

Phase Diversity Phase Retrieval in ottica adattiva

19 aprile 2010

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
INGEGNERIA ELETTRONICA
Tesi di Laurea Specialistica
Prof. Giampiero Naletto
Tutor : Ing. Ivan Capraro
Laureando : Fabio Ceruffi

Anno Accademico 2009 - 2010

Sommario

Le immagini di qualsiasi oggetto reale sono generate dalla combinazione di energia radiante comprendente due campi di forza, elettrico e magnetico, ortogonali tra loro e rispetto alla direzione di propagazione. L'energia radiante elettromagnetica si propaga nello spazio mediante onde di lunghezza variabile e può essere raccolta e trasdotta in immagini visibili da opportuni dispositivi chiamati fotoconvertitori. Matematicamente il procedimento di formazione dell'immagine equivale ad una convoluzione.

Un'onda luminosa è costituita da un'ampiezza (relativa all'intensità), e anche da una fase (relativa al fronte d'onda), persa sistematicamente in una misura attraverso i rivelatori di luce, lastre fotografiche o ccd che misurano solo l'intensità della luce che li colpisce.

L'onda elettromagnetica propagandosi attraverso un mezzo di rifrazione (o non omogeneo) subisce una distorsione del fronte d'onda e conseguentemente la qualità dell'immagine viene degradata. Pertanto la diffrazione costituisce un limite nella risposta di qualunque strumento ottico e riguarda varie tecnologie: essa infatti pone un limite alla risoluzione visiva di fotocamere, videocamere, telescopi e microscopi.

E' necessario utilizzare dispositivi, tecniche di misura e tecniche di compensazione della distorsione di fase per recuperarla (*phase retrieval*) ed ottenere delle immagini più nitide.

Invertire il procedimento di formazione dell'immagine (problema inverso) per recuperare la fase dalla misura di intensità (deconvoluzione) è molto importante per raggiungere elevate risoluzioni visive ed è l'obiettivo dell'ottica adattiva.

Infatti l'ottica adattiva misura la deformazione di un fronte d'onda elettromagnetico e la compensa con un modulatore di fase spaziale. Attualmente la misura della deformazione è largamente effettuata attraverso opportuni sensori. In alternativa altre tecniche indirette di misura sono state studiate per consentire una semplificazione hardware in cui i sensori sono sostituiti da una elaborazione delle immagini più sofisticata.

In questa tesi è descritto un modello matematico ed una simulazione numerica per il problema di deconvoluzione e ricostruzione di un fronte d'onda per sistemi ottici adattivi. Questo problema inverso (*inverse problem*) è fondamentalmente privo di soluzioni reali o non ha un'unica soluzione in altre parole è un problema mal-posto (*ill-posed*).

Con il metodo descritto, basato su diversi articoli scientifici di elaborazione dell'immagine, è possibile stimare sia la fase che l'intensità dell'oggetto attraverso misure di intensità in più di un piano di misura (*phase diversity techniques*). L'obiettivo è raggiunto risolvendo un problema di approssimazione non-lineare con tecniche di regolarizzazione ai minimi quadrati ed utilizzando le trasformate di Fourier. In un primo stadio del modello si stima il fronte d'onda, ovvero la fase di un segnale complesso, usando il metodo quasi-Newton denominato BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) per poi successivamente recuperare l'immagine dell'oggetto reale. La proprietà di convergenza di questo metodo può essere derivata dai risultati presenti in letteratura sui metodi di ottimizzazione nell'analisi matematica. La convergenza è accelerata usando il metodo BFGS limitato in memoria (L-

BFGS , *Limited memory BFGS*) con preconditionamento e ricerca di linea. La simulazione numerica suggerisce infine che tale metodo è efficiente e robusto.

L'applicazione di questo modello è rivolta principalmente ad applicazioni di ottica adattiva prive di sensori di fronte d'onda (*sensor-less system*).

Indice

1	Introduzione	9
2	Ottica adattiva	11
2.1	Applicazioni principali	12
2.2	OA in Astronomia	13
2.3	Seeing	15
2.3.1	Seeing strumentale	15
2.3.2	Descrizione matematica del seeing	16
2.4	Teoria della diffrazione	16
2.4.1	Teoria della diffrazione	16
2.4.2	Diffrazione di Fresnel-Kirchhoff	16
2.4.3	Polinomi di Zernike	17
2.5	Sistema di Ottica Adattiva	19
2.5.1	Dispositivi di correzione	22
2.5.1.1	Specchi deformabili	22
2.5.1.2	SLM	23
2.5.2	Misura del fronte d'onda	23
2.5.2.1	Rilevamento Diretto - <i>Direct Wavefront Sensing</i>	23
2.5.2.2	Rilevamento indiretto - <i>Indirect Wavefront Sensing</i>	27
2.6	Funzioni di qualità ottica	29
2.6.1	Point Spread Function	29
2.6.2	OTF - MTF	29
3	Phase retrieval	31
3.1	Diffrazione dell'immagine	31
3.2	Ottimizzazione	34
3.3	Funzione di costo	35
4	Metodi numerici	37
4.1	Algoritmo Gerchberg-Saxton (GS)	37
4.1.1	Algoritmi di Fienup	39
4.2	L-BFGS	41
4.2.1	Condizioni di Wolfe	42
4.2.2	L-BFGS/Line Search Method	43

5	Risultati di simulazione	45
5.1	Simulazione 1	48
5.2	Simulazione 2	51
5.3	Simulazione 3	54
5.4	Simulazione 4	57
5.5	Simulazione 5	60
5.6	Simulazione 6	64
5.7	Simulazione 7	67
6	Considerazioni finali e sviluppi futuri	71

Elenco delle figure

1.0.1 Modello di sistema ottico	10
2.3.1 Immagini della stella Altair	15
2.4.1 Modi del fronte d'onda per i primi 6 ordini dei polinomi di Zernike.	19
2.4.2 Alcuni modi di Zernike di basso ordine.	19
2.5.1 Sistema di ottica adattiva	20
2.5.2 Deviazione di un fronte d'onda aberrato dal fronte d'onda di riferimento.	21
2.5.3 Tre classi di specchi deformabili.	22
2.5.4 Rilevamento diretto di tipo Shack-Hartmann.	24
2.5.5 Rilevamento diretto di curvatura	25
2.5.6 Piani di misura del rilevamento di tipo a curvatura	25
2.5.7 Fronte d'onda inclinato e immagine di curvatura	27
2.5.8 Shearing interferometer	27
2.5.9 Principio del Phase diversity	28
2.6.1 Rapporti tra le funzioni di qualità delle immagini.	30
3.1.1 Diagramma concettuale di ricostruzione con metodo di proiezione su insiemi convessi (POCS).	34
4.1.1 Diagramma a blocchi del metodo Error Reduction.	38
4.1.2 Schema Gerchberg-Saxton tra l'iterazione n-esima ed (n+1)-esima.	38
4.1.3 Diagramma a blocchi dell'algoritmo Error-Reduction (GS)	39
4.1.4 Diagramma a blocchi base degli algoritmi di Fienup <i>Input-Output</i>	40
4.1.5 Diagramma a blocchi del metodo di ricerca a gradiente coniugato evidenziato da Fienup	41
5.1.1 Simulazione1: setup data (delta, Zernike, psf)	48
5.1.2 Simulazione1: fronte d'onda recuperato	49
5.1.3 Simulazione1: immagine di input e recuperata	49
5.1.4 Simulazione1: Curve caratteristiche	50
5.2.1 Simulazione2: setup data (lena, Zernike, psf)	51
5.2.2 Simulazione2: fronte d'onda recuperato	52
5.2.3 Simulazione2: immagine a fuoco e recuperata	52
5.2.4 Simulazione2: immagine di input e recuperata	53
5.2.5 Simulazione2: Curve caratteristiche	53
5.3.1 Simulazione3: setup data (delta, Zernike, psf, rumore)	54
5.3.2 Simulazione3: fronte d'onda recuperato	55
5.3.3 Simulazione3: immagine di input e recuperata	55

