Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea triennale

Teorema di Følner e Integrale di Haar su Gruppi Topologici Abeliani Localmente Compatti

Candidato:
Sergej Monavari
Matricola 1072440

Relatore:
Alberto Tonolo

Anno Accademico 2015-16
21 Luglio 2016

Indice

Introduzione

Un *gruppo topologico* è una terna $(G, +, \tau)$ dove $(G, +)$ è un gruppo e τ è una topologia su G che renda continua la struttura di di gruppo, ovvero le operazioni di somma $(g, h) \mapsto g + h$ e di opposto $g \mapsto -g$ per ogni $g, h \in G$. Alcuni esempi di gruppi topologici sono $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ con la topologia standard euclidea, oppure un qualsiasi gruppo dotato della topologia discreta o della topologia banale; in questo lavoro, riduciamo il nostro studio al solo caso dei gruppi abeliani. Lo scopo di questo lavoro è costruire nei gruppi topologici localmente compatti l'integrale di Haar e delinearne le principali proprietà.

Lo studio dell'integrazione sui gruppi localmente compatti nasce all'inizio del Novecento; Haar definisce negli anni Trenta una misura sui gruppi topologici, detta *misura di Haar*, invariante per l'operazione di gruppo. Tuttavia, una prima dimostrazione completa dell'esistenza di questa misura sui gruppi localmente compatti si deve ad André Weil, mentre una seconda linea dimostrativa risale ad Henri Cartan, intorno agli anni Quaranta; l'integrale di Haar viene in questo modo definito come integrale secondo Lebesgue della misura di Haar. Il mio obiettivo è darne una costruzione parallela ma complementare; senza fare riferimento alla teoria della misura, costruiremo direttamente l'integrale di Haar come funzionale lineare e solo alla fine ne indicheremo la misura che si può associare. In questo modo tale dimostrazione, valida nel caso abeliano, mette in luce il ruolo del gruppo dei caratteri nella costruzione dell'integrale di Haar e ne dà una presentazione di carattere più algebrico rispetto alle dimostrazioni classiche.

Nel primo capitolo studiamo i *caratteri*, ovvero gli omomorfismi di un gruppo astratto al circolo unitario $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; l'insieme dei caratteri presenta una naturale struttura di gruppo moltiplicativa. Faremo uso dei caratteri per definire alcuni concetti della teoria di Fourier astratta sui gruppi finiti e in analogia con le classiche serie di Fourier, potremo scrivere funzioni di dominio un gruppo abeliano finito come combinazione lineare dei caratteri del gruppo. Ogni gruppo finito si può considerare dotato della topologia discreta, che rende continua ogni funzione definita sul gruppo e quindi tutti i caratteri; nel caso di gruppi topologici non discreti, è interessante analizzare le proprietà delle topologie indotte da sottogruppi del gruppo dei caratteri, ovvero le topologie che rendano continue alcuni caratteri. In questo capitolo, dimostriamo alcuni risultati poco noti in letteratura ma che ci saranno fondamentali. In [3], Prodanov dimostra un lemma grazie al quale da una stima del tipo:

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_j(x) \right| \leq \varepsilon$$

con f una funzione continua di dominio un gruppo topologico abeliano a valori complessi e χ_j caratteri del gruppo, si possono eliminare dalla sommatoria i caratteri discontinui. Questo lemma ha la duplice funzione di rimuovere i caratteri discontinui per migliorare la stima e, nel caso di una stima con soli caratteri continui, di aggiungere alla sommatoria quelli discontinui. In particolare, combineremo questo risultato al Teorema di Stone-Weierstrass, che mi permette di approssimare uniformemente funzioni a valori complessi di un gruppo compatto con combinazioni lineari dei caratteri continui del gruppo. Proveremo poi il Teorema di Følner, che useremo per descrivere un sistema fondamentale degli intorni dell'unità per le topologie indotte dai caratteri. Un risultato molto importante che otterremo come conseguenza del Teorema di Følner è il Teorema di Peter-Weyl, che afferma che in ogni gruppo topologico i caratteri continui separano i punti del gruppo.
Nel secondo capitolo studiamo un'applicazione dei risultati ottenuti dallo studio del gruppo dei caratteri di un gruppo abeliano. In particolare, applicheremo il lemma di approssimazione di Prodanov per costruire nel secondo capitolo un funzionale lineare, definito sulle funzioni continue a supporto compatto di un gruppo topologico, tale che sia invariante per l'operazione del gruppo e che abbia le stesse proprietà del classico integrale. Chiameremo questo funzionale *integrale di Haar*, e lo indicheremo con $\int_G$. Dato un gruppo G, $a \in G$ e f funzione continua a supporto compatto, l'invarianza per l'operazione di gruppo si traduce nel seguente modo: definito $f_a(x) = f(x-a)$, vogliamo che l'integrale di Haar soddisfi:

$$\int_G f = \int_G f_a$$

Infine, dimostriamo che ogni gruppo topologico abeliano localmente compatto ammette un unico integrale di Haar. Per unicità, intendiamo che se μ, ν sono due integrali di Haar su G, allora $\mu = c\nu$, con $c \in \mathbb{R}$, ovvero sono uno un multiplo dell'altro. In particolare, seguiremo principalmente la linea dimostrativa di Prodanov in [3].

Capitolo 1

Teorema di Følner

In questo primo capitolo, introduciamo tutti gli strumenti necessari alla dimostrazione del Teorema di Følner. I gruppi che considereremo in seguito saranno sempre abeliani; di questi gruppi, vogliamo studiarne in particolare il *gruppo dei caratteri*, le cui proprietà ci saranno fondamentali per le applicazioni del Teorema di Følner nel secondo capitolo.

1.1 Richiami di Topologia Generale

Richiamo in questa sezione senza dimostrazione alcune principali nozioni di topologia generale delle quali faremo uso. Per una trattazione completa, si confronti Bourbaki [1].

Definizione 1.1. Sia X un insieme. Una *topologia* (o *struttura topologica*) su X è un sottoinsieme $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ che soddisfa i seguenti assiomi:

1. $\varnothing, X \in \tau$,
2. Se $A_1, ..., A_n \in \tau$, allora $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,
3. Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ è una famiglia di elementi di τ, allora $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \in \tau$.

Chiameremo gli elementi di τ *aperti di X per la topologia τ*. Se $x \in X$, $U \subseteq X$ si dice *intorno* di x se contiene un aperto che contiene x.

Sia (X, τ) uno spazio topologico, una *base* per la topologia τ (o per lo spazio topologico (X, τ)) è una sottofamiglia $\mathcal{B}$ di τ tale che ogni aperto di X sia unione di elementi di $\mathcal{B}$.
Una *prebase* per uno spazio topologico (X, τ) è una sottofamiglia $\mathcal{P}$ di τ tale che la famiglia $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$ sia una base per τ.

Osservazione 1.2. L'insieme delle topologie su un insieme X ha una struttura di reticolo, ordinato dall'inclusione insiemistica. Il massimo è la *topologia discreta* $\mathcal{P}(X)$, il minimo la *topologia banale* $\{\varnothing, X\}$.

Definizione 1.3. Sia X un insieme non vuoto. Un *filtro* su X è una famiglia $\mathcal{F}$ di parti di X tale che:

1. $\mathcal{F} \neq \varnothing$, $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
2. $U, V \in \mathcal{F} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{F}$,
3. $U \in \mathcal{F}$, $V \in P(X)$, $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{F}$.

Si noti che la famiglia $\mathcal{F}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita*, ovvero l'intersezione di un insieme finito di elementi di $\mathcal{F}$ è non vuota.
Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. Una *base* per il filtro $\mathcal{F}$ è una sottofamiglia non vuota $\mathcal{B}$ di $\mathcal{F}$ tale che per ogni $U \in \mathcal{F}$ esista $V \in \mathcal{B}$ tale che $V \subseteq U$.
Se X è uno spazio topologico, la famiglia $\mathcal{U}_x$ degli intorni di un punto $x \in X$ è un filtro su X. Diremo *sistema fondamentale di intorni* di un punto $x \in X$ una qualsiasi base del filtro degli intorni di x.

Dati X e Y spazi topologici, una funzione $f : X \to Y$ si dice *continua* in x se antiimmagine di aperti contenenti $f(x)$ è aperta o, equivalentemente, per ogni V intorno di $f(x)$ esiste U intorno di x tale che $f(U) \subseteq V$. Indichiamo con $\mathcal{C}(X,Y)$ l'insieme delle funzioni $f : X \to Y$ continue.

Definizione 1.4. Sia Λ una famiglia arbitraria di indici, X un insieme non vuoto e $\Phi = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di applicazioni $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, dove Y_λ è uno spazio topologico per ogni $\lambda \in \Lambda$. La *topologia debole* della famiglia Φ è la minima topologia su X rispetto alla quale tutte le f_λ risultino continue.

La topologia debole ha come base di aperti gli insiemi della forma $\bigcap_{\lambda \in F} f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ dove F è un sottoinsieme finito di Λ e, per ogni $\lambda \in F$, U_λ è un aperto di Y_λ.

Osservazione 1.5. Sia $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di spazi topologici. Il *prodotto topologico* degli X_λ è lo spazio $\prod_\lambda X_\lambda$ dotato della *topologia prodotto*, ovvero la topologia debole delle proiezioni $\pi_\mu : \prod_\lambda X_\lambda \to X_\mu$, $\mu \in \Lambda$.

Teorema 1.6. *Sia X dotato della topologia debole della famiglia $\Phi = (f_\lambda : X \to Y)_{\lambda \in \Lambda}$. Sia Y uno spazio topologico e $f : Y \to X$. Allora f è continua se e solo se per ogni $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda \circ f$ è continua.*

Definizione 1.7. Sia X uno spazio topologico, Y un insieme non vuoto, $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. La *topologia quoziente* è la più fine topologia su Y che renda f continua. Tale topologia è formata dai sottoinsiemi U di Y tali che $f^{-1}(U)$ sia aperto in X.

Teorema 1.8. *Sia Y dotato della topologia quoziente di $f : X \to Y$, Z uno spazio topologico e $g : Y \to Z$. Allora g è continua se e solo se $g \circ f$ è continua.*

Sia A un insieme, $\leq$ un ordine parziale. $(A, \leq)$ si dice un insieme *diretto* se per ogni $\alpha, \beta \in A$, esiste $\gamma \in A$ tale che $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$. Sia X uno spazio topologico, una *rete* è una applicazione $S : A \to X$, con A insieme diretto; scriveremo S_γ invece che $S(\gamma)$. Le reti sono la naturale generalizzazione del concetto di successione.

Definizione 1.9. Sia X uno spazio topologico. Diremo che X è di *Hausdorff* se per ogni $x, y \in X$, esistono U intorno di x e V intorno di y disgiunti.

Definizione 1.10. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito o, equivalentemente, ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota. Diremo inoltre che X è *localmente compatto* se ogni punto $x \in X$ ha un intorno compatto.

Osservazione 1.11. Se X è uno spazio topologico compatto, valgono le seguenti proprietà:

1. L'immagine continua di uno spazio compatto ad un spazio Hausdorff è uno spazio compatto.
2. Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.
3. Un sottospazio compatto di uno spazio Hausdorff è chiuso.
4. X è compatto se e solo se ogni rete in X ammette una sottorete convergente.

Teorema 1.12 (Tychonov)**.** *Il prodotto topologico $\prod_\lambda X_\lambda$ è compatto se e solo se ogni X_λ è compatto.*

Definizione 1.13. Sia X uno spazio topologico. X si dice *completamente regolare* se per ogni $C \subseteq X$ e $x \notin C$, esiste una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ dotato della topologia usuale, tale che $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ per ogni $y \in C$. Inoltre, se X è Hausdorff e completamente regolare, diremo che è di *Tychonov.*

Sia X uno spazio topologico di Tychonov. La *compattificazione di Stone-Čech* di X è uno spazio βX compatto contenente X che goda delle seguenti proprietà:

1. sia $f : X \to K$ continua, con K compatto Hausdorff. Allora f si estende in modo unico a $f^\beta : \beta X \to K$, con f^β continua,
2. X si immerge in modo denso in βX.

La compattificazione di Stone-Čech esiste ed è unica a meno di omeomorfismi. L'ultima proprietà, in particolare, vale solo nel caso in cui X sia di Tychonov, come nelle nostre ipotesi. Osserviamo che se X è dotato della topologia discreta, allora tutte le funzioni sono continue, quindi è completamente regolare e in particolare di Tychonov. Potremo quindi assumere l'esistenza della sua compattificazione di Stone-Čech nel seguito con le proprietà elencate.

1.2 Gruppo dei caratteri

Siano G_1 e G_2 gruppi abeliani; un *omomorfismo di gruppi* di G_1 in G_2 è una funzione $f : G_1 \to G_2$ che soddisfi la seguente relazione:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in G_1$$

Un omomorfismo è quindi compatibile con la struttura di gruppo: infatti, dalla definizione segue che $f(0) = 0$ e $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in G_1$.
Definiamo il *circolo unitario* $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; $\mathbb{S}$ eredita una naturale struttura di gruppo come sottogruppo di $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ rispetto alla moltiplicazione. Considereremo sempre nel seguito $\mathbb{S}$ dotato della topologia indotta da $\mathbb{C}$.

Osservazione 1.14. Definiamo il *toro* $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Il quoziente induce in modo naturale l'operazione di somma sul toro, rendendolo un gruppo abeliano. Possiamo quindi osservare che $(\mathbb{T}, +) \cong (\mathbb{S}, \cdot)$, dove l'isomorfismo è dato da $\theta \mapsto e^{2\pi i\theta}$.

Definizione 1.15. Dato G gruppo abeliano, il *gruppo dei caratteri* di G è $G^* = Hom(G, \mathbb{S})$; chiameremo *caratteri* gli elementi $\chi \in G^*$. G^* ha una struttura di gruppo moltiplicativa, con $\chi_1\chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$ per ogni $x \in G$.

Dato G gruppo abeliano, un carattere di G è quindi una funzione $\chi : G \to \mathbb{S}$ che soddisfa $\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y)$ per ogni $x, y \in G$. Osserviamo che, $\forall z \in \mathbb{S}$, $z^{-1} = \overline{z}$, dove $\overline{z}$ e il complesso coniugato di z, da cui segue $\chi(x - y) = \chi(x)\overline{\chi(y)}$.

Osservazione 1.16. Siano G, H gruppi. Allora

$$(G \times H)^* \cong G^* \times H^*$$

ovvero $Hom(G \times H, \mathbb{S}) \cong Hom(G, \mathbb{S}) \times Hom(H, \mathbb{S})$. Infatti, definiamo la funzione $\varphi : \chi \mapsto (\chi \circ i, \chi \circ j)$, dove i e j sono le inclusioni canoniche di G, H in $G \times H$. È omomorfismo, siccome $\varphi(\chi\eta) = (\chi\eta \circ i, \chi\eta \circ j) = (\chi \circ i, \chi \circ j)(\eta \circ i, \eta \circ j) = \varphi(\chi)\varphi(\eta)$. È iniettivo, siccome $\varphi(\chi) = 1 \Leftrightarrow \chi \circ i = \chi \circ j = 1 \Leftrightarrow \chi = 1$. Infine, φ è suriettivo: per ogni $(\chi_1, \chi_2) \in G^* \times H^*$, il carattere definito da $\chi(x, y) = \chi_1(x)\chi_2(y)$ ha immagine $\varphi(\chi) = (\chi_1, \chi_2)$, quindi φ è isomorfismo.

Usualmente, descrivere il gruppo dei caratteri di un gruppo è complicato; tuttavia, siamo in grado di darne una descrizione esplicita in alcuni casi:

Esempio 1.17. Sia $G = \langle a \rangle$ un gruppo ciclico finito, con $|G| = n$. Allora $G^* \cong G$. Infatti, per definire in modo univoco un omomorfismo χ devo scegliere dove mandare il generatore del gruppo, a. Ma $na = 0$, quindi $\chi(a)^n = \chi(na) = \chi(0) = 1$, e a deve andare in una delle radici n-esime dell'unità. Inoltre, la funzione χ_k definita da $\chi_k(ma) = e^{\frac{2mk\pi i}{n}}$, per ogni $k = 1, ..., n$ è effettivamente un omomorfismo, siccome $\chi_k(ma) = \chi_k(a)^m$. Segue che $G^* = \langle \chi_1 \rangle \cong G$.

Sia G un gruppo abeliano finitamente generato di rango r. Allora G può essere caratterizzato in modo univoco come:

$$G \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m}$$

dove $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una dimostrazione esaustiva si può trovare in Dikranjan, [2].

