

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione



Modello delle popolazioni Lotka-Volterra

Lotka-Volterra population model

Relatore: Prof. Mauro Bisiacco

Laureanda: Silvia Bellio

28 Settembre 2012

Indice

1. Introduzione

2. Modello generalizzato di Lotka-Volterra

2.1 Descrizione ed equazioni matematiche

2.2 Studio della stabilità

2.3 Simulazioni con Simulink

3. Presenza di un “super-predatore”

3.1 Descrizione ed equazioni matematiche

3.2 Studio della stabilità

3.3 Simulazioni con Simulink

4. Prelievo costante di prede

4.1 Descrizione ed equazioni matematiche

4.2 Studio della stabilità

4.3 Simulazioni con Simulink

5. Conclusioni

6. Bibliografia

Introduzione

La modellizzazione è uno degli aspetti fondamentali dell'ingegneria e più in generale della ricerca scientifica. Essa consiste nell'analisi e nella semplificazione di un dato sistema fino a renderlo descrivibile con un modello matematico.

Gli scopi possono essere i più disparati: interpretativi, predittivi, descrittivi, di sintesi, ecc.

In questo lavoro si è studiato uno dei modelli più noti e versatili; il modello di Lotka-Volterra. Proposto indipendentemente da Alfred J. Lotka nel 1925 e Vito Volterra nel 1926, esso nasce con l'obiettivo di descrivere un ecosistema isolato e costituito da due popolazioni interagenti tra loro.

L'efficacia di questa descrizione sta nella sua semplicità: con un sistema di equazioni differenziali di secondo grado si riesce a modellare un numero vastissimo di situazioni, modificando i parametri o le relazioni tra variabili.

Lo studio del sistema dinamico, definito dalle equazioni differenziali, consente di individuare tutti i tipi di evoluzione possibili a partire da una qualsiasi situazione iniziale.

In questo lavoro di tesi viene studiata una variante più generale del modello di Lotka-Volterra, il cui comportamento può essere simulato usando il software Matlab, nello specifico tramite il pacchetto Simulink. Successivamente si ipotizzeranno situazioni leggermente diverse, studiate seguendo la stessa metodologia applicata al modello base, ma apportando le dovute modifiche alle equazioni. L'obiettivo sarà quello di osservare se le ipotesi teoriche si accordano con la pratica, cioè con le curve dei grafici ottenute dalle simulazioni Matlab.

Modello di Lotka-Volterra

2.1 Descrizione ed equazioni matematiche

Il modello viene implementato a partire da una certa popolazione ad accrescimento Malthusiano, cioè descrivibile dalla seguente equazione:

$$\dot{x} = Ax \quad A > 0.$$

Immaginiamo che questa specie sia in un ambiente omogeneo, isolata e con tasso di accrescimento (A) costante.

Viene introdotta una seconda popolazione destinata a predare la prima specie (x) e descritta dalla variabile y :

$$\dot{y} = -Cy \quad C > 0.$$

L'ipotesi semplificativa, che sta alla base di tali andamenti, è che, in assenza di prede, i predatori non hanno di che cibarsi e quindi tendono ad estinguersi esponenzialmente (non c'è dipendenza da x), mentre le prede in assenza di predatori cresceranno esponenzialmente.

Si può migliorare il sistema introducendo la variabile $E > 0$, la quale comporta una retroazione positiva sul sistema prede. Essa modifica la crescita esponenziale rendendola costante nel tempo, dopo un transitorio iniziale. Il valore a regime dipende dalla scelta dei parametri A ed E ed è quindi molto versatile. L'equazione logistica delle prede risulta:

$$\dot{x} = Ax - Ex^2 \quad A > 0, E > 0.$$

Fisicamente il modello logistico è più realistico poiché tiene conto del fatto che in natura le risorse non sono infinite: all'aumentare del numero di individui è più difficile trovare cibo, se gli individui diventano troppi si ostacolano.

Allo stesso modo, si potrebbe pensare di modificare l'equazione che descrive la dinamica dei predatori:

$$\dot{y} = -Cy - Hy^2 \quad C > 0, H > 0.$$

In questo caso, però, il fattore correttivo non cambia la sostanza dell'andamento nelle vicinanze dell'equilibrio del sistema poiché il numero di predatori in funzione del tempo tende già a zero. Tale fattore correttivo diventa pertanto superfluo e di seguito si porrà $H = 0$.

Ponendo le due specie nello stesso ambiente è ragionevole voler descrivere la loro interazione; le prede sono cibo per i predatori e ad ogni incontro avranno una certa probabilità di soccombere. La probabilità di incontro dipende proporzionalmente dal numero di predatori e quindi anche il tasso di mortalità delle prede. Possiamo modellare questa prima situazione con la seguente funzione $f(x, y) = Bxy$. I predatori a loro volta hanno la stessa probabilità di incontro, proporzionale a xy , ma in questo caso gli incontri sono cibo acquisito e quindi vanno ad aumentare il tasso di natalità delle prede: $g(x, y) = Dxy$.

Il sistema noto come generalizzazione del modello di Lotka-Volterra è dunque

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - Bxy - Ex^2 & A, B > 0, E \geq 0 \\ \dot{y} &= -Cy + Dxy & C, D > 0.\end{aligned}$$

Le equazioni risultanti sono differenziali, a tempo continuo, non lineari, autonome, cioè senza ingressi, e deterministiche. Possiamo studiare l'evoluzione libera del sistema, in pratica come evolve nel tempo, a partire da varie condizioni iniziali e per diversi valori dei parametri.

2.2 Studio della stabilità

Lo studio della stabilità insegna che per sistemi non lineari è possibile concentrarsi su un'analisi di tipo locale, cioè si linearizza il sistema in un intorno dei punti di equilibrio. Questo comporta la possibilità di usare le proprietà e i teoremi dei sistemi lineari, generalmente più semplici e d'immediata applicazione, per descrivere la natura di tali punti, che a loro volta indicano la stabilità semplice, asintotica o l'instabilità del sistema.

Si consideri una generica funzione $z(t)$, soluzione di un modello di stato del tipo $\dot{z}(t) = f(z(t))$. Si definisce punto di equilibrio, $z(0)$, un punto nel quale lo stato rimane "ancorato", nel senso che la corrispondente traiettoria è puntiforme. Dev'essere verificato che $z(t) = z(0)$, per ogni $t \geq 0$.

In questo paragrafo si approfondirà l'analisi locale dei punti di equilibrio del modello generalizzato di Lotka-Volterra.

In base alla scelta dei parametri (A, B, C, D, E) si distinguono vari casi:

1) $E = 0$

Fisicamente la situazione descrive il modello di Lotka-Volterra propriamente detto, l'andamento delle prede in assenza d'interazione con le prede è di tipo Malthusiano, cioè si immagina che le risorse di cibo siano illimitate e quindi non sia presente competizione tra individui della stessa specie.

In questo caso i punti di equilibrio sono due. Il fatto è intuibile a priori poiché le equazioni differenziali con $E = 0$ hanno un grado in meno, invece matematicamente i punti di equilibrio si trovano come sopra, cioè ponendo $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$:

$$P1 = (0, 0);$$

$$P2 = (C/D, A/B).$$

Proseguendo con l'analisi della stabilità dei punti trovati, si calcola lo Jacobiano:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} A - By & -Bx \\ Dy & -C + Dy \end{pmatrix}$$

Sostituendo P1 in $J(x, y)$ si ottiene:

$$J(P1) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}$$

La matrice è diagonale e gli autovalori sono visibili facilmente sulla diagonale principale: uno è positivo, l'altro negativo ed entrambi sono reali. La teoria insegna che le soluzioni sono di tipo esponenziale: una decrescente e l'altra crescente, quindi il sistema complessivo diverge e il punto di equilibrio è instabile, almeno localmente.

Lo studio di P2 porta al seguente Jacobiano:

$$J(P2) = \begin{pmatrix} 0 & -BC/D \\ AD/B & 0 \end{pmatrix}$$

Si prosegue ricavando il polinomio caratteristico: $\lambda^2 + AC = 0$, da cui risultano i seguenti autovalori:

$$\lambda_1 = +i\sqrt{AC}, \lambda_2 = -i\sqrt{AC}.$$

Essi hanno parte reale nulla e, per le proprietà dell'analisi della stabilità, non si può conoscere la natura del punto di equilibrio a priori.

Il sistema di partenza è non lineare, quindi si deve ricorrere a ragionamenti “alla Lyapunov”: si cerca un analogo della funzione energia dei sistemi lineari (per definizione, data una forma quadratica associata ad una matrice P la funzione energia è $V(x) = x^T P x$). Purtroppo non esiste un metodo standard per ricavare questa funzione, nel caso specifico del punto P2 si usa il seguente ragionamento.

Si scompongono $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ in dx/dt e dy/dt , con lo scopo di modificare le equazioni differenziali come segue:

$$dx / (A - By)x = dt = dy / (Dx - C)y.$$

Semplici passaggi matematici conducono a:

$$(Dx - C) dx / x + (By - A) dy / y = 0$$

$$d[Dx - C \log x + By - A \log y] = 0$$

$$Dx(t) + B y(t) - C \log x(t) - A \log y(t) = \text{costante}$$

Possiamo valutare la funzione precedente nel punto di equilibrio P2, ridefinendolo nel modo seguente

$$P2 = (x_{eq}, y_{eq}) = \left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B} \right). \quad (1)$$

Dopo questi passaggi algebrici si arriva a definire la funzione $G(x, y)$, il cui studio porta a definire il comportamento del punto d'equilibrio in esame.

$$\begin{aligned} G(x, y) &= [Dx - C \log x + By - A \log y] - [D x_{eq} - C \log x_{eq} + B y_{eq} - A \log y_{eq}] \\ &= D[x - x_{eq} - C/D \log x + C/D \log x_{eq}] + B[y - y_{eq} - A/B \log y + A/B \log y_{eq}] \\ &= D[x - x_{eq} - x_{eq} \log (x/x_{eq})] + B[y - y_{eq} - y_{eq} \log (y/y_{eq})] \\ &= D x_{eq} [x / x_{eq} - 1 - \log (x/x_{eq})] + B y_{eq} [y / y_{eq} - 1 - \log (y/y_{eq})]. \end{aligned}$$

Il primo passaggio è puramente algebrico, nel secondo si è applicata la definizione (1).

Lo studio del segno dell'ultima equazione tiene conto del seguente fatto ben noto: $\log x \leq (x - 1)$.

Si osserva dunque che $G(x, y)$ è sempre positiva, tranne nel punto (x_{eq}, y_{eq}) dove si annulla.

In particolare, $G(x, y)$ è definita positiva in un intorno del punto d'equilibrio, che in realtà coincide con l'intera porzione di piano in cui il sistema ha senso fisico ($x > 0, y > 0$).