5.3.4 Simulazione3: Curve caratteristiche	56
5.4.1 Simulazione3: setup data (delta, Zernike, psf, rumore)	57
5.4.2 Simulazione4: fronte d'onda recuperato	58
5.4.3 Simulazione4: immagine a fuoco e recuperata	58
5.4.4 Simulazione4: immagine di input e recuperata	59
5.4.5 Simulazione4: Curve caratteristiche	59
5.5.1 Simulazione5: setup data (lena, Zernike, psf, propagazione)	61
5.5.2 Simulazione5: immagini di input selezionate	62
5.5.3 Simulazione5: fronte d'onda recuperato	62
5.5.4 Simulazione5: immagine di input e recuperata	63
5.5.5 Simulazione5: Curve caratteristiche	63
5.6.1 Simulazione6: setup data (2stelle, seeing, psf)	64
5.6.2 Simulazione6: fronte d'onda recuperato	65
5.6.3 Simulazione6: immagine di input e recuperata	65
5.6.4 Simulazione6: Curve caratteristiche	66
5.7.1 Immagine a fuoco della retina.	67
5.7.2 Immagine sfocata della retina.	68
5.7.3 Sezione immagine a fuoco e sfocata della retina	68
5.7.4 Simulazione7: setup data (retina)	69
5.7.5 Simulazione7: fronte d'onda recuperato	69
5.7.6 Simulazione7: immagine a fuoco e recuperata	70
5.7.7 Simulazione7: Curve caratteristiche	70

Capitolo 1

Introduzione

Il recupero di fase ed il problema di deconvoluzione sorge in diversi campi dell'ingegneria e della fisica applicata come la microscopia, la progettazione ottica, la cristallografia e l'astronomia. L'impostazione fisica del problema coinvolge il campo lontano di un'onda elettromagnetica generata da una sorgente monocromatica ed incoerente, figura 1.0.1. L'onda elettromagnetica passa attraverso un mezzo di rifrazione (o non omogeneo) che genera la distorsione del fronte d'onda, ed attraverso una lente sottile viene focalizzata su un rivelatore che ne misura l'intensità. Il piano del rivelatore è chiamato *piano immagine*, il piano in cui giace la distorsione è chiamato *piano pupilla* (o *piano di apertura*), mentre il piano in cui giace l'oggetto reale è chiamato *piano oggetto*. L'intensità risultante da una sorgente puntiforme è la funzione di Green o *Point Spread Function*¹ del sistema ottico. Quello a cui spesso ci si riferisce con *Phase retrieval problem*, è il recupero della fase di un'onda elettromagnetica dalla sola misura di intensità del campo quando la sorgente è puntiforme. Se il piano immagine si trova in una determinata regione relativamente alla focale della lente, al primo ordine (approssimazione di Fraunhofer), l'intensità catturata è il modulo quadro della trasformata di Fourier della funzione pupilla generalizzata [1]. In questo caso, il problema del phase retrieval è quello di determinare la fase del fronte d'onda elettromagnetico dalla misura dell'ampiezza nel dominio spaziale (piano oggetto) e nel dominio di Fourier (piano immagine).

Il problema diventa più complicato quando, al posto della sorgente puntiforme, l'oggetto è esteso e non conosciuto. Questa situazione sorge spesso in astronomia dove l'atmosfera causa aberrazioni al fronte d'onda. In questa situazione si vuole trovare simultaneamente la sorgente sconosciuta e l'aberrazione del fronte d'onda.

Fino al 1970 il problema del phase retrieval era purtroppo senza soluzione per numerose ragioni. In particolare, in una dimensione discreta il problema ha soluzioni multiple. Per limitare questo problema numerosi ricercatori hanno proposto limiti aggiuntivi per restringere il campo delle soluzioni. Nel 1972 Gerchberg e Saxton [7] proposero un algoritmo particolarmente semplice e vantaggioso per risolvere il phase retrieval problem in due dimensioni, sebbene la sue proprietà di convergenza non fossero ben approfondite. Nel 1981

¹La *Point Spread Function* o *PSF* è una funzione che descrive la distribuzione di luce sul piano focale, generata da uno strumento ottico per una sorgente puntiforme. Uno strumento ottico perfetto, cioè del tutto esente da aberrazioni, non produce immagini puntiformi di sorgenti puntiformi: infatti a causa della natura ondulatoria della luce, la diffrazione prodotta dall'apertura formata genera un'immagine tipicamente caratterizzata da frange con massimi e minimi di intensità. Nel caso particolare di un'apertura circolare l'immagine è formata da infiniti anelli concentrici alternativamente chiari e scuri, la cui intensità diminuisce da quello centrale a quelli periferici (figura di Airy).

