Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Rappresentazione categoriale della quantificazione esistenziale e sua costruzione libera

Relatore:
Prof.ssa Maria Emilia Maietti

Laureando: Carlo Ferro
Matricola: 1127252

Anno Accademico 2021/2022

23/09/2022

Indice

Abstract

Nella seguente tesi mostreremo una rappresentazione categoriale della quantificazione esistenziale della logica predicativa (intuizionista o classica) e una sua costruzione libera avvalendosi di strumenti sviluppati all'interno della Teoria delle Categorie, quali la nozione di funtore aggiunto e quella di dottrina primaria ed esistenziale alla Lawvere. Tale costruzione costituisce un modo alternativo a quello sintattico per aggiungere ad una dottrina sintattica la quantificazione esistenziale.

Introduzione

Questa tesi ha l'obiettivo di indagare alcuni aspetti della cosiddetta *Logica Categoriale*, disciplina sorta dall'applicazione di concetti propri della *Teoria delle Categorie* all'interno della Logica.

Partiremo introducendo le definizioni di base della Teoria delle Categorie, concentrandoci sul concetto di *funtore aggiunto* e il caso particolare di *connessione di Galois*. Poi passeremo a rappresentare categoricamente i connettivi e i quantificatori della logica predicativa, sia intuizionista che classica, come particolari funtori aggiunti tramite il concetto categoriale di *iperdottrina* di F.W. Lawvere. Successivamente considereremo le dottrine primarie ed esistenziali, che rappresentano categorialmente rispettivamente il frammento della logica intuizionista predicativa intuizionista con la sola congiunzione e costante del vero e quello ottenuto arricchendo quest'ultimo con la quantificazione esistenziale. Infine mostreremo come produrre liberamente una *dottrina esistenziale* a partire da una *primaria* seguendo il lavoro di D.Trotta.

Capitolo 1

Preliminari sulle categorie

In questo capitolo forniremo alcune definizioni di base della Teoria delle Categorie che verranno utilizzate ampiamente anche nei capitoli successivi. Si è qui scelto di presentare la quasi totalità di queste definizioni nella stessa forma utilizzata da Saunders Mac Lane e Ieke Moerdijk nel capitolo introduttivo del volume *Sheaves in Geometry and Logic:A First Introduction to Topos Theory*(1992), mentre gli esempi di categorie esposti sono stati attinti perlopiù da *Categories for the Working Mathematician*(1971) del già citato Mac Lane.

1.0.1 Le categorie

Definizione 1.0.1 (**Categoria**)**.** Una categoria $\mathbf{C}$ è il dato di:

- una collezione $Ob\mathbf{C}$ di *oggetti* (spesso denotati con le lettere maiuscole *A,B,C,...*)
- una collezione $Mor\mathbf{C}$ di *morfismi* (o *mappe* o *archi*) (*f,g,...*)
- quattro operazioni:
  - due di queste associano ad ogni morfismo f di $\mathbf{C}$ il suo *dominio* indicato come $\mathrm{dom}(f)$ (o $d_0(f)$) e il suo *codominio* indicato come $\mathrm{cod}(f)$ (o $d_1(f)$), rispettivamente, entrambi oggetti di $\mathbf{C}$. Scriviamo $f{:}C \to D$ (o $C \xrightarrow{f} D$) per indicare che f è un morfismo di $\mathbf{C}$ con dominio C e codominio D, e si dice che f è un morfismo *da C a D*.
  - le altre due operazioni sono:
    - un'operazione che associa ad ogni oggetto C di $\mathbf{C}$ un morfismo 1_C (o id_C) di $\mathbf{C}$ chiamato il *morfismo identità* di C.
    - un'operazione di *composizione* che associa ad ogni coppia (f,g) di morfismi di $\mathbf{C}$ tali che $d_0(f) = d_1(f)$, un altro morfismo $f \circ g$.

  Queste operazioni devono soddisfare i seguenti assiomi:

  1. $d_0(1_C) = C = d_1(1_C)$

2. $d_0(f \circ g) = d_0(g)$, $d_1(f \circ g) = d_1(f)$
3. $1_D \circ f = f$, $f \circ 1_C = f$
4. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Definizione 1.0.2 (**Isomorfismo**)**.** Data una categoria *C*, un morfismo $f\colon C \to D$ è detto *isomorfismo* se esiste un morfismo $g\colon D \to C$ tale che $f \circ g = 1_D$ e $g \circ f = 1_C$ (*g* prende allora il nome di *inverso* di *f*.) Se tale morfismo esiste, allora diciamo che *C* è *isomorfo* a *D*, in simboli $C \cong D$.

Dati due oggetti *C* e *D*, denotiamo con le notazioni $Hom_{\mathbf{C}}(C, D)$ o $Hom(C, D)$, la collezione dei morfismi con dominio *C* e codominio *D*.

Definizione 1.0.3 (**Categorie piccole**)**.** In generale assumeremo di lavorare in un qualche fissato *universo* *U* di insiemi. Chiameremo quindi i membri di *U* insiemi *piccoli*, mentre una collezione di membri di *U* tale da non appartenere essa stessa ad *U*, sarà chiamata un insieme *grande*.Definiamo quindi una certa categoria **C** *localmente piccola* se per ogni due oggetti *C* e *D* di **C**, l'insieme $Hom(C, D)$ è un insieme piccolo, mentre **C** è detta *piccola* se sia l'insieme degli oggetti che quello dei morfismi sono piccoli.

Definizione 1.0.4 (**Categoria opposta**)**.** Data una categoria **C**, è possibile costruire la categoria $\mathbf{C^{op}}$, detta categoria *opposta* o *duale* di **C**, prendendo gli stessi oggetti ma invertendo la direzione di tutti i morfismi e l'ordine delle loro composizioni. In altri termini, possiamo dire che un morfismo $C \to D$ in $\mathbf{C^{op}}$ è equivalente ad un morfismo $D \to C$ in **C**.

Definizione 1.0.5 (**Funtore (covariante)**)**.** Definiamo il *funtore (covariante)* da una categoria **C** a una categoria **D** come un'operazione *F* che associa ogni oggetto *C* in **C** ad un oggetto *F(C)* in **D**, e ogni morfismo *f* di **C** ad un morfismo *F(f)* in **D**, in modo tale che *F* rispetti le operazioni di dominio, codominio, identità e composizione: $F(d_0(f)) = d_0(F(f)), F(d_1(f)) = d_1(F(f)), F(1_C) = 1_{F(C)}$ e $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$. Per indicare il funtore scriveremo $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Data una categoria **C**, esiste il *funtore identità* $id_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Inoltre, dati due funtori $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, è possibile ottenere per *composizione* il nuovo funtore $G \circ F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{E}$.

Osservazione 1.0.1. Date due categorie **C** e **D** definiamo un funtore $F\colon \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{D}$ un *funtore controvariante* da **C** a **D**.

Definizione 1.0.6 (**Funtore dimenticante**)**.** Chiamiamo *funtore dimenticante* (in inglese *forgetful*) un funtore che è definito dal fatto di "dimenticare" una qualche struttura. Per esempio, il funtore dimenticante da **Grp** a **Set** *dimentica* la struttura di gruppo, *ricordando* soltanto l'insieme sottostante.

Definizione 1.0.7 (**Trasformazione naturale**)**.** Dati due funtori *F* e *G* entrambi da una categoria **C** ad una categoria **D**, chiamiamo *trasformazione naturale* α da *F* a *G* (in simboli: $\alpha\colon F \to G$), un'operazione che manda ogni oggetto *C* di **C** in un morfismo $\alpha_C\colon FC \to GC$ tale che, per ogni morfismo $f\colon C' \to C$ in

$\mathbf{C}$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} FC' & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & GC' \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ FC & \xrightarrow[\alpha_C]{} & GC \end{array}$$

sia commutativo, ovvero $G(f) \circ \alpha_{C'} = \alpha_C \circ F(f)$.

Definizione 1.0.8 (**Oggetto terminale e iniziale**)**.** Sia $\mathbf{C}$ una categoria, definiamo *oggetto terminale* $\top \in \mathbf{C}$, se esiste, un oggetto tale che per ogni $A \in \mathbf{C}$ esiste un unico morfismo $ter_A: A \to \top$. Definiamo invece *oggetto iniziale* $\mathbf{0} \in \mathbf{C}$, se esiste, un oggetto tale che per ogni $A \in \mathbf{C}$ esiste un unico morfismo $in_A: \mathbf{0} \to A$.

Osservazione 1.0.2. L'oggetto iniziale e l'oggetto terminale se esistono sono unici: se vi fossero due oggetti iniziali $\mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{0}}$ allora esisterebbero unici due morfismi $in_0: \bar{\mathbf{0}} \to \mathbf{0}$ e $in_{\bar{0}}: \mathbf{0} \to \bar{\mathbf{0}}$ e sarebbero tali che $in_0 \circ in_{\bar{0}} = id_{\bar{0}}$, $in_{\bar{0}} \circ in_0 = id_0$, e analogamente per l'oggetto terminale.

Definizione 1.0.9 (**Coprodotto e prodotto binario**)**.** Si considerino due oggetti $A, B \in Ob\mathbf{C}$, con $\mathbf{C}$ categoria, definiamo *coprodotto binario* di A, B un oggetto $A \oplus B$ di $\mathbf{C}$ dotato di due morfismi $i_A: A \to A \oplus B$ e $i_B: B \to A \oplus B$, tali che per ogni coppia di morfismi $f: A \to C$ e $g: B \to C$, con $C \in Ob\mathbf{C}$, esiste un unico morfismo $[f, g]: A \oplus B \to C$ per cui vale: $[f, g] \circ i_A = f$ e $[f, g] \circ i_B = g$.

Definiamo invece *prodotto binario* di A, B, un oggetto $A \times B$ di $\mathbf{C}$, dotato di due morfismi, le proiezioni $\pi_A: A \times B \to A$ e $\pi_B: A \times B \to B$, tali che per ogni coppia di morfismi $f: C \to A$ e $g: C \to B$, con $C \in Ob\mathbf{C}$, esiste un unico morfismo $\langle f, g \rangle: C \to A \times B$ e vale: $\pi_A \circ \langle f, g \rangle = f$ e $\pi_B \circ \langle f, g \rangle = g$.

Definizione 1.0.10 (**La categoria prodotto**)**.** Date due categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, chiamiamo *categoria prodotto* la categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, i cui oggetti sono le coppie (A, B) con $A \in Ob\mathbf{C}$ e $B \in Ob\mathbf{D}$, cioè le coppie ordinate di oggetti di $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, e i morfismi sono gli elementi (f, g), dove $f \in Mor\mathbf{C}$ e $g \in Mor\mathbf{D}$, cioè sono coppie ordinate di morfismi rispettivamente in $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$. In questi ultimi la composizione è definita componente per componente, ovvero se $f_1, f_2 \in Mor\mathbf{C}$ e $g_1, g_2 \in Mor\mathbf{D}$ tali che $d_1(f_1) = d_0(f_2)$ e $d_1(g_1) = d_0(g_2)$, allora si ha che: $(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) = (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$ e l'identità su (A, B) è data da: (id_A, id_B).

Definizione 1.0.11 (**Categorie cartesiane**)**.** Una categoria $\mathbf{C}$ è detta *cartesiana* se per ogni coppia di oggetti $A, B \in Ob\mathbf{C}$, esiste il prodotto binario $A \times B$ e se inoltre $\mathbf{C}$ possiede un oggetto terminale $\top$.

Definizione 1.0.12 (**Il funtore diagonale**)**.** Data una categoria C si definisce il *funtore diagonale*: $\Delta: \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ tale che $\Delta(A) = (A, A)$ e $\Delta(f) = (f, f)$ per ogni $A \in Ob\mathbf{C}$ e $f \in Mor\mathbf{C}$.

Definizione 1.0.13 (**Categorie fetta**)**.** La *categoria fetta* $\mathbf{C}/C$ di una categoria $\mathbf{C}$ su un oggetto $C \in \mathbf{C}$ è così composta:

- ha per oggetti tutti gli archi $f \in \mathbf{C}$ tali che $cod(f) = C$;

- ha per morfismi $g: X \longrightarrow X' \in \mathbf{C}$ da $f: X \longrightarrow C$ a $f': X' \longrightarrow C$ tale che $f' \circ g = f$.

Esiste un *funtore dimenticante* $U_c: \mathbf{C}/C \longrightarrow \mathbf{C}$ che manda un oggetto $f: X \longrightarrow C$ nel suo dominio X e un morfismo $g: X \longrightarrow X' \in \mathbf{C}/C$ (da $f: X \longrightarrow C$ a $f': X' \longrightarrow C$ tale che $f' \circ g = f$) nel morfismo $g: X \longrightarrow X'$.