Esempio 1.18. Sia G un gruppo abeliano finito, con $|G| = n$. Allora, $G^* \cong G$. Infatti, ogni gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine potenza di primi, $G \cong \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m}$. Sfruttando l'Osservazione 1.16 e l'Esempio 1.17, abbiamo $G^* \cong Hom(\mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m}, \mathbb{S}) \cong Hom(\mathbb{Z}_{p_1}, \mathbb{S}) \times \cdots \times Hom(\mathbb{Z}_{p_m}, \mathbb{S}) \cong \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m} \cong G$.

Esempio 1.19. Sia $(\mathbb{Z}, +)$ il gruppo degli interi con la somma. Allora $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{S}$. Infatti, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$; per ogni $g \in \mathbb{S}$, $\chi(1) = g$ definisce un carattere di G con $\chi(n) = g^n$, quindi $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{S}$. Inoltre, osserviamo che se $\chi(a)$ è una radice n-esima primitiva dell'unità, abbiamo $ker(\chi) = n\mathbb{Z}$, pertanto i caratteri iniettivi sono tali che $\chi(1)$ non sia radice n-esima dell'unità per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 1.20. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Allora, $G^* \cong \mathbb{S}^r \times F$, con F un gruppo abeliano finito, $\mathbb{S}^r = \prod_{k=1}^r \mathbb{S}$. Infatti, sappiamo che un gruppo abeliano finitamente generato è isomorfo al prodotto diretto di gruppi ciclici, $G \cong \mathbb{Z}^r \times F$, con F un gruppo abeliano finito. Gli esempi precedenti ci permettono di concludere che $G^* \cong \mathbb{S}^r \times F$.

Indichiamo con $\mathbb{S}^G$ lo spazio delle funzioni da G in $\mathbb{S}$ dotato della topologia prodotto; per il teorema di Tychonov, $\mathbb{S}^G$ è compatto siccome $\mathbb{S}$ è compatto. Dimostriamo quindi un lemma di struttura che tornerà utile nel seguito:

Lemma 1.21. *Sia G un gruppo abeliano. Il gruppo dei caratteri G^* è chiuso in $\mathbb{S}^G$ dotato della topologia prodotto. In particolare, G^* è compatto.*

Dimostrazione. Sia per ogni $g \in G$, $\pi_g : \mathbb{S}^G \to \mathbb{S}$ la proiezione canonica, continua per definizione di topologia prodotto. Allora $G^* = \bigcap_{g,h\in G}\{f \in \mathbb{S}^G : f(g+h) = f(g)f(h)\} = \bigcap_{g,h\in G}\{f \in \mathbb{S}^G : \pi_{g+h}(f) = \pi_g(f)\pi_h(f)\}$. $\mathbb{S}^G$ è Hausdorff, quindi il luogo dei punti dove due funzioni continue coincidono è chiuso, perciò G^* è chiuso in quanto intersezione di chiusi. Infine, $\mathbb{S}^G$ è compatto e un chiuso di un compatto è compatto. □

Corollario 1.22. *Sia G un gruppo abeliano, $(\chi_\alpha)_\alpha$ una rete in G^*. Allora esiste un carattere $\chi \in G^*$ ed una sottorete $(\chi_{\alpha_\beta})_\beta$ tale che $(\chi_{\alpha_\beta})_\beta(x)$ converge a $\chi(x)$ in $\mathbb{S}$ per ogni $x \in G$.*

Dimostrazione. L'esistenza di χ segue dalla caratterizzazione degli spazi compatti in termini di reti. □

Introduciamo delle notazioni che ricorreranno spesso: sia G un gruppo abeliano, A, B sottoinsiemi di G, $n \in \mathbb{Z}$. Allora definiamo $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$ e $nA = \{na : a \in A\}$.
Diremo inoltre che un gruppo G è *divisibile* se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $nG = G$. Per esempio, $(\mathbb{S}, \cdot)$ è divisibile, mentre $(\mathbb{Z}, +)$ non lo è.

Teorema 1.23. *Siano G, D gruppi, D gruppo divisibile. Allora ogni omomorfismo $f : H \to D$, con H sottogruppo di G, si può estendere ad un omomorfismo $\overline{f} : G \to D$. Inoltre, se $g \in G\backslash H$ e D contiene elementi di ordine arbitrario, possiamo scegliere $\overline{f}$ tale che $\overline{f}(g) \neq 0$.*

Dimostrazione. Sia $x \in G\backslash H$, definiamo $N = H + \langle x\rangle$; mostriamo che possiamo estendere f a $f' : N \to D$. Ci sono due casi. Se $H \cap \langle x\rangle = \langle 0\rangle$, allora definiamo $f'(h + nx) = f(h)$, per ogni $h \in H$, $n \in \mathbb{Z}$. È una buona definizione siccome ogni elemento di N si rappresenta in un unico modo come $h + nx$, con $h \in H$ e $n \in \mathbb{Z}$ ed è chiaramente un omomorfismo. Se $C = H \cap \langle x\rangle \neq \langle 0\rangle$, allora C è ciclico, siccome è sottogruppo di $\langle x\rangle$; anzi $C = \langle kx\rangle$, per un certo $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, $kx \in H$ e consideriamo $a = f(kx) \in D$. Siccome D è divisibile, esiste un $y \in D$ tale che $ky = a$; inoltre, notiamo che se $a = 0$ e D ha elementi di ordine arbitrario, posso scegliere $y \neq 0$. Definiamo $f' : N \to D$ con $f'(h + nx) = f(h) + ny$, per ogni $h + nx \in N$. La mappa f' è ben definita: infatti, siano $h + nx = h' + n'x$, con $h, h' \in H$, $n, n' \in \mathbb{Z}$. Allora $h - h' = n'x - nx = (n' - n)x \in C$. Quindi $n' - n = sk$, per un opportuno $s \in \mathbb{Z}$. Siccome $f : H \to D$ è un omomorfismo e $kx \in H$, abbiamo

$$f'(h) - f'(h') = f'(h - h') = f'(skx) = sf'(kx) = sa = sky = (n' - n)y = n'y - ny$$

Ne deduciamo che $f'(h) + ny = f'(h') + n'y$, quindi f' è ben definita; inoltre, è un omomorfismo ed estende f.
Sia ora $\mathcal{M}$ la famiglia delle coppie (H_i, f_i), con $H \leq H_i \leq G$ e $f_i : H_i \to D$ un

omomorfismo che estenda f. Definiamo in $\mathcal{M}$ una relazione di ordine parziale, con $(H_i, f_i) \leq (H_j, f_j)$ se $H_i \leq H_j$ e $f_{j|_{H_i}} = f_i$. L'insieme $\mathcal{M}$ è non vuoto; sia allora $\{(H_i, f_i)\}_{i\in I}$ una catena in $\mathcal{M}$. Posto $\overline{H} = \bigcup_{i\in I} H_i$ e $\overline{f}(x) = f_i(x)$ se $x \in H_i$ la coppia $(\overline{H}, \overline{f})$ è un maggiorante della catena; chiaramente $\overline{f}$ è un omomorfismo che estende f. Per il lemma di Zorn, esiste un elemento massimale (H_{max}, f_{max}) in $(\mathcal{M}, \leq)$. Per la prima parte della dimostrazione, se esistesse $x \in G\backslash H_{max}$, potremmo estendere l'omomorfismo f_{max} a $H_{max} + \langle x\rangle$; per la massimalità di H_{max}, concludiamo che $H_{max} = G$.
Supponiamo ora che D contenga elementi di ordine arbitrario. Sia $g \in G\backslash H$, vogliamo estendere f a $\overline{f} : H+\langle g\rangle \to D$. Se $H\cap\langle g\rangle = \langle 0\rangle$, poniamo $\overline{f}(h+ng) = f(h)+ny$, con $y \in D$ dello stesso ordine di g. Se $H \cap \langle g\rangle \neq \langle 0\rangle$, come nella prima parte della dimostrazione posso scegliere $y \in D$ non nullo, siccome esistono elementi di ordine arbitrario in D. In entrambi i casi, $\overline{f}(g) = y \neq 0$. □

Corollario 1.24. *Sia G un gruppo abeliano, H un sottogruppo di G, $\chi \in H^*$, $a \in G\backslash H$. Allora χ si estende ad un carattere $\tilde{\chi}$ di G con $\tilde{\chi}(a) \neq 1$.*

Dimostrazione. Basta notare che $\chi : G \to \mathbb{S}$, ma $\mathbb{S}$ ha elementi di ordine arbitrario, le radici n-esime primitive dell'unità. □

Possiamo ottenere da questo teorema un importante corollario; introduciamo prima una definizione.

Definizione 1.25. Sia G un gruppo abeliano, Φ una famiglia di funzioni di dominio G. Diremo che Φ *separa i punti di* G se per ogni coppia di elementi distinti $g, h \in G$, esiste $f \in \Phi$ tale che $f(g) \neq f(h)$.

Corollario 1.26. *I caratteri di un gruppo abeliano G separano i punti di G.*

Dimostrazione. Siccome $g \neq h$, $g - h \neq 0$. Perciò, estendo l'unico carattere di $\langle 0\rangle$ a $\chi \in G^*$, con $\chi(g-h) = \chi(g)\overline{\chi(h)} \neq 1$, ovvero $\chi(g) \neq \chi(h)$. □

La proprietà dei caratteri di separare i punti di un gruppo abeliano è fondamentale per lo studio dei gruppi topologici compatti. Più avanti, come prima applicazione del teorema di Følner, dimostreremo una versione più forte di questo corollario, il Teorema di Peter-Weyl: se G è un gruppo abeliano compatto, i caratteri *continui* di G separano i punti di G.

1.3 Lemmi di Bogoliubov-Følner

Lo scopo di questa sezione è dimostrare una serie di risultati intermedi, in particolare i lemmi di Bogoliubov e di Følner, che permetteranno nella prossima sezione di dimostrare completamente il teorema di Følner.

Le prossime proposizioni richiamano alcuni utili elementi della teoria di Fourier per i gruppi abeliani finiti. Mostreremo che ogni funzione a valori complessi definita su un gruppo abeliano si può scrivere come combinazione lineare di caratteri del gruppo, in analogia con la classica serie di Fourier.

Proposizione 1.27. *Sia G un gruppo finito abeliano, $x, y \in G$, φ, χ caratteri di G. Allora:*

(a) $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)} = \begin{cases} 1 & se\ \varphi = \chi \\ 0 & se\ \varphi \neq \chi \end{cases}$

(b) $\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in G^*}\chi(x)\overline{\chi(y)} = \begin{cases} 1 & se\ x = y \\ 0 & se\ x \neq y \end{cases}$

Dimostrazione. (a) Se $\varphi = \chi$, vale $\chi(x)\overline{\chi(x)} = \chi(x)\chi(x)^{-1} = 1$.
Se $\varphi \neq \chi$, esiste $z \in G$ tale che $\varphi(z) \neq \chi(z)$. Allora

$$\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)} = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}\sum_{x\in G}\varphi(x-z)\overline{\chi(x-z)} = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)}$$

dove ho ottenuto l'ultima uguaglianza riscalando l'indice di sommatoria, quindi $\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)} = 0$.
(b) Se $x = y$, $\chi(x)\overline{\chi(y)} = \chi(x)\overline{\chi(x)} = 1$ e $|G| = |G^*|$.
Se $x \neq y$, siccome i caratteri di G separano i punti di G, esiste $\varphi \in G^*$ tale che $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. In modo analogo alla prima parte,

$$\sum_{\chi\in G^*}\chi(x)\overline{\chi(y)} = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\sum_{\chi\in G^*}(\chi\varphi)(x)\overline{(\chi\varphi)(y)} = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\sum_{\chi\in G^*}\chi(x)\overline{\chi(y)}$$

ottenuta riscalando l'indice di sommatoria. Segue che $\sum_{\chi\in G^*}\chi(x)\overline{\chi(y)} = 0$. □

Definizione 1.28. Data una funzione $f : G \to \mathbb{C}$ e χ carattere di G, definiamo il *coefficiente di Fourier*:

$$c_\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{\chi(x)}$$

corrispondente a χ.

Come ci aspettiamo, la prossima proposizione mostra come i coefficienti di Fourier mi permettano di scrivere in modo unico una funzione a valori complessi come combinazione lineare dei caratteri del gruppo. Definiamo inoltre, per f, g funzioni di G a valori complessi, la *convoluzione* di f, g:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\overline{f(y)}g(x+y)$$

Proposizione 1.29. *Sia G un gruppo abeliano finito, $f : G \to \mathbb{C}$ e c_χ i coefficienti di Fourier di f. Allora:*

(a) $f(x) = \sum_{\chi\in G^*} c_\chi\chi(x)$ *per ogni* $x \in G$,

(b) per ogni famiglia $\{a_\chi\}_{\chi\in G^*}$ *di numeri complessi tale che* $f(x) = \sum_{\chi\in G^*} a_\chi\chi(x)$ *per ogni* $x \in G$, *allora* $a_\chi = c_\chi$ *per ogni* $\chi \in G^*$,

(c) se g è una funzione a valori complessi su G con coefficienti di Fourier d_χ, allora la convoluzione $f * g$ ha coefficienti di Fourier $\overline{c_\chi}d_\chi$,

(d) $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|f(x)|^2=\sum_{\chi\in G^*}|c_\chi|^2$.

Dimostrazione. (a) Dalla definizione dei coefficienti di Fourier,

$$\sum_{\chi\in G^*}c_\chi\chi(x)=\sum_{\chi\in G^*}\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}f(y)\overline{\chi(y)}\chi(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\sum_{\chi\in G^*}f(y)\overline{\chi(y)}\chi(x)=$$
$$=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}f(y)\sum_{\chi\in G^*}\overline{\chi(y)}\chi(x)=\frac{|G|}{|G|}\sum_{y\in G}f(y)\delta_x^y=f(x)$$

dove δ_x^y indica il simbolo di Kronecker.
(b) In modo analogo, sfruttiamo la definizione dei coefficienti di Fourier c_χ e la scrittura $f(x)=\sum_{\chi\in G^*}a_\chi\chi(x)$,

$$c_\chi=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}f(x)\overline{\chi(x)}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{\varphi\in G^*}a_\varphi\varphi(x)\overline{\chi(x)}=$$
$$=\frac{1}{|G|}\sum_{\varphi\in G^*}a_\varphi\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)}=\frac{|G|}{|G|}\sum_{\varphi\in G^*}a_\varphi\delta_\varphi^\chi=a_\chi$$

(c) Sappiamo da (a) che $g(x)=\sum_{\chi\in G^*}d_\chi\chi(x)$ per ogni $x\in G$, perciò:

$$(f*g)(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\overline{f(y)}g(x+y)=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}(\sum_{\chi\in G^*}\overline{c_\chi}\overline{\chi(y)})(\sum_{\varphi\in G^*}d_\varphi\varphi(x)\varphi(y))=$$
$$=\sum_{\chi\in G^*}\sum_{\varphi\in G^*}\overline{c_\chi}d_\varphi\varphi(x)\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\overline{\chi(y)}\varphi(y)=\sum_{\chi\in G^*}\sum_{\varphi\in G^*}\overline{c_\chi}d_\varphi\varphi(x)\delta_\varphi^\chi=$$
$$=\sum_{\chi\in G^*}\overline{c_\chi}d_\chi\chi(x)$$

(d) Segue dal punto (c), ponendo $f=g$ e $x=0$. □

Introduciamo ora delle notazioni di particolare importanza per i risultati di questa sezione. Dato G un gruppo abeliano ed $E\subseteq G$, denotiamo con

$$E_{(4)}=E-E+E-E,\quad E_{(6)}=E-E+E-E+E-E,\ \text{e così } E_{(2k)},\ k\in\mathbb{N}$$

Osserviamo che se $0\in E$, allora $E\subseteq E_{(2k)}$ e che $0\in E_{(2k)}$ per ogni $k\neq 0$. Inoltre, se $\chi_1,...,\chi_n$ sono caratteri di G e $\delta\in\mathbb{R}$, definisco

$$U_G(\chi_1,...,\chi_n;\delta)=\{x\in G:|Arg\chi_i(x)|<\delta,\forall i=1,...,n\},$$

dove $z=e^{iArg(z)}$ per ogni $z\in\mathbb{S}$. Osserviamo che

$$U_G(\chi_1,...,\chi_n;\delta)=\bigcap_{i=1}^n U_G(\chi_i;\delta)$$

quindi tale insieme è tanto più piccolo quanti più sono i caratteri presi in considerazione. Nel resto di questo capitolo cercheremo delle stime sul numero di caratteri che soddisfino una relazione del tipo:

$$U_G(\chi_1,...,\chi_n;\delta)\subseteq E_{(2k)}$$

dove $E\subseteq G$.