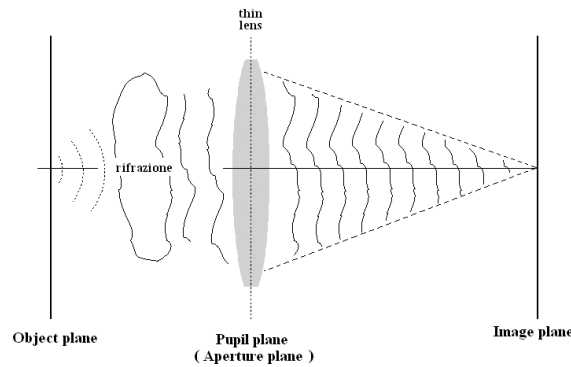


Figura 1.0.1: Modello di sistema ottico

Hayes mostrò che la soluzione in due dimensioni, se esiste, è quasi sicuramente unica e valida per rotazioni e spostamenti lineari. Un anno dopo Fienup [11] generalizzò l'algoritmo Gerchberg-Saxton ed analizzò molte delle sue proprietà di convergenza; in particolare verificò che le direzioni di proiezione, nell'algoritmo Gerchberg-Saxton, sono simili alle direzioni del metodo ai minimi quadrati di tipo steepest descent (*steepest descent least square methods*). Sempre nel 1982, Gonsalves [15] propose una soluzione stabile per il problema, più generale, della simultanea ricostruzione della fase e deconvoluzione con molte misure a diversità di fase. La soluzione al problema di deconvoluzione su molte misure a diversità di fase è chiamata *phase diversity*. Dall'introduzione dell'algoritmo Gerchberg-Saxton e del *phase diversity*, molte pubblicazioni sono state fatte per ciascuno di queste soluzioni. Con poche eccezioni degne di nota, tutti i metodi per risolvere il recupero del fronte d'onda e (simultaneamente) la deconvoluzione hanno come nucleo centrale l'algoritmo Gerchberg-Saxton ed il *phase diversity*. Dimostrare la convergenza di questi metodi non è semplice. In particolare, la non convessità degli insiemi di dominio è una limitazione fondamentale per gli algoritmi di proiezione. Il risultato di convergenza spesso fa riferimento, per l'algoritmo di proiezione, alla equivalente dichiarazione che l'errore nelle iterazioni non aumenti. Una dimostrazione matematica della convergenza non è lo scopo di questo lavoro, e può essere trovata in [13]. Il mio obiettivo principale è implementare e testare l'algoritmo di *phase retrieval-phase diversity* per applicazioni di sistemi ottici adattivi sensor-less.

Nel capitolo 2 introduco l'ottica adattiva ed il problema della distorsione atmosferica. Nel capitolo 3 descrivo il modello matematico per la diffrazione dell'immagine. Nello stesso capitolo formulo il problema di ottimizzazione associato al recupero dell'immagine. Nel capitolo 4 metto in dettaglio l'algoritmo Limited memory-BFGS e la ricerca di linea interna. Il capitolo 5 riporta i risultati di simulazione dell'algoritmo, mentre conclusioni e sviluppi futuri sono elencati nel capitolo 6.

Capitolo 2

Ottica adattiva

L'ottica adattiva (*AO - Adaptive Optics*) è una tecnologia usata per migliorare le prestazioni dei sistemi ottici, riducendo gli effetti della rapida variazione della distorsione ottica. È utilizzata in telescopi astronomici e sistemi di comunicazione laser per rimuovere gli effetti di distorsione atmosferica, e in sistemi di imaging retiniche per ridurre l'impatto delle aberrazioni oculari. L'ottica adattiva misura le distorsioni di un fronte d'onda elettromagnetico e le compensa con un modulatore di fase spaziale, come uno specchio deformabile o una matrice a cristalli liquidi.

L'AO fu originariamente immaginata da Horace W. Babcock nel 1953, per correggere le aberrazioni atmosferiche con uno specchio deformabile ed ottenere immagini limitate dalla diffrazione [?], ma non è entrata in uso comune finché i progressi nella tecnologia informatica, dei primi anni '90, non la resero una tecnica pratica. Dallo sviluppo in astronomia si è giunti al suo recente utilizzo nella scienza della visione; questi sono i due principali settori in cui l'ottica adattiva è impiegata.

Una vasta area di dispositivi tecnologici dipendono e sono interessati dall'ottica adattiva.

Il problema della fase: L'ottica adattiva è strettamente legata al problema denominato *phase retrieval problem* o *inverse problem* in ottica che a sua volta è soluzione del *phase problem*.

In fisica il problema della fase (*phase problem*) è il nome dato al problema della perdita di informazioni, riguardante la fase, che può verificarsi quando si effettua una misurazione fisica. Il nome stesso deriva dal campo della cristallografia a raggi x, dove il problema della fase deve essere risolto per determinare una struttura da dati di diffrazione. Il problema della fase è presente anche nel campo dell'imaging e dell'elaborazione dei segnali. Vari approcci sono stati sviluppati nel corso degli anni per risolverlo.

Con *phase retrieval problem* si intende la soluzione del problema della fase, ovvero dato un segnale complesso $F(\omega)$, di ampiezza $|F(\omega)|$ e fase $\phi(\omega) : F(\omega) = |F(\omega)| \exp i\phi(\omega)$, il recupero di fase (*phase retrieval*) consiste nel trovare la fase da un'ampiezza misurata che soddisfi un insieme di vincoli. Per esempio se $F(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$ un vincolo tipico sarebbe che $f(x)$ sia una funzione limitata, reale e positiva.

I rivelatori di luce, come lastre fotografiche o CCD, misurano solo l'intensità della luce che li colpisce. Questa misura è incompleta perché un'onda luminosa non è solo un'ampiezza (relativa all'intensità), ma anche una fase, che è persa sistematicamente in

questa misura. Nella diffrazione o in esperimenti di microscopia, la fase dell'onda spesso contiene informazioni preziose sul campione studiato.

In termini matematici più rigorosi il *phase retrieval problem* è sinonimo di metodi di deconvoluzione, termine che ben si interpreta andando a considerare e studiare il problema con gli strumenti dell'ottica di Fourier.

La deconvoluzione è più frequentemente riferita al problema della ricostruzione di immagini da una conoscenza solo parziale della sua trasformata di Fourier.

Tecniche di deconvoluzione trovano ampio impiego in molti settori della fisica applicata dell'astronomia e dell'ingegneria come ad esempio l'ottica, la microscopia, l'imaging in medicina (tomografia), il remote sensing e la cristallografia a raggi X.

Tuttavia, in molte applicazioni solo l'intensità può essere misurata, richiedendo il recupero della fase di Fourier. Ad esempio il recupero di fase può essere utilizzato per migliorare la PSF osservata da un telescopio; nella cristallografia a raggi x la distribuzione di densità degli elettroni è legata, dalla trasformata di Fourier, al modello di diffrazione generato dai raggi X che attraversano il cristallo. Anche in radio-interferometria o interferometria-ottica i risultati ottenuti hanno le informazioni della fase mancanti.

Il recupero di fase è intrinsecamente un problema inverso non lineare [18, 15, 13, 12].

Diversi interventi sono stati proposti in letteratura per recuperare la fase dai dati di ampiezza, tutti praticamente fondati sulla minimizzazione di uno specifico funzionale di costo. Inoltre, il recupero delle informazioni di fase è ulteriormente complicato dalla presenza del rumore. Il rumore sui dati misurati compromette l'affidabilità degli algoritmi di inversione, causando al processo di minimizzazione un intrappolamento in minimi locali, comunemente definiti come trappole, che portano alla falsa soluzione del problema. Vale la pena notare che l'unicità delle soluzioni per problemi di recupero di fase è in generale garantita a determinate condizioni [12, 13]. Inoltre, l'informazione disponibile a priori svolge un fondamentale ruolo nell'ottimizzazione e contribuisce in modo significativo a ridurre il mal condizionamento del problema.