Una conseguenza molto importante di questo risultato sul segno della funzione $G(x, y)$ riguarda le curve di livello del sistema: una funzione definita positiva garantisce che le corrispondenti curve di livello siano sempre chiuse, indipendentemente dalle condizioni iniziali. Proporzionalmente all'aumentare delle condizioni iniziali, le curve di livello aumentano in modo concentrico al punto d'equilibrio, senza però modificare l'andamento della traiettoria.

Ora è necessario calcolare la derivata della funzione sopra indicata:

$$\dot{G}(x,y) = D \dot{x}/x (x - x_{eq}) + B \dot{y}/y (y - y_{eq}).$$

Il modello differenziale

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - Bxy \\ \dot{y} &= -Cy + Dxy\end{aligned}$$

può essere riscritto nel modo seguente, applicando la definizione (1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Bx (y - y_{eq}); \\ \dot{y} &= Dy (x - x_{eq}).\end{aligned}$$

Queste nuove equazioni vengono sostituite nell'espressione $\dot{G}(x,y)$ ed immediatamente si osserva che $\dot{G} = 0$, cioè semidefinita negativa. Le traiettorie evolvono lungo le curve di livello di $G(x, y)$, e quindi sono periodiche (compresa la traiettoria costante P2). Di conseguenza il comportamento del punto P2 è stabile semplicemente, ma non asintoticamente.

2) $0 < E < E_{max}$

Si definisce, per comodità, $E_{max} = (AD/C)$. Anche in questo caso i punti di equilibrio si trovano ponendo $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$, da cui risulta:

$$P1 = (0, 0);$$

$$P2 = (A/E, 0);$$

$$P3 = (C/D, (AD-EC) / BD).$$

Questo caso presenta tre punti di equilibrio distinti: P1, P2 e P3. I primi due si trovano sull'asse x, P3 nel primo quadrante.

Si passa allo studio dello Jacobiano del sistema:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} A - By - 2Ex & -Bx \\ Dy & -C + Dy \end{pmatrix}$$

Ogni punto di equilibrio va sostituito nell'espressione dello Jacobiano e studiando gli autovalori delle matrici risultanti si ottengono importanti informazioni sulla stabilità.

Sostituendo P1 a J(x,y) si vede facilmente che questo punto è localmente instabile perché J(P1) ha un autovalore con parte reale positiva.

$$J(P1) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}$$

Come già detto, quando questo avviene la soluzione del sistema avrà una componente esponenziale divergente, la quale causa l'instabilità locale.

Fisicamente questo punto permette di studiare come evolvono le popolazioni con condizioni iniziali prossime allo zero; in particolare risulta che a partire da condizioni iniziali in un intorno dell'origine la soluzione del sistema tende inizialmente a divergere.

Si ripete lo stesso procedimento per P2:

$$J(P2) = \begin{pmatrix} -A & -BA/E \\ 0 & -C + AD/E \end{pmatrix}$$

La matrice è triangolare, quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale: A e AD/E - C. Il primo è sicuramente negativo. Il caso in esame è $0 < E < E_{max} = AD / C$, quindi $C < AD/E$. Concludiamo che il secondo autovalore è positivo, conseguentemente P2 è localmente instabile.

Per lo studio di P3 si trova:

$$J(P3) = \begin{pmatrix} -EC/D & -BC/D \\ -(CE + AD)/B & 0 \end{pmatrix}$$

Viene ora applicata la regola di Cartesio: si calcola il polinomio caratteristico, a cui segue l'osservazione dei segni dei coefficienti e in base al numero di permanenze o variazioni si ricava il numero di radici con parte reale rispettivamente negativa o positiva.

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + EC/D \lambda + C/D (AD - EC)$, i cui coefficienti sono positivi quindi si hanno 3 permanenze a cui corrispondono tre radici con parte reale negativa: P3 è asintoticamente stabile.

3) $E = E_{max}$

I punti d'equilibrio in questo caso sono due; P2 coincide con P3 per la condizione $E = E_{max}$.

Il punto P1 è instabile per quanto detto precedentemente.

Lo studio di P2 non può essere risolto con la linearizzazione, servono altri procedimenti.

Sfruttiamo nuovamente il metodo di Lyapunov che prevede la costruzione di una funzione energia $F(x,y)$, il calcolo della sua derivata e infine lo studio del segno.

Si richiede una diversa funzione energia, rispetto al caso precedente, in quanto non avrebbe senso fisico inserire l'ordinata $y_{eq} = 0$ di P2 nel logaritmo.

Si ricava una nuova funzione energia: a partire da $G(x, y)$ del caso precedente, si sostituisce $B[y - y_{eq} - y_{eq} \log(y/y_{eq})]$ con y , ricordando che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = 0$ e che y_{eq} dobbiamo immaginarlo tendere a zero.

Si ottiene la seguente espressione:

$$F(x,y) = D [x - x_{eq} - x_{eq} \log(x/x_{eq})] + By.$$

Questa funzione esiste nel primo quadrante (si esclude l'origine dove il logaritmo perde di significato), dove è positiva e si annulla solo in P2.

La derivata di $F(x,y)$ ha la seguente espressione:

$$\dot{F}(x,y) = D\dot{x}/x (x - x_{eq}) + B\dot{y}$$

tale funzione è sempre negativa nel primo quadrante, eccetto nel punto di equilibrio P2, dove si annulla. In questo caso non è possibile applicare i metodi noti per lo studio della stabilità, quali Lyapunov o Krasowskii. Essi richiedono l'esistenza del sistema su intorno del punto di cui si vuole conoscere la natura. Nel caso in esame P2 appartiene all'asse x e un qualunque suo intorno avrebbe dei punti nel quarto quadrante, dove il sistema non ha significato. Si studia il segno di $F(x, y)$ nella regione R costituita dal primo quadrante escluso l'asse x . In tale regione F è definita positiva, mentre $\dot{F}(x,y)$ è definita negativa.

Rimane da verificare che nessuna traiettoria, iniziata in R , possa uscire dalla regione stessa. Questo avviene se gli assi non vengono attraversati da alcuna di esse.

L'attraversamento dell'asse y è escluso perché $F(x, y)$ tende all'infinito per $x \rightarrow 0$ e quindi all'avvicinarsi all'asse y . Per quanto riguarda l'asse x , osserviamo che esistono traiettorie completamente contenute sull'asse x , cioè le soluzioni di

$\dot{x} = Ax - Ex^2$ con $y(t) = 0$. Inoltre si può verificare, con teoremi di analisi matematica, che la soluzione esiste ed è unica per ogni condizione iniziale. Si deduce la stabilità asintotica del punto P2.

4) $E > E_{max}$

In questo caso, i punti di equilibrio che risultano matematicamente sono gli stessi tre della situazione 2) in cui $0 < E < E_{max}$. Il punto d'equilibrio P3, però, perde di significato fisico poiché, per $E > E_{max}$, diventa negativo.

In pratica l'analisi seguente si concentrerà solo sui due punti d'equilibrio P1 e P2.

Il punto P1 = (0, 0) si analizza come nei casi precedenti e si può concluderne l'instabilità locale.

Sostituendo nello Jacobiano P2 si ha:

$$J(P2) = \begin{pmatrix} -A & -BA/E \\ 0 & -C + AD/E \end{pmatrix}$$

Per la condizione $E > E_{max} = AD/C$, gli elementi sulla diagonale principale della matrice triangolare J (P2) sono negativi. Le soluzioni del sistema sono combinazioni lineari della base costituita da due esponenziali decrescenti. Il sistema converge e questo comporta l'asintotica stabilità locale del punto d'equilibrio P2.

Schema riassuntivo della stabilità dei punti di equilibrio:

Caso particolare	Numero di punti di equilibrio e loro stabilità
$E = 0$	2: P1 instabile e P2 semplicemente stabile
$0 < E < E_{max}$	3: P1 e P2 instabili, P3 asintoticamente stabile
$E = E_{max}$	2: P3 collassa in P2 e rimane asintoticamente stabile, P1 instabile
$E > E_{max}$	2: sarebbero 3, ma uno perde di significato fisico perché negativo. Quindi uno stabile asintoticamente e l'altro instabile

2.3 Simulink

Tramite il simulatore Simulink si è costruito il seguente schema a blocchi per descrivere il modello di Lotka-Volterra precedentemente analizzato.

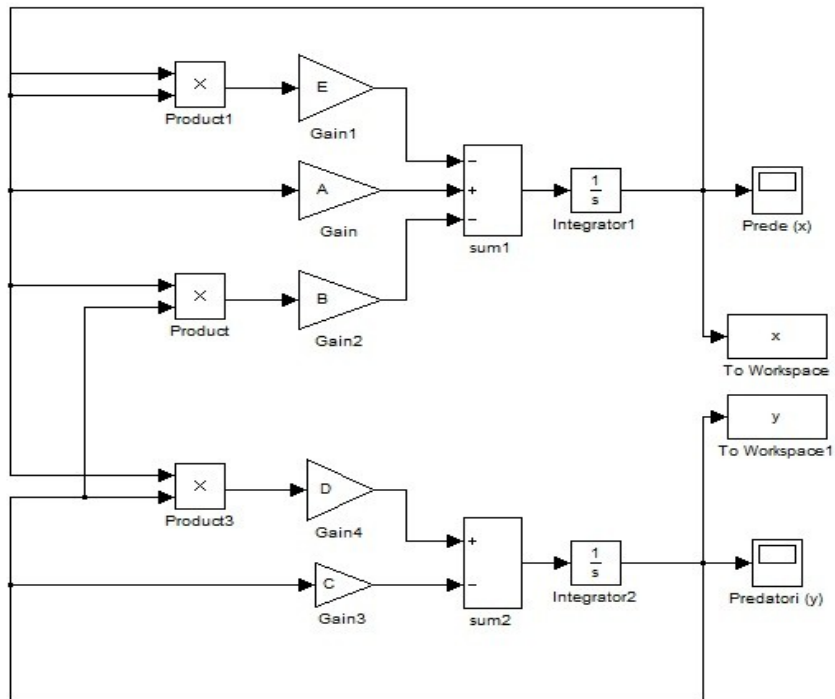
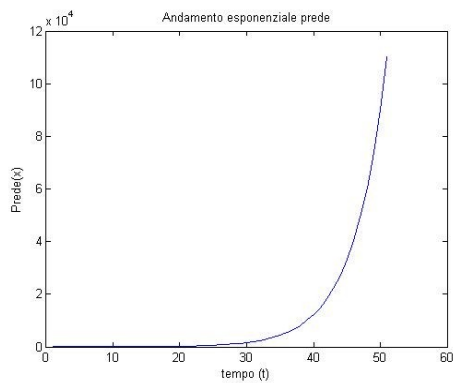


Fig.2.1 Schema a blocchi del modello generalizzato di Lotka-Volterra.