Proposizione 1.30. *Sia G un gruppo abeliano finito, E un sottoinsieme non vuoto di G, $f : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ con coefficienti di Fourier c_χ tale che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in E$. Allora la convoluzione $g = f * f$ soddisfa:*

(a) $g(x) > 0$ se e solo se $x \in E_{(2)}$;

(b) $g(x) = \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^2 \chi(x)$.

Dimostrazione. (a) Dalla definizione $g(x) = (f * f)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \overline{f(y)} f(x+y)$, segue che $g(x) > 0$ se e solo se esiste $y \in E$ tale che $x + y \in E$, ovvero $x \in E - E = E_{(2)}$, siccome gli addendi della sommatoria sono tutti non negativi. (b) Segue dal punto (c) della Proposizione 1.29, ricordando che $\overline{c_\chi} c_\chi = |c_\chi|^2$. □

Lemma 1.31 (Bogoliubov)**.** *Sia G un gruppo abeliano finito ed E un sottoinsieme non vuoto di G. Allora esistono $m = [(\frac{|G|}{|E|})^2]$ caratteri $\chi_1, ..., \chi_m$ di G tali che $U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}$.*

Dimostrazione. Sia f la funzione caratteristica di E. Per le proprietà dei coefficienti di Fourier, abbiamo:

$$f(x) = \sum_{\chi \in G^*} c_\chi \chi(x), \text{ con } c_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)}$$

Definiamo $g = f * f$ e $h = g * g$. Dalla Proposizione 1.30 segue che $g(x) > 0$ se e solo se $x \in E_{(2)}$ e:

$$g(x) = \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^2 \chi(x)$$

Osserviamo che g assume solo valori positivi, quindi posso applicare nuovamente la Proposizione 1.30; $h(x) > 0$ se e solo se $x \in E_{(2)} - E_{(2)} = E_{(4)}$ e

$$h(x) = \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^4 \chi(x)$$

Ricordando il punto (d) della Proposizione 1.29, definiamo $a = \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \frac{|E|}{|G|}$ e ordiniamo i coefficienti di Fourier di f in modo che

$$|c_{\chi_0}| \geq ... \geq |c_{\chi_{|G|-1}}|$$

Il massimo valore $|c_{\chi_i}|$ è raggiunto per $\chi_0 = 1$ con $c_{\chi_0} = a$; infatti

$$|c_{\chi_i}| = \frac{1}{|G|} \left| \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)} \right| \leq \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)| |\overline{\chi(x)}| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) = c_{\chi_0} = \frac{|E|}{|G|} = a$$

Inoltre, $(k+1)|c_{\chi_k}|^2 \leq \sum_{i=0}^{k} |c_{\chi_i}|^2 \leq \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^2 = a$, per ogni $k = 0, ..., |G| - 1$, quindi

$$|c_{\chi_k}|^4 \leq \frac{a^2}{(k+1)^2}$$

Sia ora $m = [\frac{1}{a^2}]$. Mostriamo che per $\chi_1, ..., \chi_m$, vale

$$h(x) > 0 \text{ per ogni } x \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \frac{\pi}{2}).$$

Questo conclude la dimostrazione siccome $h(x) > 0$ se e solo se $x \in E_{(4)}$. Sia quindi $x \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \frac{\pi}{2})$; allora, siccome $|Arg(\chi_k(x))| < \frac{\pi}{2}$ per ogni $k = 1, ..., m$, ho che $Re(\chi_k(x)) \geq 0$. Valgono inoltre le seguenti due stime:

$$\left| a^4 + \sum_{k=1}^{m} |c_{\chi_k}|^4 \chi_k(x) \right| \geq Re\left(a^4 + \sum_{k=1}^{m} |c_{\chi_k}|^4 \chi_k(x) \right) = a^4 + \sum_{k=1}^{m} |c_{\chi_k}|^4 Re(\chi_k(x)) \geq a^4$$

$$\sum_{k=m+1}^{|G|-1} |c_{\chi_k}|^4 \leq \sum_{k=m+1}^{|G|-1} \frac{a^2}{(k+1)^2} < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a^2}{k(k+1)} = \frac{a^2}{m+1}$$

L'ultima uguaglianza segue dalla serie telescopica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Siccome h assume solo valori reali positivi, concludiamo:

$$h(x) = |h(x)| = \left| \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^4 \chi(x) \right| = \left| a^4 + \sum_{k=1}^{m} |c_{\chi_k}|^4 \chi_k(x) + \sum_{k=m+1}^{|G|-1} |c_{\chi_k}|^4 \chi_k(x) \right| \geq$$

$$\geq \left| a^4 + \sum_{k=1}^{m} |c_{\chi_k}|^4 \chi_k(x) \right| - \left| \sum_{k=m+1}^{|G|-1} |c_{\chi_k}|^4 \chi_k(x) \right| > a^4 - \frac{a^2}{m+1} = a^2(a^2 - \frac{1}{m+1}) > 0$$

che conclude il teorema. □

Osservazione 1.32. La stima che si ottiene con questo teorema non è ottimale; basti notare che se $|E| = 1$, il teorema mi assicura l'esistenza di $|G|^2$ caratteri che soddisfino $U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)} = \{0\}$, tuttavia sappiamo che il numero dei caratteri di un gruppo abeliano finito è $|G|$.

Vogliamo ora generalizzare questo lemma ad una classe di gruppi più ampia.

Definizione 1.33. Sia G un gruppo abeliano e V un sottoinsieme di G. Definiamo *traslati di V* gli insiemi del tipo $V + g$ con $g \in G$.

Lemma 1.34. *Sia A un gruppo abeliano e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sequenza di sottoinsiemi finiti di A tali che*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(A_n - a) \cap A_n|}{|A_n|} = 1$$

per ogni $a \in A$. Se esistono $k \in \mathbb{N}$ e $V \subseteq A$ tali che k traslati di V ricoprono A, allora per ogni $\varepsilon \geq 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha:

$$|V \cap A_n| > \left(\frac{1}{k} - \varepsilon \right) |A_n|$$

Dimostrazione. Siano $a_1, ...a_k \in A$ tali che $A = \bigcup_{i=1}^{k} (a_i + V)$. Per ipotesi, se $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ e $i = 1, ..., k$:

$$|(A_n - a_i) \cap A_n| > (1 - \varepsilon)|A_n|$$

Perciò:

$$\varepsilon|A_n| > |A_n| - |(A_n - a_i) \cap A_n| = |(A_n - a_i)| - |(A_n - a_i) \cap A_n| = |(A_n - a_i)\backslash A_n|$$

siccome $|A_n - a_i| = |A_n|$, ovvero $|(A_n - a_i)\backslash A_n| < \varepsilon|A_n|$ per ogni $i = 1, ..., k$. Siccome $A_n = \bigcup_{i=1}^k (a_i + V) \cap A_n$, per ogni n esiste $i_n \in \{1, ..., k\}$ tale che:

$$\frac{1}{k}|A_n| \leq |(a_{i_n} + V) \cap A_n| = |V \cap (A_n - a_{i_n})|$$

Concludiamo osservando che $V \cap (A_n - a_{i_n}) \subseteq (V \cap A_n) \cup ((A_n - a_{i_n})\backslash A_n)$ implica:

$$\frac{1}{k}|A_n| \leq |V \cap (A_n - a_{i_n})| \leq |V \cap A_n| + |(A_n - a_{i_n})\backslash A_n| < |V \cap A_n| + \varepsilon|A_n|$$

ovvero $|V \cap A_n| > (\frac{1}{k} - \varepsilon)|A_n|$. □

Lemma 1.35 (Bogoliubov-Følner)**.** *Sia A un gruppo abeliano finitamente generato di rango r. Se esiste $k \in \mathbb{N}$ e $V \subseteq A$ tale che k traslati di V ricoprono A, allora esistono $\chi_1, ...\chi_s$ caratteri di A, con $s = 3^{2r}k^2$ tali che $U_A(\chi_1, ..., \chi_s; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $A \cong \mathbb{Z}^r \times F$, con F gruppo abeliano finito siccome A è un gruppo abeliano finitamente generato. Sia $a = (a_1, ..., a_r, f) \in \mathbb{Z}^r \times F$; definisco $A_n = (-n, n]^r \times F$ e $J_{ni} = (-n, n] \cap (-n - a_i, n - a_i]$. Chiaramente, $|J_{ni}| = max\{2n - |a_i|, 0\}$ e $J_{ni} \neq \emptyset$ per ogni $n > n_0 = max\{|a_i| : i = 1, ...n\}$. Siccome $(A_n - a) \cap A_n = \prod_{i=1}^r J_{ni} \times F$, vale:

$$|(A_n - a) \cap A_n| \geq |F| \prod_{i=1}^r (2n - a_i)$$

per ogni $n > n_0$. Inoltre A_n è finito, $|A_n| = |F|(2n)^r$, quindi soddisfa le ipotesi del Lemma 1.34. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$, $N > n_0$, tale che per ogni $n \geq N$, si ha:

$$|V \cap A_n| > (\frac{1}{k} - \varepsilon)|A_n|$$

Per ogni $n \geq N$, definiamo $G = A/6n\mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}_{6n}^r \times F$ e $E = \pi(V \cap A_n)$, dove π indica la proiezione canonica di A in G. Osserviamo che $\pi_{|A_n}$ è iniettiva. Infatti,

$$\pi(x) = \pi(y) \text{ se e solo se } x - y \in ker(\pi)$$

e sia $x = (x_1, ..., x_r, g) \in A_n - A_n$. Abbiamo $x \in ker(\pi)$ se $x = 0 \pmod{6n\mathbb{Z}^r}$, ovvero $x_i = 6nk_i$, per opportuni $k_i \in \mathbb{Z}$ per ogni $i = 1, ..., r$ e $g = 0$. Ma $|k_i| = \frac{|x_i|}{6n} < 1$, quindi $k_i = 0$ per ogni $i = 1, ..., r$, ovvero $(A_n - A_n) \cap ker(\pi) = \langle 0 \rangle$. Segue:

$$|E| = |V \cap A_n| > (\frac{1}{k} - \varepsilon)|A_n| = (\frac{1}{k} - \varepsilon)(2n)^r|F|$$

e

$$\frac{|G|}{|E|} \leq \frac{(6n)^r|F|}{(\frac{1}{k} - \varepsilon)(2n)^r|F|} = \frac{3^r k}{1 - k\varepsilon}$$

Scegliamo un $\varepsilon > 0$ tale che $\left[\frac{3^{2r}k^2}{(1-k\varepsilon)^2}\right] = 3^{2r}k^2$ ed $n > N$. Possiamo ora applicare il Lemma 1.31 di Bogoliubov a G finito e trovare $s = 3^{2r}k^2$ caratteri $\xi_{1n}, ..., \xi_{sn} \in G^*$ tale che $U_G(\xi_{1n}, ..., \xi_{sn}; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}$. Per $j = 1, ..., s$ definiamo $\chi_{jn} = \xi_{jn} \circ \pi \in A^*$. Se $a \in A_n \cap U_A(\chi_{1n}, ..., \chi_{sn}; \frac{\pi}{2})$, allora $\pi(a) \in U_G(\xi_{1n}, ..., \xi_{sn}; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}$ ed esistono quindi $b_1, b_2, b_3, b_4 \in V \cap A_n$ e $c = (c_i) \in 6n\mathbb{Z}^r$ tali che $a = b_1 - b_2 + b_3 - b + c$. Ora,

$$c = a - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \in (A_n)_{(4)} + A_n$$

implica $|c_i| \leq 5n$ per ogni $i = 1, ..., r$. Quindi $c = 0$, siccome $6n$ divide c_i per ogni i. Quindi $a \in V_{(4)}$ e

$$A_n \cap U_A(\chi_{1n}, ..., \chi_{sn}; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$$

per ogni $n > N$. Per il Lemma 1.22 esistono $\chi_1, ..., \chi_s \in A^*$ e una sottosucessione $(\chi_{in_l})_l$ di $(\chi_{in})_n$ tale che $\chi_i(a) = \lim_{l\to\infty} \chi_{in_l}(a)$ per ogni $i = 1, ..., s$ e $a \in A$. Per concludere la dimostrazione, mostriamo che

$$U_A(\chi_1, ..., \chi_s; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$$

Sia $a \in U_A(\chi_1, ..., \chi_s; \frac{\pi}{2})$. Siccome $A = \bigcup_{l=k}^{\infty} A_{n_l}$, $k \in \mathbb{N}$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a \in A_{\overline{n}}$. Dato che $\chi_i(a) = \lim_{l\to\infty} \chi_{in_l}(a)$, possiamo scegliere $l \in \mathbb{N}$ tale che $n_l > \overline{n}$ e $|Arg(\chi_{in_l}(a))| < \frac{\pi}{2}$ per ogni $i = 0, ..., s$, ovvero $a \in A_{n_l} \cap U_A(\chi_{1n_l}, ..., \chi_{sn_l}; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$. □

Il limite di questo lemma è che si applica solamente ai gruppi abeliani finitamente generati. Prima di generalizzare questo risultato e slegare la stima dal rango del gruppo, introduciamo la definizione di *insieme grande*.

Definizione 1.36. Sia G un gruppo abeliano, H un sottogruppo di G e B un sottoinsieme di G. Diremo che B è un *insieme grande rispetto ad H* se esiste un $F \subseteq G$ finito tale che $H \subseteq B + F$. Se B è grande rispetto a G, diremo che B è un *sottoinsieme grande*. Mostriamo alcune proprietà degli insiemi grandi.

Osservazione 1.37. Sia G un gruppo abeliano, B un sottoinsieme di G. Allora è chiaro che B è grande in G se e solo se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che k traslati di B ricoprono G.

Proposizione 1.38. *Sia G un gruppo abeliano e B un sottoinsieme grande di G. Allora $(B - B) \cap H$ è grande rispetto ad H per ogni sottogruppo H di G. Inoltre, se $g \in G$, per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste un $n > N$ tale che $ng \in B - B$.*

Dimostrazione. Sia $F \subseteq G$ finito tale che $B + F = G$. Per ogni $f \in F$, se $(f + B) \cap H \neq \varnothing$, scelgo $a_f \in (f + B) \cap H$, se $(f + B) \cap H = \varnothing$ scelgo $a_f \in H$ qualsiasi. Per ogni $x \in H$ esiste $f \in F$ tale che $x \in f + B$, perciò $x \in (f + B) \cap H$. Allora, $x - a_f \in (B - B) \cap H$, da cui segue $x \in a_f + (B - B) \cap H$ e $H \subseteq \{a_f : f \in F\} + (B - B) \cap H$. Per la seconda parte, sia $g \in G$ e consideriamo $H = \langle g \rangle$. Se H è finito, basta notare che $0 \in (B - B)$. Altrimenti, $H \cong \mathbb{Z}$; concludiamo mostrando che ogni A sottoinsieme grande di $\mathbb{Z}$ è illimitato superiormente. Se per assurdo non lo fosse, avremmo $A + F = \mathbb{Z}$, con $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito. Ma dati $a = \max\{A\}$ e $f = \max\{F\}$, allora $a + f + 1 \notin A + F$, assurdo. □

Lemma 1.39. *Siano G, H gruppi abeliani e $\varphi : G \to H$ un omomorfismo suriettivo. Se B è grande in H, allora $\varphi^{-1}(B)$ è grande in G.*

Dimostrazione. Sia $F \subseteq H$ finito tale che $F + B = H$, e $F' \subseteq G$ finito tale che $\varphi(F') = F$. Allora, per ogni $x \in G$, esiste $a \in F$ tale che $\varphi(x) \in a + B$. Quindi, dato $\varphi(a') = a$, abbiamo $\varphi(x - a') \in B$ e $x \in a' + \varphi^{-1}(B)$, ovvero $G = F' + \varphi^{-1}(B)$. □

Corollario 1.40. *Siano G, H gruppi abeliani e $\varphi : G \to H$ un omomorfismo. Se B è grande in H, allora $\varphi^{-1}(B - B)$ è grande in G.*

Dimostrazione. Dalle Proposizioni 1.38 e 1.39, si ha che $(B - B) \cap \varphi(G)$ è grande in $\varphi(G)$. Quindi, $\varphi^{-1}((B - B) \cap \varphi(G)) = \varphi^{-1}(B - B)$ è grande in G. □

La prossima proposizione mostra un legame tra gli insiemi grandi e i caratteri di un gruppo.