2.1 Applicazioni principali

La deconvoluzione e l'ottica adattiva sono impiegate in molte applicazioni ingegneristiche, ad esempio nei sistemi di comunicazione ottici per migliorare le prestazioni di propagazione nello spazio libero ; in applicazioni laser per ottenere un buon profilo del fascio o una stabilizzazione del fascio ; in visione robotica, o in applicazioni di sorveglianza, (ancora in fase di sviluppo) per ottenere una visione di 20/20 (applicata ad occhiali, inizialmente per applicazioni militari) [24].

I settori principali sono di seguito brevemente esposti :

Astronomia

L'imaging astronomico è una delle applicazioni d'avanguardia che ha guidato la maggior parte dello sviluppo di tecniche di elaborazione dell'immagine. Le sfide tecniche da affrontare per gli astronomi, come raccogliere e interpretare le immagini e spettri continuerà a guidare la ricerca nella trasformazione dell'immagine.

Quando la luce di una stella o di un altro oggetto astronomico entra nell'atmosfera della Terra, la turbolenza atmosferica (introdotta, ad esempio, da strati di diversa temperatura e interazioni diverse della velocità del vento) può distorcere e spostare l'immagine in vari modi. Immagini prodotte da qualsiasi telescopio più grande di pochi metri sono offuscate da queste distorsioni. Un sistema di ottica adattiva tenta di correggere queste distorsioni.

Tomografia computerizzata

L'uso dell'imaging non invasivo in medicina, attraverso tecniche di tomografia assiale computerizzata (TAC) e tomografia ad emissione di positroni (*PET da positron emission tomography*), è diventata una parte fondamentale nella medicina moderna. Questi strumenti usano la ricostruzione dell'immagine per trasformare i dati misurati in una forma bi-tridimensionale più utile ed interpretabile. In radiologia la tomografia computerizzata, indicata con l'acronimo TC o CT (dall'inglese *computed tomography*), è una metodica diagnostica per immagini, che sfrutta radiazioni ionizzanti (raggi X) e consente di riprodurre sezioni (tomografia) corporee del paziente elaborate in modo tridimensionali. Per la produzione delle immagini è necessario l'intervento di un elaboratore di dati (computerizzata).

Microscopia

La microscopia è il settore tecnico che utilizza microscopi per visualizzare campioni ed oggetti. Ci sono tre rami ben noti di microscopia: microscopia ottica, elettronica, e microscopia a scansione. La microscopia ottica ed elettronica coinvolgono la diffrazione, la riflessione o rifrazione delle radiazioni elettromagnetiche del fascio di elettroni che interagiscono con l'oggetto da studiare, e la successiva raccolta di questa radiazione diffusa, al fine di costruire un'immagine. Questo processo può essere effettuato da una irradiazione ad ampio campo del campione (per la microscopia standard e la microscopia elettronica a trasmissione TEM) o tramite la scansione del campione con uno stretto fascio (per esempio microscopia elettronica a scansione SEM e microscopia a scansione laser confocale). La microscopia a scansione comporta l'interazione di una sonda di scansione con la superficie dell'oggetto di interesse. Lo sviluppo della microscopia ha rivoluzionato la biologia è uno strumento essenziale per la scienza. La deconvoluzione è necessaria quindi per estrarre i dati ed aumentarne le prestazioni.

Le ottiche adattive in immagini retiniche

Le distorsioni del fronte d'onda che entra nell'occhi attraverso la pupilla sono le aberrazioni oculari. Queste aberrazioni diminuiscono la qualità dell'immagine formata sulla retina, e a volte è necessario l'uso di occhiali o lenti a contatto. Nel caso di imaging della retina, la luce che fuoriesce dall'occhio porta distorsioni simili del fronte d'onda, che causa una incapacità di risolvere la struttura microscopica (cellule e capillari) della retina. Occhiali e lenti a contatto correggono le "aberrazioni di ordine basso", come defocus ed astigmatismo, che tendono ad essere stabili negli esseri umani per lunghi periodi di tempo (mesi o anni). Per il normale funzionamento visivo è sufficiente la correzione di questi modi, mentre è in genere insufficiente per ottenere la risoluzione microscopica della retina. Inoltre, "le aberrazioni di ordine superiore", come coma, aberrazione sferica, e trifoglio, devono essere corrette al fine di raggiungere una buona risoluzione microscopica.

La cristallografia a raggi X

E' una tecnica della cristallografia in cui l'immagine, prodotta dalla diffrazione dei raggi X attraverso lo spazio del reticolo atomico in un cristallo, viene registrata e quindi analizzata per rivelare la natura del reticolo. In genere, questo porta a determinare il materiale e la struttura molecolare di una sostanza.

2.2 Breve storia OA in Astronomia

L'ottica adattiva nasce nel 1953 quando Horace Babcock [?], all'Osservatorio di monte Wilson, propose per primo un metodo per la correzione automatica del deterioramento delle immagini di telescopi di terra a causa della turbolenza atmosferica (seeing) al fine

di ripristinare la complanarità del fronte dell'onda luminoso che incide sull'obiettivo del telescopio, così da avvicinarne il potere risolutivo effettivo a quello teorico.

Lo stesso concetto fu in seguito sviluppato indipendentemente da Linnick (1957) per migliorare le immagini astronomiche. La proposta, invece, della correzione delle aberrazioni del fronte d'onda senza sensore (*sensor-less*) è stato suggerito da Muller e Buffington [3] nel 1974, per tentare di correggere le aberrazioni del fronte d'onda senza l'uso di un sensore di fronte d'onda convenzionale.

Una pellicola riflettente e deformabile per via elettrostatica, una volta inserita nel cammino ottico strumentale, avrebbe potuto assumere secondo il Babcock le forme più convenienti a compensare in tempo reale le deformazioni (variabili) del fronte d'onda. Il concetto si rivelò troppo avanzato per le possibilità tecniche dell'epoca.

Il problema non tardò ad essere preso in considerazione, negli Stati Uniti, da alcuni settori della difesa militare interessati alla dirigibilità (tracking) via laser di missili e di proiettili-razzo, a partire dal 1970. Attenuatesi le esigenze di segretezza imposte dalle vicende della guerra fredda (fine anni 1980), le ricerche già effettuate sulla ricostruzione dei fronti d'onda della luce in propagazione entro l'atmosfera si dimostrarono utili per gli astronomi, interessati al miglioramento della resa ottica dei loro strumenti.

L'attuazione pratica del concetto di ottiche attive fu, in ambito civile, realizzata per la prima volta in quello che è stato il prototipo dei telescopi moderni di nuova tecnologia, il New Technology Telescope (NTT) dell' European Southern Observatory (ESO) a cui si conformarono tutti i successivi strumenti (ad esempio il TNG e il Very Large Telescope).

La necessità di introdurre la tecnica dell'ottica adattiva (e prima ancora quella attiva) fu motivata dall'esigenza di mantenere la struttura di supporto del telescopio abbastanza agile, sia per motivi di semplicità di puntamento e di inseguimento della sorgente, sia per motivi di costo.