Parametri fissati: $E=0$, $A=C=1$, $B=D=0$, condizioni iniziali $x(0) = 5$, $y(0) = 5$.

a)



b)

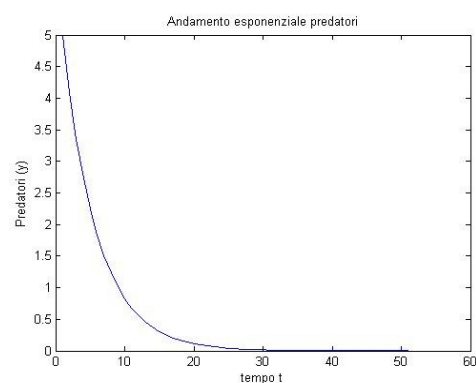


Fig.2.2 Andamenti temporali di prede e predatori. Senza interazione, $B=D=0$, entrambe le specie seguono l'andamento Malthusiano, cioè rispettivamente crescono e decrescono in modo esponenziale.

La crescita esponenziale e indefinita della popolazione di prede presuppone implicitamente che le risorse di cibo disponibili per le prede siano illimitate, in pratica si trascura la competizione tra individui della stessa specie.

Parametri fissati: $E = A = C = 1$, $B=D=0$ condizioni iniziali $x(0) = 5$, $y(0) = 5$.

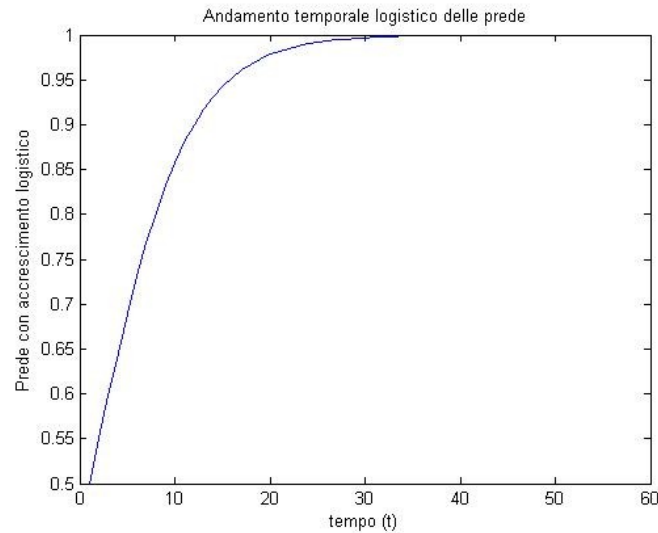


Fig.2.3 Andamento temporale logistico della popolazione di prede, con $E = 1$, e senza interazione con i predatori ($B=D=0$).

Può essere interessante confrontare la Fig.2.3 con la precedente Fig.2.2 a) perché permette di capire il significato del termine correttivo Ex^2 . L'andamento della popolazione di prede non cresce più esponenzialmente in modo indefinito, ma acquista un andamento monotono esponenzialmente convergente ad una costante. Questo valore a regime si definisce con $X_{max} = A / E$ e può essere ricavato risolvendo l'equazione differenziale di secondo grado che descrive l'andamento delle prede.

Questo fatto porta il vantaggio di rendere il sistema stabile a regime, scegliendo opportunamente il parametro E . Inoltre, modificando anche gli altri parametri costanti del modello, è possibile mantenere a regime la popolazione ad un qualsiasi valore desiderato.

Fisicamente, è più realistico assumere che maggiore è la popolazione, più difficile sarà la sopravvivenza: raramente le risorse di cibo sono illimitate. Questo comporta una competizione tra individui della stessa specie che può essere interpretata come una retroazione naturale che trasforma la crescita da esponenziale indefinita ad esponenziale monotona e convergente ad una costante.

Parametri fissati: $E = 0$, $A = B = C = D = 1 > 0$

Questo caso rappresenta il modello di Lotka-Volterra propriamente detto ed è un caso particolare molto utile del sistema studiato precedentemente. L'analisi della stabilità, in generale, è già stata studiata. Sono stati esaminati i due punti di equilibrio: $P1 = (0, 0)$ è localmente instabile, mentre $P2 = (C/D, A/B)$ semplicemente e globalmente stabile.

Il grafico riportato in Fig. 2.4 evidenzia la stabilità solo semplice del punto $P2$: le traiettorie non raggiungono mai il punto d'equilibrio, sono concentriche ad esso.

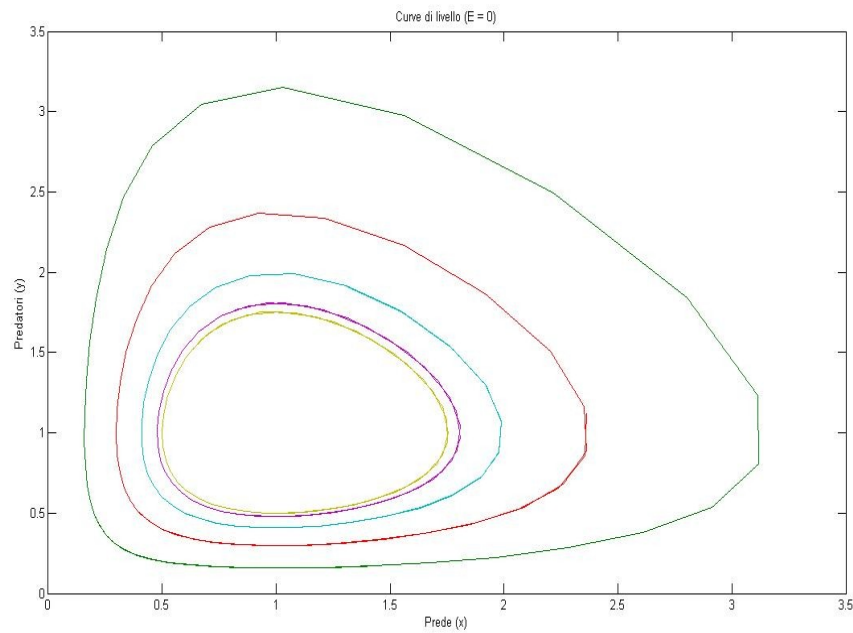


Fig.2.4 Curve di livello. Modificando le condizioni iniziali si ottengono curve concentriche nel punto di equilibrio $P3 = (C/D, A/B) = (1, 1)$, in questo caso $E=0$.

Le condizioni iniziali specifiche, usate in Fig.2.4, sono:

Condizioni iniziali, $x(0) =$ $y(0)$:
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1

L'uguaglianza $x(0) = y(0)$ indica che il punto di partenza delle traiettorie sta lungo la bisettrice del primo quadrante. All'aumentare delle condizioni iniziali le traiettorie aumentano in termini di grandezza, ma mantengono sempre lo stesso andamento.

Parametri fissati: $E = 0, A = B = C = D = 1 > 0$, condizioni iniziali $x(0) = 0,5, y(0) = 0,5$.

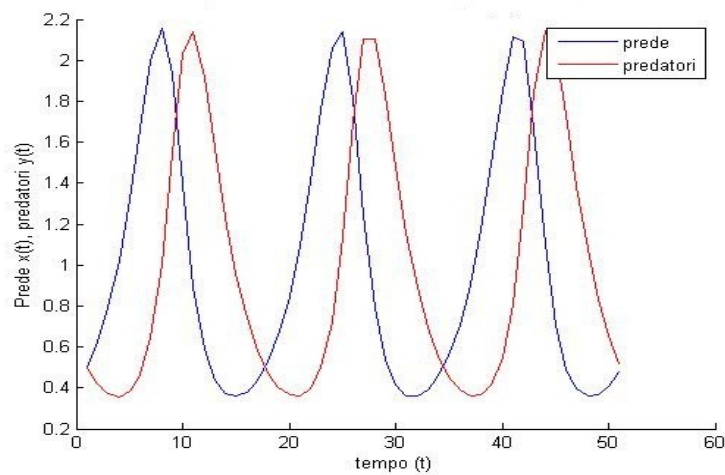


Fig.2.5 Andamento in funzione del tempo del numero di individui delle popolazioni di prede e predatori.

Da questa simulazione si può osservare l'andamento periodico nel tempo di ambedue le popolazioni. Essa è di notevole importanza perché sottolinea come questa proprietà di periodicità non dipenda da un andamento periodico delle condizioni ambientali o iniziali, poiché non si avrebbero i tutti i parametri costanti. La periodicità delle soluzioni dipende dalla dinamica "interna" delle popolazioni.

Modificando i valori dei parametri si otterranno curve pseudo-sinusoidali con ampiezze e frequenze diverse, modificando le condizioni iniziali gli andamenti verranno traslati, ma il comportamento periodico rimarrà invariato.

Parametri fissati: $0 < E < E_{max}$, condizioni iniziali $x(0) = 0,5, y(0) = 0,5$.

Dal seguente grafico osserviamo il comportamento del punto d'equilibrio P3. A partire dal punto che ha come coordinate le condizioni iniziali, la traiettoria si sposta verso il punto di equilibrio fino a raggiungerlo, a conferma della sua asintotica stabilità globale.

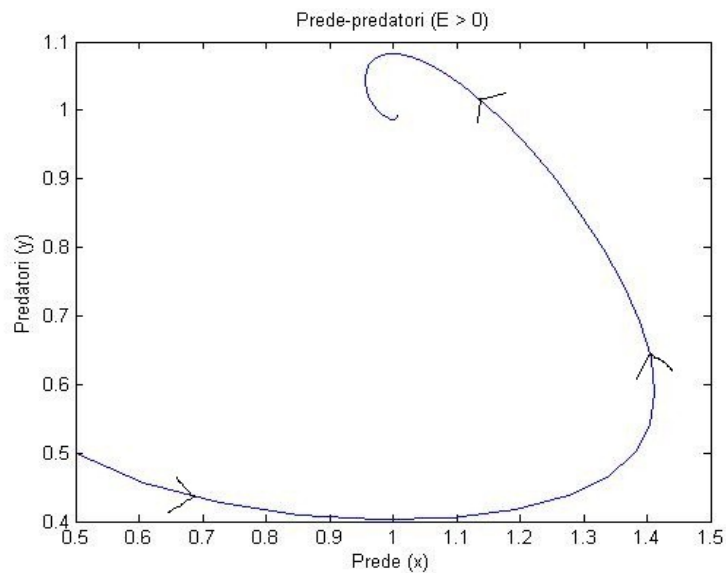


Fig.2.6 Grafico prede-predatori nel caso $0 < E < E_{max}$

L'andamento temporale delle popolazioni di prede e predatori conferma l'analisi della stabilità, dopo un transitorio iniziale il sistema raggiunge un punto d'equilibrio costante.