1.0.2 Funtori aggiunti

Definizione 1.0.14 (**Il funtore aggiunto (tramite isomorfismi)**)**.** Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie e siano definiti i due funtori $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Allora F è l'*aggiunto sinistro* di G e G è l'*aggiunto destro* di F se $Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, G(D))$ con $C \in Ob\mathbf{C}$ e $D \in Ob\mathbf{D}$. In altre parole, devono esistere gli isomorfismi:

$$Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, G(D))$$

$$(F(C) \xrightarrow{g} D) \mapsto (C \xrightarrow{\bar{g}} G(D))$$

$$(F(C) \xrightarrow{\bar{f}} D) \leftarrow\!\shortmid (C \xrightarrow{f} G(D))$$

dove $\bar{f}$ e $\bar{g}$ sono i *morfismi trasposti* di f e g, tali che i due assiomi siano soddisfatti:

$$\overline{(F(C) \xrightarrow{g} D \xrightarrow{q} D')} = (C \xrightarrow{\bar{g}} G(D) \xrightarrow{G(q)} G(D'))$$

$$\overline{C' \xrightarrow{p} C \xrightarrow{f} G(D)} = (F(C') \xrightarrow{F(p)} F(C) \xrightarrow{\bar{f}} D)$$

per ogni g, q, p, f.

Scriveremo allora

$$F \dashv G$$

Definizione 1.0.15 (**Il funtore aggiunto (tramite unità e counità)**)**.** Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie, e siano $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ due funtori. Diciamo che F è *aggiunto sinistro* di G e G è aggiunto destro di F se esistono due trasformazioni naturali:

$$\eta: 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow G \circ F$$

$$\varepsilon: F \circ G \longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$$

dette rispettivamente *unità* e *counità*, tali da soddisfare le seguenti identità triangolari:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(\eta_C)"] \arrow[dr, "1_{F(C)}"'] & FGF(C) \arrow[d, "\varepsilon_{F(C)}"] \\ & F(C) \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
G(D) \arrow[r, "\eta_{G(D)}"] \arrow[dr, "1_{G(D)}"'] & GFG(D) \arrow[d, "G(\varepsilon_D)"] \\
& G(D)
\end{tikzcd}
$$

In questo caso scriveremo:

$$F \dashv G$$

Un'*aggiunzione* tra $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ è una quadrupletta $(F, G, \eta, \varepsilon)$ dove F e G sono funtori definiti come sopra, mentre η e ε sono trasformazioni naturali tali da soddisfare le identità triangolari appena introdotte.

1.0.3 Alcuni esempi

Forniamo qui alcuni esempi di categorie importanti:

- $\mathbf{0}$ è la categoria vuota, non ha oggetti e non ha morfismi;
- $\mathbf{1}$ è la categoria con un oggetto e un morfismo identità;
- $\mathbf{2}$ è la categoria con due oggetti a, b e un solo morfismo $a \to b$ diverso dall'identità.
- Un *monoide* è una categoria con un oggetto. Ogni monoide è quindi determinato dall'insieme di tutti i suoi morfismi, dal morfismo identità, e dalla regola di composizione dei morfismi. Visto che ogni coppia di morfismi ha un composto, un monoide può essere descritto come un insieme M con un'operazione binaria $M \times M \to M$ associativa con identità. Infatti un monoide è esattamente un semigruppo con identità.
- Anche un *gruppo* G può essere considerato come una categoria: si tratta di una categoria con un singolo oggetto e con gli elementi del gruppo che diventano i morfismi della categoria, dove la moltiplicazione del gruppo è usata come l'operazione di composizione nella categoria corrispondente.
- Per ogni anello commutativo K, l'insieme $\mathbf{Matr_K}$ di tutte le matrici triangolari con entrate in K è una categoria i cui oggetti sono gli interi positivi $m, n, ...$, e ogni A matrice $m \times n$ è considerata come un arco $A : n \to m$, con l'usuale prodotto tra matrici a svolgere il ruolo della composizione.
- Ogni insieme *parzialmente ordinato* (su questo concetto torneremo ampiamente in seguito) $(P, \leq)$ dà origine ad una categoria con gli elementi di P come oggetti, e con un morfismo da p a q se e solo se $p \leq q$.
- La categoria **Set** è quella i cui oggetti sono insiemi e i cui morfismi sono le funzioni dotate dell'usuale composizione. In modo simile è possibile costruire la categoria **Top** i cui oggetti sono gli spazi topologici e i cui morfismi sono le mappe continue da uno all'altro (e ancora, allo stesso modo, la categoria **Grp** con gruppi/omomorfismi e spazi vettoriali/mappe lineari).

- La categoria **Cat** ha per oggetti le categorie piccole e per morfismi i funtori. La regola della composizione è ottenuta come composizione delle singole componenti dei funtori e il funtore identità è dato dalle mappe identità delle sue componenti.

Capitolo 2

Preliminari algebrici

Richiamiamo a questo punto alcune nozioni algebriche di particolare importanza per la trattazione successiva, ove verranno riviste in versione categoriale. Si è qui ripresa la presentazione di Ravi Ferigo nella tesi *Semantica categoriale delle logiche intuizionista e classica*(2021).

2.0.1 Semireticoli e reticoli

Definizione 2.0.1 (Semireticolo). Un semireticolo è una coppia $(X, *)$ con X insieme e $*\colon X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x * y$ operazione tale che:

- $x * x = x$;
- $x * y = y * x$;
- $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Definizione 2.0.2 (Estremi inferiore e superiore). Sia $(S, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato (*poset*) e siano $x, y \in S$. L'*estremo inferiore* di x e y è un elemento $x \wedge y \in S$ tale che:

- $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$;
- per ogni $z \in S$ tale che $z \leq x$ e $z \leq y$, allora $z \leq x \wedge y$.

Viceversa, l'*estremo superiore* di x e y è l'elemento $x \vee y \in S$ tale che:

- $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$;
- per ogni $z \in S$ tale che $x \leq z$ e $y \leq z$, allora $x \vee y \leq z$.

I semireticoli caratterizzati da estremo inferiore (rispettivamente superiore) prendono anche il nome di *inf-semireticoli*(rispettivamente *sup-semireticoli*).

Definizione 2.0.3 (**Incontro e giunzione**)**.** Sia $(X, *)$ un semireticolo, diciamo che $x \leq y \overset{def}{\Leftrightarrow} x * y = x$. Usando questo ordinamento, l'operazione binaria si può chiamare *incontro* (in inglese *meet*). In questi casi allora $\wedge$ sostituirà $*$. Se invece consideriamo l'ordinamento dato da $y \leq x \Leftrightarrow x * y = x$, l'operazione binaria si può chiamare *giunzione* (in inglese *join*).In questi casi $\vee$ sostituirà $*$.

Definizione 2.0.4 (**Reticolo**)**.** Un reticolo è una tripletta $(X, \wedge, \vee)$ dove $(X, \wedge)$ è un semireticolo con incontro e $(X, \vee)$ è un semireticolo con giunzione tali da indurre lo stesso ordine su X. In altre parole, un reticolo è una tripletta $(X, \wedge, \vee)$ tale che:

- $x \wedge x = x$ e $x \vee x = x$;
- $x \wedge y = y \wedge x$ e $x \vee y = y \vee x$;
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ e $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
- $x \wedge (x \vee y) = x$ e $x \vee (x \wedge y) = x$.

Definizione 2.0.5 (**Reticolo distributivo**)**.** Sia $(X, \wedge, \vee)$ un reticolo, esso viene detto *reticolo distributivo* se valgono le due seguenti proprietà:

- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee y)$;
- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y)$.

Definizione 2.0.6 (**Reticolo completo**)**.** Un reticolo $(X, \wedge, \vee)$ viene detto *completo* se ogni sottoinsieme $Z \subseteq X$ ha estremo inferiore e superiore.

Definizione 2.0.7 (**Minimo e massimo**)**.** Sia $(X, \wedge, \vee)$ un reticolo. Un elemento $z \in X$ è detto il *minimo* del reticolo se $z \leq x$ per ogni $x \in X$. Un elemento $z \in X$ è invece detto il *massimo* del reticolo se $x \leq z$ per ogni $x \in X$. Notiamo che, se il minimo ed il massimo di un reticolo esistono, allora essi sono unici. Il minimo ed il massimo sono comunemente denotati con **0** e **1** rispettivamente.

Definizione 2.0.8 (**Complemento e reticolo complementato**)**.** Sia $(X, \wedge, \vee)$ un reticolo con **0** e **1**, sia inoltre $x \in X$. Il *complemento* di x è un elemento $\bar{x} \in X$ tale che

$$x \wedge \bar{x} = 0$$

e

$$x \vee \bar{x} = 1$$

Un reticolo con **0** e **1** e dotato di complemento $\bar{x}$ per ogni $x \in X$ viene detto *reticolo complementato*. In generale il complemento di un elemento non è necessariamente unico, quando però il reticolo è distributivo, allora il complemento è sicuramente unico.

2.0.2 Algebra di Heyting

Definizione 2.0.9 (**Algebra di Heyting**). Un'*Algebra di Heyting* è una struttura $(X, \leq, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \rightarrow)$ dove $(X, \leq, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \rightarrow)$ è un reticolo con minimo $\mathbf{0}$, massimo $\mathbf{1}$, $\leq$ ordine parziale associato al reticolo (come in precedenza) e

$$\begin{aligned} \rightarrow: X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto (x \rightarrow y) \end{aligned}$$

è un operatore tale che $(z \leq x \rightarrow y) \Leftrightarrow (z \wedge x \leq y)$.

2.0.3 Algebra di Boole

Definizione 2.0.10 (**Algebra di Boole**). Un'algebra di Boole è un reticolo distributivo complementato $(X, \leq, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ ove $\leq$ è l'ordine parziale associato al reticolo come in precedenza.

Osservazione 2.0.1. L'algebra di Boole è un caso particolare di algebra di Heyting. Infatti, basta esibire in un'algebra di Boole un'operazione che si comporti nello stesso modo dell'algebra di Heyting.Vale quindi il seguente:

Teorema 2.0.1. *Sia* $(X, \leq, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *un'algebra di Boole. Allora è anche un'algebra di Heyting.*

Dimostrazione. Basta mostrare che è possibile costruire un'operazione $\rightarrow: X \times X \longrightarrow X, (x, y) \longmapsto x \rightarrow y$ tale che $z \leq x \rightarrow y$ se e solo se $z \wedge x \leq y$, per ogni $x, y, z \in X$.

Definiamo $x \longrightarrow y \coloneqq \bar{x} \vee y$ per ogni $x, y \in X$, dove con $\bar{x}$ indichiamo il complemento di x.

Sia $z \in X$ tale che $z \leq x \rightarrow y$, allora vale che $z \leq x \vee y$. Dunque abbiamo che $z \wedge x \leq (x \vee y) \wedge x \leq (x \wedge x) \vee (y \wedge x) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y \leq y$;

Sia ora $z \in X$ tale che $z \wedge x \leq y$, allora $x \vee (z \wedge x) \leq x \vee y$. Usando la distributività abbiamo che: $(x \vee z) \wedge (x \vee x) \leq x \vee y$, ovvero $(x \vee z) \wedge 1 \leq x \vee y$, cioè $x \vee z \leq x \vee y$. Per definizione di estremo superiore: $z \leq x \vee y$. □

2.0.4 Algebra di Lindenbaum

Definizione 2.0.11 (**Algebra di Lindenbaum**). Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale: chiamiamo *algebra di Lindenbaum* della logica Intuizionista proposizionale $\mathbf{LI_p}$, l'algebra di Heyting costruita a partire dall'insieme $\mathcal{A}\mathrm{i}(\mathcal{L}) \equiv \{[pr] \mid pr \in \mathcal{PROP}(\mathcal{L})\}$, dove $[pr] \equiv \{\alpha \in \mathcal{PROP}(\mathcal{L}) \mid\!\vdash \alpha \Leftrightarrow \text{pr è derivabile in } \mathbf{LI_p}\}$, dotato della relazione d'ordine: $[pr_1] \leq [pr_2] \equiv pr_1 \vdash pr_2$ è derivabile in $\mathbf{LI_p}$.

Similmente è possibile costruire l'algebra di Lindenbaum per la logica Classica proposizionale $\mathbf{LC_p}$, partendo questa volta dall'algebra di Boole per proposizioni pr derivabili in $\mathbf{LC_p}$.