L'ottica attiva si è rivelata decisiva per la costruzione di telescopi di grandi dimensioni, poiché ha consentito di limitare notevolmente il rapporto spessore-diametro dello specchio principale e di conseguenza il peso del telescopio stesso e dell'intero sostegno. In effetti, i telescopi di nuova tecnologia, sebbene costituiti con materiali tecnologicamente all'avanguardia per ciò che riguarda la dilatazione termica e la resistenza agli sforzi, si scostano dalla forma ottica ideale quando vengono portati nelle differenti configurazioni operative a differenti inclinazioni e quando si vengono a creare gradienti termici nell'edificio.

Tutti questi problemi in orbita, per definizione, non esistono, in quanto il peso risulta annullato dalla forza apparente centrifuga (la quale bilanciando la forza di gravità permette al telescopio-satellite di rimanere in orbita senza decadere). Inoltre un telescopio situato nello spazio, essendo fuori dall'atmosfera, non risente di tutte quelle turbolenze introdotte dalle correnti d'aria e dal movimento delle formazioni nuvolose, che affliggono inesorabilmente tutti telescopi terrestri.

Per realizzare un telescopio a terra è necessario un certo quantitativo di finanziamenti, i quali nel caso di un telescopio spaziale crescono esponenzialmente; per non parlare delle missioni di riparazione e/o mantenimento indispensabili, ognuna con costi spropositati.

Nonostante quindi fosse possibile escludere a priori tutti questi problemi osservativi con telescopi spaziali, era preferibile cercare delle soluzioni tecnologiche per compensare ed azzerare i difetti nocivi per l'osservazione derivanti dal posizionamento di un telescopio a terra.

2.3 Seeing

La causa principale che limita il potere risolutivo di tutti i grandi telescopi installati a livello del suolo è la turbolenza dell'atmosfera. L'atmosfera deve considerarsi, ai fini dell'utilizzo di un telescopio, come un ulteriore elemento ottico interposto tra quest'ultimo e la sorgente, ed il suo indice di rifrazione è diverso dall'unità e variabile nel tempo e nello spazio.

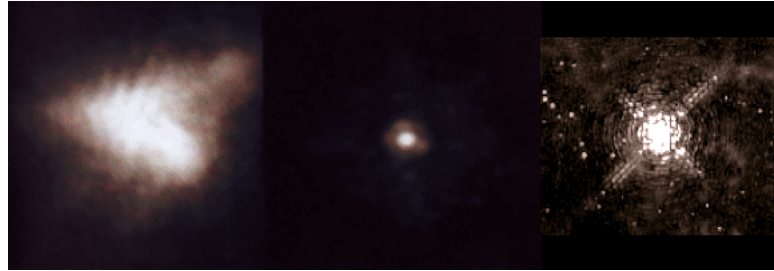


Figura 2.3.1: Immagini della stella Altair ottenuta in condizioni di seeing da $0.89''$ (a sinistra) e $0.12''$ (al centro) al telescopio da 60 pollici al Mount Wilson Observatory [J.C. Shelton et al., 1993] ; per confronto l'immagine destra, ripresa del telescopio spaziale Hubble, mostra come solo dall'esterno dell'atmosfera è possibile risolvere i vari anelli della figura di diffrazione (le tre immagini non hanno lo stesso fattore di scala).

In astronomia si indica con seeing tutto l'insieme di fenomeni che contribuisce al deterioramento della qualità delle immagini telescopiche, introdotto principalmente dagli strati più bassi e densi dell'atmosfera. La massa gassosa dell'atmosfera è, infatti, generalmente animata da movimenti termici convettivi a direzione verticale, o da scorrimenti laminari attivati dalle differenze barometriche. In ogni caso, i movimenti dell'aria danno facilmente origine a turbolenze, viscosità, frammentazione e ricomposizione di corpi gassosi (cellule) di entità assai diverse. In altri termini, il seeing è quel fenomeno dinamico che alterando in modo caotico ed imprevedibile l'indice di rifrazione dell'aria, è responsabile del deterioramento delle immagini telescopiche delle sorgenti celesti. Tale deterioramento è funzione della lunghezza d'onda e causa, pertanto, variazioni di colore della sorgente astronomica osservata, oltre che variazioni nello splendore e nella posizione apparente.

2.3.1 Seeing strumentale

Anche gli strumenti di osservazione (telescopi e loro apparati accessori) sono fonte di turbolenze a danno delle masse aeree che stanno a contatto diretto, all'esterno e all'interno di essi. L'aria rinchiusa nei tubi telescopici, o spettroscopici, può facilmente mettersi in circolazione convettiva allorché le pareti strumentali, cui essa viene a contatto, vadano soggette a modificare la propria temperatura. Ciò si verifica, per esempio, quando, aperta la cupola protettiva, la sala d'osservazione – insieme agli strumenti contenuti – tende a porsi in equilibrio termico con l'esterno. In alcuni casi, è stato adottato il sistema di creare il vuoto entro particolari strumenti a tubo chiuso (telescopi Schmidt, rifrattori con obiettivo a lente, pozzi spettroscopici) e, anche, di riempirli con gas inerte (elio) per equilibrare la pressione esterna. Nei riguardi di alcuni strumenti progettati per ricerche solari, la cupola protettiva è stata addirittura soppressa, sostituita direttamente dal sistema ottico del telescopio.

2.3.2 Descrizione matematica del seeing

Numerosi modelli teorici sono stati elaborati per descrivere matematicamente le fluttuazioni dell'indice di rifrazione in base ai parametri termodinamici dell'atmosfera. Dal punto di vista della comprensione teorica il primo passo è stato lo sviluppo da parte di Kolmogorov di una teoria della turbolenza negli anni 40. Un altro contributo fondamentale è stato quello dato da Fried, che ha studiato l'effetto dell'atmosfera mediante lo sviluppo in polinomi di Zernike e ha introdotto un importante parametro, la lunghezza di coerenza.

2.4 Teoria della diffrazione - Rappresentazione del Fronte d'onda - Polinomi di Zernike

2.4.1 Teoria della diffrazione

La descrizione dei fenomeni che si incontrano nella propagazione delle onde è racchiusa nella teoria della diffrazione. Ci sono un certo numero di teorie differenti della diffrazione e queste possono essere divise in due classi,

- vettoriale
- scalare

Trattamenti per la descrizione scalare della diffrazione includono il principio di Huygens, la teoria di Rayleigh-Sommerfeld, la formulazione di Kirchhoff, e un modello denominato spettro angolare delle onde piane [1, 2]. Le ben note approssimazioni di Fraunhofer e Fresnel possono essere derivate da uno di questi modelli, che sono equivalenti sotto alcune condizioni limite [1]. Teorie vettoriali comprendono un modello elettromagnetico rigoroso con condizioni al contorno ben definite. Ognuno di questi modelli teorici ha punti di forza e di debolezza, e ciascuno può essere impiegato in modo soddisfacente per alcune serie di problemi. La scelta di un adeguato modello si basa su ciò che è noto di un problema specifico.