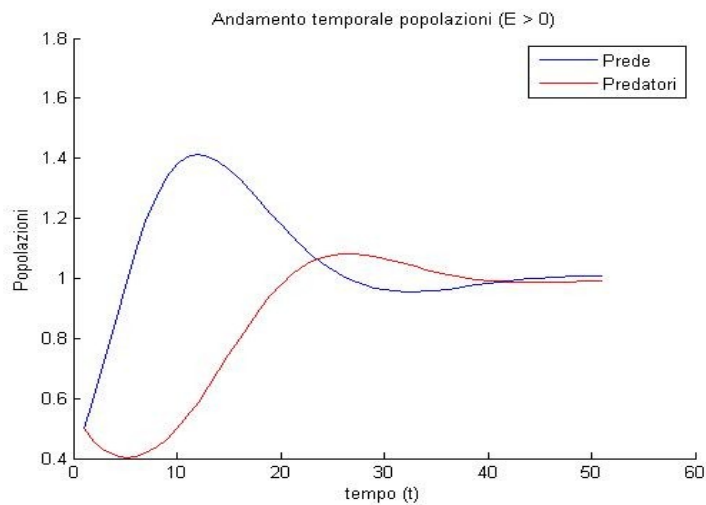


Fig.2.7 Andamento temporale delle popolazioni nel caso particolare in cui $0 < E < E_{max}$.

Si può notare come l'introduzione di E , che intuitivamente porta alla diminuzione della crescita della prede, abbia portato, in presenza di interazione, vantaggio alle prede e non ai predatori. Quest'affermazione è provata osservando i punti di equilibrio. Nel caso $E = 0$ si ha $P' = (C/D, A/B)$, mentre nel caso appena analizzato $P'' = (C/D, A/B - EC/BD)$. L'ordinata di P' è maggiore rispetto a quella di P'' , mentre l'ascissa rimane invariata.

3) Presenza di un super-predatore

3.1) Descrizione ed equazioni matematiche

In natura la distinzione tra prede e predatori non è sempre netta, i predatori, ad esempio, possono essere a loro volta cacciati da una specie più forte. Spesso è utile tenere conto della presenza di un predatore esterno in grado di cacciare entrambe le popolazioni dell'ecosistema.

Una situazione concreta è quella della pesca; durante questa pratica l'uomo caccia indistintamente due specie diverse di pesci: una predatrice e l'altra predata. Egli gioca il ruolo di un super-predatore in grado di modificare la dinamica di entrambe le popolazioni. L'impatto dell'intervento umano può essere diverso sulle due specie, ad esempio si immagini di pescare con delle reti a maglia: le specie di taglia più grande saranno svantaggiate rispetto a quelle generalmente più piccole.

Per adattare il modello matematico generalizzato a questa situazione particolare, immaginiamo che la pesca comporti il prelievo di individui in modo additivo e proporzionale ad un parametro costante P , necessario a descrivere la pressione dell'uomo sul sistema. Si è detto che le due specie possono essere colpite in modo diverso dalla pressione dell'uomo, questo effetto è modellato rendendo i prelievi di individui proporzionali ad altre due costanti positive e diverse per le prede ed i predatori: rispettivamente h e k . Una condizione molto utile che si impone su h e k è: $h + k = 1$. Questo semplice vincolo permette di rendere h e k una sorta di indicatori percentuali: dato che è stata prelevata una quantità P di individui sappiamo che di questi hP sono prede e kP predatori.

Non va dimenticato che i termini additivi dipendono anche dal numero di individui presenti nella popolazione: maggiore è il numero di pesci nel lago, maggiore è la probabilità che vengano pescati dalla rete. Riassumendo h e k servono a distinguere l'effetto sulle due specie, mentre P permette di regolare la frequenza di caccia del super-predatore.

Nella pratica la nuova espressione del modello di Lotka-Volterra è la seguente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - Bxy - Ex^2 - hPx & A, B, h, P > 0, E \geq 0 \\ \dot{y} &= -Cy + Dxy - kPy & C, D, k, P > 0.\end{aligned}$$

Raggruppando i termini di primo grado e ridefinendo i parametri A e C , si ottiene una notevole semplificazione: è possibile riportarsi al modello generalizzato di Lotka-Volterra precedentemente analizzato.

Matematicamente, le due sostituzioni da effettuare sono:

$$\begin{aligned}\hat{A} &:= A - hP; \\ \hat{C} &:= C + kP. \quad (2)\end{aligned}$$

Le equazioni diventano:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \hat{A}x - Bxy - Ex^2 & \hat{A}, B > 0, E \geq 0 \\ \dot{y} &= -\hat{C}y + Dxy & \hat{C}, D > 0.\end{aligned}$$

3.2) Studio della stabilità

Si considera dapprima il caso $E_{\max} > E > 0$, dove $E_{\max} = (\hat{A}D / \hat{C})$ cioè si tiene conto dei nuovi parametri. Inizialmente, il comportamento dei seguenti due punti d'equilibrio non varia, sono entrambi localmente instabili:

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0); \\ P_2 &= (\hat{A} / E, 0) = ((A - hP) / E, 0).\end{aligned}$$

D'interesse è lo studio del punto P_3 , il suo comportamento cambia: risulterà spostato sempre a favore delle prede:

$$P_3 = \left(\frac{\hat{C}}{D}, \frac{(\hat{A}D - E\hat{C})}{BD} \right).$$

Applicando le sostituzioni (2) si ottiene:

$$P_3 = \left(\frac{C}{D} + \frac{k}{D} P, \frac{(AD - EC)}{BD} - \frac{(hD + kE)}{BD} P \right).$$

Si osserva che l'ascissa di P_3 , la quale indica il punto di equilibrio della popolazione di prede, cresce proporzionalmente a P , mentre l'ordinata, rappresentante il punto d'equilibrio dei predatori, decresce all'aumentare di P . Questo dimostra l'affermazione precedente: l'effetto della caccia indistinta gioca sempre a favore delle prede, mentre sono i predatori a risentirne. Lo spostamento di P ha un limite: ad un certo punto i predatori si estingueranno. Questo avviene quando

$$P = P' = \frac{(AD - EC)}{(hD + kE)}.$$

Per questo valore di P le prede raggiungono il loro valore massimo, esso è facilmente calcolabile sostituendo P' a P nell'ascissa del punto P3:

$$X_{max} = \frac{C}{D} + \frac{K}{D} \frac{(AD - EC)}{(hD + kE)}.$$

Per $P = P'$, i predatori sono assenti e il sistema si riduce a:

$$\dot{x} = \hat{A}x - Ex^2 \quad \hat{A} > 0, E \geq 0.$$

I punti d'equilibrio, sostituendo i vari parametri del caso in analisi, diventano:

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = \frac{A}{E} - \frac{h}{E} P';$$

$$x_3 = \frac{C}{D} + \frac{K}{D} P'.$$

In questo caso ($P = P'$) il primo è instabile, in analogia con i casi precedenti. Il punto x_3 collassa in x_2 : si verifica facilmente che

$$\frac{A}{E} - \frac{h}{E} P' y = \frac{C}{D} + \frac{K}{D} P'$$

$$AD - hDPy = CE + K EP'$$

$$AD - CE = P'(kE + hD)$$

$$P' = \frac{(AD - EC)}{(hD + kE)}.$$

Essa è proprio la definizione di P', quindi l'uguaglianza $x_2 = x_3$ è sempre verificata. Il comportamento di x_2 , appartenente all'asse x, è di asintotica stabilità globale: derivando $f(x) = \hat{A}x - Ex^2$ e sostituendovi il punto x_2 si ottiene un valore costante sicuramente negativo, che prova la tesi.

Un ulteriore aumento di $P > P'$ porta all'estinzione delle prede, infatti il coefficiente di crescita $\hat{A} = A - hP$ si annulla per $P = P'' = A/h$.

Affinché non ci sia estinzione prima della diminuzione delle prede è sufficiente osservare che la condizione $P'' > P'$ è sempre verificata:

$$\frac{A}{h} - \frac{(AD - EC)}{(hD + kE)} > 0$$

$$\frac{(ADh + AEk - Adh + CEh)}{(h(hD + kE))} > 0.$$

Il denominatore è sicuramente positivo, per come sono stati definiti i parametri, quindi si ha la disequazione:

$$E(kA + hC) > 0$$

Essa, come si vede facilmente, è sempre verificata.

Per $P \geq P''$ si ha l'estinzione di entrambe le specie secondo andamenti esponenziali.

Riassumendo, il caso $E_{max} > E > 0$ comprende:

- $P < P'$: prede e predatori si comportano come nel modello generalizzato di Lotka-Volterra già studiato, con la differenza che l'intervento della caccia congiunta sposta l'equilibrio sempre più a favore delle prede, man mano che si aumenta il parametro P e cioè la frequenza di caccia del super-predatore.
- $P'' > P \geq P'$: i predatori tendono ad estinguersi, le prede seguono l'andamento logistico, ma all'aumentare di P il punto d'equilibrio diminuisce.
- $P \geq P''$ prede e predatori si estinguono esponenzialmente, i punti d'equilibrio, matematicamente, diventano negativi e, fisicamente, perdono di significato.

Si osserva il caso $E = 0$, in cui le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - Bxy - hPx & A, B, h > 0 \\ \dot{y} &= -Cy + Dxy - kPy & C, D, k > 0. \end{aligned}$$

Per $P < P'$, i risultati sono in analogia con il modello di Lotka-Volterra analizzato nel precedente capitolo: due punti d'equilibrio uno instabile, l'altro semplicemente stabile.

$$P1 = (0, 0);$$

$$P2 = \left(\frac{C + kP}{D}, \frac{A - hP}{B} \right).$$

Per $P = P' = P''$ (uguaglianza verificabile facilmente sostituendo, in P' , $E = 0$ ed applicando elementari semplificazioni), si ottiene:

$$\dot{x} = Ax - Bxy - hx(A/h) = -Bxy.$$

Quest'equazione ammette infiniti punti d'equilibrio, $x =$ costante arbitraria, per $y = 0$.

Le prede possono raggiungere un valore massimo pari a:

$$X_{max} = \frac{C}{D} + \frac{K}{h} \frac{A}{D}.$$

Tale valore si ricava sostituendo a P nella seconda equazione la costante P' e ponendo $\dot{y} = 0$. Con lo stesso

procedimento, la prima equazione fornisce $X' = 0$. Risulta dunque la possibilità di ottenere qualsiasi valore delle prede, all'interno del range appena calcolato.

Per $P = P'$ si estinguono solo i predatori, per $P = P' + \epsilon$ (ϵ costante piccola a piacere) si ha estinzione anche delle prede. In pratica, l'assenza di competizione tra le prede ($E = 0$) comporta che esse si estinguano prima, contro l'intuizione.

Riassumendo la teoria della stabilità e l'analisi di questo modello hanno evidenziato che prelevare indiscriminatamente può portare ad una modifica irreversibile dell'ecosistema, causando l'estinzione delle specie presenti. Inoltre la competizione, che in teoria dovrebbe diminuire il numero delle prede, sortisce l'effetto contrario di rivitalizzare le prede.