Osservazione 2.0.2. L'algebra di Lindenbaum per la logica proposizionale intuizionista è un'algebra di Heyting. Ciò è facilmente dimostrabile notando che:

la relazione d'ordine descritta è *riflessiva* ($pr \vdash pr$ per ogni $pr \in \mathcal{PROP}(\mathcal{L})$ grazie all'assioma d'identità), *transitiva* (siano $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{PROP}(\mathcal{L})$, se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \chi$ allora per la regola ammissibile della composizione in $\mathbf{LI_p}$ si ottiene che $\phi \vdash \chi$) e *antisimmetrica* (se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$ allora si ottiene che $\vdash \phi \Leftrightarrow \psi^2$). Sono poi presenti due operazioni binarie, una di *inf* : $(-) \wedge (-)$ e una di *sup*: $(-) \vee (-)$ per cui: $[pr_1] \wedge [pr_2] = [pr_1 \wedge pr_2]$ e $[pr_1] \vee [pr_2] = [pr_1 \vee pr_2]$ per $pr_1, pr_2 \in \mathcal{PROP}(\mathcal{L})$. Sono anche presenti un massimo $\mathbf{1} = [tt]$ e un minimo $\mathbf{0} = [\bot]$ e per ogni $pr1, pr2 \in \mathcal{PROP}(\mathcal{L})$ è definito l'operatore implicazione: $[pr_2]^{[pr_1]} = [pr_1 \to pr_2]$. Allo stesso modo si può verificare che l'algebra di Lindenbaum per la logica Classica proposizionale è un'algebra di Boole dove il complemento di una proposizione $pr \in \mathcal{PROP}(\mathcal{L})$ è $[pr]^c = [\neg pr] = \neg[pr] = [pr \to \bot]$.

Capitolo 3

Le categorie preordinate e le connessioni di Galois

In questa sezione si intende esibire lo stretto collegamento tra insiemi preordinati e categorie, per poi introdurre il concetto fondamentale di *connessione di Galois*. Il riferimento qui, così come nel capitolo successivo, è stata la tesi *On Logical Connectives and Quantifiers as Adjoint Functors*(2017) di Stefano Mengato.

3.0.1 Preordini e poset

Definizione 3.0.1 (Insieme preordinato). Un *insieme preordinato* $(A, \leq)$, detto anche *preordine*, è un insieme A dotato di una relazione binaria $\leq$ che sia *riflessiva* e *transitiva*.

Definizione 3.0.2 (Insieme parzialmente ordinato). Un *insieme parzialmente ordinato* $(A, \leq)$, detto anche *poset*, è un insieme preordinato con la proprietà che se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$, per ogni $x, y \in A$.

Osservazione 3.0.1. Come anticipato in **1.0.3 a pagina 11**, un preordine $(A, \leq)$ può essere considerato una categoria i cui oggetti sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di A e in cui per ogni coppia di oggetti c'è al massimo un morfismo dall'uno all'altro. Possiamo quindi creare un parallelismo tra l'unico morfismo $A_1 \to A_2$ tra gli oggetti della categoria A_1 e A_2 e la relazione d'ordine $a_1 \leq a_2$ tra i corrispondenti elementi di A.

Anche ogni poset può essere considerato come una categoria, in questo caso vale la proprietà che per ogni coppia di oggetti della categoria, se esiste un isomorfismo tra loro, allora essi coincidono necessariamente.

Chiamiamo **Preord** la categoria avente come oggetti gli insiemi preordinati e come morfismi le funzioni monotone tra loro. Chiamiamo invece **Poset** la categoria che ha come oggetti gli insiemi parzialmente ordinati e come morfismi le funzioni monotone tra loro.

Lemma 3.0.1. *Siano C e D due insiemi preordinati e siano $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ le categorie corrispondenti, allora un funtore $F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ corrisponde ad una funzione monotona $f\colon C \to D$, che sarà crescente se F è covariante o decrescente se F è controvariante. Allo stesso modo, una funzione monotona $f\colon C \to D$ corrisponde ad un funtore $F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$, covariante se f è crescente o controvariante se f è decrescente.*

Dimostrazione. Dato $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funtore covariante, allora esso manda un morfismo $C_1 \to C_2$ in un morfismo $F(C_1) \to F(C_2)$ di $\mathbf{D}$. Sia f una funzione così definita: $f\colon C \to D$, con $c \mapsto f(c)$ dove $f(c)$ è l'elemento di D corrispondente all'oggetto $F(C) \in Ob(\mathbf{D})$, e c è l'elemento di C corrispondene all'oggetto $C \in Ob(\mathbf{C})$. Dato che $C_1 \to C_2$ in $\mathbf{C}$ se e solo se $c_1 \leq c_2$ in C e $F(C_1) \to F(C_2)$ in $\mathbf{D}$ se e solo se $f(c_1) \leq f(c_2)$ in D, possiamo concludere che $c_1 \leq c_2 \Longrightarrow f(c_1) \leq f(c_2)$, che è esattamente la definizione di funzione monotona da C a D.

Sia $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore controvariante, allora un morfismo $C_1 \to C_2$ in $\mathbf{C}$ viene mandato in un morfismo $F(C_2) \to F(C_1)$ in $\mathbf{D}$. Costruiamo una funzione $f\colon C \to D, c \mapsto f(c)$ dove $f(c)$ è l'elemento di D corrispondente all'oggetto $F(C) \in Ob(\mathbf{D})$, mentre c è l'elemento di C corrispondente all'oggetto $C \in Ob(\mathbf{C})$. Dato che $C_1 \to C_2$ in $\mathbf{C}$ se e solo se $c_1 \leq c_2$ in C e $F(C_2) \to F(C_1)$ in $\mathbf{D}$ se e solo se $f(c_2) \leq f(c_1)$ in D, possiamo concludere che $c1 \leq c2 \longrightarrow f(c_2) \leq f(c_1)$. Quindi abbiamo che f è una funzione monotona decrescente da C a D.

Sia ora $f\colon C \to D$ una funzione monotona crescente. Definiamo un funtore $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ nel modo seguente: se $C_1 \in Ob(\mathbf{C})$ e c_1 è il suo elemento corrispondente nel preordine C, allora $F(C_1) \in Ob(\mathbf{D})$ è l'oggetto di $\mathbf{D}$ corrispondente all'elemento $f(c_1)$ nel preordine D. Sia $C_1 \to C_2$ un morfismo nella categoria $\mathbf{C}$, allora $c_1 \leq c_2$ nel preordine C dove c_1, c_2 in C corrispondono a C_1, C_2 in $Ob(\mathbf{C})$, quindi $f(c_1) \leq f(c_2)$ in D dato che f è crescente e quindi possiamo trovare un morfismo $F(C_1) \to F(C_2)$ in $\mathbf{D}$, con $f(c_1), f(c_2)$ che corrispondono a $F(C_1), F(C_2)$. Usando la monotonia di f si può provare facilmente che F rispetta la composizione e l'identità, allora è un funtore covariante.

Consideriamo una funzione decrescente $f\colon C \to D$. Definiamo un funtore $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ nel modo seguente: se $C_1 \in Ob(\mathbf{C})$ e c_1 è il suo elemento corrispondente nel preordine C, allora $F(C_1) \in Ob(\mathbf{D})$ è l'oggetto di $\mathbf{D}$ corrispondente all'elemento $f(c_1)$ nel preordine D. Sia $C_1 \to C_2$ un morfismo nella categoria $\mathbf{C}$, allora $c_1 \leq c_2$ nel preordine C con c_1, c_2 in C che corrispondono a C_1, C_2 in $Ob(\mathbf{C})$, dunque $f(c_2) \leq f(c_1)$ in D dato che f è decrescente; quindi possiamo trovare un morfismo $F(C_2) \to F(C_1)$ in $\mathbf{D}$, con $f(c_1), f(c_2)$ che corrispondono a $F(C_1), F(C_2)$. Per la monotonia di f, può essere facilmente provato che F rispetta la composizione e l'identità, quindi si può conludere che è un funtore controvariante. $\square$

Ora ha finalmente senso considerare il funtore:

$$\mathbf{Preord} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$
$$(A, \leq) \mapsto \mathbf{A}$$
$$(A \longrightarrow B) \leftarrow\!\shortmid (\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B})$$

che manda ogni preordine $(A, \leq)$ nella corrispondente categoria $\mathbf{A}$ e (grazie al lemma precedente) associa ogni funzione monotona crescente ad un funtore covariante.

3.0.2 Le categorie preordinate

Definizione 3.0.3 (Categoria preordinata). Una categoria $\mathbf{C}$ viene detta *preordinata* se valgono le seguenti due condizioni:

- è *piccola* (cioè è in $\mathbf{Cat}$)
- per ogni coppia di oggetti $A, B \in Ob\mathbf{C}$ esiste al più un morfismo $f: A \to B$, e si definisce $A \leq B$ se e soltanto se $Hom(A, B) \neq \emptyset$, ovvero esiste unico $f: A \to B$, $f \in Mor\mathbf{C}$.

Possiamo a questo punto considerare anche il funtore:

$$\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Preord}$$
$$\mathbf{A} \mapsto (A_{\mathbf{A}}, \leq_{\mathbf{A}})$$
$$(\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}) \leftarrow\!\shortmid (A_{\mathbf{A}} \longrightarrow B_{\mathbf{B}})$$

in cui se $\mathbf{A}$ è una categoria piccola allora $A_{\mathbf{A}}$ è un insieme contenente un elemento per ogni oggetto di A e nel quale dati $a_1, a_2 \in A$ vale che $a_1 \leq_{\mathbf{A}} a_2$ se e solo se esiste un morfismo $A_1 \to A_2$ in $\mathbf{A}$ (con A_1, A_2 oggetti corrispondenti agli elementi a_1, a_2).

3.0.3 Connessioni di Galois

Definizione 3.0.4 (Connessione di Galois). Dati $(A, \leq)$ e $(B, \leq)$ due insiemi parzialmente ordinati. Una *connessione di Galois* tra i due poset A e B è il dato di due funzioni monotone $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow A$, tali che:

$$\forall a \in A, \forall b \in B (f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq g(b))$$

In un linguaggio più strettamente categoriale possiamo dire che: dati due funtori $F: \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ e $G: \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$, con $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ categorie preordinate, allora questi due funtori sono detti *Galois-connessi* se vale che per ogni $p \in \mathbf{P}$ e $q \in \mathbf{Q}$:

$$F(p) \leq q \Leftrightarrow p \leq G(q)$$

Osserviamo che i due funtori così definiti, grazie alle proprietà del preordine sono tali che F sia aggiunto sinistro di G cioè $F \dashv G$. Viceversa dati i funtori F e G tali che preservino l'ordine tra due categorie preordinate, e che $F \dashv G$, si ottiene la condizione della definizione precedente. Possiamo quindi concludere che due funtori sono Galois-connessi se e soltanto se $F \dashv G$.

3.0.4 Le algebre di Heyting, di Boole e di Lindenbaum come categorie

Teorema 3.0.1. *Una categoria ordinata* $\mathbf{C}$ *è un'*algebra di Heyting *se possiede estremi superiori e inferiori binari, un elemento iniziale* $\mathbf{0}$*, un elemento terminale* $\top$*, e per ogni* $A \in Ob\mathbf{C}$ *il funtore:* $(A \wedge -): \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ *ha come aggiunto destro il funtore:* $(A \to -): \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$.

Dimostrazione. Dato il poset $(C, \leq)$ che corrisponde alla categoria $\mathbf{C}$, allora possiamo affermare che è un reticolo: infatti possiede estremi superiori e inferiori binari, un massimo e un minimo rispetto all'ordine (corrispondenti rispettivamente all'elemento terminale e quello iniziale). Inoltre dato $A \in Ob\mathbf{C}$, per ogni $X \in Ob\mathbf{C}$, esiste $A \to X$ tramite il funtore $(A \to -)$, e dato che questo funtore è aggiunto destro del funtore $(A \wedge -)$ vale che: $Z \leq A \to X$ se e solo se $A \wedge Z \leq X$ per ogni $X, Z \in Ob\mathbf{C}$, ottenendo così la proprietà cercata dell'algebra di Heyting. □

Ora che abbiamo enunciato e dimostrato questo teorema, possiamo considerare un'algebra di Heyting come una categoria ordinata $(\mathbf{H}, \leq)$ dotata delle due operazioni binarie $\wedge, \vee$, che corrispondono rispettivamente al *prodotto* e al *coprodotto* binari.

Teorema 3.0.2. *Sia data una categoria ordinata* $\mathbf{C}$*. Allora essa è un'*algebra di Boole *se è un'algebra di Heyting e il funtore* $(- \to \mathbf{0}): \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{C}$ *ha come aggiunto sia destro che sinistro il funtore* $(- \to \mathbf{0}): \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{op}}$.

Dimostrazione. Consideriamo un'algebra di Heyting $\mathbf{C}$ tale che soddisfi la condizione dell'enunciato. Allora per ogni $X \in Ob\mathbf{C}$, sfruttando il fatto che i due funtori sono aggiunti sia a destra che a sinistra, vale che, ponendo $X \to \mathbf{0} = \neg X$, $\neg X \leq Y$ se e solo se $X \leq \neg Y$ per ogni $X \in Ob\mathbf{C}, Y \in Ob\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$. In particolare, ponendo prima $X = \neg Y$ e poi $Y = \neg X$, e considerando che le disuguaglianze valgono per ogni X, Y, si ottiene che per ogni $X \in Ob\mathbf{C}$ vale che: $X = \neg\neg X$, e ciò prova che si tratta di un'algebra di Boole. □

A partire dai due teoremi precedenti, è possibile costruire la versione categoriale dell'*algebra di Lindenbaum*. Siano infatti $(\mathcal{A}\mathrm{i}(\mathcal{L}), \vdash)$ e $(\mathcal{A}\mathrm{c}(\mathcal{L}), \vdash)$ un'algebra di Heyting e un'algebra di Boole dotate della relazione d'ordine: $[pr_1] \leq [pr_2]$ se e solo se $pr_1 \vdash pr_2$ con pr_1, pr_2 proposizioni di $\mathcal{L}$. Quindi un morfismo $[pr_1] \longrightarrow [pr_2]$ nella categoria ordinata dell'algebra di Lindenbaum così definita è equivalente a $[pr_1] \leq [pr_2]$.