La teoria scalare può essere considerata come la prima approssimazione della diffrazione ottica utile per descrivere le aberrazioni ottiche¹. Il punto di partenza è il principio di Huygens. Successivamente Fresnel, elaborato il principio di Huygens, affermò che l'ampiezza dell'onda in ogni punto equivale alla sovrapposizione delle ampiezze di tutte le onde secondarie in quel punto. Il Principio di Huygens-Fresnel è adeguato per una vasta gamma di fenomeni ottici, ed in seguito è stato dimostrato da Kirchhoff come questo principio si possa dedurre dalle equazioni di Maxwell [1, 2].

2.4.2 Diffrazione di Fresnel-Kirchhoff

La luce è un'onda elettromagnetica con campi elettrici e magnetici accoppiati che si propaga attraverso lo spazio. Trascurando la polarizzazione, il campo può essere descritto da una funzione scalare $U(\mathbf{x}, t)$ rappresentante il campo elettrico o magnetico. La dipendenza dal tempo del campo è armonica e può essere scritta

¹Aberrazione ottica ; per aberrazione di un sistema ottico si intende ogni deformazione dell'immagine rispetto all'oggetto reale dovuta non a difetti di costruzione del sistema, ma alle leggi generali della riflessione e della rifrazione. Si possono distinguere in aberrazioni assiali e aberrazioni extrassiali a seconda che l'oggetto sia posto sull'asse ottico del sistema o fuori di esso. Esempi di aberrazioni assiali sono l'aberrazione cromatica e l'aberrazione sferica, mentre esempi di aberrazioni extrassiali sono l'astigmatismo, il coma, la curvatura del campo, la distorsione e l'aberrazione cromatica extrassiale.

$$U(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}\{U(\mathbf{x}) \exp(-j\omega t)\}$$

dove ω denota la pulsazione angolare ($2\pi\nu$) della luce, e l'ampiezza complessa $U(\mathbf{x})$, dipende solamente dalle coordinate spaziali. Se entrambe le quantità $U(\mathbf{x}, t)$ e $U(\mathbf{x})$ rappresentano un'onda ottica, esse devono soddisfare l'equazione di Helmholtz,

$$\left[\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\mathbf{x}, t) = 0$$

ottenendo

$$[\nabla^2 - k^2] U(\mathbf{x}) = 0$$

L'equazione di Helmholtz deriva direttamente dalle equazioni di Maxwell in condizione di mezzo omogeneo, ed in assenza di sorgenti. La quantità k si chiama il numero d'onda, ovvero la costante di propagazione del mezzo ed è correlata alla velocità della luce c nel mezzo, alla frequenza angolare $\omega = 2\pi\nu$ e alla lunghezza d'onda λ nel vuoto da,

$$k = n \cdot \frac{\omega}{c} = n \cdot \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

con n indice di rifrazione del mezzo.

2.4.3 Polinomi di Zernike

Ogni fronte d'onda, ed ogni differenza tra fronte d'onda reale e fronte d'onda di riferimento, può essere espanso in una serie di polinomi. Questo si rivela molto utile dato che ogni termine del polinomio descrive una specifica aberrazione.

Molto spesso per descrivere le aberrazioni ottiche di un fronte d'onda si usano i polinomi di Zernike² [2, 28]. I polinomi Zernike hanno il vantaggio essere matematicamente ben definiti ed ortogonali, ed i termini di basso ordine sono correlati alle aberrazioni classiche come astigmatismo, coma e aberrazione sferica. Sebbene in interferometria si rappresentano spesso fronti d'onda con i polinomi di Zernike, i progettisti ottici sono più abituati ai polinomi di aberrazione di Seidel. Le aberrazioni di Seidel sono generalmente utilizzate, o derivate, per il tracciamento dei raggi, mentre quelle di Zernike sono usate per descrivere le aberrazioni sulla pupilla. È in genere possibile calcolare un polinomio di Zernike dai coefficienti di Seidel.

Una più dettagliata analisi sulle aberrazioni di Seidel e la loro distinzione da quelle di Zernike si può trovare in [2].

In aggiunta alla loro tipologia (sferica, coma, astigmatismo, curvatura di campo, ecc), le aberrazioni sono di solito specificate secondo l'ordine (terzo ordine, quinto ordine, ecc.), anche se a volte sono chiamate primarie, secondarie, ecc.

I polinomi di Zernike Z_n^m sono un insieme di funzioni ortogonali, definiti su una superficie circolare di raggio unitario e spesso espressi in coordinate polari (ρ, θ) , dove $\rho \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, (vedi tabella 2.1). Comunemente sono caratterizzati da ordine radiale n , e ordine azimutale m . Ogni polinomio è composto da tre parti: un fattore di normalizzazione $N_n^m(\rho)$, una parte dipendente da ρ (radiale) $Z_n^m(\rho)$, e una parte dipendente da θ (azimutale),

²I polinomi di Zernike sono stati introdotti per applicazioni in ottica nel 1934 da F. Zernike che li dedusse modificando leggermente i polinomi di Jacobi.

$$Z_n^m(\rho, \theta) = N_n^m \cdot R_n^m(\rho) \cdot \begin{cases} \cos m\theta & m \geq 0 \\ \sin m\theta & m < 0 \end{cases}$$

$$Z_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n-m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} \rho^{n-2s}$$

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1 + \delta_m}} \quad \delta_m = \begin{cases} 1 & m \neq n \\ 0 & m = n \end{cases} \quad \text{delta di Kronecker}$$

Il termine di normalizzazione rende i polinomi di Zernike ortonormali.

Tabella 2.1: polinomi di Zernike

j	n	m	polinomi di Zernike	Descrizione
1	0	0	1	costante
2	1	1	$2\rho \sin\theta$	tip
3	1	1	$2\rho \cos\theta$	tilt
4	2	1	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	defocus
5	2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$	astigmatismo
6	2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$	astigmatismo
7	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin\theta$	coma
8	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos\theta$	coma
9	3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$	trifoglio
10	3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$	trifoglio
11	4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	sferica

Spesso è usata una numerazione continua con unico indice $j = \frac{n(n+2)+m}{2}$, al posto dei due indici n e m , (vedi tabella 2.2).

Tabella 2.2: Conversione tra indice doppio e singolo nei polinomi di Zernike, il numero nella piramide è l'indice j

$n \setminus m$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						0					
1					1		2				
2				3		4		5			
3			6		7		8		9		
4		10		11		12		13		14	
5	15		16		17		18		19		20

Per un determinato ordine radiale $n = N$, ci sono un totale di $\frac{(N+1)(N-1)}{2}$ polinomi di Zernike, quindi m può assumere solo valori compresi tra $[-n : n]$ e del tipo $[-n : 2 : n]$.