Proposizione 1.41. *Sia G un gruppo abeliano, $\delta > 0$ e $\chi_1 ..., \chi_s$ caratteri di G. Allora, $U_G(\chi_1 ..., \chi_s; \delta)$ è grande in G. Inoltre, per ogni $g \in G$, per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste un $n > N$ tale che $ng \in U_G(\chi_1 ..., \chi_s; \delta)$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'omomorfismo $h : G \to \mathbb{S}^s$, con $h(x) = (\chi_1(x), ..., \chi_s(x))$. Osserviamo che $A = \{z \in \mathbb{S} : |Arg(z)| < \frac{\delta}{2}\}$ è grande in $\mathbb{S}$. Infatti, dato

$$F = \{e^{\frac{ik\delta}{2}} \in \mathbb{S} : k = 1, ..., \left[\frac{4\pi}{\delta}\right] + 1\}$$

vale $A \cdot F = \mathbb{S}$. Definiamo

$$B = \left\{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{S}^s : |Arg(z_i)| < \frac{\delta}{2}\ \forall\, i = 1, ..., s\right\} = \left\{z \in \mathbb{S} : |Arg(z)| < \frac{\delta}{2}\right\}^s$$

$B = A^s$ è grande in quanto prodotto cartesiano di insiemi grandi. Ora, il Corollario 1.40 mostra che $BB^{-1} \cap h(G)$ è grande rispetto a $h(G)$. Inoltre,

$$BB^{-1} = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{S}^s : |Arg(z_i)| < \delta\ \forall\, i = 1, ..., s\}$$

Quindi $U_G(\chi_1 ..., \chi_s; \delta) = h^{-1}(BB^{-1} \cap h(G))$ è grande in G. La seconda affermazione segue dal Lemma 1.38 e dal fatto che

$$U_G\left(\chi_1 ..., \chi_s; \frac{\delta}{2}\right) - U_G\left(\chi_1 ..., \chi_s; \frac{\delta}{2}\right) \subseteq U_G\left(\chi_1 ..., \chi_s; \delta\right)$$

□

Possiamo ora eliminare la dipendenza dal rango del gruppo nella stima dei caratteri nel Lemma di Bogoliubov-Følner, indebolendo tuttavia questa stima sostituendo $V_{(4)}$ con $V_{(8)}$.

Lemma 1.42 (Følner)**.** *Sia A un gruppo abeliano. Se esiste $k \in \mathbb{N}$ e $V \subseteq A$ tale che k traslati di V ricoprono A, allora esistono $\chi_1, ..., \chi_m$ caratteri di A, con $m = k^2$ tali che $U_A(\chi_1, ..., \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui A sia finitamente generato, sia r il rango di A. Per il Lemma di Bogoliubov-Følner esistono $\rho_1, ..., \rho_s \in A^*$, con $s = 3^{2r}k^2$ tali che:

$$U_A(\rho_1, ..., \rho_s; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$$

Siccome A è gruppo abeliano finitamente generato, sappiamo che $A \cong \mathbb{Z}^r \times F$, con F gruppo abeliano finito. Per ogni $t = 1, ..., r$ sia $i_t : \mathbb{Z} \hookrightarrow A$ il monomorfismo definito da:

$$i_t(n) = (\underbrace{0, ..., 0, n}_{t}, 0, ..., 0; 0) \in A$$

Allora per ogni $j = 1, ..., s$ e $t = 1, ..., r$, $k_{jt} = \rho_j \circ i_t$ è un carattere di $\mathbb{Z}$. Per la Proposizione 1.41, il sottoinsieme:

$$L = U_{\mathbb{Z}}\left(\{k_{jt} \in \mathbb{Z}^* : j = 1, ..., s, t = 1, ..., r\}; \frac{\pi}{8r}\right)$$

è grande in $\mathbb{Z}$ ed è illimitato. Sia $\overline{L} = \bigcup_{t=1}^r i_t(L)$, ovvero l'insieme degli elementi di A della forma $i_t(n)$ con $n \in L$ e $t = 1, ..., r$. È chiaro che $\overline{L} \subseteq U_A(\rho_1, ..., \rho_s; \frac{\pi}{8r})$ e inoltre:

$$\overline{L}_{(4r)} \subseteq U_A(\rho_1, ..., \rho_s; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$$

Definiamo come nel Lemma 1.35 $A_n = (-n, n]^r \times F$ e scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\left[\left(\frac{k}{1-k\varepsilon}\right)^2\right] = k^2$. Perciò, A_n soddisfa le ipotesi del Lemma 1.34; esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $|V \cap A_n| > (\frac{1}{k} - \varepsilon)|A_n|$. Possiamo inoltre scegliere n tale che $n \in L$. Sia ora $G_n = A/2n\mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}_{2n}^r \times F$ e $E = \pi(V \cap A_n)$, dove π indica la proiezione canonica di A in G_n. Osserviamo che $\pi_{|A_n}$ è iniettiva siccome $(A_n - A_n) \cap ker(\pi) = \langle 0 \rangle$, quindi induce una biiezione tra A_n e G_n e tra $V \cap A_n$ ed E. Quindi $|A_n| = |G_n| = (2n)^r|F|$, $|E| > (\frac{1}{k} - \varepsilon)|A_n|$ e quindi:

$$\left[\left(\frac{|G_n|}{|E|}\right)^2\right] \leq \left[\left(\frac{k}{1-k\varepsilon}\right)^2\right] = k^2$$

Possiamo ora applicare il Lemma 1.31 di Bogoliubov a G_n finito e trovare $m = k^2$ caratteri $\xi_{1n}, ..., \xi_{mn} \in G_n^*$ tale che $U_G(\xi_{1n}, ..., \xi_{mn}; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}$. Per $j = 1, ..., m$ definiamo $\chi_{jn} = \xi_{jn} \circ \pi \in A^*$. Se $a \in A_n \cap U_A(\chi_{1n}, ..., \chi_{mn}; \frac{\pi}{2})$, allora $\pi(a) \in U_{G_n}(\xi_{1n}, ..., \xi_{mn}; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}$ ed esistono quindi $b_1, b_2, b_3, b_4 \in V \cap A_n$ e $c = (c_i) \in 2n\mathbb{Z}^r$ tali che $a = b_1 - b_2 + b_3 - b + c$. Ora $2n$ divide ogni c_i e $|c_i| \leq 5n$, quindi $c_i \in \{0, \pm 2n, \pm 4n\}$ per ogni $i = 1, ..., r$. Siccome c è una r-upla, posso scrivere c come al più somma di $4r$ elementi di $\overline{L}$. Perciò $c \in \overline{L}_{(4r)} \subseteq V_{(4)}$ e $a \in V_{(4)} + V_{(4)} = V_{(8)}$. Allora:

$$a \in A_n \cap U_A(\chi_{1n}, ..., \chi_{mn}; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}$$

Per il Lemma 1.22 esistono $\chi_1, ..., \chi_m \in A^*$ e una sottosucessione $(\chi_{jn_l})_l$ di $(\chi_{jn})_n$ tale che $\chi_j(a) = \lim_{l\to\infty} \chi_{jn_l}(a)$ per ogni $j = 1, ..., m$ e $a \in A$. Essendo $A = \bigcup\{A_{n_l} : l > k, n_l \in L\}$, concludiamo come nel Lemma 1.35 che $U_A(\chi_1, ..., \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}$.
Consideriamo ora il caso generale. Siano $g_1, ..., g_k \in A$ tali che $A = U_{i=1}^k(V + g_i)$, e sia G un sottogruppo finitamente generato di A che contenga $g_1, ..., g_k$. Quindi

$G = U_{i=1}^{k}(V \cap G + g_i)$ e k traslati di $V \cap G$ ricoprono G. Per la prima parte della dimostrazione, esistono $\varphi_{1G}, ..., \varphi_{mG} \in G^*$, con $m = k^2$, tali che

$$U_G\left(\varphi_{1G}, ..., \varphi_{mG}; \frac{\pi}{2}\right) \subseteq (V \cap G)_{(8)} \subseteq V_{(8)}$$

Per il Corollario 1.24 possiamo estendere ogni φ_{iG} ad un carattere di A; assumiamo quindi che $\varphi_{iG} \in A^*$ e di conseguenza

$$G \cap U_A\left(\varphi_{1G}, ..., \varphi_{mG}; \frac{\pi}{2}\right) = U_G\left(\varphi_{1G}, ..., \varphi_{mG}; \frac{\pi}{2}\right) \subseteq V_{(8)}$$

Sia $\mathcal{G}$ la famiglia dei sottogruppi finitamente generati di A che contengano $g_1, ..., g_k$; è un insieme diretto rispetto all'inclusione insiemistica. Quindi, per ogni $j = 1, ..., m$ ho una rete $(\varphi_{jG})_{G\in\mathcal{G}}$ in A^*. Per il Lemma 1.22 esiste una sottorete $(\varphi_{jG_\beta})_\beta$ e $\chi_1, ..., \chi_m \in A^*$ tali che

$$\chi_j(x) = \lim_{\beta} \varphi_{jG_\beta}(x) \text{ per ogni } x \in A \text{ e } j = 1, ..., m$$

Possiamo quindi concludere come nel Lemma 1.35 che $U_A(\chi_1, ..., \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}$. □

1.4 Teorema di Følner

Nell'ultima sezione di questo capitolo, ci apprestiamo a dimostrare il teorema di Følner. Sebbene il nostro interesse sia rivolto ai gruppi topologici, cui sarà dedicato il prossimo capitolo, i risultati che mostreremo ora valgono per una classe più grande di gruppi abeliani, ovvero dotati di una struttura topologica tale che le funzioni $x \mapsto g + x$ e $x \mapsto nx$ siano continue per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Lo scopo dei due prossimi lemmi, la cui dimostrazione è dovuta a Ivan Prodanov, è di approssimare le funzioni a valori complessi con i caratteri continui. Oltre ad essere di centrale importanza nello studio dell'analisi armonica astratta, questi lemmi verranno usati per costruire in seguito l'integrale di Haar.

Richiamiamo alcuni risultati di base sull'approssimazione uniforme di funzioni. Dato X uno spazio topologico e $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, indichiamo con *norma infinito* la norma:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

Teorema 1.43 (Stone-Weierstrass). *Sia X uno spazio topologico compatto. Una $\mathbb{C}$-sottoalgebra $\mathcal{A}$ di $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ che contenga le costanti e sia chiusa rispetto al coniugio è densa in $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ se e solo se $\mathcal{A}$ separa i punti di X.*

Diciamo che una funzione f è *uniformemente approssimata* da un sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in \mathcal{A}$ tale che $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Corollario 1.44. *Sia X uno spazio topologico compatto e $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Allora f può essere uniformemente approssimata da una $\mathbb{C}$-sottoalgebra $\mathcal{A}$ di $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ che contenga le costanti e sia chiusa rispetto al coniugio se e solo se $\mathcal{A}$ separa i punti di X separati da f.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia $G : X \to \mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ la mappa diagonale della famiglia di funzioni $\{g : g \in \mathcal{A}\}$. $Y = G(X)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ siccome immagine continua di un insieme compatto e, per la compattezza di X, Y ha la topologia quoziente di G. Definiamo in X una relazione di equivalenza nel seguente modo. Per ogni $x, y \in X$, $x \sim y$ se $G(x) = G(y)$. Allora ogni funzione $h : X \to \mathbb{C}$ tale che $h(x) = h(y)$ per ogni $x \sim y$, si fattorizza come $h = \overline{h} \circ \pi$, dove π è la proiezione canonica sul quoziente e $\overline{h} : Y \to \mathbb{C}$. In particolare, vale per tutte le $g \in \mathcal{A}$ e per f, siccome per ipotesi $\mathcal{A}$ separa i punti separati da f. Sia $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{h} : h \in \mathcal{A}\}$ la $\mathbb{C}$-sottoalgebra di $\mathcal{C}(Y)$; è chiusa rispetto al coniugio e contiene le costanti. Inoltre, separa i punti di Y. Infatti, siano $y, y' \in Y$ con $y = G(x)$ e $y' = G(x')$, $x, x' \in X$, allora $x \nsim x'$. Esiste allora $h \in \mathcal{A}$ tale che $\overline{h}(y) = h(x) \neq h(x') = \overline{h}(y')$, ovvero $\overline{\mathcal{A}}$ separa i punti di Y. Possiamo applicare il Teorema di Stone-Weierstrass a Y e $\overline{\mathcal{A}}$ e dedurne che possiamo approssimare uniformemente $\overline{f}$ con funzioni in $\overline{\mathcal{A}}$. Per le proprietà della topologia quoziente, possiamo infine approssimare uniformemente f con funzioni in $\mathcal{A}$. □

Definizione 1.45. Sia (G, τ) un gruppo abeliano dotato di una struttura topologica. Denotiamo con $\widehat{G}$ l'insieme dei caratteri continui di G, ovvero $\widehat{G} = G^* \cap \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$. Inoltre, $\widehat{G}$ è un sottogruppo di G^*, siccome prodotto e inverso di caratteri continui sono caratteri continui.

Osservazione 1.46. Sia G un gruppo abeliano dotato di una topologia tale che la funzione $x \mapsto g + x$ sia continua per ogni $g \in G$ e sia χ un carattere di G. Allora valgono le seguenti due affermazioni:

(a) per ogni $a \in G$, esiste un rete $(a_\gamma)_\gamma$ convergente ad a tale che $\lim_\gamma \chi(a_\gamma) \in \mathbb{S}$,

(b) χ è continuo se e solo se è continuo in 0.

Dimostrazione. (a) Se χ è continuo in a, tale rete esiste per definizione. Se χ è discontinuo in a, per ogni U intorno di $\chi(a)$ esiste V_U intorno di a tale che esiste $a_{V_U} \in V_U$ tale che $\chi(a_{V_U}) \notin U$. Per la compattezza di $\mathbb{S}$, esiste una sottorete $(\chi(a_{V_U})_\gamma)_\gamma$ convergente in $\mathbb{S}$.
(b) Sia χ continua in 0 e $a \in G$. Allora $\lim_{x \to a} \chi(x) = \lim_{x \to a} \chi(x - a)\chi(a) = \chi(a)$. □

Sia $C \subseteq \mathbb{C}$. C si dice *convesso* se per ogni $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$, si ha $(1-t)x + ty \in C$.

Lemma 1.47 (Prodanov)**.** *Sia G un gruppo abeliano dotato di una topologia tale per cui le funzioni $x \mapsto g + x$ e $x \mapsto nx$ siano continue per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Sia $U \subseteq G$ aperto, $f : U \to \mathbb{C}$ continua e $M \subseteq \mathbb{C}$ chiuso convesso. Siano $\chi_1, ..., \chi_k$ caratteri di G e $c_1, ..., c_k \in \mathbb{C}$ tali che $\sum_{j=1}^k c_j \chi_j(x) - f(x) \in M$ per ogni $x \in U$. Se $\chi_{m_1}, ..., \chi_{m_s}$, $m_1 < ... < m_s$, sono i caratteri continui tra i $\{\chi_j\}_j$, allora $\sum_{i=1}^s c_{m_i} \chi_{m_i}(x) - f(x) \in M$.*

Dimostrazione. Se tutti i caratteri sono continui, non c'è nulla da dimostrare. Sia perciò, a meno di riordinare i caratteri, $\chi_k \in G^*$ discontinuo; allora è discontinuo in 0. Esiste perciò una rete $(x_\gamma)_\gamma$ in G tale che $\lim_\gamma x_\gamma = 0$ ed esistono $y_j = \lim_\gamma \chi_j(x_\gamma)$ per ogni $j = 1, ..., k$. Osserviamo che che $y_k \neq 1$ e $y_j = 1$ se e solo se χ_j è continuo;

inoltre, vale $|y_j| = 1$ per ogni $j = 1, ..., k$, siccome $y_j \in \mathbb{S}$.
Siccome $\lim_\gamma x_\gamma = 0$, per ogni $x \in U$ e $t \in \mathbb{Z}$ esiste $\overline{\gamma}$ tale per cui per ogni $\gamma > \overline{\gamma}$ si ha $x + tx_\gamma \in U$. Consideriamo ora per ogni $t \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_j(x + tx_\gamma) - f(x + tx_\gamma) = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_j(x) \chi_j(x_\gamma)^t - f(x + tx_\gamma) \in M$$

passando quindi al limite su γ, otteniamo $\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_j(x) y_j^t - f(x) \in M$ siccome f è continua e M chiuso. Sia ora $n \in \mathbb{N}$. Per la convessità di M, e usando la relazione precedente per $t = 0, ..., n$ abbiamo che:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_j(x) y_j^t - f(x) \right) \in M$$

Siccome $y_k \neq 1$, vale $\sum_{t=0}^{n} y_k^t = \frac{y_k^{n+1}-1}{y_k-1}$. Indicando con $c_{jn} = \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^{n} c_j y_j^t$, si ha:

$$\sum_{j=1}^{k-1} c_{jn} \chi_j(x) + \frac{c_k}{n+1} \frac{y_k^{n+1} - 1}{y_k - 1} \chi_k(x) - f(x) \in M$$

per ogni $x \in U$. Ora, per ogni $j = 1, ..., k-1$, si ha $|c_{jn}| \leq \frac{|c_j|}{n+1} \sum_{t=0}^{n} |y_j|^t = |c_j|$, siccome $|y_j| = 1$. Inoltre, se χ_j è continuo, allora $y_j = 1$ e $c_{jn} = c_j$. La successione $(c_{jn})_n$ è quindi limitata per $j = 1, ..., k-1$. Esiste allora una sottosuccessione $(c_{jn_m})_m$ tale che esistono i limiti $c'_j = \lim_{m\to\infty} c_{jn_m}$ per ogni $j = 1, ..., k-1$. Inoltre, siccome $|y_k| = 1$, vale il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_k}{n+1} \frac{y_k^{n+1} - 1}{y_k - 1} = 0$$

Ricordando che per ogni $x \in U$,

$$\sum_{j=1}^{k-1} c_{jn_m} \chi_j(x) + \frac{c_k}{n_m+1} \frac{y_k^{n_m+1} - 1}{y_k - 1} \chi_k(x) - f(x) \in M$$

consideriamo il limite per $m \to \infty$ e otteniamo:

$$\sum_{j=1}^{k-1} c'_j \chi_j(x) - f(x) \in M \text{ per ogni } x \in U$$

Infine, se χ_j è continuo allora $c'_j = c_j$. Concludiamo iterando la prima parte della dimostrazione rimuovendo ogni volta un carattere discontinuo tra quelli rimasti. $\square$

Questo lemma ha una duplice utilità. Infatti, nel processo di approssimazione di funzioni continue su un gruppo a valori complessi, mi permette di escludere dalla stima i caratteri i discontinui, che nel caso di gruppi dotati della topologia banale sono tutti tranne il carattere $\chi = 1$. Tuttavia, possiamo sfruttare questo lemma anche per aggiungere ad una stima di questo tipo i caratteri discontinui senza intaccarne la validità. Nella prossima proposizione, rafforziamo questa idea, fondamentale nel Teorema di Følner.