Capitolo 4

Il quantificatore esistenziale come funtore aggiunto

Dopo aver definito le *iperdottrine* e averne fornito un esempio, andremo ora a mostrare come il quantificatore esistenziale possa essere considerato un particolare funtore aggiunto.

4.0.1 Le iperdottrine

Per introdurre la nozione di *iperdottrina*, è necessario aggiungere alcuni concetti riguardanti le categorie.

Lemma 4.0.1. *Siano* $\mathbf{P}$ *e* $\mathbf{Q}$ *due categorie ordinate i cui ordini siano* sub-completi *(vale a dire: esiste l'estremo superiore per ogni sottoinsieme del preordine), sia* $F\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Q}$ *un funtore tra esse. Allora* F *ha un aggiunto destro se e solo se conserva gli estremi superiori arbitrari.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo sia G l'aggiunto destro di F, vale a dire sia $F \dashv G$. Sia $\{A_i \in Ob\mathbf{P} | i \in I\}$ un sottoinsieme di oggetti di $\mathbf{P}$ con estremo superiore P. Consideriamo l'insieme $\{F(A_i) | i \in I\}$: è un sottoinsieme di oggetti in $\mathbf{Q}$ e, per ipotesi, possiede estremo superiore, chiamiamolo Q. Dato che $F \dashv G$, vale che $F(A_i) \leq Q \Leftrightarrow A_i \leq G(Q)$ per ogni $i \in I$, allora $P \leq G(Q)$ visto che P è l'estremo superiore degli $A_i, i \in I$, e usando la condizione $F \dashv G$, otteniamo $F(P) \leq Q$. Inoltre, ogni mappa $A_i \leq P$ in $\mathbf{P}$ viene mandata dal funtore F nella corrispondente $F(A_i) \leq F(P)$ in $\mathbf{Q}$, ma questo significherebbe che $Q \leq F(P)$. Allora vale che $F(P) = Q$.

($\Leftarrow$) Supponiamo che F conservi estremi superiori arbitrari e sia $B \in Ob\mathbf{Q}$. In questo caso l'insieme $\{A \in Ob\mathbf{P} | F(A) \leq B\}$ è un sottoinsieme di $Ob(P)$, quindi esiste il suo estremo superiore, che prendiamo come $G(B)$. Grazie a questa ipotesi, segue che esiste un funtore $\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{P}, B \longmapsto sup\{A \in Ob\mathbf{P} | F(A) \leq B\}$. Inoltre vale che $A \leq G(B) \Leftrightarrow F(A) \leq B$ per ogni $A \in Ob\mathbf{P}$ e $B \in Ob\mathbf{Q}$, allora $F \dashv G$. $\square$

Definizione 4.0.1 (**Il funtore prodotto**)**.** Sia $\mathbf{C}$ una categoria dotata di prodotto binario e sia $C \in Ob\mathbf{C}$. Possiamo definire un funtore da $\mathbf{C}$ a se stessa come il prodotto per un oggetto fissato della categoria, in altri termini se $C \in Ob\mathbf{C}$ è un oggetto fissato della categoria, chiameremo il *funtore prodotto con l'oggetto* C il seguente funtore:

$$\begin{aligned} (-) \times C \colon \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ X &\longmapsto X \times C \\ (X \longrightarrow Y) &\longmapsto (X \times C \longrightarrow Y \times C) \end{aligned}$$

Ora è possibile introdurre il concetto fondamentale di *categoria cartesiana*:

Definizione 4.0.2 (**Categoria cartesiana**)**.** Sia $\mathbf{C}$ una categoria dotata di prodotto binario. Diciamo che $\mathbf{C}$ è *cartesiana chiusa* se, per ogni oggetto $C \in Ob\mathbf{C}$, il funtore prodotto $(-) \times C \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ ha come aggiunto destro $(-)^C \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, il quale manda ogni $X \in Ob\mathbf{C}$ nell'oggetto X^C detto *spazio dei morfismi* da C a X.

A questo punto possiamo finalmente dare la definizione di *iperdottrina per la logica predicatica intuizionista*:

Definizione 4.0.3 (**Iperdottrina**[1])**.** Una *iperdottrina per la logica predicatica intuizionista* IL è un funtore

$$\mathcal{D} \colon \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Ha}$$

tale che:

- $\mathbf{C}$ è una categoria dotata di prodotti finiti, e per ogni $X \in Ob\mathbf{C}$ la categoria $\mathcal{D}(X)$ viene detta la *fibra* su X.
- per ogni proiezione $\pi_i \colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ $(i = 1, 2)$ in $\mathbf{C}$, il funtore $\mathcal{D}(\pi_i) \colon \mathcal{D}(X_i) \longrightarrow \mathcal{D}(X_1 \times X_2)$ ha come aggiunto sinistro $\exists\pi_i \colon \mathcal{D}(X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathcal{D}(X_i)$, vale a dire che:

  $$\exists\pi_i \dashv \mathcal{D}(\pi_i)$$

  in accordo con la *condizione di Beck-Chevalley* e la *reciprocità di Frobenius.*

  La *condizione di Beck-Chevalley* per l'$\exists$ afferma che, date due proiezioni qualsiasi $\pi \colon X \longrightarrow A$ e $\pi' \colon X' \longrightarrow A'$, per ogni diagramma di pullback

  $$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f'"'] & A' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\pi"'] & A \end{tikzcd}$$

  per ogni $\beta \in \mathcal{D}(X)$ il morfismo:

  $$\exists_{\pi'} \mathcal{D}(f')(\beta) \leq \mathcal{D}(f) \exists_{\pi}(\beta)$$

[1] si veda [2] e [8]

è un isomorfismo.

La *reciprocità di Frobenius* afferma invece che, per ogni proiezione $\pi: X \longrightarrow A$ e per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(A), \beta \in \mathcal{D}(X)$, il morfismo:

$$\exists_\pi(\mathcal{D}(\pi)(\alpha) \wedge_X \beta) \leq \alpha \wedge_A \exists_\pi(\beta)$$

è un isomorfismo.

- per ogni proiezione $\pi_i: X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ $(i = 1, 2)$ in $\mathbf{C}$, il funtore $\mathcal{D}(\pi_i): \mathcal{D}(X_i) \longrightarrow \mathcal{D}(X_1 \times X_2)$ ha come aggiunto destro $\forall\pi_i: \mathcal{D}(X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathcal{D}(X_i)$, vale a dire che:

$$\mathcal{D}(\pi_i) \dashv \forall\pi_i$$

in accordo con la *condizione di Beck-Chevalley*.

La *condizione di Beck-Chevalley* per il $\forall$ afferma che, date due proiezioni qualsiasi $\pi: X \longrightarrow A$ e $\pi': X' \longrightarrow A'$, per ogni diagramma di pullback

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f'"'] & A' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\pi"'] & A \end{tikzcd}$$

per ogni $\beta \in \mathcal{D}(X)$ il morfismo:

$$\mathcal{D}(f)\forall_\pi(\beta) \leq \forall_{\pi'}\mathcal{D}(f')(\beta)$$

è un isomorfismo.

4.0.2 L'iperdottrina sintattica

Definizione 4.0.4 (**La categoria dei contesti**)**.** Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, definiamo la *cateogoria dei contesti* **Cont** come la categoria avente per oggetti le liste di variabili distinte $(x_{j_1}, ..., x_{j_n})$, e per morfismi delle liste di sostituzioni dei termini in $\mathcal{L}$ nella forma $\vec{t} := [t_1/x_{k1}, ..., t_n/x_{km}]: (x_{j_1}, ..., x_{j_n}) \longrightarrow (x_{k1}, ..., x_{km})$ con le variabili libere dei t_i che si trovano tra gli $(x_{j_1}, ..., x_{j_n})$ per ogni $i = 1, ..., m$.

Dati due morfismi in **Cont** $\vec{t} := [t_i/x_{ki}]_{i=1,...,m}: (x_{j_1}, ..., x_{j_n}) \longrightarrow (x_{k1}, ..., x_{km})$ e $\vec{s} := [s_i/x_{hi}]_{i=1,...,l}: (x_{k1}, ..., x_{km}) \longrightarrow (x_{h1}, ..., x_{hl})$, la loro composizione è il morfismo $\vec{s} \circ \vec{t} := [s_i(t_1/x_{k1}, ..., t_m/x_{km})/x_{hi}]_{i=1,...,l}: (x_{j_1}, ..., x_{j_n}) \longrightarrow (x_{h1}, ..., x_{hl})$ che appartiene ancora a **Cont** e ogni termine $s_i(\vec{t}/\vec{x_k})/x_{hi}$ ha le variabili libere tra $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$.

Consideriamo due morfismi in **Cont**, siano essi $\vec{t} := [t_i/x_{ki}]_{i=1,...,m}$ e $\vec{s} := [s_i/x_{hi}]_{i=1,...,m}$, diciamo che essi sono *uguali*, ovvero che: $\vec{t} = \vec{s}$ se e solo se $t_i = s_i$ per ogni $i \in \{1, ..., m\}$

Consideriamo ora i tre morfismi in **Cont**:

$$\vec{t} := [t_i/x_{ki}]_{i=1,...,m}: (x_{j_1}, ..., x_{j_n}) \longrightarrow (x_{k1}, ..., x_{km})$$
$$\vec{s} := [s_i/x_{hi}]_{i=1,...,l}: (x_{k1}, ..., x_{km}) \longrightarrow (x_{h1}, ..., x_{hl})$$
$$\vec{u} := [u_i/x_{g_i}]_{i=1,...,p}: (x_{h1}, ..., x_{hl}) \longrightarrow (x_{g_1}, ..., x_{g_p})$$

Vale che: $u_i[\vec{s}/\vec{x_h}][\vec{t}/\vec{x_k}] = u_i[\vec{s}[\vec{t}/\vec{x_k}]/\vec{x_h}]$ per ogni $i \in \{1,...,p\}$ dato che $x_{k1},...,x_{km}$ non sono presenti negli u_i. Abbiamo quindi verificato che l'operazione di composizione è *associativa*.

Data una lista di variabili $(x_{j_1},...,x_{j_n})$, il *morfismo identità* sarà nella forma $\vec{x_j}[x_{j_i}/x_{j_i}]_{i=1,...,n}: (x_{j_1},...,x_{j_n}) \longrightarrow (x_{j_1},...,x_{j_n})$.

L'*oggetto terminale* della categoria **Cont** corrisponde alla *lista vuota* $\varnothing$: infatti un morfismo della categoria da qualsiasi lista di variabili distinte alla lista vuota elimina tutte le dipendenze dalle variabili di quella lista.

Sono presenti i *prodotti binari*. Date infatti $(x_{j_1},...,x_{j_n})$ e $(x_{k1},...,x_{km})$, il loro prodotto è la lista $(x_{j_1},...,x_{j_n},x_{J+k1},...,x_{J+km})$ ove $J = max\{j_1,...,j_n\}$. Le proiezioni saranno:

$$\vec{x_j} := [\vec{x_j}/\vec{x_j}, \vec{x_k}/\vec{\varnothing}]: (x_{j_1},...,x_{j_n},x_{J+k_1},...,x_{J+k_m}) \longrightarrow (x_{j_1},...,x_{j_n})$$
$$\vec{x_k} := [\vec{x_j}/\vec{\varnothing}, \vec{x_k}/\vec{x_k}]: (x_{j_1},...,x_{j_n},x_{J+k_1},...,x_{J+k_m}) \longrightarrow (x_{J+k_1},...,x_{J+k_m})$$

Sia $(x_{h1},...,x_{hl}) \in Ob$**Cont** e si considerino i morfismi in **Cont** $\vec{t}: (x_{h1},...,x_{hl}) \longrightarrow (x_{j_1},...,x_{j_n})$ e $\vec{s}: (x_{h1},...,x_{hl}) \longrightarrow (x_{k1},...,x_{km})$, allora il morfismo

$$\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle: (x_{h1},...,x_{hl}) \longrightarrow (x_{j_1},...,x_{j_n},x_{J+k_1},...,x_{J+k_m})$$

è tale che $\vec{x_j} \circ \langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = \vec{t}$ and $\vec{x_k} \circ \langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = \vec{s}$. Vale inoltre l'unicità: se $\vec{u}: (x_{h1},...,x_{hl}) \longrightarrow (x_{j_1},...,x_{j_n},x_{J+k_1},...,x_{J+k_m})$ è tale che $\vec{x_j} \circ \vec{u} = \vec{t}$ e $\vec{x_k} \circ \vec{u} = \vec{s}$, allora $u_i = x_{j_i}$ per ogni $i \in \{1,...,n\}$ e $u_{J+k_i} = x_{J+k_i}$ per ogni $i \in \{1,...,m\}$, quindi $\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = \vec{u}$.