Una generica funzione di fase si può espandere su un'apertura circolare come

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n,m} \alpha_n^m Z_n^m(\rho, \theta) = \sum_j \alpha_j Z_j(\rho, \theta),$$

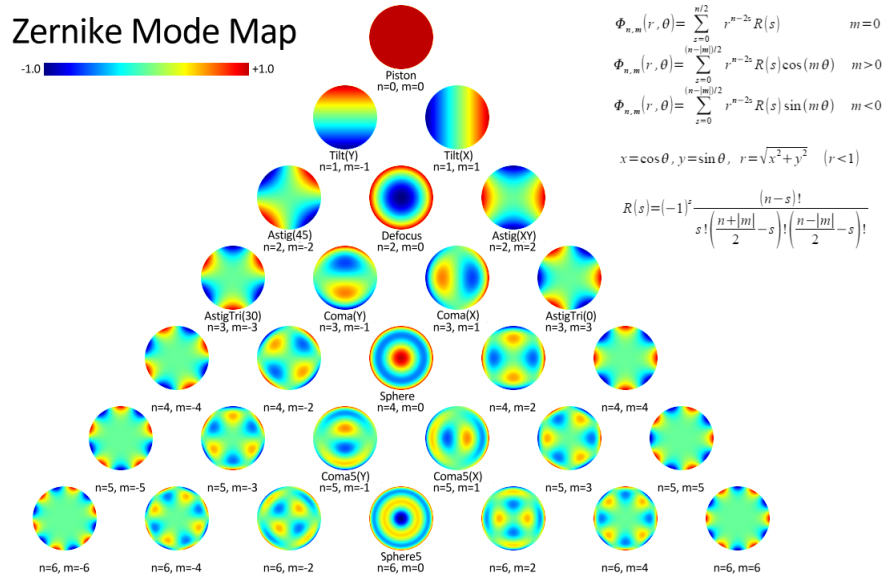


Figura 2.4.1: Modi del fronte d'onda per i primi 6 ordini dei polinomi di Zernike.

con α_n^m, α_j coefficiente (reale) di espansione del polinomio identificato con Z_n^m, Z_j , chiamato anche 'modo' di Zernike di ordine n (o j), (vedi figura 2.4.1).

In molti sistemi di ottica adattiva il fronte d'onda viene stimato utilizzando i coefficienti di un'espansione di Zernike, per poter poi pilotare un modulatore di fase (o lo specchio deformabile).

Alcuni modi di ordine basso sono mostrati in figura 2.4.2

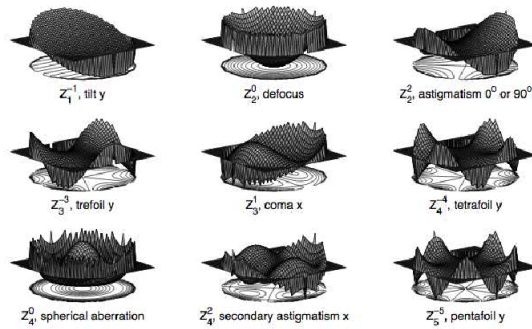


Figura 2.4.2: Alcuni modi di Zernike di basso ordine.

2.5 Come è composto un sistema di ottica adattiva

Un generico sistema di ottica adattiva per l'astronomia, presentato in figura 2.5.1, si compone dei seguenti componenti chiave:

- Sensore di fronte d'onda
- Modulatore di fase
- Computer di controllo

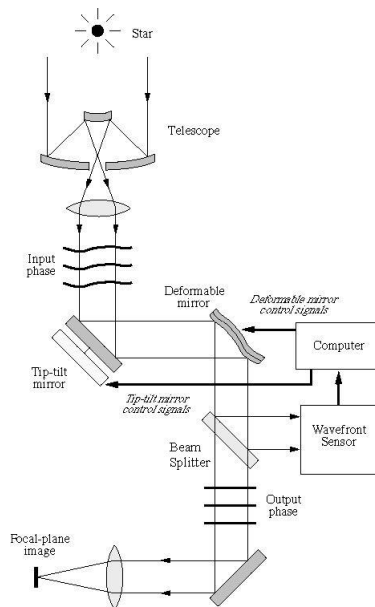


Figura 2.5.1: Sistema di ottica adattiva

L'idea che sta dietro l'ottica adattiva è molto semplice: il fronte d'onda proveniente dall'oggetto dopo aver attraversato il sistema ottico incontra il modulatore di fase (tipicamente uno specchio deformabile); successivamente il segnale viene separato da un beam splitter (divisore di fascio) che lascia passare il segnale destinato al CCD di ripresa deviando una parte restante verso il sensore che analizza il fronte d'onda; questo sensore ricava le informazioni riguardanti le deformazioni dell'onda e le trasferisce ad un computer di controllo che imposta la "forma" che lo specchio deve assumere per correggere le deformazioni.

La forma più semplice di ottica adattiva è la correzione 'tip-tilt', che corrisponde alla correzione dell'inclinazione del fronte d'onda in due dimensioni (equivalente alla correzione dell'offset di posizione dell'immagine). Questa operazione viene eseguita utilizzando uno specchio tip-tilt in rapido movimento con piccole rotazioni intorno a due suoi assi. Una parte delle molte aberrazioni introdotte dall'atmosfera può essere rimossa in questo modo.

Solitamente lo specchio deformabile non è il primario, ma uno specchio di rinvio posto prima del fuoco o sulla pupilla che, per le sue piccole dimensioni, risponde più facilmente e più velocemente alle sollecitazioni meccaniche, mentre dietro al primario un sistema analogo ma più lento provvede a compensare le deformazioni della superficie dovute alle flessioni e al peso dello stesso specchio (ottica attiva). Ci sono anche altri tipi di elementi deformabili: ad esempio si può ritardare localmente il fronte d'onda facendolo passare attraverso una superficie di cristalli liquidi il cui indice di rifrazione viene controllato da un computer; sono stati anche costruiti degli appositi specchi deformabili, montati su chip,

formati da un sottilissimo strato riflettente depositato su di un substrato, la cui forma viene alterata in maniera elettrostatica.

I requisiti tecnici per i sistemi di ottica adattiva includono il frame rate e la sensibilità del sensore di fronte d'onda, oltre alla frequenza massima che si può applicare all'elemento. A seconda del tempo di coerenza del mezzo aberrante in un dato sistema di ottica adattiva, le correzioni devono essere effettuate ad un ritmo elevato, spesso kHz.

La maggior parte dei sistemi di ottica adattiva tradizionali usa un wavefront sensing diretto per misurare la distorsione del fronte d'onda. Esempi di sensing diretto del fronte d'onda sono del tipo Shack-Hartmann, shearing interferometry ed a sensore di curvatura. Alcune di queste tecniche di rilevamento del fronte d'onda sono discusse in maggiore dettaglio nella sezione 2.5.2.