Proposizione 1.48. *Sia G un gruppo abeliano e H un sottogruppo di G^*. Se X è un sottoinsieme di G e $f : X \to \mathbb{C}$ limitata, le seguenti due affermazioni sono equivalenti:*

(a) f può essere uniformemente approssimata su X con una combinazione lineare di elementi di H a coefficienti complessi,

(b) per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ e $\chi_1, ..., \chi_m \in H$ tali che $x - y \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $x, y \in X$.

Dimostrazione. (a)$\Rightarrow$(b) Sia $\varepsilon > 0$. Per (a), esistono $c_1, ..., c_m \in \mathbb{C}$ e $\chi_1, ..., \chi_m \in H$ tali che $\|f - \sum_{i=1}^m c_i\chi_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$, ovvero $|f(x) - \sum_{i=1}^m c_i\chi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $x \in X$. D'altronde, notiamo che $|\sum_{i=1}^m c_i\chi_i(x) - \sum_{i=1}^m c_i\chi_i(y)| \leq \sum_{i=1}^m |c_i||\chi_i(x) - \chi_i(y)|$ e che $|\chi_i(x) - \chi_i(y)| = |\chi_i(x)\overline{\chi_i(y)}| - 1| = |\chi_i(x - y) - 1|$. Scegliamo δ:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2m \max_{1\leq i\leq m} |c_i|}$$

Allora, $x - y \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ implica:

$$\left|\sum_{i=1}^m c_i\chi_i(x) - \sum_{i=1}^m c_i\chi_i(y)\right| \leq \sum_{i=1}^m |c_i|\,|\chi_i(x) - \chi_i(y)| \leq \sum_{i=1}^m |c_i|\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Concludiamo quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq \left|f(x) - \sum_{i=1}^m c_i\chi_i(x)\right| + \left|\sum_{i=1}^m c_i\chi_i(x) - \sum_{i=1}^m c_i\chi_i(y)\right| + \left|\sum_{i=1}^m c_i\chi_i(x) - f(y)\right| \leq \varepsilon$$

(b)$\Rightarrow$(a) Sia βX la compattificazione di Stone-Čech di X dotato della topologia discreta. Per costruzione della compattificazione di Stone-Čech, se $F : X \to \mathbb{C}$ è limitata, esiste allora un'unica estensione continua $F^\beta : \beta X \to \mathbb{C}$ di F. Consideriamo il seguente insieme:

$$S = \left\{ g \in \mathcal{C}(\beta X, \mathbb{C}) : g = \sum_{j=1}^n c_j\chi_j^\beta,\ \chi_j \in H,\ c_j \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

S è una $\mathbb{C}$-sottoalgebra di $\mathcal{C}(\beta X, \mathbb{C})$, che contiene le costanti e chiusa per coniugio. Infatti, per definizione si ha $\chi_k^\beta\chi_j^\beta = (\chi_k\chi_j)^\beta$ e $\chi_j^\beta(\overline{\chi_j})^\beta = (\chi_j\overline{\chi_j})^\beta = 1^\beta = 1$, quindi $\overline{\chi_j}^\beta = (\chi_j^{-1})^\beta = \overline{\chi_j^\beta}$. L'ultima uguaglianza segue dal fatto che le due funzioni coincidono su X, un sottoinsieme denso di βX, e quindi ovunque. Verifichiamo che S separa i punti di βX separati da f^β, per poter applicare il Corollario 1.44. Siano $x, y \in \beta X$ tali che $f^\beta(x) \neq f^\beta(y)$. Consideriamo le reti $(x_\gamma)_\gamma$ e $(y_\gamma)_\gamma$ in X tali che $x_\gamma \to x$ e $y_\gamma \to y$. Siccome f^β è continua, abbiamo che $f^\beta(x) = \lim_\gamma f^\beta(x_\gamma) = \lim_\gamma f(x_\gamma)$ e $f^\beta(y) = \lim_\gamma f(y_\gamma)$. $f^\beta(x) \neq f^\beta(y)$ implica che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{\gamma}$ tale per cui per ogni $\gamma > \overline{\gamma}$ si ha $|f(x_\gamma) - f(y_\gamma)| > \varepsilon$. Per ipotesi, esiste $\delta > 0$ e $\chi_1, ..., \chi_m \in H$ tali che per ogni $u, v \in X$, se $u - v \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$, allora $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$. Per assurdo, χ_j^β non separi i punti x, y, ovvero $\chi_j^\beta(x) = \chi_j^\beta(y)$ per ogni $j = 1, ..., m$. Allora $x_\gamma - y_\gamma \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ per γ abbastanza grande, ma ciò contraddice (b). Siccome ogni χ_j separa i punti x, y, abbiamo che S separa i punti di βX separati da f^β. Inoltre, βX è compatto, quindi posso applicare il Corollario 1.44 ad S e f^β, perciò f^β può essere uniformemente approssimata con S. Per concludere, notiamo che se $g = \sum_{j=1}^m c_j \chi_j^\beta$ su βX, allora $g_{|X} = \sum_{j=1}^m c_j \chi_j$ su X, quindi f può essere uniformemente approssimata su X con una combinazione lineare di elementi di H a coefficienti complessi. □

Possiamo ora dimostrare il risultato principale di questo capitolo, il Teorema di Følner. L'importanza di questo teorema è duplice: in primo luogo, vedremo nel prossimo capitolo alcune delle sue immediate applicazioni. In particolare, saremo in grado di ottenere un risultato riguardante la separabilità dei punti da parte dei caratteri continui (Teorema di Peter-Weyl) e potremo costruire l'integrale di Haar in una classe molto ampia di gruppi topologici abeliani. Inoltre, il Teorema di Følner mi dà informazioni molto precise sulla struttura topologica di un gruppo abeliano indotta dai caratteri del gruppo, nella quale gli insiemi della forma $U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ assumono un ruolo decisivo.

Teorema 1.49 (Følner). *Sia G un gruppo abeliano dotato di una topologia tale per cui le funzioni $x \mapsto g + x$ e $x \mapsto nx$ siano continue per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Se esiste $k \in \mathbb{N}$ e $E \subseteq G$ tale che k traslati di E ricoprono G, allora per ogni intorno U di 0 esistono $\chi_1, ..., \chi_m \in \widehat{G}$ caratteri continui, con $m = k^2$, e $\delta > 0$, tale che $U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) \subseteq E_{(8)} + U - U$.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, possiamo assumere che U sia aperto. Per il Lemma di Følner, esistono $\varphi_1, ..., \varphi_m \in G^*$ tali che $U_G(\varphi_1, ..., \varphi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(8)}$. Il nostro obiettivo è sostituire questi φ_j con dei caratteri continui, rimpiazzando $E_{(8)}$ con $E_{(8)} + U - U$.
Definiamo $C = \overline{E_{(8)} + U} \subseteq E_{(8)} + U - U$; quindi l'insieme $X = U \cup (G \backslash C)$ è aperto in G. Consideriamo ora $f : X \to \mathbb{C}$ la funzione caratteristica di U. f è continua siccome è costante sulle due componenti connesse di X, U e $G \backslash C$.
Sia H il sottogruppo di di G^* generato da $\varphi_1, ..., \varphi_m$. Siano $x, y \in X$ tali che $x - y \in U_G(\varphi_1, ..., \varphi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(8)}$; se $y \in U$, allora $x \in E_{(8)} + U$ e quindi $x \notin G \backslash \overline{E_{(8)} + U} = G \backslash C$, ovvero $x \in U$. In modo analogo, se $y \in U$ allora anche $x \in U$. Quindi $f(x) = f(y)$ e possiamo applicare la Proposizione 1.48 per approssimare uniformemente f su X con i caratteri di H. Possiamo quindi trovare un numero finito di m-uple $\underline{j} = (j_1, ..., j_m)$, $j_i \in \mathbb{Z}$ e $c_{\underline{j}} \in \mathbb{C}$ tali che:

$$\left| f(x) - \sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}} \varphi_1^{j_1}(x) \cdot ... \cdot \varphi_m^{j_m}(x) \right| \leq \frac{1}{3}$$

per ogni $x \in X$. Definiamo $\xi_{\underline{j}} = \prod_{i=1}^m \varphi_i^{j_i}$. Siccome X è aperto in G e f è continua, possiamo applicare il Lemma 1.47 di Prodanov al sottoinsieme chiuso convesso $\overline{B(0, \frac{1}{3})} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{3}\}$ ed assumere quindi che tutti i $\xi_{\underline{j}}$ siano continui. Perciò, considerando $x = 0$ nella nostra espressione, otteniamo : $|\sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}}| \leq \frac{1}{3}$ e quindi:

$$\left| \sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}} - 1 \right| \leq \frac{2}{3}$$

Sia ora $\overline{H} = H \cap \widehat{G}$ il sottogruppo di H dei caratteri continui. Siccome H è finitamente generato, anche $\overline{H}$ e finitamente generato ed esistono $\chi_1, ..., \chi_m \in \overline{H}$ che generano $\overline{H}$. I caratteri $\xi_{\underline{j}}$ sono continui, quindi esistono $s_i(\underline{j}) \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ...m$ tali che $\xi_{\underline{j}} = \prod_{i=1}^m \chi_i^{s_i(\underline{j})}$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon \sum_{\underline{j}} |c_{\underline{j}}| < \frac{1}{3}$. Quindi, scelto:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^m s_i(\underline{j})} > 0$$

ho che $|\xi_{\underline{j}}(x) - 1| \leq |Arg(\xi_{\underline{j}}(x))| \leq \varepsilon$ per ogni $\xi_{\underline{j}}$ e per ogni $x \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$. Per concludere che:

$$U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) \subseteq E_{(8)} + U - U$$

assumiamo per assurdo che esista $z \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ ma $z \notin E_{(8)} + U - U$. Siccome $C \subseteq E_{(8)} + U - U$, allora $z \in G \backslash C \subseteq X$. Quindi, dato che $|\xi_{\underline{j}}(z) - 1| \leq \varepsilon$, si ha:

$$\frac{2}{3} < \left| \sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}} - 1 \right| \leq \left| \sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}}(1 - \xi_{\underline{j}}(z)) \right| + \left| \sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}} \xi_{\underline{j}}(z) - f(z) \right| \leq \varepsilon |\sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}}| + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

che è assurdo. □

Osserviamo che se nelle ipotesi del Teorema di Følner consideriamo come aperto $U = E$, otteniamo una stima della forma:

$$U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) \subseteq E_{(10)}$$

in analogia con i teoremi precedenti; faremo nel prossimo capitolo uso di questo teorema in questo caso particolare.
Nel suo primo articolo del 1954 (Følner, [4]), Følner mostra come generalizzare questo teorema, sostituendo $E_{(8)} + U - U$ con $E_{(4)} + U$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$; ricordiamo che abbiamo dovuto sostituire $E_{(4)}$ con $E_{(8)}$ nel Lemma di Bogoliubov-Følner per eliminare la dipendenza del gruppo dal rango nel caso finitamente generato. Tuttavia, non forniamo qui una dimostrazione di questo risultato siccome ricorre a strumenti di analisi funzionale che non rientrano nell'obiettivo di questo lavoro; basterà infatti per il prossimo capitolo la versione "debole" di questo teorema.

Capitolo 2

Integrale di Haar

In questo capitolo, applicheremo i risultati ottenuti nel primo capitolo per dare una descrizione della topologia indotta dai caratteri di un gruppo sul gruppo stesso (topologia debole) e per costruire un funzionale lineare, definito sulle funzioni continue a supporto compatto di dominio un gruppo G. Tale funzionale avrà tutte le proprietà che ci si aspetta da un integrale, e inoltre sarà invariante rispetto all'operazione di gruppo; chiameremo questo funzionale *integrale di Haar*. In particolare, useremo il Teorema di Følner, per descrivere i sistemi fondamentali di intorni delle topologie indotte dai caratteri, e i risultati di Prodanov sull'approssimazione delle funzioni a valori complessi di dominio un gruppo con i caratteri del gruppo.

2.1 Gruppi Topologici

In questa sezione diamo una presentazione dei gruppi topologici abeliani, oggetto di studio di questo capitolo. Vedremo inoltre, senza dimostrazione, le principali proprietà di cui godono in quanto spazi topologici dotati della struttura algebrica di gruppo.

Definizione 2.1. Un *gruppo topologico* è una terna $(G, +, \tau)$ tale che $(G, +)$ sia un gruppo e (G, τ) sia uno spazio topologico che soddisfi le seguenti condizioni:

(a) l'applicazione $+ : G \times G \to G$ che manda $(x, y) \mapsto x + y$ è continua,

(b) l'applicazione $- : G \to G$ che manda $x \mapsto -x$ è continua.

Inoltre, se $(G, +)$ è abeliano, diremo che G è un *gruppo topologico abeliano*.

Stiamo quindi chiedendo che il gruppo G sia dotato di una topologia che renda continua la struttura di gruppo, ovvero le operazioni di somma e di opposto. Nella definizione, il prodotto $G\times G$ si intende dotato della topologia prodotto indotta da G.

Diamo ora una caratterizzazione della topologia di un gruppo topologico abeliano in termini di filtri degli intorni di un punto. Sia $\mathcal{U}$ il filtro degli intorni di 0. Allora le due condizioni precedenti sono equivalenti alle seguenti:

(a') per ogni $U \in \mathcal{U}$, esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$,

(b') per ogni $U \in \mathcal{U}$, esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $-V \subseteq U$.

Notiamo che non sono altro che la richiesta della continuità delle operazioni gruppali in termini di intorni di un punto.

Definizione 2.2. Uno spazio topologico X si dice *omogeneo* se per ogni due punti $x, y \in X$ esiste un omeomorfismo che manda x in y.

Ogni G gruppo topologico è omogeneo; infatti per ogni $a \in G$, la traslazione $T_a : G \to G$ che manda $x \mapsto x + a$ è continua, biiettiva e con inversa T_{-a} continua. Questo permette di studiare le proprietà topologiche locali di G studiando gli intorni di un solo punto, e poi attraverso le mappe di traslazione ottenere le stesse proprietà in ogni altro punto di G. Vediamo ora come si riflette questa proprietà in termini di filtri degli intorni.
Dato $\mathcal{U}$ il filtro degli intorni di 0, il filtro degli intorni di un elemento $a \in G$ coincide con $a + \mathcal{U}$. La topologia di G è quindi completamente determinata dal comportamento locale del filtro degli intorni $\mathcal{U}$ di 0.
Vediamo ora, come nel primo capitolo, le principali proprietà topologiche di un gruppo topologico abeliano.

Definizione 2.3. Uno spazio topologico X si dice *regolare* se per ogni $x \in X$, gli intorni chiusi di un punto formano una base per il filtro degli intorni del punto.