3.3) Simulink

Il modello sopra descritto, costruito tramite il pacchetto Simulink, è il seguente:

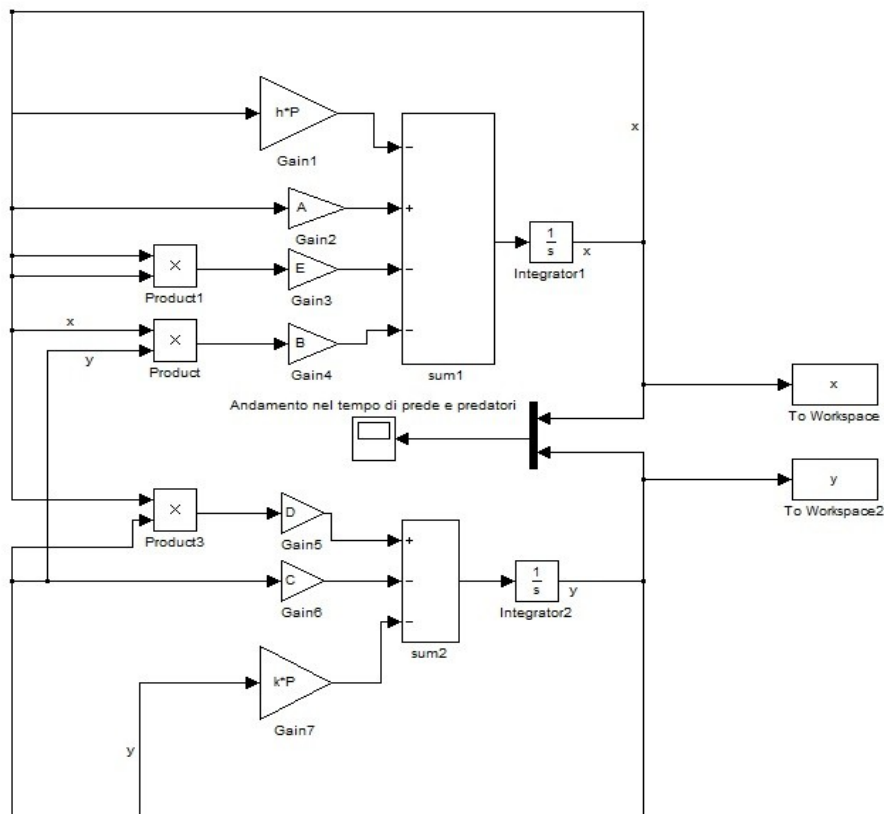


Fig.3.4 Schema Simulink del modello generalizzato di Lotka-Volterra in cui si considera la presenza di un “super-predatore”.

Prima di tutto si analizza il comportamento del punto d'equilibrio P3, nel caso in cui esso esista, cioè $E_{max} > E > 0$.

Si raffrontano nel seguito la Fig.2.6, caso relativo al modello senza l'effetto di un “super-predatore”, e la Fig.3.5, relativa al sistema appena descritto. P3 si mantiene asintoticamente stabile in entrambe le simulazioni, ma subisce uno spostamento all'interno del primo quadrante. Scelto il parametro $P = 0,3$ cioè appartenente al caso $P < P' = 1$, si osserva facilmente, come suggerito dalla teoria, che P3 si sposta a favore delle prede ed a sfavore dei predatori.

I parametri utilizzati nelle simulazioni sono: $A = 2, B = 1, C = 1, D = 1, E = 1$ ($E_{max} > E > 0$), $x(0) = y(0) = 0,5, P = 0.3, h = 0.4, k = 0.6$.

$$P3 = (1; 1) \quad \rightarrow \quad P3' = (1,18; 0,7).$$

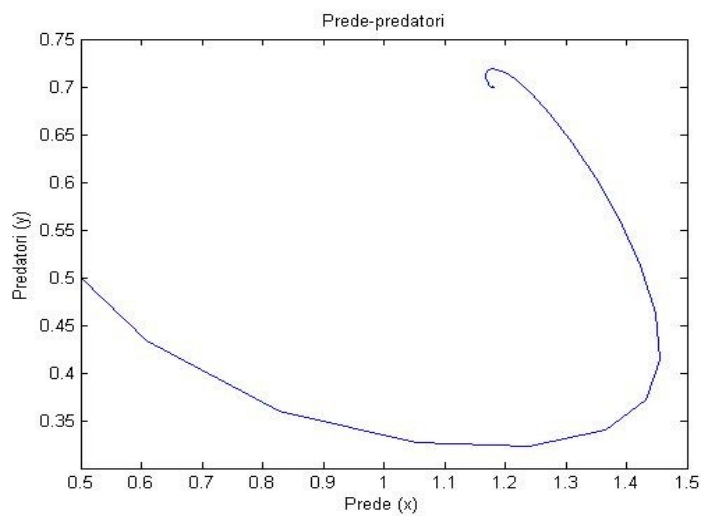


Fig.3.5 Andamento prede-predatori del modello di Lotka-Volterra “con super-predatore”.

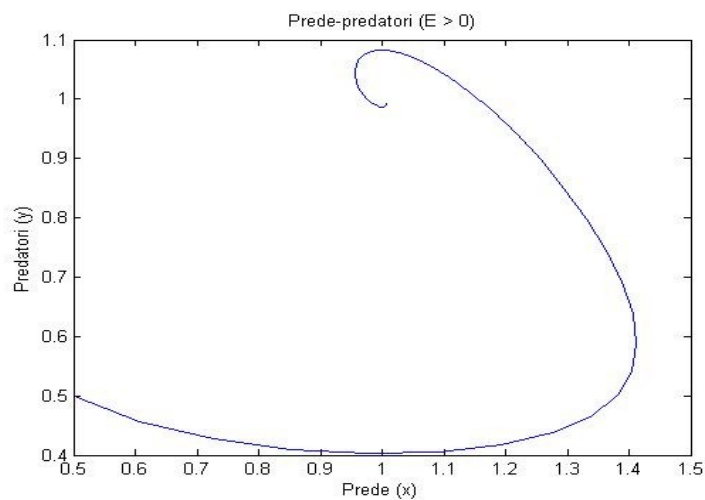


Fig.2.6 Andamento prede-predatori del modello generalizzato di Lotka-Volterra studiato nel capitolo 2.

Si osserva ora l'importanza del parametro P nel sistema. Nella simulazione sono stati usati i seguenti parametri: $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$, $E = 1$, $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.5$, $h = 0.4$, $k = 0.6$.

Il parametro P viene fatto variare secondo i seguenti valori scelti arbitrariamente: 0.3, 0.5, 0.6, 1.

La situazione $P = 1$ rientra nel caso:

$$P = P' = \frac{(AD - EC)}{(hD + kE)} = 1.$$

Come osservato grazie alla teoria, questo valore di P porta la popolazione di prede al raggiungimento del numero massimo possibile d'individui.

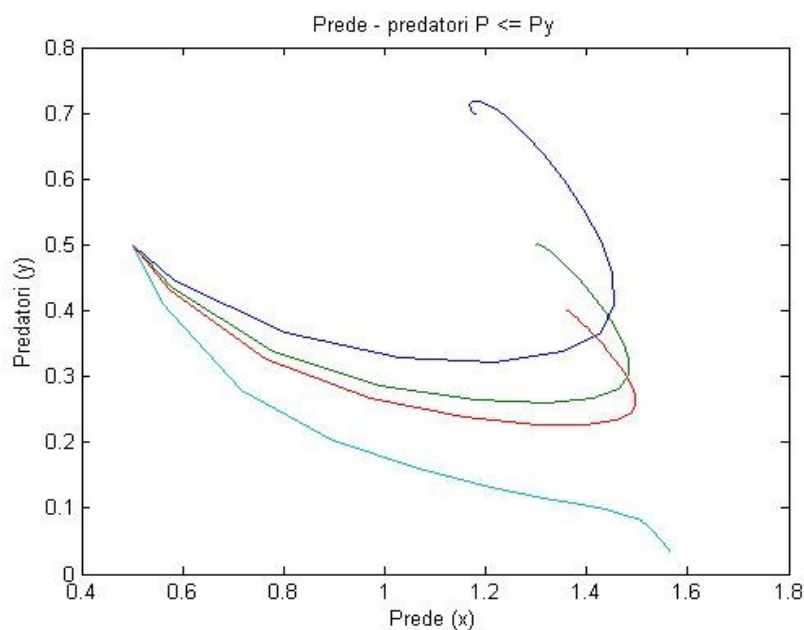


Fig.3.6 Andamenti delle traiettorie di prede-predatori secondo vari valori di P ($P \leq P'$).

Scelto un valore costante di $P = 0.6$, si analizza un esempio di andamento nel tempo di entrambe le popolazioni. Gli altri valori di P vengono trascurati perché rispettano lo stesso andamento. Si noti come entrambe le specie raggiungano un valore costante all'equilibrio. Come suggerito dalla teoria i predatori sono svantaggiati rispetto alla prede, cioè si assestano, dopo un transitorio iniziale, ad un valore costante inferiore. Il grafico che descrive questa situazione è riportato in Fig.3.7.

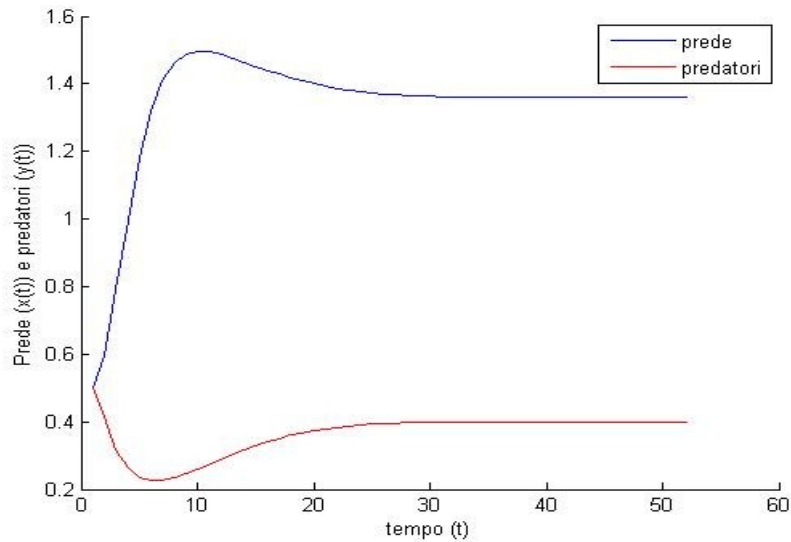


Fig.3.7 Esempio di andamento delle popolazioni di prede e predatori in funzione del tempo ($P = 0.6$)

All'aumentare di P si studia il caso $P'' > P > P'$ sfruttando i parametri usati per le simulazioni precedenti, (P'' è stato definito precedentemente nel modo seguente $P'' = A/h = 5$, nel caso in esame), con la differenza che P viene fatto variare tra le seguenti costanti: 1.5, 3.0, 4.0.