Definizione 4.0.5 (**L'iperdottrina sintattica**)**.** Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio per la logica intuizionista $IL_=$. Definiamo *iperdottrina sintattica intuizionista* $H_\mathcal{L}$ per un linguaggio $\mathcal{L}$ un funtore:

$$H_\mathcal{L}: \mathbf{Cont}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ha}$$

definito nel seguente modo:

- per ogni oggetto $\vec{x} = (x_1,...,x_n) \in Ob$**Cont**, definiamo:

  $$H_\mathcal{L} = \mathcal{U}(\mathcal{L})(\vec{x}) := \{[\varphi(x_1,...,x_n)] | \varphi \in Form_\mathcal{L}\}$$

  l'algebra di Lindenbaum-Tarski delle formule con variabili libere in $\vec{x}$, detta *fibra sulle variabili* $\vec{x}$;

- per ogni morfismo $\vec{t} = [t_1/y_1,...,t_m/y_m]: (x_1,...,x_n) \longrightarrow (y_1,...,y_m)$ in **Cont**, definiamo:

  $$H(\vec{t}): \mathcal{U}(\mathcal{L})(y_1,...,y_m) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L})(x_1,...,x_n)$$

  il morfismo in **Ha** che manda ogni formula $\varphi(y_1,...,y_m)$ a variabili libere tra le $y_1,...,y_m$ nella formula $\varphi(y_1,...,y_m)[y_1/t_1,...,y_m/t_m]$ a variabili libere tra le $x_1,...,x_n$.

È anche possibile definire una *iperdottrina sintattica classica*: in questo caso partiremo da un linguaggio $\mathcal{L}$ per la logica classica $CL_=$ e costruiremo l'iperdottrina sintattica classica per il linguaggio $\mathcal{L}$ come un funtore

$$H_{\mathcal{L}}\colon \mathbf{Cont}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ba}$$

definito nello stesso modo del caso intuizionista.

Osservazione 4.0.1. Date $\vec{x}$ e $\vec{x}'$ liste di variabili e $\pi\colon\vec{x} \longrightarrow \vec{x}'$ proiezione, definiamo $H_{\mathcal{L}}(\pi)\colon\mathcal{U}(\mathcal{L})(\vec{x}') \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L})(\vec{x})$ un *funtore di indebolimento*. Questo funtore manda formule con variabili libere in formule con più variabili libere.

4.0.3 Il quantificatore esistenziale come funtore aggiunto

Sia dato un linguaggio $\mathcal{L}$ per la logica predicativa intuizionista o classica. Sia inoltre $\varphi(x_1, ..., x_n, y) \in Form_{\mathcal{L}}$ una proposizione a variabili libere tra $x_1, ..., x_n, y$, cioè $[\varphi(x_1, ..., x_n, y)] \in \mathcal{U}(\mathcal{L})(x_1, ..., x_n, y)$. Consideriamo la *quantificazione esistenziale* di quella formula $[\exists y.\varphi(x_1, ..., x_n, y)]$. In questo modo otterremo formule a variabili libere tra $x_1, ..., x_n$, vale a dire formule in $\mathcal{U}(\mathcal{L})(x_1, ..., x_n)$. Abbiamo quindi un morfismo:

$$\begin{aligned} \exists y\colon\mathcal{U}(\mathcal{L})(x_1, ..., x_n, y) &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L})(x_1, ..., x_n) \\ [\varphi(x_1, ..., x_n, y)] &\longmapsto [\exists y.\varphi(x_1, ..., x_n, y)] \end{aligned}$$

Osservazione 4.0.2. Nel quantificatore esistenziale la sostituzione delle variabili deve essere ben definita. In particolare, per ogni sostituzione del tipo $[\vec{x}/\vec{z}, y/y]\colon(x_1, ..., x_n, y) \longrightarrow (z_1, ..., z_m, t)$ vogliamo che:

$$[(\exists y.\varphi(x_1, ..., x_n, y))[\vec{x}/\vec{z}, y/y]] = [\exists y.\varphi(z_1, ..., z_m, y)] = [\exists y.(\varphi(x_1, ..., x_n, y)[\vec{x}/\vec{z}, y/y])]$$

Notiamo che la *condizione di Beck-Chevalley* per l'$\exists$ viene rispettata.

Definizione 4.0.6 (**L'algebra di Lindenbaum-Tarski**)**.** Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio per la logica predicativa intuizionista o classica. Sia inoltre $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ una lista di variabili. Definiamo *algebra di Lindenbaum-Tarski* $\mathcal{U}(\mathcal{L})(\vec{x})$ l'algebra di Lindenbaum $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ con formule a variabili libere tra $(x_1, ..., x_n)$.

A questo punto definiamo il funtore:

$$\begin{aligned} \exists y\colon\mathcal{U}_i(\mathcal{L})(x_1, ..., x_n, y) &\longrightarrow \mathcal{U}_i(\mathcal{L})(x_1, ..., x_n) \\ [\varphi(x_1, ..., x_n, y)] &\longmapsto [\forall y.\varphi(x_1, ..., x_n, y)] \\ ([\varphi(x_1, ..., x_n, y)] \le [\psi(x_1, ..., x_n, y)]) &\longmapsto ([\exists y.\varphi(x_1, ..., x_n, y)] \le [\exists y.\psi(x_1, ..., x_n, y)]) \end{aligned}$$

Teorema 4.0.1. *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio per la logica predicativa intuizionista o classica. Sia inoltre $H_{\mathcal{L}}$ il funtore definito come iperdottrina sintattica. Sia $\vec{x} := (x_1, ..., x_n)$, $(\vec{x}, y) = (x_1, ..., x_n, y) \in Ob$***Cont** *e $[\vec{x}/\vec{x}]\colon(x_1, ..., x_n, y) \longrightarrow (x_1, ..., x_n)$ proiezione su* **Cont***. Allora il quantificatore esistenziale $\exists y$ è aggiunto sinistro del funtore di indebolimento $H_{\mathcal{L}}([\vec{x}/\vec{x}])$ del contesto delle variabili $\vec{x}$ con variabile extra y:*

$$\exists y \dashv H_{\mathcal{L}}([\vec{x}/\vec{x}])$$

Dimostrazione. Svolgeremo la dimostrazione del caso intuizionista, in questo modo varrà anche per il caso classico. Sia $[\varphi(\vec{x}, y)] \in Ob\mathcal{U}_{\mathbf{i}}(\mathcal{L})(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$. Esiste il morfismo $[\varphi(\vec{x}, y)] \leq [\exists y.\varphi(\vec{x}, y)]$ in $\mathcal{U}_i(\mathcal{L})(\vec{x}, y)$ visto che esiste la derivazione $\varphi(\vec{x}, y) \vdash \exists y.\varphi(\vec{x}, y)$ nel cacolo dei sequenti intuizionista:

$$\dfrac{\overset{id-ax}{\varphi(\vec{x}, y) \vdash \varphi(\vec{x}, y), \exists y.\varphi(\vec{x}, y)}}{\varphi(\vec{x}, y) \vdash \exists y.\varphi(\vec{x}, y)}\ {\scriptstyle \exists r}$$

Sia ora $[\alpha(\vec{x})] \in Ob\mathcal{U}_{\mathbf{i}}(\mathcal{L})(\mathbf{x})$ e sia $[\varphi(\vec{x}, y)] \leq [\alpha(\vec{x})]$ un morfismo in $\mathcal{U}_i(\mathcal{L})(\vec{x}, y)$, dunque vale che $\varphi(\vec{x}, y) \vdash \alpha(\vec{x})$. Dobbiamo mostrare l'esistenza di un unico morfismo $[\exists y.\varphi(\vec{x}, y)] \leq [\alpha(\vec{x})]$, quindi dobbiamo trovare una derivazione di $\exists y.\varphi(\vec{x}, y) \vdash \alpha(\vec{x})$:

$$\dfrac{\varphi(\vec{x}, y) \vdash \alpha(\vec{x})}{\exists y.\varphi(\vec{x}, y) \vdash \alpha(\vec{x})}\ {\scriptstyle \exists l (y \notin F \vee (\exists y.\varphi(\vec{x}, y), \alpha(\vec{x})))}$$

dove la derivazione di $\varphi(\vec{x}, y) \vdash \alpha(\vec{x})$ è data per ipotesi e l'unicità del morfismo $[\exists y.\varphi(\vec{x}, y)] \leq [\alpha(\vec{x})]$ segue dalla definizione di algebra di Lindenbaum. $\square$

Capitolo 5

Il completamento esistenziale

Nel capitolo finale della tesi, avente come riferimenti *The Existential Completion*(2020) di Davide Trotta e *Quotient completion for the foundation of constructive mathematics*(2010) di Maria Emilia Maietti e Giuseppe Rosolini, verrà esibito il processo tramite il quale è possibile ottenere una *dottrina esistenziale* da una *dottrina primaria*.

5.0.1 Le dottrine primarie ed esistenziali

Introdurremo ora i concetti di *dottrina primaria* e di *dottrina esistenziale*, i quali ricalcano da vicino quanto già visto nella definizione di iperdottrina (ne sono in effetti una versione *debole*).

Definizione 5.0.1 (**Dottrina primaria**[1]**).** Sia $\mathbf{C}$ una categoria dotata di prodotti finiti. Una *dottrina primaria* è un funtore

$$P\colon \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$$

che va dalla categoria opposta rispetto a $\mathbf{C}$ alla categoria degli inf-semireticoli.

Definizione 5.0.2 (**Dottrina primaria esistenziale**)**.** Una dottrina primaria $P\colon \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ è *esistenziale* se, per ogni coppia di oggetti A_1 e A_2 in $\mathbf{C}$, e per ogni proiezione $pr_i\colon A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, il funtore

$$P_{pr_i}\colon P(A_i) \longrightarrow P(A_1 \times A_2)$$

ha aggiunto sinistro $\exists_{pr_i}$, e questi soddisfano la *condizione di Beck-Chevalley* e la *reciprocità di Frobenius*, definite allo stesso modo che in **4.0.3 a pagina 22**.

[1] si veda [6]

Definizione 5.0.3 (**La 2-categoria PD**)**.** La classe delle dottrine primarie **PD** è una 2-categoria[2] in cui:

- le *0-celle (o oggetti)* sono le dottrine primarie;
- le *1-celle (o morfismi o 1-morfismi)* sono coppie del tipo (F, b)

$$\begin{tikzcd}
C^{op} \arrow[dd, "F^{op}"'] \arrow[drr, "P"] \arrow[dr, phantom, "\downarrow b"] & & \\
& & \mathbf{InfSL} \\
D^{op} \arrow[urr, "R"'] & &
\end{tikzcd}$$

  tali che $F: C \longrightarrow D$ è un funtore che preserva i prodotti, e $b: P \longrightarrow R \circ F^{op}$ è una trasformazione naturale tale che il funtore $b_A: P(A) \longrightarrow RF(A)$ preserva la struttura per ogni oggetto A in C, in altre parole b_A preserva gli incontri finiti;

- le *2-celle (o 2-morfismi)* $\theta: (F, b) \Longrightarrow (G, c)$ sono le trasformazioni naturali $\theta: F \longrightarrow G$ tali che per ogni oggetto A in C e per ogni α in $P(A)$, vale che

$$b_A(\alpha) \leq R_{\theta_A}(c_A(\alpha))$$

Osservazione 5.0.1. In modo simile possiamo definire una 2-sottocategoria di **PD**, ovvero la *2-categoria delle dottrine esistenziali* **ED**. In questo caso è necessario che le 1-celle preservino le strutture appropriate, in particolare le 1-celle di **ED** sono le coppie (F, b) tali che b preserva gli aggiunti sinistri per le proiezioni.

5.0.2 Un esempio di dottrina primaria

Forniamo ora un esempio che ricalca quello dell'*iperdottrina sintattica* presentato in **4.0.5 a pagina 24**.

Sia $\mathcal{H}$ una teoria in un linguaggio di primo ordine $\mathcal{L}$. Definiamo una dottrina primaria

$$LT_{\mathcal{H}}: C_{\mathcal{H}}^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$$

[2]La nozione di 2-categoria generalizza quella di categoria: una 2-categoria consiste infatti di

- oggetti;
- 1-morfismi tra oggetti;
- 2-morfismi tra morfismi.