Ogni gruppo topologico è regolare; questo fatto ci sarà utile in seguito quando studieremo la locale compattezza di un gruppo. Inoltre, ogni gruppo topologico abeliano è completamente regolare: nuovamente, sfrutteremo questa proprietà in seguito per costruire opportune funzioni. Quindi, ogni gruppo topologico Hausdorff è automaticamente Tychonov.
In questo lavoro, tutti i gruppi topologici studiati sono abeliani, quindi in particolare tutti i sottogruppi sono normali. Ha senso quindi considerare, dato un gruppo G e un suo sottogruppo H, il gruppo quoziente G/H. Chiamiamo *gruppo topologico quoziente* di G rispetto a H il gruppo quoziente G/H dotato della topologia quoziente della proiezione canonica, che si verifica essere ancora una topologia gruppale.

Teorema 2.4. *Sia G un gruppo topologico abeliano, H un sottogruppo di G. Allora:*

(a) G/H è Hausdorff se e solo se H è chiuso in G,

(b) G/H è discreto se e solo se H è aperto in G.

Siccome siamo interessati allo studio dei gruppi Hausdorff, la regolarità dei gruppi topologici ci permetterà di scegliere con più libertà di considerare intorni chiusi di 0 sui quali potremo considerare il gruppo quoziente, che preserverà la proprietà di essere Hausdorff.

Facciamo alcune considerazioni sui sottogruppi di un gruppo topologico. Se H è un sottogruppo di un gruppo topologico G, ed inoltre H è un intorno di 0, allora H è aperto. Infatti, H è un intorno di ogni suo punto, siccome per ogni $h \in H$ si ha $h + H = H$, ma per l'omogeneità di G, $h + H$ è un intorno di h. Inoltre, si può mostrare che ogni sottogruppo aperto di G è anche chiuso.

Diciamo che una applicazione $\varphi : G \to H$, con G, H gruppi topologici è un *isomorfismo topologico* se φ è sia un isomorfismo di gruppi che un omeomorfismo di spazi topologici. Se $\varphi : G \to \varphi(G) \subseteq H$ è un isomorfismo topologico, e $\varphi(G)$ è dotato della topologia ereditata da H, allora diremo che φ è un *embedding di gruppi topologici.*

Definizione 2.5. Un gruppo topologico abeliano G si dice *completo* se ogni rete di Cauchy in G converge in G. Un *completamento* di G è una coppia $(\tilde{G}, \iota)$ tale che $\tilde{G}$ sia un gruppo completo e $\iota : G \to \tilde{G}$ un embedding di gruppi topologici.

In generale, un gruppo topologico non è completo; anzi, potrebbe non ammettere nemmeno un completamento. Tuttavia, vale il seguente teorema:

Teorema 2.6. *Ogni gruppo topologico abeliano ammette un completamento.*

È chiaro che ogni gruppo abeliano compatto è anche completo, siccome per definizione di compattezza ogni rete ammette una sottorete convergente. Vale tuttavia una condizione più forte: ogni gruppo abeliano localmente compatto è completo.

Nella prossima sezione, daremo una descrizione delle topologie indotte su un gruppo dai caratteri del gruppo.

2.2 Topologia debole dei caratteri

Abbiamo definito nel primo capitolo i caratteri di un gruppo G come gli omomorfismi $\chi : G \to \mathbb{S}$; possiamo tuttavia darne una descrizione alternativa. Abbiamo già osservato che $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}$ attraverso l'isomorfismo $\psi(\theta) = e^{2\pi i\theta}$. Notiamo inoltre che la funzione $\frac{Arg}{2\pi} : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ non è continua in $e^{i\pi} = -1$: l'idea è che la funzione argomento che "legge" l'angolo ha un salto in -1. Invece, data la proiezione canonica $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, abbiamo che la funzione composta $p \circ \frac{Arg}{2\pi}$ è continua e $\frac{Arg}{2\pi}$ è chiaramente un omomorfismo di gruppi. Mostriamo ora che $p \circ \frac{Arg}{2\pi}$ è l'inversa di ψ. Infatti, abbiamo che $(p \circ \frac{Arg}{2\pi}) \circ \psi = id_{\mathbb{T}}$ e $\psi \circ (p \circ \frac{Arg}{2\pi}) = id_{\mathbb{S}}$, quindi $\psi^{-1} = p \circ \frac{Arg}{2\pi}$. Perciò ψ è un isomorfismo topologico.
Ora, dato un gruppo G, possiamo definire i caratteri come gli omomorfismi $\xi : G \to \mathbb{T}$. Notiamo come prima cosa il forte legame tra le due definizioni: se $\chi : G \to \mathbb{S}$ è un carattere per la definizione usuale, allora $\psi^{-1} \circ \chi : G \to \mathbb{T}$ è un carattere per la seconda definizione data. In modo analogo, possiamo passare da caratteri ξ definiti con il toro a caratteri $\psi \circ \xi$ definiti con il circolo unitario.
La seconda importante osservazione da fare è che, siccome ψ è un isomorfismo topologico, è in particolare un omeomorfismo di spazi topologici, quindi $\psi^{-1} \circ \chi$ è continuo se e solo se χ è continuo, con $\chi : G \to \mathbb{S}$ carattere di G. Perciò, anche la nozione di continuità è indifferente rispetto alla definizione usata.
Le osservazioni precedenti ci permettono di considerare da un punto di vista differente l'oggetto principale di studio dello scorso capitolo, gli insiemi della forma $U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$, con $\chi_1, ..., \chi_m$ caratteri di G. Infatti, se consideriamo i caratteri $\psi^{-1} \circ \chi_j$ definiti sul toro per ogni $j = 1, ..., m$, abbiamo che:

$$U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) = \left\{ x \in G : \psi^{-1} \circ \chi_j(x) \in \left[0, \frac{\delta}{2\pi}\right) \cup \left(1 - \frac{\delta}{2\pi}, 1\right], \forall j = 1, ..., m \right\}$$

Dati quindi $\xi_1, ..., \xi_m : G \to \mathbb{T}$ caratteri di G, denotiamo $B_\delta(0) = [0, \delta) \cup (\delta, 1]$. Possiamo quindi definire:

$$U_G(\xi_1, ..., \xi_m; \delta) = U_G(\psi \circ \xi_1, ..., \psi \circ \xi_m; \delta) = \left\{ x \in G : \xi(x) \in B_{\frac{\delta}{2\pi}}(0), \forall j = 1, ..., m \right\}$$

Questa duplice definizione dei caratteri ci permette ci considerare con più flessibilità gli insiemi sopra descritti.

Osservazione 2.7. Con questa nuova definizione di carattere, il gruppo G^* dei caratteri di G è un gruppo abeliano rispetto alla somma, indotta dal quoziente in $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Sia G un gruppo topologico abeliano e H un gruppo di caratteri di G. Indichiamo con τ_H la topologia debole di H, ovvero la la minima topologia che renda continui tutti i caratteri $\chi \in H$. In particolare, chiameremo τ_{G^*} la *topologia di Bohr* di G.

Proposizione 2.8. *Sia G un gruppo abeliano e H un sottogruppo di caratteri di G. Siano $\chi_1, ..., \chi_m \in H$ e $\delta > 0$, valgono allora le seguenti affermazioni:*

(a) $U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ è un intorno di 0 per τ_H,

(b) $\{U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) : \delta > 0,\ \chi_1, ..., \chi_m \in H\}$ è un sistema fondamentale di intorni dello 0 per τ_H,

(c) (G, τ_H) è Hausdorff se e solo se H separa i punti di G.

Dimostrazione. (a) Ogni $U_G(\chi_j; \delta)$ è intorno di 0 siccome è antiimmagine di un intorno di $0 \in \mathbb{S}$ e $U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) = \bigcap_{j=1}^m U_G(\chi_j; \delta)$ è intorno di 0 in quanto intersezione finita di intorni di 0.
(b) $\{U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) : \delta > 0,\ \chi_1, ..., \chi_m \in H\}$ è un sistema fondamentale di intorni dello 0 siccome è contenuto nella preimmagine di $\{z \in \mathbb{S} : |Arg(z)| < \delta\}_\delta$ tramite ogni $\chi \in H$, sistema fondamentale di intorni di 0 in $\mathbb{S}$.
(c) ($\Leftarrow$) Siano $x, y \in G$. Siccome H separa i punti di G, esiste $\chi \in H$ tale che $\chi(x) \neq \chi(y)$. Preso $\delta < |Arg(\chi(x - y))|$, abbiamo che $x + U_G(\chi; \delta)$ e $y + U_G(\chi; \delta)$ sono disgiunti.
($\Rightarrow$) Sia G Hausdorff. Per assurdo, siano $x, y \in G$ tali che $\chi(x) = \chi(y)$ per ogni $\chi \in H$. Ma esiste $\delta > 0$ tale che $x + U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ e $y + U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)$ siano disgiunti, assurdo. □

Definizione 2.9. Un gruppo topologico Hausdorff G si dice *precompatto* se ammette un completamento compatto $\tilde{G}$.

Il prossimo teorema lega la precompattezza di un gruppo topologico con la struttura topologica indotta dai caratteri del gruppo. La precompattezza è una caratterizzazione molto importante, siccome i gruppi compatti rivestono un ruolo chiave nello studio dei gruppi topologici; in particolare, vi si potrà definire l'integrale di Haar.

Teorema 2.10 (Comfort-Ross)**.** *Sia (G, τ) un gruppo topologico abeliano. Sono equivalenti:*

(a) G è precompatto,

(b) G è Hausdorff e gli intorni di 0 sono insiemi grandi,

(c) Esiste H sottogruppo dei caratteri continui di G che separa i punti di G tale che $\tau = \tau_H$.

Dimostrazione. (a)⇒(b) Sia $G \overset{\iota}{\hookrightarrow} \tilde{G}$ il completamento di G, con $\tilde{G}$ compatto. Per ogni intorno U di 0 in G, esiste un intorno aperto V di 0 in $\tilde{G}$ tale che $(V-V) \cap G \subseteq U$. L'esistenza di V segue dalla continuità dell'operazione di gruppo in G e dal fatto che G è denso in $\tilde{G}$. Ora, per la compattezza di $\tilde{G}$, dal ricoprimento aperto $\{g+V\}_g$ di $\tilde{G}$ posso estrarre un sottoricoprimento finito, quindi V è grande in $\tilde{G}$. Per la Proposizione 1.38, $(V-V) \cap G$ è grande in G, siccome G è un sottogruppo di $\tilde{G}$, perciò anche U è grande in G. Per definizione di precompattezza, G è Hausdorff.
(b)⇒(c) Sia $\widehat{G}$ il gruppo dei caratteri continui di G. Allora $\tau_{\widehat{G}} \subseteq \tau$ per definizione di $\tau_{\widehat{G}}$. Per ogni U intorno aperto di 0 per τ, esiste V intorno aperto di 0 per τ tale che $V_{(10)} \subseteq U$. Per ipotesi, V è grande, quindi per l'Osservazione 1.37 valgono le ipotesi del Teorema di Følner 1.49. Esistono perciò $\chi_1, ..., \chi_m$ caratteri continui di G e $\delta > 0$ tali che:

$$U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) \subseteq V_{(10)} \subseteq U$$

Quindi, ogni intorno di 0 per τ contiene un intorno di 0 per $\tau_{\widehat{G}}$. Allora $\tau \subseteq \tau_{\widehat{G}}$ e $\tau = \tau_{\widehat{G}}$. Infine, siccome τ è Hausdorff, $\widehat{G}$ separa i punti di G per la Proposizione 2.8.
(c)⇒(a) Consideriamo l'omomorfismo $\omega : G \to \mathbb{S}^H$ che assegna ad ogni $g \in G$ il carattere di H $\omega_g : H \to \mathbb{S}$, definito da $\omega_g(\chi) = \chi(\omega)$, per ogni $\chi \in H$. Siccome H separa i punti di G, ω è iniettivo. Infatti, per ogni $g, h \in G$, $\omega_g = \omega_h$ se e solo se $\omega_g(\chi) = \omega_h(\chi)$ per ogni $\chi \in H$, ovvero $\chi(g) = \chi(h)$ per ogni $\chi \in G$, assurdo per l'ipotesi di separabilità dei punti. Mostriamo che ω è un embedding di gruppi topologici. Mostriamo quindi che è una funzione continua e aperta, sfruttando la Proposizione 2.8. Vogliamo provare che:

$$\mathcal{U} = \omega\left(\{U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta) : \chi_1, ..., \chi_m \in H, m \geq 1, \delta > 0\}\right)$$

è una base del filtro di intorni dell'unità in $\omega(G)$. Infatti:

$$\begin{aligned} \omega(U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)) &= \{(\chi(g))_{\chi \in H} : g \in U_G(\chi_1, ..., \chi_m; \delta)\} = \\ &= \omega(G) \cap \{(s_\chi)_{\chi \in H} : |Arg(\chi_i(s_\chi))| < \delta,\ \forall \chi \in H,\ \forall i = 1, ..., m\} \end{aligned}$$

e l'ultimo termine è $\omega(G)$ intersecato con un sistema fondamentale di intorni dell'unità per $\mathbb{S}^H$. Quindi ω è continua è aperta. $\mathbb{S}^H$ è completo e compatto, quindi la chiusura di $\omega(G)$ in $\mathbb{S}^H$ è compatta e topologicamente isomorfa al completamento di G, ovvero G è precompatto. □

Notiamo come prima cosa che in questa dimostrazione abbiamo fatto uso del Teorema di Følner, per caratterizzare la precompattezza di un gruppo topologico abeliano e le topologie indotte dai caratteri. Questa applicazione, che può sembrare banale, mostra una correlazione molto forte tra la precompattezza e la separabilità dei punti. Possiamo quindi ottenere il teorema di Peter-Weyl come semplice corollario.

Teorema 2.11 (Peter-Weyl)**.** *Sia G un gruppo topologico abeliano compatto. Allora i caratteri continui di G separano i punti di G.*

Dimostrazione. Se G è compatto allora è completo e quindi precompatto. Per il Teorema 2.10 esiste un sottogruppo dei caratteri continui che separa i punti di G, quindi anche i caratteri continui di G separano i punti di G. □

Sebbene in letteratura esistano più dimostrazioni di questo teorema, quella che si propone in questo lavoro ne evidenzia il legame con le topologie indotte dai caratteri. Inoltre, grazie al Teorema di Følner, possiamo vedere come questo risultato, nel caso abeliano, non richieda strumenti particolarmente avanzati, se non le costruzioni classiche di topologia generale. Una dimostrazione più generale, per i gruppi topologici non abeliani, richiede strumenti di teoria della misura ma, soprattutto, non sottolinea il ruolo fondamentale dei caratteri.

2.3 Integrale di Haar

Siamo ora in grado di definire e costruire l'oggetto fondamentale di questo lavoro, l'integrale di Haar. Sfrutteremo nel seguito il Teorema di Peter-Weyl sulla separabilità dei punti, per poter applicare i lemmi di approssimazione di Prodanov. Nel resto di questo capitolo, tutti i gruppi topologici considerati saranno Hausdorff.

Sia G uno gruppo topologico localmente compatto. Data una funzione $f : G \to \mathbb{C}$ continua, definiamo il *supporto* di f:

$$supp(f) = \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$$

Denotiamo con $\mathcal{C}_c(G)$ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto, ovvero:

$$\mathcal{C}_c(G) = \{f \in \mathcal{C}(G) : supp(f) \text{ è compatto}\}$$

Questo sarà lo spazio funzionale che ci interessa e su cui definiremo l'integrale di Haar. Inoltre, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(G)$, definiamo f_a la *traslata* di f come $f_a(x) = f(x-a)$ per ogni $x \in G$. Siccome

$$supp(f_a) = \overline{\{x \in G : f(x-a) \neq 0\}} = \overline{\{y + a \in G : f(y) \neq 0\}} = a + supp(f)$$

abbiamo che anche $f_a \in \mathcal{C}_c(G)$.

Definizione 2.12. Sia G un gruppo topologico abeliano localmente compatto. Definiamo *integrale di Haar* un funzionale $\int_G : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{C}$ che soddisfi le seguenti condizioni:

(a) $\int_G (af + bg) = a \int_G f + b \int_G g$ per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$,

(b) Se $f \in \mathcal{C}_c(G)$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$, allora $\int_G f \geq 0$,

(c) $\int_G f_a = \int_G f$ per ogni $a \in G$,

(d) esiste $f \in \mathcal{C}_c(G)$ tale che $\int_G f \neq 0$.

Osservazione 2.13. Dalle proprietà dell'integrale di Haar, possiamo dedurre anche che:

(e) Se $f \in \mathcal{C}_c(G)$ è a valori reali, allora $\int_G f \in \mathbb{R}$,

(f) Se $f \leq g$, allora $\int_G f \leq \int_G g$ per ogni $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$,

(g) $Re(\int_G f) = \int_G Re(f)$ e $Im(\int_G f) = \int_G Im(f)$ per ogni $f \in \mathcal{C}_c(G)$,

(h) $\left|\int_G f\right| \leq \int_G |f|$ per ogni $f \in \mathcal{C}_c(G)$.