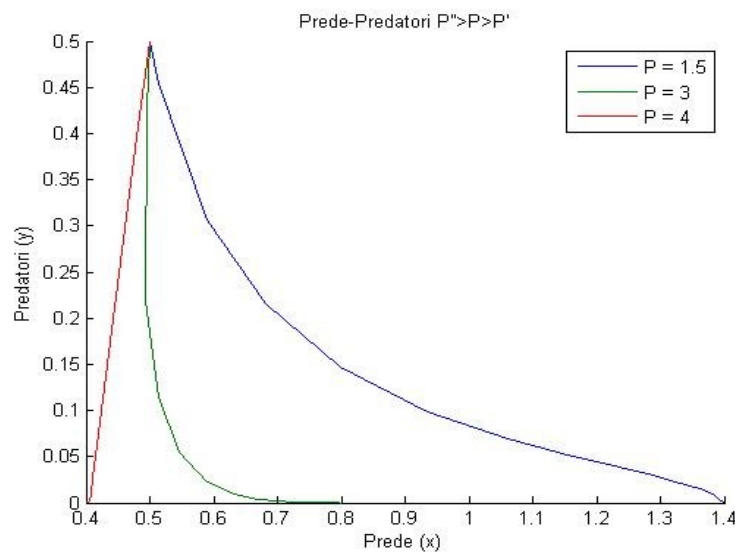


Fig.3.8 Andamenti delle traiettorie di prede-predatori secondo vari valori di P ($P'' > P > P'$).

Si osserva che, come previsto, le prede raggiungono un valore costante, secondo la legge logistica, che diminuisce all'aumentare P . I predatori invece raggiungono velocemente l'estinzione in tutti i casi, cambia la velocità con cui questo avviene. Si può osservare questo fatto in maggior dettaglio dall'andamento delle popolazioni in funzione del tempo: per analogia delle varie situazioni si effettua e analizza solo una simulazione arbitraria: caso $P = 3$.

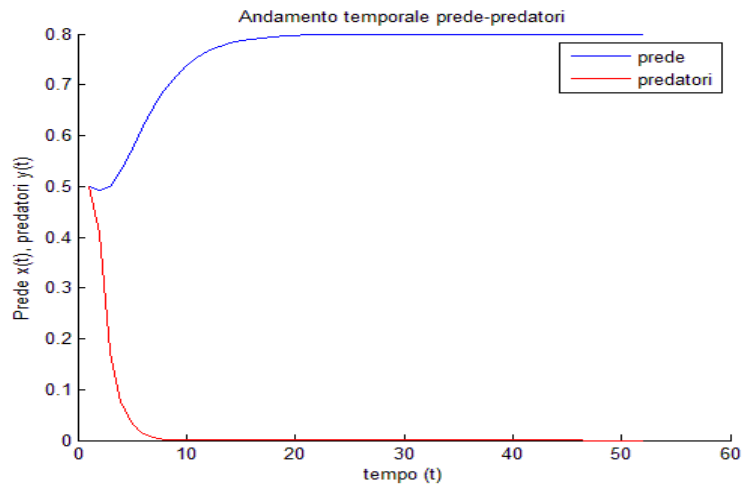


Fig.3.9 Andamenti delle due popolazioni presenti nell'ecosistema in funzione del tempo.

Per valori di P superiori o uguali a P'' , si ha l'estinzione esponenziale di entrambe le popolazioni. All'aumentare di P cambia la velocità con cui questo avviene, ma non il comportamento sostanziale, questa affermazione è supportata dal seguente grafico (i valori di P utilizzati nella simulazione sono riportati nella legenda):

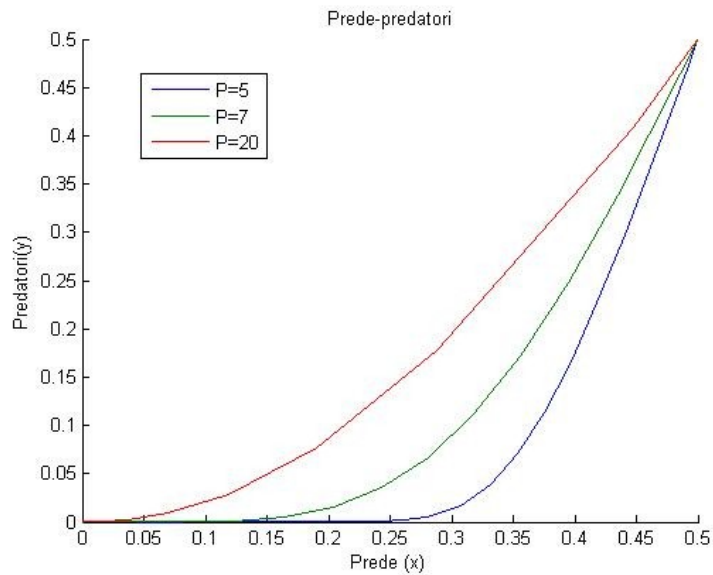


Fig.3.10 Andamento predatori in funzione delle prede, per vari valori del parametro P ($P \geq P''$).

Si osserva che il caso limite $P = P''$ porta le prede all'estinzione, poiché annulla il coefficiente di crescita $\hat{A} = A - hP$. Le considerazioni fatte in precedenza vengono confermate anche dall'andamento nel tempo delle due popolazioni. Come previsto dalla teoria, l'andamento verso l'estinzione di entrambe le specie è di tipo esponenziale. Si riporta la simulazione ottenuta con il valore $P = 7$:

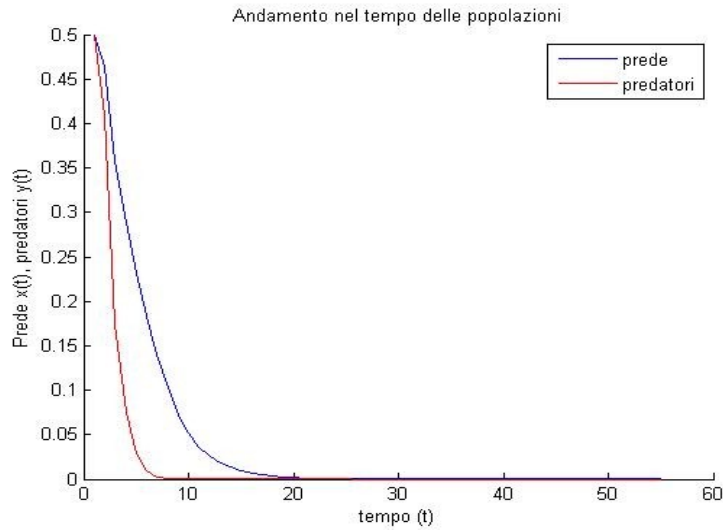


Fig.3.11 Andamento nel tempo di prede e predatori ($P > P''$).

I parametri utilizzati nelle simulazioni sono: $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$, $E = 0$, $x(0) = y(0) = 0,5$, $P = 0,3$, $h = 0,4$, $k = 0,6$, $P' = 5$.

Dal grafico sottostante si osserva come le traiettorie rispecchino quanto già visto nel modello di Lotka-Volterra propriamente detto. Al variare di P si ha uno spostamento del punto d'equilibrio semplicemente stabile: all'aumentare di P il punto d'equilibrio si sposta a favore delle prede ed a sfavore dei predatori.

$$P2 = \left(\frac{C + kP}{D}, \frac{A - hP}{B} \right).$$

In particolare si sono scelti i valori del parametro $P : 1,3,4$. Rientrano tutti nel caso $P < P'$.

$$P2' = (1.6, 1.6);$$

$$P2'' = (2.8, 0.8);$$

$$P2''' = (3.4, 0.4).$$

Essi dimostrano l'andamento sopra descritto e confermano lo spostamento delle curve concentriche in Fig.3.12.

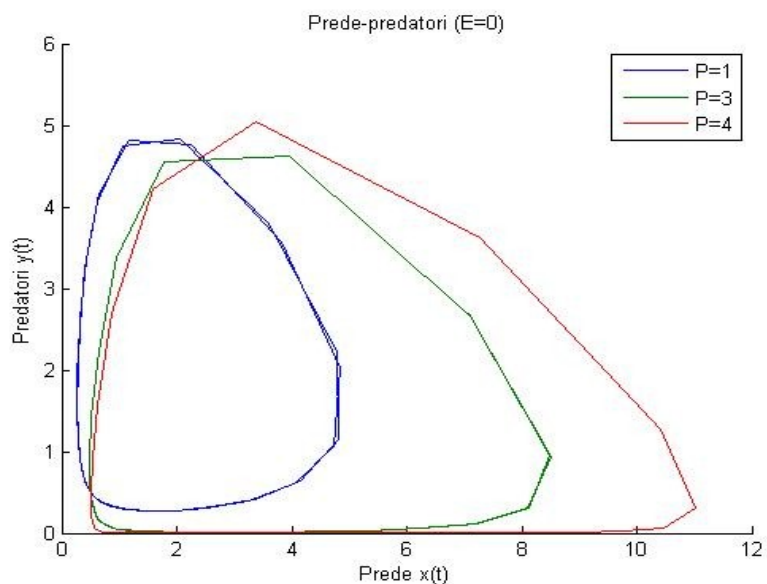


Fig.3.12 Andamento prede-predatori, $E=0$, al variare del parametro P , $P < P'$.

Il caso $P = P' = 5$ (per come sono stati scelti i parametri) si comporta nel modo seguente: le prede non si estinguono a differenza dei predatori. Osserviamo questo comportamento in Fig.3.14: si osserva la popolazione di prede che, dopo un transitorio iniziale, si stabilizza ad un valore costante, mentre i predatori si estinguono esponenzialmente.

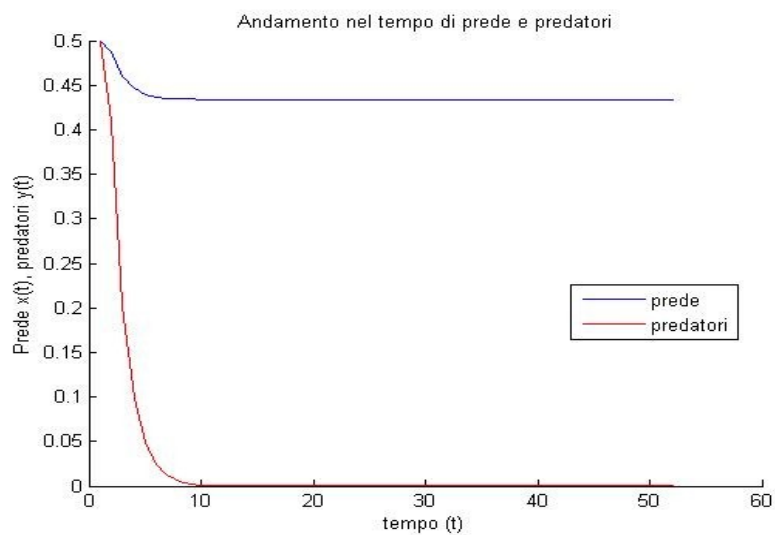


Fig.3.14 Andamento nel tempo di prede e predatori, caso $E = 0$ e $P = P'$.