I morfismi posso essere composti lungo gli oggetti, mentre i 2-morfismi possono essere composti in due direzioni diverse: lungo gli oggetti, e in questo caso si parla di *composizione orizzontale*, o lungo i morfismi, dando luogo alla *composizione verticale*.

con $C_{\mathcal{H}}$ la categoria delle liste di variabili e sosituzioni dei termini. Analizziamo nel dettaglio questa categoria, essa ha:

- come *oggetti* le liste finite di variabili $\vec{x} := (x_1, ..., x_n)$, compresa la lista vuota $()$;
- come *morfismi* tra due oggetti $(x_1, ..., x_n)$ e $(y_1, ..., y_m)$ le sostituzioni $[t_1/y_1, ..., t_m/y_m]$ dove i termini t_i sono costruiti in $\mathcal{L}$ sulle variabili $x_1, ..., x_n$.

La composizione di due morfismi $[\vec{t}/\vec{y}]: \vec{x} \longrightarrow \vec{y}$ e $[\vec{s}/\vec{z}]: \vec{y} \longrightarrow \vec{z}$ è data dalla sostituzione

$$[s_1[\vec{t}/\vec{y}]/z_k, ..., s_k[\vec{t}/\vec{y}]/z_k]: \vec{x} \longrightarrow \vec{z}$$

Il funtore $LT_{\mathcal{H}}: C_{\mathcal{H}}^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ manda $(x_1, ..., x_n)$ nella classe $LT_{\mathcal{H}}(x_1, ..., x_n)$ delle formule ben formate nel contesto $(x_1, ..., x_n)$. Diciamo che $\psi \leq \phi$ con $\phi, \psi \in LT_{\mathcal{H}}(x_1, ..., x_n)$ se $\psi \vdash_{\mathcal{H}} \phi$, e poi quozientiamo per ottenere un ordine parziale su $LT_{\mathcal{H}}(x_1, ..., x_n)$. Dato un morfismo di $C_{\mathcal{H}}$

$$[t_1/y_1, ..., t_m/y_m]: (x_1, ..., x_n) \longrightarrow (y_1, ..., y_m)$$

il funtore $LT_{\mathcal{H}[\vec{t}/\vec{y}]}$ agisce come la sostituzione $LT_{\mathcal{H}[\vec{t}/\vec{y}]}(\psi(y_1, ..., y_m)) = \psi[\vec{t}/\vec{y}]$.

Proposizione 5.0.1. *Una dottrina $F: \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{op} \longrightarrow$ **InfSL**, con $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{op}$ categoria dei contesti di variabili, interpreta la logica delle predicati con la solo congiunzione e costante true.*

Dimostrazione. Come nelle *Note di Logica Matematica* (Maietti, 2021/2022), pensiamo alla formula $\phi[x_1, ..., x_n]$ su un contesto di variabili, che è una lista di variabili che contiene le loro variabile libere.

Definiamo ora una interpretazione I che va dalle formule della logica sotto contesto ad una dottrina primaria sopra $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{op}$ per induzione, in modo che $I(\phi_[y - 1, ..., y_n])$ sia un oggetto di $F([y_1, ..., y_n])$.

Procediamo in tal modo:

- Caso base: sia $P(x_1, ..., x_n)$ una formula atomica, e sia $I(P(x_1, ..., x_n)[y_1, ..y_n])$ definita come un oggetto di $F([y_1, ..., y_n])$ a scelta (ricordiamo che per definizione di formule sotto contesto, la lista $[y_1, ..., y_n]$ deve contenere le variabili libere $[x_1, ..x_n]$).
- Caso induttivo: date due formule con $x_1, ..., x_n$, $I(\phi[y_1, ..., y_n]\ \&\ \psi[y_1, ..., y_n]) := (I(\phi) \wedge I(\psi))(F([y_1, ..., y_n]))$ perché per induzione $I(\phi[y_1, ..., y_n])$ sta in $F([y_1, ..., y_n])$.

Per quanto riguarda la costante *true*, nel caso base essa è pensata come $I(true[y_1, ..., y_n]) := \mathbf{1}$ in $F(y_1, ..., y_n)$, e poi si procede col caso induttivo. □

Proposizione 5.0.2. *Una dottrina esistenziale $F: \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{op} \longrightarrow$ **InfSL**, con $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{op}$ categoria dei contesti di variabili, interpreta la logica delle predicati con la congiunzione, costante true e l'$\exists$.*

Dimostrazione. Per la congiunzione e la costante true si veda la dimostrazione precedente. Trattiamo quindi solo la parte dell'$\exists$.

Sia ancora $\phi[x_1, ..., x_n]$ una formula su un contesto di variabili, che è una lista di variabili che contiene le loro variabile libere. $I(\exists y_{m+1}\phi_{[y_1,...,y_m,y_{m+1}]})$ è aggiunto sinistro alla lista di proiezioni da $[y, ..y_{m+1}]$ a $[y_1, ..., y_m]$ su $I(\phi_{[y_1,,y_{m+1}]}) \in F([y_1, ...y_{m+1}])$. $\square$

5.0.3 Il completamento esistenziale

L'obiettivo è ora la costruzione di una dottrina esistenziale $P^e\colon C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ a partire da una dottrina primaria $P\colon C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$.

Sia d'ora in avanti $P\colon C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ una dottrina primaria fissata, e sia $\Lambda \subset C_1$ un sottoinsieme di morfismi chiusi per pullback e composizioni, e tale che contenga il morfismo identità.

Per ogni oggetto A di C consideriamo il seguente preordine:

- gli oggetti sono le coppie del tipo $(B \xrightarrow{g\in\Lambda} A, \alpha \in PB)$;
- $(B \xrightarrow{h\in\Lambda} A, \alpha \in PB) \leq (D \xrightarrow{f\in\Lambda} A, \gamma \in PD)$ se esiste $w\colon B \longrightarrow D$ tale che

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "h"] \\ D \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

  commuti e $\alpha \leq P_w(\gamma)$.

Sia $P^e(A)$ l'ordine parziale ottenuto identificando due oggetti[3] quando

$$(B \xrightarrow{h\in\Lambda} A, \alpha \in PB) \lesseqgtr (D \xrightarrow{f\in\Lambda} A, \gamma \in PD)$$

Si consideri un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ in C, allora $P^e_f(C \xrightarrow{g\in\Lambda} B, \beta \in PC)$ è l'oggetto

$$(D \xrightarrow{f^*g} A, P_{g^*f}(\beta) \in PD)$$

dove

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f^*g"] \arrow[d, "g^*f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

è un diagramma di pullback perché $g \in \Lambda$.

Proposizione 5.0.3. *Si consideri una dottrina primaria $P\colon \mathbf{C^{op}} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$. Allora $P^e\colon \mathbf{C^{op}} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ è anch'essa una dottrina primaria, in particolare vale che:*

[3]Con abuso di notazione denoteremo la classe di equivalenza di un elemento allo stesso modo.

1. *per ogni oggetto A in C, $P^e(A)$ è un inf-semireticolo;*

2. *per ogni morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ in C, P^e_f è ben definito ed è un omomorfismo di inf-semireticoli.*

Dimostrazione. 1. Per ogni oggetto A in C, abbiamo l'elemento $(A \xrightarrow{id_A} A, \top_A)$. Consideriamo i due elementi $(A_1 \xrightarrow{h_1} A, \alpha_1 \in PA_1)$ e $(A_2 \xrightarrow{h_2} A, \alpha_2 \in PA_2)$. Il nostro obiettivo è quello di cercare il più grande estremo inferiore di questi due oggetti. Consideriamo quindi il pullback

$$\begin{tikzcd} A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "h_2^* h_1"] \arrow[d, "h_1^* h_2"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A_2 \arrow[d, "h_2"] \\ A_1 \arrow[r, "h_1"'] & A \end{tikzcd}$$

che esiste perché $h_1 \in \Lambda$ (e $h_2 \in \Lambda$). Affermiamo che

$$(A_1 \times_A A_2 \xrightarrow{h_1 h_1^* h_2} A, P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2))$$

sia questo estremo inferiore. Verifichiamo che

$$(A_1 \times_A A_2 \xrightarrow{h_1 h_1^* h_2} A, P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2)) \leq (A_i \xrightarrow{h_i} A, \alpha_i \in PA_i)$$

per $i = 1, 2$. Per come abbiamo definito precedentemente l'ordinamento, dobbiamo mostrare che: $\exists w_i\colon A_1 \times_A A_2 \longrightarrow A_i$ tale che

$$\begin{tikzcd} & A_1 \times_A A_2 \arrow[dl, "w_i"'] \arrow[d, "h_1 h_1^* h_2"] \\ A_i \arrow[r, "h_i"'] & A \end{tikzcd}$$

commuti e $P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2) \leq P_{w_i}(\alpha_i)$.

- Caso con i=1:
  Affinché il diagramma sia commutativo deve valere che

  $$h_1 h_1^* h_2 = h_1 w_1$$

  Basta quindi scegliere come w_1 proprio $h_1^* h_2$. In questo modo abbiamo anche che:

  $$P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2) \leq P_{w_1}(\alpha_1) = P_{h_1^* h_2}(\alpha_1)$$

  Il caso con i=2 è del tutto equivalente.

Ora però noi vogliamo anche che tra gli estremi inferiori questo sia il maggiorante. Considero quindi un oggetto $(B \xrightarrow{g} A, \beta \in PB)$ tale che

$$(B \xrightarrow{g} A, \beta \in PB) \leq (A_i \xrightarrow{h_i} A, \alpha_i \in PA)$$

per $i = 1, 2$ e $g = h_i w_i$.
Allora esisterà un morfismo $w\colon B \longrightarrow A_1 \times_A A_2$ tale che

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dotted, "w"] \arrow[drr, bend left, "w_2"] \arrow[ddr, bend right, "w_1"'] & & \\
& A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "h_2^* h_1"] \arrow[d, "h_1^* h_2"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A_2 \arrow[d, "h_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "h_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

sia commutativo e valga

$$\beta \leq P_{w_1}(\alpha_1) \wedge P_{w_2}(\alpha_2) = P_w(P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2))$$

Osserviamo infine che l'estremo inferiore è ben definito. Se infatti abbiamo che

$$(A_2 \xrightarrow{h_2} A, \alpha_2 \in PA_2) \lesseqgtr (A_3 \xrightarrow{h_3} A, \alpha_3 \in PA_3)$$

allora necessariamente esistono un $w_3\colon A_2 \longrightarrow A_3$ e un $w_4\colon A_3 \longrightarrow A_2$ tali che $h_3 w_3 = h_2$, $\alpha_2 \leq P_{w_3}(\alpha_3)$, $h_2 w_4 = h_3$ e $\alpha_3 \leq P_{w_4}(\alpha_2)$.
Dunque esiste $w_5\colon A_1 \times_A A_2 \longrightarrow A_1 \times_A A_3$ con

$$\begin{tikzcd}
A_1 \times_A A_2 \arrow[dr, dotted, "w_5"] \arrow[drr, bend left, "w_3 h_1^* h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_2^* h_1"'] & & \\
& A_1 \times_A A_3 \arrow[r, "h_3^* h_1"] \arrow[d, "h_1^* h_3"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A_3 \arrow[d, "h_3"] \\
& A_1 \arrow[r, "h_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

tale che

$$P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2) \leq P_{w_5}(P_{h_1^* h_3}(\alpha_1) \wedge P_{h_3^* h_1}(\alpha_3))$$

Allora a questo punto possiamo concludere che

$$(A_1 \times_A A_2 \xrightarrow{h_1 h_1^* h_2} A, P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2)) \leq (A_1 \times_A A_3 \xrightarrow{h_1 h_1^* h_3} A, P_{h_1^* h_3}(\alpha_1) \wedge P_{h_3^* h_1}(\alpha_3))$$

Usando lo stesso argomento si può provare che

$$(A_1 \times_A A_3 \xrightarrow{h_1 h_1^* h_3} A, P_{h_1^* h_3}(\alpha_1) \wedge P_{h_3^* h_1}(\alpha_3)) \leq (A_1 \times_A A_2 \xrightarrow{h_1 h_1^* h_2} A, P_{h_1^* h_2}(\alpha_1) \wedge P_{h_2^* h_1}(\alpha_2))$$

Allora possiamo concludere che l'estremo inferiore è ben definito.

2. Proviamo innanzitutto che per ogni morfismo $f\colon A \longrightarrow B$, P^e_f è un morfismo di preordini. Una volta mostrato questo, avremo automaticamente che P^e_f sarà un morfismo ben definito di ordini parziali visto che identifichiamo due elementi $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ di $P^e(B)$ se $\bar{\alpha} \gtreqless \bar{\beta}$.