Dimostrazione. (e) Si ha $f = f^+ - f^-$, con $f^+, f^- \in \mathcal{C}_c(G)$. Quindi per (b) $\int_G f^+, \int_G f^- \in \mathbb{R}$. Per (a), $\int_G f = \int_G f^+ - \int_G f^- \in \mathbb{R}$.
(f) Se $f \leq g$ allora $g - f \geq 0$, quindi $\int_G (g - f) = \int_G g - \int_G f \geq 0$ per (a) e (b).
(g) Otteniamo la tesi ponendo uguali parte reale ed immaginaria nella seguente uguaglianza:

$$Re\left(\int_G f\right) + iIm\left(\int_G f\right) = \int_G f = \int_G (Re(f) + iIm(f)) = \int_G Re(f) + i\int_G Im(f)$$

siccome per (e) $\int_G Re(f), \int_G Im(f) \in \mathbb{R}$.
(h) Sia $\theta = Arg(\int_G f)$. Allora:

$$\left|\int_G f\right| = Re\left(e^{-i\theta}\int_G f\right) = \int_G Re\left(e^{-i\theta} f\right) \leq \int_G |f|$$

□

Il nostro obiettivo è mostrare che ogni gruppo topologico abeliano localmente compatto ammette un integrale di Haar. Inoltre, tale integrale è unico nel seguente senso: se μ, ν sono integrali di Haar su G, allora $\mu = c\nu$, con $c \in \mathbb{R}$. Costruiremo questo funzionale lineare prima nel caso di gruppi discreti, poi nel caso di gruppi compatti. Infine, saremo in grado di generalizzare la dimostrazione sotto l'ipotesi più debole, la locale compattezza.

Lemma 2.14. *Esiste un integrale di Haar in ogni gruppo abeliano discreto.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo abeliano discreto. Per ogni $f \in \mathcal{C}_c(G)$, definiamo $\int_G f = \sum_{x \in G} f(x)$. La somma è ben definita, siccome il supporto di f è compatto; un sottoinsieme compatto di un insieme discreto è finito, quindi $f(x) = 0$ per ogni $x \in G$ tranne un numero finito di elementi di G. Questo funzionale soddisfa chiaramente le proprietà (a)-(d) dell'integrale di Haar. □

Osservazione 2.15. Se G è un gruppo abeliano finito, quindi dotato della topologia discreta, possiamo definire l'integrale di Haar:

$$\int_G f = \frac{1}{|G|}\sum_{x \in G} f(x)$$

Notiamo che la scelta della costante è tale che $\int_G 1 = 1$. Abbiamo potuto integrare la funzione costante $f = 1$ siccome un gruppo discreto finito è compatto, quindi ogni funzione di dominio G è continua a supporto compatto.

Lemma 2.16. *Esiste un integrale di Haar in ogni gruppo abeliano compatto.*

Dimostrazione. Sia $f : G \to \mathbb{C}$ continua. Per il Teorema 1.43 di Stone-Weierstrass, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $c(\varepsilon), c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ e $\chi_{1\varepsilon}, ..., \chi_{m_\varepsilon \varepsilon}$ caratteri non banali di G tali che:

$$\left| f(x) - c(\varepsilon) - \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} c_j(\varepsilon)\chi_{j\varepsilon}(x) \right| \leq \varepsilon \tag{2.1}$$

per ogni $x \in G$; per l'ipotesi di separabilità dei punti, abbiamo sfruttato il Teorema 2.11 di Peter-Weyl. Se per ogni $\delta > 0$ si hanno $c'(\delta), c'_j(\delta)$ altre funzioni che soddisfano la relazione (2.1), si ha:

$$\left| c(\varepsilon) - c'(\delta) - \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} c_j(\varepsilon)\chi_{j\varepsilon}(x) + \sum_{j=1}^{m_\delta} c'_j(\delta)\chi_{j\delta}(x) \right| \leq \varepsilon + \delta$$

per ogni $x \in G$. I caratteri $\chi_{j\varepsilon}$ e $\chi_{j\delta}$ sono discontinui in G dotato della topologia banale, quindi, per il Lemma 1.47, segue che $|c(\varepsilon) - c'(\delta)| \leq \varepsilon + \delta$. Mostriamo che il limite $\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon)$ esiste finito e non dipende dalla scelta della funzione $c(\varepsilon)$ in (2.1). Per ogni $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ si ha $|c(\varepsilon_1) - c(\varepsilon_2)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, ovvero $\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon)$ esiste finito. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo due scelte di costanti $c(\varepsilon)$ e $c'(\varepsilon)$. Allora vale $|c(\varepsilon) - c'(\varepsilon)| \leq 2\varepsilon$, e passando al limite otteniamo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |c(\varepsilon) - c'(\varepsilon)| = 0$$

Quindi il limite non dipende dalla scelta di $c(\varepsilon)$. Definiamo:

$$\int_G f = \lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon)$$

Proviamo che soddisfa le condizioni (a)-(d) dell'integrale di Haar. Indichiamo con $c_f(\varepsilon)$ la scelta della funzione $c(\varepsilon)$ relativa ad f.

(a) Si ha che $c_{f+g}(\varepsilon) = c_f(\frac{\varepsilon}{2}) + c_g(\frac{\varepsilon}{2})$ è una possibile scelta per ogni $f, g \in \mathcal{C}(G)$, quindi passando al limite vale $\int_G (f + g) = \int_G f + \int_G g$. Sia $a \in \mathbb{C}$. Pongo $c_{af}(\varepsilon) = ac_f(\frac{\varepsilon}{a})$ e $c_{af\,j}(\varepsilon) = ac_{f\,j}(\frac{\varepsilon}{a})$. Infatti, vale:

$$\left| af(x) - c_{af}(\varepsilon) - \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} c_{af\,j}(\varepsilon)\chi_{j\varepsilon}(x) \right| \leq \varepsilon$$

Passando al limite si ottiene quindi $\int_G af = a \int_G f$.

(b)Verifichiamo che per ogni $f \in \mathcal{C}(G)$ e ogni chiuso convesso M di $\mathbb{C}$, se $f(G) \subseteq M$ allora $\int_G f \in M$. Questa condizione in particolare assicura che se $f(x) \geq 0$, allora $\int_G f \geq 0$. Sia per assurdo $\int_G f \notin M$. M è chiuso, quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\int_G f \notin M + \overline{B}(0, 2\varepsilon)$. Per (2.1), e sfruttando la costruzione $\int_G f = \lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon)$, otteniamo:

$$f(x) - \int_G f(x) - \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} c_j(\varepsilon)\chi_{j\varepsilon}(x) \in \overline{B}(0, 2\varepsilon)$$

per ogni $x \in G$, per un opportuna scelta di $\varepsilon > 0$. Ora, se $f(G) \subseteq M$, si ha:

$$\int_G f(x) + \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} c_j(\varepsilon)\chi_{j\varepsilon}(x) \in M + \overline{B}(0, 2\varepsilon)$$

per ogni $x \in G$. I caratteri $\chi_{j\varepsilon}$ sono discontinui in G dotato della topologia banale e $M + \overline{B}(0, 2\varepsilon)$ è convesso, quindi, per il Lemma 1.47, posso rimuovere i caratteri discontinui dalla stima e ottenere:

$$\int_G f \in M + \overline{B}(0, 2\varepsilon)$$

che porta ad una contraddizione.
(c) Sia $f \in \mathcal{C}(G)$ e $a \in \mathbb{C}$. Allora, $c_f(\varepsilon) = c_{f_a}(\varepsilon)$, quindi $\int_G f_a = \int_G f$.
(d) Troviamo $f \in \mathcal{C}(G)$ tale che $\int_G f \neq 0$. Scelgo $f = 1$; $c_j(\varepsilon) = 0$ per ogni j, $c(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$. Quindi $\int_G f = \lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = 1$. □

Osservazione 2.17. Come nel caso dei gruppi finiti, tutte le funzioni continue sono a supporto compatto, quindi posso integrare le costanti e in particolare la funzione $f = 1$. Posso perciò definire sul gruppo G, attraverso l'integrale di Haar, un concetto di "volume", definendo:

$$Vol(G) = \int_G 1$$

Inoltre, il punto (d) nella dimostrazione mi mostra come la scelta di questo particolare integrale di Haar soddisfi $\int_G 1 = 1$. Una delle principali applicazioni dell'integrale di Haar sui gruppi compatti è appunto la capacità di definire una nozione di volume sui gruppi che sia invariante rispetto alla operazione di gruppo. Tuttavia, questo sarà possibile solo nel caso di gruppi abeliani compatti, mentre nel caso di gruppi abeliani localmente compatti non sarà possibile.
Inoltre, nel punto (b) si dimostra una proprietà molto più forte della positività dell'integrale di Haar. Infatti, abbiamo mostrato che se $f(G) \subseteq M$, allora $\int_G f \in M$. Legandoci all'osservazione appena fatta, questo vuol dire che l'integrale di Haar rappresenta una "media pesata" della funzione f sul gruppo G, in analogia con una delle classiche interpretazioni geometriche dell'integrale di Lebesgue.

Lemma 2.18. *Sia G un gruppo abeliano localmente compatto e $\int_G$ un integrale di Haar su G. Allora, per ogni $h \in \mathcal{C}_c(G)$ a valori reali tale che $h(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$ ed esiste $x \in G$ tale che $h(x) > 0$, si ha $\int_G h > 0$.*

Dimostrazione. Sia $h \in \mathcal{C}_c(G)$ a valori reali tale che $h(x) \geq 0$ e sia $x_0 \in G$ tale che $h(x_0) > 0$. Allora esiste un intorno V di 0 tale che $h(x) \geq a = \frac{h(x_0)}{2}$ per ogni $x \in x_0 + V$. Per la proprietà (d) dell'integrale di Haar, esiste $f \in \mathcal{C}_c(G)$ tale che $\int_G f \neq 0$. Ora, $f = u + iv$, con $u, v \in \mathcal{C}_c(G)$ a valori reali, quindi uno tra $\int_G u$ e $\int_G v$ deve essere non nullo. Possiamo quindi supporre che f sia una funzione a valori reali. Inoltre, $f = f^+ - f^-$, con $f^+, f^- \in \mathcal{C}_c(G)$ a valori reali positive. Nuovamente, uno tra $\int_G f^+$ e $\int_G f^-$ deve essere non nullo, quindi possiamo supporre che f sia una funzione a valori reali positiva. Siccome f ha supporto compatto, esiste $K \subseteq G$ compatto tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in G \backslash K$. Per la compattezza di K, possiamo trovare un insieme finito $F \subseteq G$ tale che $K \subseteq F + V$. Sia $b = \max_{x \in G} f(x)$, che sappiamo esistere siccome f è una funzione continua a supporto compatto. Inoltre, per ogni $y \in G$ si ha che $h_{x_0 - y}(x) \geq a$ per ogni $x \in y + V$. Perciò, $f(x) \leq \frac{b}{a} \sum_{y \in G} h_{x_0 - y}(x) \leq \frac{b}{a} |F| h(x)$ per ogni $x \in G$. Per la proprietà (f) dell'integrale di Haar, si ha:

$$\int_G \frac{b}{a} |F| h(x) \geq \int_G f(x) > 0$$

da cui segue la tesi $\int_G h(x) > 0$. □

Premettiamo che nel prossimo lemma, la richiesta che il sottogruppo H di G sia chiuso serve, grazie al Teorema 2.4, a garantire che anche G/H sia un gruppo Hausdorff.

Lemma 2.19. *Sia G un gruppo abeliano localmente compatto e H un sottogruppo chiuso di G tale che H e G/H ammettano un integrale di Haar. Allora G ammette un integrale di Haar.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{C}_c(G)$. per ogni $y \in G$ si ha che $f_{y|_H} \in \mathcal{C}_c(H)$, siccome $supp(f_{y|_H}) = (y + supp(f)) \cap H$ è compatto in H. Mostriamo che la funzione $F : G \to \mathbb{C}$ definita da $F(y) = \int_H f_{y|_H}$ è continua. Infatti, siano $y_0 \in G$, $\varepsilon > 0$ e $K \subseteq G$ compatto tale che $f = 0$ su $G \backslash K$. Sia U un intorno simmetrico compatto di 0 in G, che esiste siccome G è localmente compatto. G è completamente regolare, quindi esiste $h \in \mathcal{C}_c(G)$ tale che $0 < h(x) \leq 1$ per ogni $x \in G$ e $h(x) = 1$ per ogni $x \in y_0 + U + K$. Mostriamo che siccome f è continua e $U + K$ è compatto, esiste V intorno simmetrico di 0 in G tale che $V \subseteq U$ e:

$$\text{per ogni } x, y \in U + K \text{ tale che } x - y \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Infatti, $f : U+K \to \mathbb{C}$ è continua, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in U+K$, esiste V_x intorno aperto di 0 in G, tale che $y \in x + V_x$ implica $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia W_x intorno aperto di 0 tale che $W_x + W_x \subseteq V_x$, allora $U + K \subseteq \bigcup_{x \in U+K}(x + W_x)$. Per la compattezza di $U+K$, esiste $F \subseteq U+K$ finito tale che $U+K \subseteq \bigcup_{x\in F}(x+W_x)$. Sia V intorno simmetrico di 0 tale che $V \subseteq \bigcap_{x\in F}(W_x)$. Allora, per ogni $y_1, y_2 \in U + K$ e $y_1 - y_2 \in V$, scelgo $\overline{x}$ tale che $y_2 \in \overline{x} + W_{\overline{x}}$. Ora,

$$y_1 - \overline{x} = y_1 - y_2 + y_2 - \overline{x} \in V + W_{\overline{x}} \subseteq W_{\overline{x}} + W_{\overline{x}} \subseteq V_{\overline{x}}$$

Perciò segue che:

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(y_1) - f(\overline{x}) + f(\overline{x}) - f(y_2)| \leq |f(y_1) - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - f(y_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mostriamo ora che per ogni $y \in y_0 + V$ vale $|F(y) - F(y_0)| \leq \varepsilon$. Dato $y \in y_0 + V$, si ha che:

$$|f(x - y) - f(x - y_0)| \leq \varepsilon h(x)$$

per ogni $x \in G$. Infatti, se $x \in G$ è tale che $f(x - y) = f(x - y_0) = 0$, la disuguaglianza è banalmente verificata. Sia quindi uno dei due termini non nulli. Allora, $x - y \in K$ oppure $x - y_0 \in K$, quindi $x \in y + K \subseteq y_0 + V + K$ oppure $x \in y_0 + K$. In entrambi i casi vale $x - y, x - y_0 \in U + K$. Inoltre:

$$(x - y) - (x - y_0) = y_0 - y \in y_0 - (y_0 + V) = V$$

Infine, il fatto che $h(x) = 1$ per ogni $x \in y_0 + U + K$ implica che:

$$|f(x - y) - f(x - y_0)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon h(x)$$

Da questa stima segue immediatamente che $|f_{y|_H} - f_{y_0|_H}| \leq \varepsilon h_{|_H}$. Per la proprietà (h) dell'integrale di Haar, otteniamo:

$$|F(y) - F(y_0)| \leq \int_H |f_{y|_H} - f_{y_0|_H}| \leq \varepsilon \int_H h_{|_H}$$

Da cui si conclude la continuità di F in y_0. Ora, per ogni $x, y \in G$ tali che $x - y \in H$ si ha:

$$F(x) = \int_H f_{x|_H} = \int_H f_{y|_H} = F(y)$$

per l'invarianza per traslazioni dell'integrale di Haar. Esiste quindi una funzione $\tilde{F}$: $G/H \to \mathbb{C}$ tale che $F = \tilde{F} \circ \pi$, dove $\pi : G \to G/H$ è la proiezione canonica. Perciò, per definizione di topologia quoziente, $\tilde{F} \in \mathcal{C}_c(G/H)$. Definiamo ora l'integrale di Haar su G nel seguente modo:

$$\int_G f = \int_{G/H} \tilde{F}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}_c(G)$. Verifichiamo le proprietà (a)-(d) dell'integrale di Haar.
(a) Indichiamo con $F_f(x) = \int_H f_{x|_H}$ e siano $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$ e $a, b \in \mathbb{C}$. Vale $(aF_f + bF_g)\tilde{} = a\tilde{F}_f + b\tilde{F}_g$, quindi la linearità di $\int_{G/H}$ implica la linearità di $\int_G$.
(b) Sia $f \geq 0$. Allora anche $\tilde{F} \geq 0$, quindi $\int_G f = \int_{G/H} \tilde{F} \geq 0$.
(c) Notiamo che per ogni $x \in G$, si ha $(F_{f_x})\tilde{} = (F_f)\tilde{}_{\pi(x)}$, quindi:

$$\int_G f_x = \int_{G/H} (F_f)\tilde{}_{\pi(x)} = \int_{G/H} \tilde{F}_f = \int_G f$$

(d) Sia U un intorno compatto di 0. G è completamente regolare, quindi esiste $f \in \mathcal{C}_c(G)$ a valori reali tale che $f \geq 0$ e $f(x) = 1$ per ogni $x \in U$. Allora $f(x) = 1$ per ogni $x \in U \cap H$, perciò $F(0) = \int_H f_{|_H} > 0$ per il Lemma 2.18. Inoltre, $\tilde{F}(x) \geq 0$ per ogni $x \in G/H$ e $\tilde{F}(0) > 0$; applicando nuovamente il Lemma 2.18, concludiamo che $\int_G f = \int_{G/H} \tilde{F} \geq 0$. □

Osservazione 2.20. Questa dimostrazione mostra un'analogia molto forte con la classica teoria dell'integrazione. Infatti, l'idea principale di questo teorema è di definire l'integrale di una funzione prima calcolandone l'integrale sulle classi laterali di H, e poi su H stesso, dove ammettiamo già l'esistenza di un integrale di Haar. Ma questo procedimento non è altro che il Teorema di Fubini per il calcolo degli integrali, per il quale si opera una riduzione dell'integrale su G al calcolo dell'integrale prima su delle sezioni di G, che in questo caso sono le classi laterali di H.