I casi in cui $P > P'$ si comportano nel seguente modo: si ha l'estinzione di entrambe le specie secondo la legge esponenziale. All'aumentare del parametro P le due specie tendono all'estinzione più rapidamente.

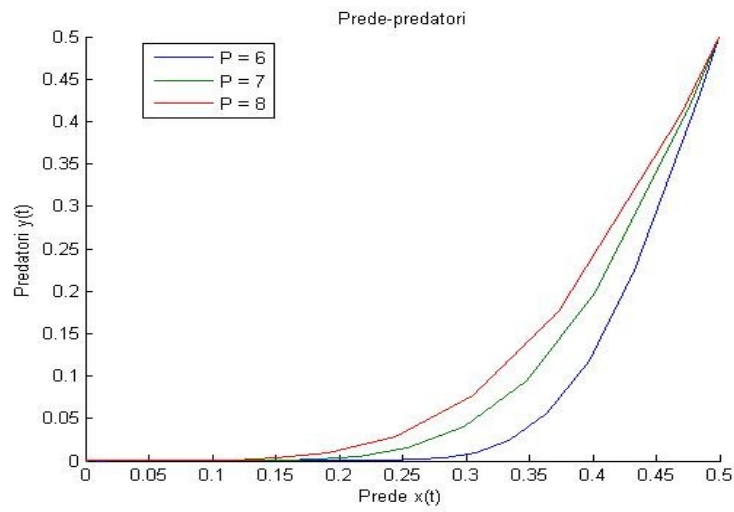


Fig.3.13 Andamento prede-predatori al variare di P , nel caso $P > P'$.

4) Prelevamento costante di prede

4.1) Descrizione ed equazioni matematiche

La situazione è la stessa del caso precedente: sono presenti due tipi di popolazioni in un ecosistema isolato, una predatrice e l'altra predata. Se isolate, hanno andamenti, rispettivamente, di tipo monotono esponenzialmente convergente ad una costante ed esponenzialmente decrescente. Tramite la modellizzazione si studia come, interagendo tra loro, queste specie evolvano nel tempo. In questo caso specifico si ipotizza un prelevamento dall'esterno, costante nel tempo, di un certo numero di prede appartenenti all'ecosistema, modellizzabile con un parametro costante F . Esso può rappresentare l'approvvigionamento di cibo da parte dell'uomo in un allevamento, con tasso di prelevamento costante.

Il modello di Lotka-Volterra viene modificato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - Bxy - F & A, B, F > 0; \\ \dot{y} &= -Cy + Dxy & C, D > 0.\end{aligned}$$

L'effetto della competizione ($E=0$) viene trascurato allo scopo di semplificare i conti matematici, essendo preferibile puntare l'attenzione sugli andamenti ottenuti dalle simulazioni.

Una situazione pratica può essere la necessità di controllare la dinamica delle popolazioni di pesci presenti in un lago in cui si pesca in modo costante, ad esempio con delle reti. Si vuole capire quanto è possibile prelevare affinché le specie non si estinguano, matematicamente affinché il sistema rimanga stabile, nelle vicinanze di un punto d'equilibrio.

4.2) Studio della stabilità

Lo studio della stabilità di questo sistema d'equazioni inizia ponendo \dot{x} e \dot{y} pari a zero e ricavando i punti d'equilibrio del sistema:

$$\begin{aligned}Ax - Bxy - F &= 0 \\ -Cy + Dxy &= 0\end{aligned}$$

Il calcolo dei punti d'equilibrio richiede qualche passaggio algebrico. Raccogliendo y ($-Cy + Dx = 0$) e poi sostituendo nella prima equazione, si ricava il primo punto d'equilibrio:

$$P1 = \left(\frac{F}{A}, 0\right).$$

Sempre dalla seconda equazione risulta il secondo punto d'equilibrio:

$$x = \frac{C}{D}, \quad \text{che va sostituito nella prima:}$$

$$A\left(\frac{C}{D}\right) - B\left(\frac{C}{D}\right)y - F = 0;$$

$$y = \frac{(AC - DF)}{BC}.$$

Riassumendo:

$$P1 = \left(\frac{F}{A}, 0\right).$$

$$P2 = \left(\frac{C}{D}, \frac{(AC - DF)}{BC}\right).$$

Lo studio di P1 non è molto interessante perché, fisicamente, rappresenta una situazione in cui si è verificata l'estinzione dei predatori. Matematicamente, dato lo Jacobiano del sistema risulta:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} A - By & -Bx \\ Dy & -C + Dx \end{pmatrix};$$

$$J(P1) = \begin{pmatrix} A & \frac{-BF}{A} \\ 0 & -C + \frac{DF}{A} \end{pmatrix}.$$

Si osserva che $J(P1)$ è triangolare, i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale ed almeno uno è sicuramente positivo. Questo implica l'instabilità locale del punto d'equilibrio.

Per studiare la stabilità di P2, come prima cosa si distinguono due casi al variare di F, poiché osserviamo che la seconda coordinata di P2 potrebbe diventare negativa e perdere di significato:

- 1) l'ordinata del punto P2 è positiva ed ha significato fisico, solo per valori tali da soddisfare $F < AC/D$;
- 2) la seconda situazione si ha per tutti gli altri valori di F, $F \geq AC/D$, in cui l'ordinata di P2 diventa minore o uguale a zero.

Per studiare la prima situazione si passa, come fatto in precedenza, al calcolo dello Jacobiano:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} A - By & -Bx \\ Dy & -C + Dx \end{pmatrix}.$$

Il punto d'equilibrio fornisce la seguente matrice

$$J(P2) = \begin{pmatrix} \frac{FD}{C} & \frac{-BC}{D} \\ (AC - FD) \frac{D}{BC} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proseguendo, il polinomio caratteristico vale $\lambda^2 - \lambda \frac{FD}{C} + (AC - FD)$, dove $AC - FD > 0$. Ricorrendo alla regola di Cartesio si osserva che il polinomio ha due variazioni di segno, che corrispondono a due radici con parte reale positiva. Si può concludere l'instabilità del punto d'equilibrio.

Nel secondo caso, $F \geq AC/D$, si suppone sia avvenuta l'estinzione dei predatori dunque si pone $y = 0$, questo modifica il sistema nel modo seguente:

$$\dot{x} = Ax - F.$$

Il punto d'equilibrio $P2 = (F/A, 0)$ è instabile poiché la derivata di $Ax - F$ è pari ad $A > 0$. Si noti che $P2$ collassa in $P1$, punto d'equilibrio già considerato e di cui si è già verificata l'instabilità.

Questa situazione va contro ogni previsione, a priori ci si poteva aspettare che prelevando quantità limitate di prede il sistema si mantenesse stabile e che un prelevamento eccessivo potesse causare l'estinzione delle specie. L'analisi della stabilità non evidenzia alcuno di questi comportamenti, bensì permette di intuire, anche se non verrà dimostrato matematicamente, che il sistema convergerà ad un ciclo limite.

Si ha un ciclo limite quando l'andamento delle variabili di stato di un sistema autonomo (con ingressi costanti nulli) è periodico. Si definisce ciclo limite stabile se $x(t)$, soluzione del sistema, dopo una piccola perturbazione istantanea, torna ad avvicinarsi sempre più al ciclo limite. Altrimenti, si dice ciclo limite instabile se $x(t)$ si allontana. I cicli limite si possono avere solo con sistemi non lineari. Si svolgono di seguito alcune simulazioni che sostengono la convergenza ad un ciclo limite.

4.3) Simulink

Grazie al pacchetto Simulink di Matlab è stato possibile implementare il suddetto sistema di equazioni differenziali. Nel seguito si analizzeranno diverse simulazioni al variare del parametro F , con l'obiettivo di studiare la stabilità del sistema così modificato.

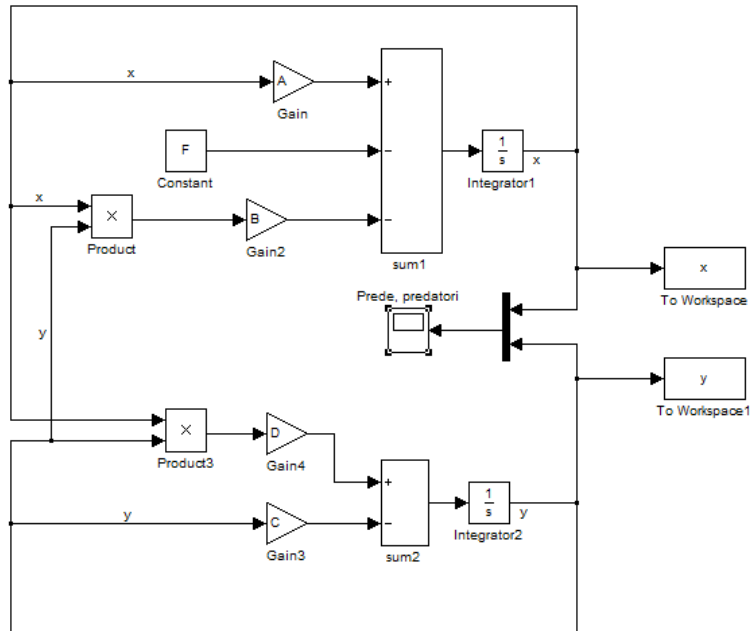


Fig.4.1 Schema a blocchi del modello di Lotka-Volterra con prelievamento costante di prede.

I parametri utilizzati nelle simulazioni sono: $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$, $x(0) = 0.75$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.4$, $k = 0.6$, $F = 0.01$ (caso $F < AC/D$).

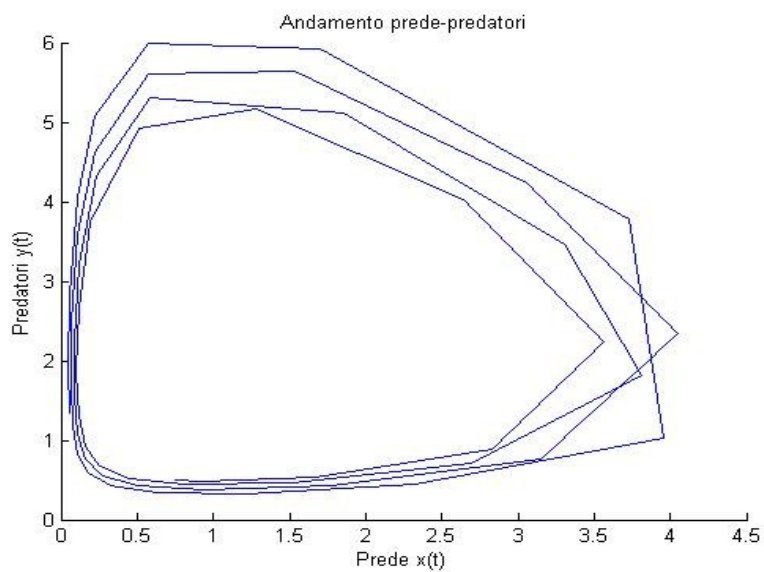


Fig.4.2 Andamento prede-predatori, con prelievo costante di prede ($F > 0$).