   Consideriamo $(C_1 \xrightarrow{g_1 \in \Lambda} B, \alpha_1 \in PC_1) \le (C_2 \xrightarrow{g_2 \in \Lambda} B, \alpha_2 \in PC_2)$ con $g_2 w = g_1$ e $\alpha_1 \le P_w(\alpha_2)$. Vogliamo provare che

   $$(D_1 \xrightarrow{f^* g_1} A, P_{g_1^* f}(\alpha_1) \in PD_1) \le (D_2 \xrightarrow{f^* g_2} A, P_{g_2^* f}(\alpha_2) \in PD_1$$

   Osserviamo che vale la catena di uguaglianze $g_2 w g_1^* f = g_1 g_1^* f = f f^* g_1$. Allora esiste unico $w\colon D_1 \longrightarrow D_2$ tale che il diagramma seguente sia commutativo

   $$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[dr, dotted, "\bar{w}"] \arrow[drr, bend left, "f^* g_1"] \arrow[ddr, bend right, "w g_1^* f"'] & & \\
& D_2 \arrow[r, "f^* g_2"] \arrow[d, "g_2^* f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
& C_2 \arrow[r, "g_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

   Inoltre $P_{\bar{w}}(P_{g_2^* f}(\alpha_2)) = P_{g_1^* f}(P_w(\alpha_2)) \le P_{g_1^* f}(\alpha_1)$, ed è facile notare che P^e_f preserva gli elementi top. A questo punto basta osservare che $P^e_f(\alpha \wedge \beta) = P^e_f(\alpha) \wedge P^e_f(\beta)$.

□

Proposizione 5.0.4. *Sia $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo di Λ, sia inoltre*

$$\exists^e_f(C \xrightarrow{h} A, \alpha \in PC) := (C \xrightarrow{fh} B, \alpha \in PC)$$

quando $(C \xrightarrow{h} A, \alpha \in PC)$ è in $P^e(A)$. Allora $\exists^e_f$ è l'aggiunto sinistro di P^e_f.

Dimostrazione. Siano $\bar{\alpha} := (C_1 \xrightarrow{g1} B, \alpha_1 \in PC_1)$ e $\bar{\beta} := (D_2 \xrightarrow{f_2} A, \beta_2 \in PD_2)$. Assumiamo che $\bar{\beta} \le P^e_f(\bar{\alpha})$. Allora abbiamo che

$$\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
D_1 \arrow[r, "f^* g_1"] \arrow[d, "g_1^* f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
C_1 \arrow[r, "g_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

e $\beta_2 \le P_w(P_{g_1^* f}(\alpha_1))$. Allora abbiamo che

$$\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[d, "g_1^* f w"'] \arrow[dr, "f f_2"] & \\
C_1 \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

e $\beta_2 \leq P_{w g_1^* f}(\alpha_1)$. Allora $\exists^e_f(\bar{\beta}) \leq \bar{\alpha}$.

Ora viceversa assumiamo che $\exists^e_f(\bar{\beta}) \leq \bar{\alpha}$

$$
\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[d, "\bar{w}"'] \arrow[dr, "f f_2"] & \\
C_1 \arrow[r, "g_1"'] & B
\end{tikzcd}
$$

con $\beta_2 \leq P_{\bar{w}}(\alpha_1)$. Allora esiste $w: D_2 \longrightarrow D_1$ tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$
\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[dr, dotted, "w"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{w}"'] & & \\
& D_1 \arrow[r, "f^* g_1"] \arrow[d, "g_1^* f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
& C_1 \arrow[r, "g_1"'] & B
\end{tikzcd}
$$

e $\beta_1 \leq P_{\bar{w}}(\alpha_1) = P_w(P_{g_1^* f}(\alpha_1))$. Quindi possiamo concludere che $\bar{\beta} \leq P^e_f(\bar{\alpha})$. $\square$

Teorema 5.0.1. *Per ogni **dottrina primaria** $P: C^{op} \longrightarrow$ **InfSL**, $P^e: C^{op} \longrightarrow$ **InfSL** soddisfa:*

1. *la **condizione di Beck-Chevalley**: per ogni pullback*

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A' \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}
$$

con $g \in \Lambda$ (quindi anche $g' \in \Lambda$), per ogni $\bar{\beta} \in P^e(X)$ vale la seguente uguaglianza:

$$\exists^e_{g'} P^e_{f'}(\bar{\beta}) = P^e_f \exists^e_g(\bar{\beta})$$

2. *la **reciprocità di Frobenius**: per ogni morfismo $f: X \longrightarrow A$ di Λ, per ogni elemento $\bar{\alpha} \in P^e(A)$ e $\bar{\beta} \in P^e(X)$, vale la seguente uguaglianza*

$$\exists^e_f(P^e_f(\bar{\alpha}) \wedge \bar{\beta}) = \bar{\alpha} \wedge E^e_f(\bar{\beta})$$

Dimostrazione. 1. Consideriamo il pullback

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A' \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}
$$

dove $g, g' \in \Lambda$. Sia inoltre $\bar{\beta} := (C_1 \xrightarrow{h_1} X, \beta_1 \in PC_1) \in P^e(X)$. Consideriamo ora il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, "f'^{*}h_1"] \arrow[d, "h_1^{*}f'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A' \arrow[d, "f"] \\
C_1 \arrow[r, "h_1"'] & X \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

Visto che i due quadrati sono dei pullback, allora anche il quadrato più grande è un pullback[4]. Quindi abbiamo che

$$(D_1 \xrightarrow{g'f'^*h_1} A', P_{h_1^*f'}(\beta_1)) = (D_1 \xrightarrow{f^*(gh_1)} A', P_{(gh_1)^*f}(\beta_1))$$

e questi sono per definizione

$$\exists^e_{g'} P^e_{f'}(\bar{\beta}) = P^e_f \exists^e_g(\bar{\beta})$$

[4]Supponiamo che nel diagramma seguente i due quadrati siano dei pullback:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & C \arrow[d, "r"'] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

Vogliamo mostrare che il rettangolo più esterno è ancora un pullback. Consideriamo allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[drrr, bend left, "i"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & & \\ & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & C \arrow[d, "r"] \\ & X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

nel quale vale che $r \circ i = v \circ u \circ j$. Dato che $v \circ (u \circ j) = r \circ i$, per la proprietà universale del quadrato di destra esiste un unico $m{:}\, Q \to B$ tale che $g \circ m = i$ e $q \circ m = u \circ j$:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[drrr, bend left, "i"] \arrow[drr, bend left, "m"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & & \\ & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & C \arrow[d, "r"] \\ & X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

Ora, per la proprietà universale del pullback a sinistra esiste unico $n{:}\, Q \to A$ tale che $f \circ n = m$ e $p \circ n = j$:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[drrr, bend left, "i"] \arrow[drr, bend left, "m"] \arrow[dr, "n"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & & \\ & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & C \arrow[d, "r"] \\ & X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

Affermiamo che n è proprio il morfismo che stiamo cercando. Infatti, sappiamo già che $p \circ n = j$, e $g \circ f \circ n = g \circ m = i$. Rimane da mostrare l'unicità di n. Supponiamo che $n'{:}\, Q \to A$ soddisfi $p \circ n' = j$ e $g \circ f \circ n' = i$. Sia $m' = f \circ n'$, e osserviamo che $g \circ m' = g \circ f \circ n' = i$ e $q \circ m' = q \circ f \circ n' = u \circ p \circ n' = u \circ j$, allora per la proprietà di unicità del quadrato a destra abbiamo che $m = m' = n' \circ f$. Ora per la proprietà di unicità del quadrato a sinistra vale $n = n'$, come volevamo dimostrare.

Infatti: dato un $\bar{\beta}$ definito come sopra, abbiamo che

$$P^e_{f'}(\bar{\beta}) = (D' \xrightarrow{f'^*h_1} X', P_{h_1^*f'}(\beta_1) \in PD')$$

e quindi

$$\exists^e_{g'}(D' \xrightarrow{f'^*h_1} X', P_{h_1^*f'}(\beta_1) \in PD') = (D' \xrightarrow{g'f'^*h_1} A', P_{h_1^*f'}(\beta_1) \in PD')$$

D'altra parte,

$$\exists^e_g(\bar{\beta}) = (C_1 \xrightarrow{gh_1} A, \beta_1 \in PC_1)$$

ma allora

$$P^e_f(C_1 \xrightarrow{gh_1} A, \beta_1 \in PC_1) = (D' \xrightarrow{f^*(gh_1)} A', P_{(gh_1)^*f}(\beta_1) \in PD')$$

Abbiamo quindi provato che la condizione di Beck-Chevalley è soddisfatta.

2. Consideriamo un morfismo $f: X \longrightarrow A$ di Λ, un elemento $\bar{\alpha} := (C_1 \xrightarrow{h_1} A, \alpha_1 \in PC_1)$ in $P^e(A)$, e un elemento $\bar{\beta} := (D_2 \xrightarrow{h_2} X, \beta_2 \in PD_2)$ in $P^e(X)$. Osserviamo che il seguente diagramma è un pullback

$$\begin{tikzcd}
D_1 \times_X D_2 \arrow[r, "(f^*h_1^*h_2)"] \arrow[d, "h_2^*(f^*h_1)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & D_1 \arrow[r, "h_1^*f"] \arrow[d, "f^*h_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_1 \arrow[d, "h_1"] \\
D_2 \arrow[r, "h_2"'] & X \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

e ciò implica che

$$E^e_f(P^e_f(\bar{\alpha}) \wedge \bar{\beta}) = \bar{\alpha} \wedge E^e_f(\bar{\beta})$$

Quindi abbiamo mostrato che la reciprocità di Frobenius è soddisfatta.

□

Introduciamo ora un lemma che ci permetterà come corollario di applicare la costruzione precedente alla classe delle proiezioni.

Lemma 5.0.1. *Sia C una categoria con prodotti finiti. Allora la classe delle proiezioni è chiusa per pullback e composizioni; contiene inoltre le identità.*

Dimostrazione. Risulta semplice controllare che la composizione di due proiezioni è ancora una proiezione e che le identità sono proiezioni. Mostriamo quindi che la classe è chiusa per pullback.

Consideriamo una proiezione $pr_A: A \times B \longrightarrow A$ e un morfismo arbitrario $f: C \longrightarrow A$ di C. Ma allora si può concludere osservando che il quadrato

$$\begin{tikzcd}
A \times B \times C \arrow[r, "pr_C"] \arrow[d, "\langle f pr_C, pr_B \rangle"'] & C \arrow[d, "f"] \\
A \times B \arrow[r, "pr_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

è commutativo ed è un pullback. □

Corollario 5.0.1. *Sia* $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ *una dottrina primaria. Se* Λ *è la classe delle proiezioni, allora la dottrina* $P^e: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ *è esistenziale.*

Osservazione 5.0.2. Chiamando sempre Λ la classe delle proiezioni, a partire da una dottrina primaria $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$, possiamo costruire una dottrina esistenziale $P^e: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ (nel senso della definizione **5.0.2 a pagina 27**). Allora la nozione di dottrina esistenziale può essere generalizzata, in altre parole una dottrina esistenziale può essere definita come una coppia

$$(P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}, \Lambda)$$

dove $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ è una dottrina primaria e Λ è la classe dei morfismi di C chiusa per pullback, composizione ed identità, che soddisfa le condizioni del teorema **5.0.1 a pagina 34**.

D'ora in avanti assumeremo che i morifismi di Λ siano tutti proiezioni, visto che per il lemma precedente questa classe è chiusa per pullback, composizioni e contiene le identità. Definiamo innanzitutto un 2-funtore $E: \mathbf{PD} \longrightarrow \mathbf{ED}$ dalla 2-categoria delle *dottrine primarie* alla 2-categoria delle *dottrine esistenziali*, che manda una dottrina primaria $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ nella dottrina esistenziale $P^e: Cop \longrightarrow \mathbf{InfSL}$.

Proposizione 5.0.5. *Si consideri la categoria* $\mathbf{PD}(P, R)$*. Definiamo*

$$E_{P,R}: \mathbf{PD}(P, R) \longrightarrow \mathbf{ED}(P^e, R^e)$$

come segue:

- *per ogni 1-cella* (F, b)*,* $E_{P,R}(F, b) := (F, b^e)$*, dove* $b^e_A: P^e A \longrightarrow R^e FA$ *manda un oggetto* $(C \xrightarrow{g} A, \alpha)$ *nell'oggetto* $(FC \xrightarrow{Fg} FA, b_C(\alpha))$*;*
- *per ogni 2-cella* $\theta: (F, b) \Rightarrow (G, c)$ *,* $E_{P,R}\theta$ *è definita allo stesso modo.*

Con questa definizione, E è un 2-funtore.

Dimostrazione. Proviamo che $(F, b^e): P^e \longrightarrow R^e$ è una 1-cella di $\mathbf{ED}(P^e, R^e)$. Innanzitutto proviamo che per ogni $A \in C$, b^e_A preserva l'ordine.

Se $(C_1 \xrightarrow{g_1} A, \alpha_1) \leq (C_2 \xrightarrow{g_2} A, \alpha_2)$, allora esiste un morfismo $w: C_1 \longrightarrow C_2$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "g_1"] \\ C_2 \arrow[r, "g_2"'] & A \end{tikzcd}$$

sia commutativo e $\alpha_1 \leq P_w(\alpha_2)$.

