caratteristiche:

- Stabilità;
- Errore nullo al gradino in ingresso;
- Margine di fase di circa 90° .

Si è deciso di individuare $C(s)$ con la tecnica della sintesi per tentativi. Si rileva che per la condizione di errore nullo al gradino non è necessario intervenire in quanto $G(s)$ è di per sé di tipo 1. Si procede al soddisfacimento degli altri vincoli. Il tentativo ha portato alla individuazione del seguente controllore $C(s) = \frac{(1+\frac{s}{10^{-6}})}{(1+\frac{s}{10^6})}$. Si rileva dal diagramma di Bode di $C(s)G(s)$ che la condizione sul margine di fase viene rispettata. Tuttavia, dall'analisi mediante il criterio di Nyquist la funzione di trasferimento in catena aperta risulta non stabile, essendo il numero di giri attorno al punto $-1 + j0$ pari a due ed essendo non presenti poli a parte reale positiva. Si ottiene quindi una $W(s)$ con due poli a parte reale positiva. Ciò è conseguente al fatto che il margine di fase è stato valutato male. La fase di partenza è -360° e non 0° . Non è applicabile il criterio di Bode, essendo il guadagno di Bode minore di zero.

La sintesi per tentativi risulta inconcludente, quindi non risulta possibile svolgere una comparazione tra il controllo in retroazione dallo stato e il controllo in retroazione dall'uscita. L'ostacolo nella determinazione di $C(s)$ con la tecnica di sintesi per tentativi, risiede nella struttura troppo complicata della $G(s)$. Sono necessarie tecniche di sintesi diverse. Ad esempio, è possibile che un controllore $C(s)$ adatto allo scopo debba essere necessariamente instabile. Tale risultato non si può ottenere mediante la tecnica di

Diagramma di Nyquist, solo pulsazioni positive



sintesi per tentativi, che porta ad individuare controllori, per costruzione, stabili.

Capitolo 4

Bibliografia

- M.BISIACCO-M.E.VALCHER, *Controlli automatici*, Padova, Libreria Progetto, 2008.
- M.BISIACCO-S.BRAGHETTO, *Teoria dei sistemi dinamici*, seconda edizione, Bologna, Società Editrice Esculapio, 2010.
- P.MAZZOLDI-M.NIGRO-C.VOCI, *Fisica*, volume primo, seconda edizione, Napoli, EdiSES, 1998.