Prima di giungere al risultato finale di questo capitolo, dimostriamo una proposizione che descrive alcune condizioni sufficienti per la compattezza di un gruppo topologico.

Definizione 2.21. Un gruppo topologico si dice *totalmente limitato* se ogni aperto non vuoto è grande. In particolare, per il Teorema 2.10, un gruppo abeliano totalmente limitato è precompatto.

Proposizione 2.22. *Sia G un gruppo abeliano localmente compatto ed esista $x \in G$ tale che $\langle x \rangle$ sia denso in G. Allora G è discreto o compatto.*

Dimostrazione. Se $\langle x \rangle$ fosse finito, G sarebbe finito, quindi discreto e compatto. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ e che $\mathbb{Z}$ sia un sottogruppo di G. Se G induce la topologia discreta su $\mathbb{Z}$, allora $\mathbb{Z}$ è chiuso e $G = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ è discreto. Supponiamo quindi che G non induca su $\mathbb{Z}$ la topologia discreta. Il nostro obiettivo è mostrare che $\mathbb{Z}$ è totalmente limitato; concluderemo la dimostrazione nel seguente modo. G è localmente compatto quindi completo, perciò $\overline{\mathbb{Z}} = G$ è il completamento di $\mathbb{Z}$. Di conseguenza, per il Teorema 2.10, $\mathbb{Z}$ è precompatto e quindi il suo completamento G è compatto. Mostriamo che ogni aperto U di $\mathbb{Z}$ non ammette un elemento massimo. Infatti, sia per assurdo U un aperto di $\mathbb{Z}$ che contenga 0 e ammetta un elemento massimo. Allora $-U$ è un aperto che contiene 0 e che ammette elemento minimo, quindi $U \cap -U$ è un intorno aperto finito di 0 in $\mathbb{Z}$. Ma ciò implica che $\mathbb{Z}$ sia discreto, assurdo. Di conseguenza, ogni aperto di $\mathbb{Z}$ contiene elementi positivi. Sia U un intorno compatto di 0 in G e V un intorno simmetrico di 0 tale che $V + V \subseteq U$. Per la compattezza di U, esistono $g_1, ..., g_m \in G$ tali che $U \subseteq \bigcup_{i=1}^m (g_i + V)$. Per la densità di $\mathbb{Z}$ in G, esistono inoltre $n_1, ..., n_m \in \mathbb{Z}$ interi positivi tali che $n_i \in g_i + V$ per ogni $i = 1, ..., m$. Quindi $g_i \in n_i - V = n_i + V$ implica:

$$U \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (g_i + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (n_i + V + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (n_i + U)$$

e quindi

$$U \cap \mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (n_i + U \cap \mathbb{Z})$$

Mostriamo che $U \cap \mathbb{Z}$ è grande in $\mathbb{Z}$ rispetto a $\mathbb{Z}$. Sia $t \in \mathbb{Z}$. Siccome $U \cap \mathbb{Z}$ non ha massimo, esiste $s \in U \cap \mathbb{Z}$ tale che $s \geq t$. Definiamo $s_t = \min\{s \in U \cap \mathbb{Z} : s \geq t\}$. Allora $s_t = n_i + u_t$, per un opportuno $i \leq m$ e $u_t \in U \cap \mathbb{Z}$. Siccome $n_i \geq 0$, allora $u_t < s_t$ e quindi $u_t < t \leq s_t$. Sia infine $N = \max\{n_1, ..., n_m\}$ e $F\{1, ..., N\}$. Allora $U \cap \mathbb{Z} + F = \mathbb{Z}$, ovvero la topologia indotta su $\mathbb{Z}$ da G è totalmente limitata. □

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per provare che ogni gruppo topologico abeliano localmente compatto (Hausdorff) ammette un integrale di Haar. Nella dimostrazione, faremo uso dei lemmi precedenti, riconducendoci a casi in cui abbiamo già dimostrato esistere un integrale di Haar.
Diremo che un gruppo G è *compattamente generato* se è generato da un suo sottoinsieme compatto.

Teorema 2.23. *Esiste un integrale di Haar in ogni gruppo abeliano localmente compatto.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo abeliano localmente compatto. Supponiamo inizialmente che esistano $g_1, ..., g_m \in G$ che generino un sottogruppo denso di G. Lavoriamo per induzione; se $m = 1$, per la Proposizione 2.22, G è discreto o compatto, e quindi ammette un integrale di Haar per i Lemmi 2.14 e 2.16. Sia ora vero per m, mostriamo il passo induttivo; esistano allora $g_1, ..., g_{m+1} \in G$ che generino un sottogruppo denso di G. Sia $\pi : G \to G/\langle g_{m+1} \rangle$ la proiezione canonica; π è una funzione continua suriettiva, perciò l'immagine di un insieme denso è ancora un insieme denso. Applicando l'ipotesi induttiva a $\pi(g_1), ..., \pi(g_m)$, si ha che $G/\langle g_{m+1} \rangle$ ammette

un integrale di Haar. Ma anche $\langle g_{m+1} \rangle$ ammette un integrale di Haar siccome ha un sottogruppo ciclico denso, quindi per il Lemma 2.19 G ammette un integrale di Haar.
Sia ora G compattamente generato, ovvero esista $K \subseteq G$ tale che $\langle K \rangle = G$. Senza perdere di generalità, si può supporre che K sia un intorno simmetrico compatto di 0 (Dikranjan, [2]). Allora anche $K + K$ è compatto, e per la proprietà di compattezza esiste $F \subseteq G$ finito tale che $K + K \subseteq K + F$. Mostriamo che $G = K + \langle F \rangle$. Infatti, K genera G, quindi ogni $g \in G$ si scrive come $g = \sum_{i=1}^{m} n_i k_i$, con $n_i \in \mathbb{N}$ e $k_i \in K$ per ogni $i = 1, ..., m$ (stiamo sfruttando che K sia simmetrico). Mostriamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $nK \subseteq K + \langle F \rangle$. Se $n = 1$, $K \subseteq K + K \subseteq K + \langle F \rangle$. Sia vero per n e sfruttiamo l'ipotesi induttiva:

$$(n+1)K = nK + K \subseteq K + K + \langle F \rangle \subseteq K + \langle F \rangle + \langle F \rangle = K + \langle F \rangle$$

Ne concludiamo che $G = K + \langle F \rangle$. Quindi $G/\overline{\langle F \rangle}$ è compatto e ammette un integrale di Haar per il Lemma 2.16. Inoltre, per la prima parte della dimostrazione, $\overline{\langle F \rangle}$ ammette un integrale di Haar, quindi per il Lemma 2.19 G ammette un integrale di Haar.
Consideriamo ora il caso generale. Sia K un intorno compatto di 0 in G e H il sottogruppo generato da K. H è aperto siccome è intorno di ogni suo punto, e quindi chiuso; inoltre è localmente compatto compattamente generato, quindi ammette un integrale di Haar per la prima parte della dimostrazione. H è aperto, quindi G/H è discreto e per il Lemma 2.14 ammette un integrale di Haar. Otteniamo la tesi applicando il Lemma 2.19 ad H e G/H, quindi G ammette un integrale di Haar. $\square$

Abbiamo mostrato l'esistenza di un integrale di Haar in ogni gruppo abeliano localmente compatto. Ora, ci proponiamo di dimostare che tale funzionale è unico, nel senso che gli integrali di Haar su un gruppo G sono uno un multiplo reale dell'altro. Sebbene la dimostrazione di questo fatto sia semplice, faremo uso del teorema di Fubini per lo scambio dell'ordine di integrazione. Infatti, anche se non lo abbiamo ancora visto esplicitamente, valgono per l'integrale di Haar le stesse proprietà e teoremi classici dell'integrale di Lebesgue su spazi con misura. Indichiamo con $\int_G f(x) = \int_G f$ per rendere chiara la variabile di integrazione.

Teorema 2.24. *Sia G un gruppo abeliano localmente compatto e $\int_G$, $\overline{\int_G}$ due integrali di Haar su G. Allora $\int_G = \lambda \overline{\int_G}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $g \in \mathcal{C}_c(G)$ tale che $g \geq 0$, e $\overline{\int_G} g = 1$. Per il Teorema di Fubini e l'invarianza per traslazione dell'integrale di Haar, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(G)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\int_G f(x) &= \left(\int_G f(x) \right) \left(\overline{\int_G} g(y) \right) = \overline{\int_G} \left(\int_G f(x+y) \right) g(y) = \int_G \left(\overline{\int_G} f(x+y) g(y) \right) = \\
&= \int_G \left(\overline{\int_G} f(y) g(y-x) \right) = \overline{\int_G} \left(\int_G f(y) g(y-x) \right) = \overline{\int_G} \left(f(y) \int_G g(y-x) \right) = \\
&= \overline{\int_G} \left(f(y) \int_G g(-x) \right) = \left(\int_G g(-x) \right) \overline{\int_G} f(y)
\end{aligned}$$

Concludiamo ponendo $\lambda = \int_G g(-x)$. $\square$

Per concludere, richiamiamo un teorema di analisi funzionale che mostra come effettivamente l'integrale di Haar da noi definito sia realizzato come integrale secondo Lebesgue di un'opportuna misura. Il seguente teorema è noto come *Teorema di rappresentazione di Riesz.*

Teorema 2.25 (Riesz)**.** *Sia X uno spazio topologico Hausdorff localmente compatto e $\lambda : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare definito sulle funzioni continue a supporto compatto di X. Allora esiste un'unica misura di Borel μ su X tale che:*

$$\lambda(f) = \int_X f d\mu$$

per ogni $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

Applicando questo teorema al funzionale lineare $\int_G$, otteniamo una misura μ invariante per l'operazione di gruppo, che chiameremo *misura di Haar*. In particolare, questo teorema mi permette di concludere che la costruzione da noi vista dell'integrale di Haar porti allo stesso risultato delle costruzioni classiche, nelle quali si dimostra prima l'esistenza e l'unicità della misura di Haar e poi alla definizione del suo integrale.

2.4 Esempi

Per concludere, costruiamo in alcuni gruppi topologici gli integrali di Haar che sappiamo esistere unici, a meno di costante moltiplicativa.

Esempio 2.26. Sia G un gruppo abeliano discreto. Allora tutte le funzioni di dominio G a supporto compatto sono continue e l'integrale di Haar su G è dato da:

$$\int_G f = \sum_{x \in G} f(x)$$

La somma è ben definita, siccome solo un numero finito di termini è non nullo. Infatti, il supporto di f è compatto; un sottoinsieme compatto di un insieme discreto è finito, quindi $f(x) = 0$ per ogni $x \in G$ tranne un numero finito di elementi di G. Inoltre, questo integrale coincide con l'integrale in misura della misura del conteggio. Se G è un gruppo abeliano finito, allora è discreto e compatto: possiamo quindi fare una scelta della costante per l'integrale di Haar tale che si abbia $Vol(G) = 1$, ponendo:

$$\int_G f = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)$$

Notiamo che in questo caso, tutte le funzioni oltre ad essere continue sono anche a supporto compatto, siccome G è compatto.

Esempio 2.27. $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo localmente compatto rispetto alla topologia euclidea standard. Quindi l'integrale di Haar è il comune integrale della misura di Lebesgue; notiamo che infatti ogni funzione continua a supporto compatto è integrabile per la misura di Lebesgue. Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathscr{L}^n(x)$$

Notiamo che in questo caso, siccome $(\mathbb{R}^n, +)$ è localmente compatto ma non compatto, non possiamo definire $Vol(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 2.28. Sia $\mathbb{R}_0^n$ il gruppo degli invertibili di $\mathbb{R}^n$. Allora $(\mathbb{R}_0^n, \cdot)$ è localmente compatto per la topologia euclidea standard. Tuttavia, non possiamo usare la misura di Lebesgue siccome non è invariante per dilatazioni, ovvero non è invariante per l'operazione di $(\mathbb{R}_0^n, \cdot)$. Vediamo prima nel caso $n = 1$ come definire l'integrale di Haar:

$$\int_{\mathbb{R}_0} f = \int_{\mathbb{R}_0} f(x) \frac{dx}{|x|}$$

Vediamo la validità della proprietà (b) dell'integrale di Haar, ovvero l'invarianza per l'operazione di gruppo; le altre sono chiaramente valide. Sia $\lambda \in \mathbb{R}_0$, allora:

$$\int_{\mathbb{R}_0} f_\lambda = \int_{\mathbb{R}_0} f(\lambda^{-1}x) \frac{dx}{|x|} = \int_{\mathbb{R}_0} f(\lambda^{-1}x) \frac{d\lambda^{-1}x}{|\lambda^{-1}x|} = \int_{\mathbb{R}_0} f(y) \frac{dy}{|y|} = \int_{\mathbb{R}_0} f$$

Ottenuto con il semplice cambio di variabile $y = \lambda^{-1}x$. Possiamo generalizzare questa costruzione nel caso di $\mathbb{R}_0^n$, definendo l'integrale di Haar nel seguente modo:

$$\int_{\mathbb{R}_0^n} f = \int_{\mathbb{R}_0^n} f(x_1, ..., x_n) \frac{dx_1 \cdots dx_n}{|x_1 \cdots x_n|}$$

In modo analogo al caso $n = 1$, l'integrale così definito è un integrale di Haar.

Esempio 2.29. Consideriamo il circolo unitario $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dotato della moltiplicazione ereditata da $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, che abbiamo introdotto nel primo capitolo per definire i caratteri di un gruppo. $\mathbb{S}$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$, quindi è compatto per la topologia indotta da $\mathbb{C}$. Possiamo perciò definire un integrale di Haar e anche scegliere la costante in modo che $Vol(\mathbb{S}) = 1$. Definiamo l'integrale nel seguente modo:

$$\int_{\mathbb{S}} f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

Mostriamo come prima solo l'invarianza dell'integrale rispetto all'operazione di gruppo. Sia $\varphi \in [0, 2\pi)$. Allora:

$$\int_{\mathbb{S}} f_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i(\theta-\varphi)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i(\theta-\varphi)}) d(\theta - \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\xi}) d\xi = \int_{\mathbb{S}} f$$

Abbiamo usato il cambio di variabile $\xi = \theta - \varphi$ e l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue. Inoltre, come affermato in precedenza, abbiamo scelto la costante $\frac{1}{2\pi}$ per fare in modo che risulti $\int_{\mathbb{S}} 1 = 1$.

Bibliografia

[1] Bourbaki, N., *Topologie générale: Chapitres 1 à 4*, Paris, 1971.

[2] Dikranjan D., *Introduction to Topological Groups*, Università di Udine, Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche, disponibile a https://users.dimi.uniud.it/ dikran.dikranjan/ITG.pdf ,2013.

[3] Dikranjan D., Prodanov I., Stoyanov L., *Topological groups: Characters, Dualities and Minimal Group Topologies*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc., New York-Basel, 1989.

[4] Følner E., *Generalization of a theorem of Bogoliùboff to topological abelian groups. With an appendix on Banach mean values in non-abelian groups*, Math. Scand. 2, 5-18, 1954.

[5] Orsatti A., *Introduzione ai gruppi astratti e topologici*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, Pitagora Editrice, Bologna, 1979.