Dato che b è una *trasformazione naturale*, abbiamo che $b_{C_1} P_w = R_{F_w} b_{C_2}$. Allora possiamo concludere che $(FC_1 \xrightarrow{Fg_1} FA, b_{C_1}(\alpha_1)) \leq (FC_2 \xrightarrow{Fg_2} FA, b_{C_2}(\alpha_2))$ dato che $Fg_2 Fw = Fg_1$ e $b_{C_1}(\alpha_1) \leq b_{C_1} P_w(\alpha_2) = R_{F_w}(b_{C_2}\alpha_2)$. Inoltre, dato che F preserva i prodotti, possiamo concludere che b^e_A preserva gli inf.

Si può provare che $b^e\colon P^e \longrightarrow R^e F^{op}$ è una trasformazione naturale usando il fatto che F preserva i prodotti (ipotesi necessaria per preservare le proiezioni). Inoltre possiamo anche osservare che b preserva gli aggiunti sinistri lungo le proiezioni. Allora (F, b^e) è una 1-cella di **ED**.

Consideriamo ora una 2-cella $\theta\colon (F,b) \Longrightarrow (G,c)$, e sia $\bar{\alpha} = (C_1 \xrightarrow{g_1} A, \alpha_1)$ un oggetto di $P^e(A)$. Allora

$$b^e_A(\bar{\alpha}) = (FC_1 \xrightarrow{Fg_1} FA, b_{C_1}(\alpha_1))$$

e

$$R^e_{\theta_A} c^e_A(\bar{\alpha}) = (D_1 \xrightarrow{\theta^*_A Gg_1} FA, R_{Gg_1^*\theta_A} c_{C_1}(\alpha_1))$$

dove

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, "\theta^*_A Gg_1"] \arrow[d, "Gg_1^*\theta_A"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & FA \arrow[d, "\theta_A"] \\
GC_1 \arrow[r, "Gg_1"'] & GA
\end{tikzcd}$$

Ora si osservi che, visto che $\theta\colon F \longrightarrow G$ è una trasformazione naturale, allora esiste un unico $w\colon FC_1 \longrightarrow D_1$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
FC_1 \arrow[drr, bend left, "Fg_1"] \arrow[dr, dotted, "w"] \arrow[ddr, bend right, "\theta_{C_1}"'] & & \\
& D_1 \arrow[r, "\theta^*_A Gg_1"] \arrow[d, "Gg_1^*\theta_A"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & FA \arrow[d, "\theta_A"] \\
& GC_1 \arrow[r, "Gg_1"'] & GA
\end{tikzcd}$$

sia commutativo e allora $b_{C_1}(\alpha_1) \leq R_{\theta_{C_1}} c_{C_1}(\alpha_1) = R_w R_{Gg_1^*\theta_A} c_{C_1}(\alpha_1)$. Possiamo quindi concludere che $b^e_A(\bar{\alpha}) \leq R^e_{\theta_A} c^e_A(\bar{\alpha})$, e allora $\theta\colon F \longrightarrow G$ è una 2-cella $\theta\colon (F, b^e) \Longrightarrow (G, c^e)$, e $E_{P,R}(\theta\gamma) = E_{P,R}(\theta) E_{P,R}(\gamma)$.

Infine possiamo provare che il seguente diagramma commuta osservando che per ogni $(F,b) \in \mathbf{PD}(P,R)$ e $(G,c) \in \mathbf{PD}(R,D)$, $(GF, c^e \star b^e) = (GF, (c \star b)^e)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{PD}(P,R) \times \mathbf{PD}(R,D) \arrow[r, "c_{PRD}"] \arrow[d, "E_{PR} \times E_{RD}"'] & \mathbf{PD}(P,D) \arrow[d, "E_{PD}"] \\
\mathbf{ED}(P^e, R^e) \times \mathbf{ED}(R^e, D^e) \arrow[r, "c_{P^e R^e D^e}"'] & \mathbf{ED}(P^e, D^e)
\end{tikzcd}$$

dove c_{PRD} e $c_{P^e R^e D^e}$ denotano i funtori composizione delle 2-categorie **PD** e **ED**. Allora possiamo concludere che E è un 2-funtore. $\square$

Ora proviamo che il 2-funtore $E\colon \mathbf{PD} \longrightarrow \mathbf{ED}$ dato da $E(P) = P^e$ e dai funtori $E_{P,R}$ definiti nella proposizione precedente, è aggiunto sinistro del funtore $U\colon \mathbf{ED} \longrightarrow \mathbf{PD}$ che *dimentica*[5] la struttura esistenziale, vale a dire che manda P^e in $U(P^e) = P$.

[5]si veda la **1.0.6 a pagina 8**

Proposizione 5.0.6. *Sia* $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ *una dottrina primaria. Allora*

$$(id_C, \iota_P): P \longrightarrow P^e$$

dove $\iota_{PA}: PA \longrightarrow P^eA$*, che manda* α *in* $(A \xrightarrow{id_A} A, \alpha)$*, è una 1-cella di dottrine primarie. Inoltre*

$$\eta: id_{PD} \longrightarrow UE$$

dove $\eta_P := (id_C, \iota_P)$*, è una 2-trasformazione naturale.*

Dimostrazione. Non è difficile provare che $\iota_{PA}: PA \longrightarrow P^eA$ preserva tutte le strutture. Per ogni morfismo $f: A \longrightarrow B$ di C, possiamo notare che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} PB \arrow[r, "P_f"] \arrow[d, "\iota_{PB}"'] & PA \arrow[d, "\iota_{PA}"] \\ P^eB \arrow[r, "P^e_f"'] & P^eA \end{tikzcd}$$

Possiamo quindi concludere che $(id_C, \iota_P): P \longrightarrow P^e$ è una 1-cella di PD ed è una verifica diretta la prova che η è una 2-trasformazione naturale. □

Proposizione 5.0.7. *Sia* $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ *una dottrina esistenziale. Allora*

$$(id_C, \zeta_P): P^e \longrightarrow P$$

dove $\zeta_{PA}: P^eA \longrightarrow PA$ *manda* $(C \xrightarrow{f} A, \alpha)$ *in* $\exists_f(\alpha)$*, è una 1-cella di dottrine esistenziali. Inoltre vale che*

$$\varepsilon: EU \longrightarrow id_{\mathbf{ED}}$$

dove $\varepsilon_P = (id_C, \zeta_P)$*, è una 2-trasformazione naturale.*

Dimostrazione. Supponiamo $(C_1 \xrightarrow{g_1} A, \alpha_1) \leq (C_2 \xrightarrow{g_2} A, \alpha_2)$, con $w: C_1 \longrightarrow C_2$, $g_2 w = g1$ e $\alpha_1 \leq P_w(\alpha_2)$. Allora per Beck-Chevalley abbiamo l'uguaglianza

$$\exists_{g_1^* g_2} P_{g_2^* g_1}(\alpha_2) = P_{g_1} \exists_{g_2}(\alpha_2)$$

e

$$\alpha_1 \leq P_w(\alpha_2) \leq P_w P_{g_2} \exists_{g_2}(\alpha_2) = P_{g_1} \exists_{g_2}(\alpha_2)$$

Allora

$$\exists_{g_1}(\alpha_1) \leq \exists_{g_2}(\alpha_2)$$

dato che $\exists_{g_1} \dashv P_{g_1}$, e $\top_A = \zeta_A(A \xrightarrow{id_A} A, \top_A)$. Ora proviamo la naturalità di ζ_P. Sia $f: A \longrightarrow B$ un morfismo di C. Allora il diagramma seguente è commutativo

$$\begin{tikzcd} P^eB \arrow[r, "P^e_f"] \arrow[d, "\zeta_B"'] & P^eA \arrow[d, "\zeta_A"] \\ PB \arrow[r, "P_f"'] & PA \end{tikzcd}$$

perché corrisponde alla condizione di Beck-Chevalley. Inoltre è facile vedere che ζ_P preserva gli aggiunti sinistri. Quindi possiamo concludere che per ogni dottrina esistenziale $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$, ζ_P è una 1-cella di $\mathbf{ED}$. Per provare la naturalità di ε basta usare il fatto che stiamo lavorando in $\mathbf{ED}$, e quindi per ogni 1-cella (F, b), b preserva gli aggiunti sinistri lungo le proiezioni. $\square$

Proposizione 5.0.8. *Per ogni dottrina primaria* $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ *abbiamo*

$$\varepsilon_{P^e} \circ \eta_{P^e} = id_P$$

Dimostrazione. Si consideri il diagramma

$$\begin{tikzcd}
C^{op} \arrow[dd, "id_C^{op}"'] \arrow[dr, dash] & & \\
& P^e \arrow[d, "\iota^e"] \arrow[dr] & \\
C^{op} \arrow[dd, "id_C^{op}"'] \arrow[r, dash] & (P^e)^e \arrow[r] \arrow[d, "\zeta_{P^e}"] & \mathbf{InfSL} \\
& P^e \arrow[ur] & \\
C \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

e sia $(C \xrightarrow{g} A, \alpha \in PA)$ un elemento di $P^e A$. Allora

$$\iota_{P^e_A}(C \xrightarrow{g} A, \alpha \in PC) = (A \xrightarrow{id_A} A, (C \xrightarrow{g} A, \alpha \in PC) \in P^e_A)$$

e

$$\zeta_{P^e_A}(A \xrightarrow{idA} A, (C \xrightarrow{g} A, \alpha \in PC) \in P^e_A) = \exists^e_{id_A}(C \xrightarrow{g} A, \alpha \in PC)$$

Per definizione di $\exists^e$ vale che

$$\exists^e_{id_A}(C \xrightarrow{g} A, \alpha \in PC) = (C \xrightarrow{g} A, \alpha \in PC)$$

Quindi possiamo concludere che per ogni $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$, abbiamo che $\varepsilon_{P^e} \circ \eta_{P^e} = id_{P_e}$. $\square$

Corollario 5.0.2. $\varepsilon E \circ E\eta = id_E$.

Teorema 5.0.2. *Il 2-funtore* E *è 2-aggiunto al 2-funtore* U.

Dimostrazione. Non è complesso verificare che per ogni dottrina esistenziale $P: C^{op} \longrightarrow \mathbf{InfSL}$ abbiamo che

$$\varepsilon_P \circ \eta_P = id_P$$

e quindi $U\varepsilon \circ \eta U = id_U$. Dunque, per il corollario precedente, possiamo concludere che il 2-funtore E è 2-aggiunto al funtore dimenticante U, dove η è l'*unità* di questa 2-aggiunzione, e ε è la *counità*. $\square$

Sia $LT_{\&}$ la dottrina sintattica della logica della congiunzione e costante true. Sia invece $LT_{\&,\exists}$ la dottrina sintattica della logica della congiunzione, costante true e quantificatore esistenziale.

Abbiamo allora il seguente conclusivo

Teorema 5.0.3. *Il completamento esistenziale* $E(LT_{\&}) = (LT_{\&})^e$ *è isomorfo a* $LT_{\&,\exists}$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [9]. □

In altri termini, il completamento esistenziale applicato alla dottrina sintattica della logica della congiunzione e costante true fornisce una costruzione algebrica alternativa della dottrina sintattica della logica della congiunzione e costante true con l'aggiunta della quantificazione esistenziale.

Conclusioni

Utilizzando nozioni di Teoria delle Categorie, quali il concetto di aggiunzione e di dottrina di Lawvere, abbiamo dapprima fornito una semantica categoriale sia della logica intuizionista predicativa che classica.

Poi ci siamo soffermati ad analizzare una costruzione libera di una dottrina con quantificazione esistenziale a partire da una primaria, ovvero di una dottrina adatta ad interpretare la logica della sola congiunzione e costante vero.

Tale costruzione costituisce un modo algebrico, alternativo a quello sintattico, per aggiungere ad una dottrina sintattica la quantificazione esistenziale.

Bibliografia

[1] Ravi Ferigo. «Semantica categoriale delle logiche intuizionista e classica». Tesi Triennale in Matematica, relatore M.E. Maietti. Università degli Studi di Padova, 2021.

[2] F.W. Lawvere. «Adjointness in foundations». In: *Dialectica* 23 (1969), pp. 281–296.

[3] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. New York: Springer-Verlag, 1971.

[4] Saunders MacLane e Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic:A First Introduction to Topos Theory*. New York: Springer, 1992.

[5] Maria Emilia Maietti. *NOTE di Logica Matematica -2021/22*. Dispense. Università degli Studi di Padova, 27 set. 2021.

[6] Maria Emilia Maietti e Giuseppe Rosolini. «Quotient Completion for the Foundation of Constructive Mathematics». In: *Logica Universalis* 7.3 (2013), pp. 371–402. DOI: 10.1007/s11787-013-0080-2. URL: https://doi.org/10.1007/s11787-013-0080-2.

[7] Stefano Mengato. «On Logical Connectives and Quantifiers as Adjoint Functors». Tesi Magistrale in Matematica, relatore M.E. Maietti. Università degli Studi di Padova, 2017.

[8] R.A.G. Seely. «Hyperdoctrines, natural deduction, and the Beck condition». In: *Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Math.* 29 (1983), pp. 505–542.

[9] Davide Trotta. «The Existential Completion». In: *Theory and Applications of Categories* 35.43 (25 set. 2020), pp. 1576–1607.