In questa simulazione si può intuire che il sistema converge ad un ciclo limite, concentrico al punto d'equilibrio P2.

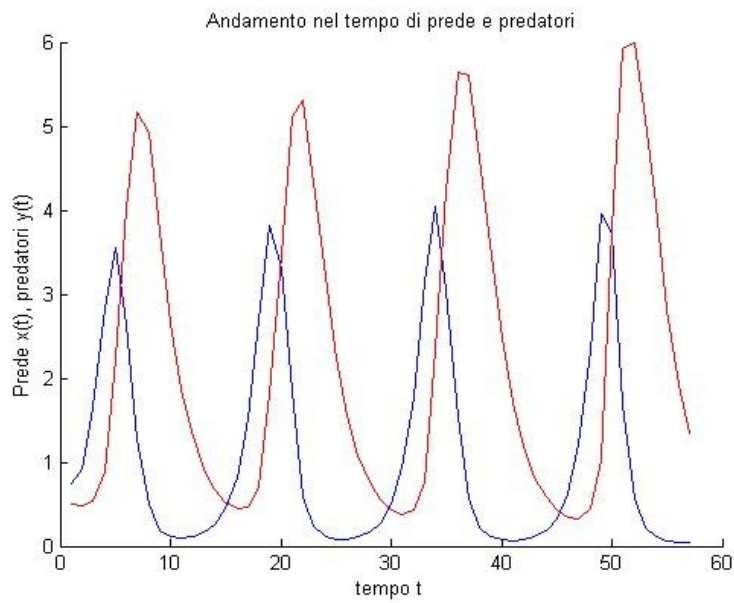


Fig.4.3 Andamento in funzione del tempo delle due popolazioni, con prelievo costante di prede ($F > 0$).

Questo grafico evidenzia come entrambe le popolazioni tendano leggermente ad aumentare nel tempo, pur mantenendo un andamento pseudo-sinusoidale.

All'aumentare del parametro F , ad esempio $F = 0.03$ si ottiene un comportamento leggermente diverso, dopo un transitorio iniziale in cui le due popolazioni aumentano, si ha l'estinzione delle specie:

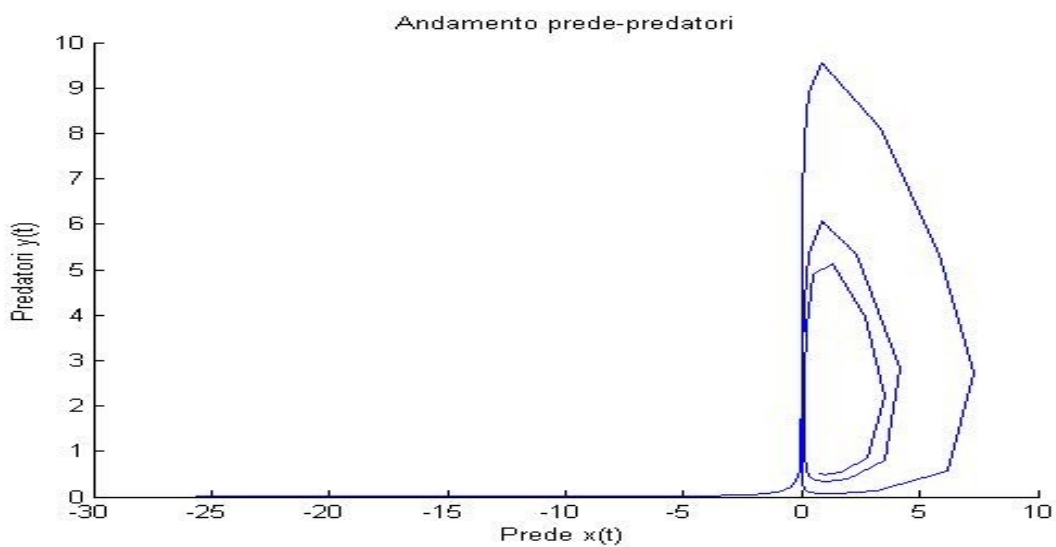


Fig.4.4 Andamento prede-predatori, al variare di F , che rappresenta il prelievo costante di prede ($F > 0$).

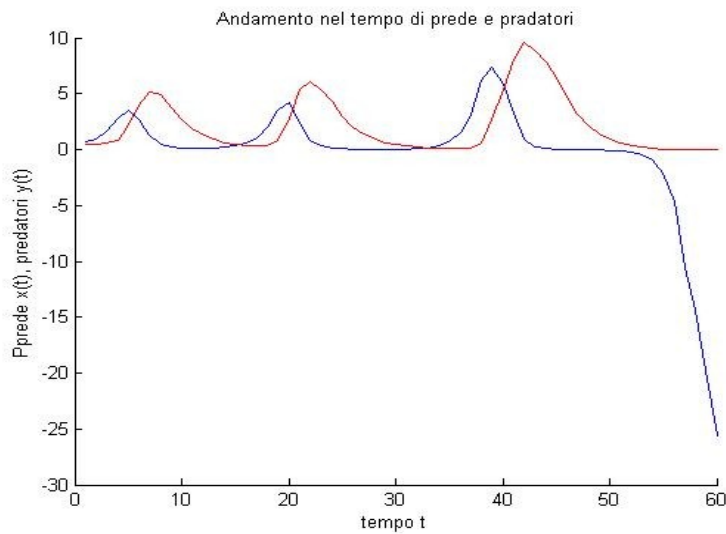


Fig.4.3 Andamento nel tempo di prede e predatori in funzione del tempo e per $F=0.03$.

Nell'ultima figura, si noti che un andamento (prede) diventa negativo, ad un certo punto. Questo ovviamente non ha significato fisico e corrisponde all'estinzione di prede e predatori. Il fatto che il numero di prede diventi negativo è facilmente giustificabile: quando tutto è estinto, si ha

$$\dot{x} = -F$$

che, risolta con $x(0) = 0$, fornisce $x(t) = -Ft$. Chiaramente non ha significato fisico, ma solo matematico, in quanto quando non ci sono più prede da prelevare, non si può più prelevare una quantità fissa F che sia diversa da zero. Ciò spiega l'estinzione (raggiungimento del punto d'equilibrio $(0,0)$), nonostante tale punto d'equilibrio non sia saltato fuori nell'analisi precedente. Infatti, questo è un punto d'equilibrio “fisico” e non “matematico” ($\dot{x} < 0$ matematicamente, ma $\dot{x} = 0$ in realtà).

Questo fenomeno prende il nome di **DEPENSAZIONE**, e si ha nei casi in cui F è maggiore o uguale ad un certo F_{min} . Nel caso in esame $F_{min} = AC/D$. Inoltre si definisce **DEPENSAZIONE CRITICA** il caso limite in cui $F = F_{min} = AC/D$.

In conclusione, dalle simulazioni si è ottenuto un risultato decisamente contro intuitivo. L'intuizione avrebbe portato a pensare che l'ecosistema tenda a diminuire o ad estinguersi se il prelievo diventa troppo consistente. Invece, per alcuni valori del parametro F , cioè prelevando in modo costante un certo numero di prede, e delle condizioni iniziali, si osserva un aumento di entrambe le popolazioni. Per altri valori di F si osserva un aumento iniziale del numero di individui di entrambe le specie che poi finisce e porta all'estinzione.

5) Conclusioni

Il modello generalizzato di Lotka-Volterra è stato studiato tramite la teoria della stabilità, si sono osservati i principali comportamenti di questo modello, tramite l'osservazione dei punti d'equilibrio. L'attenzione è stata puntata sulla possibilità di modificare il sistema cambiando semplicemente i valori dei parametri.

Lo studio di questo modello permette al lettore di capire il vero significato della modellizzazione. Una situazione potenzialmente molto complessa viene descritta con due semplici equazioni differenziali, facilmente maneggiabili. Le soluzioni di queste equazioni, non lineari, non sono sempre esprimibili con altrettanta facilità ed è questo uno dei motivi per cui si è ricorso all'uso del simulatore Simulink.

Questo modello possiede anche dei limiti pratici, si pensi a quanto sia difficile trovare in natura un ecosistema non influenzato da fattori esterni oppure omogeneo. Si potrebbe pensare di modellizzare tutti i fattori sopra citati, ma il sistema diventerebbe impraticabile per l'eccessiva complessità.

L'importante è conoscere i limiti del modello e cercare di usarlo per avere un'idea dell'andamento all'equilibrio. Un esempio si può ritrovare nello studio del modello con o senza il parametro E . Come si è detto questo parametro descrive la competizione per le risorse di cibo presenti nell'ecosistema tra individui della stessa specie, le prede. Intuitivamente si può pensare che limitare la crescita di prede possa agire negativamente anche nel caso in cui sia presente anche la popolazione di predatori. L'analisi del modello ha dimostrato che l'introduzione di un meccanismo per tamponare le prede, agisce negativamente solo sui predatori.

Un altro obiettivo delle tesi è quello di dimostrare la versatilità e le potenzialità del modello di Lotka-Volterra. Essendo molte le possibili situazioni pratiche in cui questo modello può risultare utile, si è scelto di immaginare una situazione particolare, non esaustiva di tutti i casi possibili, che possa però fare da guida su come procedere in altri casi, su come approcciare la manipolazione di un modello così versatile e come l'analisi teorica possa essere supportata dalle simulazioni e viceversa.

A livello pratico, l'utilità di questo modello con la presenza di un super-predatore si osserva, ad esempio, quando il prelievo supera un certo valore che rende il sistema irreversibile perché le prede o i predatori si estinguono. Questo modello può fornire un sistema di controllo che possa dare un'indicazione, un valore limite, su quanto è possibile prelevare per evitare la suddetta situazione.

Anche il secondo caso particolare che è stato analizzato sostiene fortemente gli obiettivi della tesi:

- suggerisce la versatilità del modello grazie all'aggiunta di una semplice costante che porta a molteplici situazioni diverse;

- ne evidenzia semplicità e maneggiabilità. Nonostante le soluzioni non siano facilmente esprimibili matematicamente, una semplice analisi della stabilità porta a capire il comportamento del sistema;
- utilizzo pratico: prelevare costantemente un certo numero di prede può portare ad aumentare il numero di individui di entrambe le specie nell'ecosistema, oppure può portare all'estinzione delle specie, se questo prelievo è eccessivo.

Bibliografia

- [1] Mauro Bisiacco: *Dispensa sulla Dinamica di alcuni sistemi ecologici*; Padova.
- [2] Giuseppe Gaeta: *Capitolo 7, Modelli matematici in Biologia*; Milano, Springer-Verlag Italia, 2007.
- [3] Mauro Bisiacco, Simonetta Braghetto: *Teoria dei sistemi dinamici*; Padova, Esculapio Editore, 2010.