Per correggere la forma d'onda si modifica il profilo ottico della fase. Il principio fondamentale è che il profilo della fase di correzione deve essere otticamente coniugato con l'aberrazione di fase misurata, in modo da ottenere un fronte d'onda piatto ideale (distorsione nulla). Tuttavia, se il fronte d'onda non può essere determinato accuratamente o integralmente replicato dall'ottica, o se gli effetti di diffrazione sono dominanti, la coniugazione di fase non è accurata e la correzione viene limitata.

I modulatori di fase più usati sono gli specchi deformabili e le matrici a cristalli liquidi. Questi dispositivi di correzione di fase si basano sul controllo della differenza del percorso ottico (*OPD-optical path difference*) mostrato in Figura 2.5.2, che può essere scritto come, $OPD = n\Delta W$, dove n è l'indice di rifrazione ΔW è la distanza percorsa dall'onda fisica. La *OPD* è legata alla fase ϕ , come $\phi = 2\pi \cdot \frac{OPD}{\lambda}$. Gli specchi deformabili, che sono la tecnologia primaria per la correzione, modulano ΔW , operando in modalità di riflessione.

I modulatori di fase a cristalli liquidi (*LC-Liquid Crystal*) rappresentano un'alternativa a basso costo rispetto agli specchi; il loro funzionamento è basato sulla modulazione dell'indice di rifrazione n dello strato di cristalli liquidi, applicando un campo elettrico. I modulatori di fase a cristalli liquidi lavorano in modalità di trasparenza o riflettente [4].

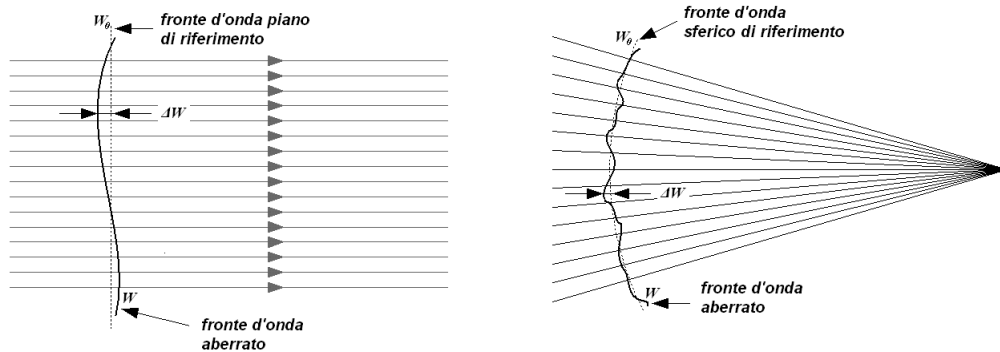


Figura 2.5.2: Deviazione di un fronte d'onda aberrato dal fronte d'onda di riferimento.

I modi di correzione del fronte d'onda attraverso questi modulatori di fase sono tradizionalmente suddivisi in due classi in base alla tecnica di compensazione

- zonale
- modale

Correttori di tipo zonale, come gli specchi segmentati a pistone e gli specchi tip-tilt, consentono il controllo individuale della fase su un insieme di sotto-sezioni fornendo una compensazione a gradini, mentre correttori di tipo modale utilizzano un insieme di funzioni derivabili (i modi, o funzioni di influenza) per approssimare la funzione di fase richiesta.

2.5.1 Dispositivi di correzione - modulatori di fase

I metodi di correzione del fronte sono tradizionalmente suddivisi in due classi secondo la tecnica di compensazione zonale e modale. Correttori zonali, come specchi a pistone e tip-tilt segmentati consentono il controllo individuale della fase su una serie di sotto-aperture consentendo una correzione di fase a gradini; correttori modali, come gli specchi bimorfi o specchi a membrana deformabile, utilizzano un insieme di funzioni derivabili (modi) per approssimare la funzione di fase necessaria [4]. Questi due tipi principali di dispositivi di correzione del fronte d'onda - specchi deformabili e modulatori spaziali di luce (*SLM-Spatial Light Modulators*) - sono descritti nelle sezioni seguenti.

2.5.1.1 Specchi deformabili

Il vantaggio principale degli specchi deformabili è la loro natura riflettente che comporta basse perdite, un aspetto importante nei sistemi astronomici e, in misura minore, nella scienza della visione, dove ci sono un numero limitato di fotoni.

Gli specchi deformabili in genere richiedono uno *stroke*³ di pochi micron in astronomia e fino a 10 micron per la scienza della visione e devono rispondere entro il termine di coerenza delle aberrazioni.

In passato ci sono state tre classi principali di specchi deformabili:

- Specchi segmentati con elementi tip-tilt singoli e due tipi di specchio con una superficie continua ,
- specchi bimorfi dove la curvatura della superficie speculare è modificata applicando una forza parallela alla superficie
- specchi piezo-elettrici (PZT), dove una pila di attuatori dietro la superficie a specchio spinge e tira lo specchio applicando una forza perpendicolare alla superficie.

Dispositivi più recenti sono gli specchi deformabili a membrana, spesso definiti come MEMs mirror, (sistemi micro-elettro-meccanici), perchè utilizzano la tecnologia MEMs.

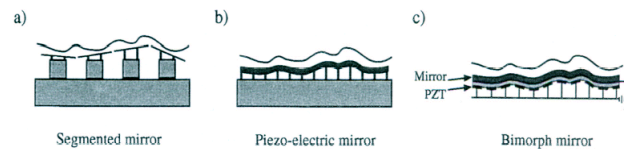


Figura 2.5.3: Tre classi di specchi deformabili.

³Lo *stroke* è la massima deformazione dello specchio.

2.5.1.2 SLM

I modulatori spaziali di luce sono dispositivi che hanno il vantaggio di essere molto compatti, leggeri e meno costosi degli specchi deformabili. Sono utilizzabili anche in trasmissione, effetto auspicabile per alcune applicazioni. Questi attributi li rendono utili in molte applicazioni, comprese quelle non tradizionalmente associate all'ottica adattiva convenzionale.

Tradizionalmente, ci sono due tipi principali di modulatore spaziale di luce LCD:

- Modulatori spaziali di luce indirizzati otticamente (*Optically Addressed-spatial light modulators*), in cui un'immagine bidimensionale controlla una intensità di uscita, un profilo di fase o di polarizzazione.
- Modulatori spaziali di luce indirizzati elettricamente (*Electric Addressed-spatial light modulators*), dove la modulazione è controllata da segnali elettrici.

2.5.2 Misura del fronte d'onda

La maggior parte dei sensori di fronte d'onda può essere suddivisa in due classi generiche: sensori nel piano di immagine e sensori nel piano di apertura. I sensori nel piano di apertura misurano il gradiente del fronte d'onda direttamente, mentre i sensori nel piano di immagine generalmente misurano la distribuzione di intensità e deducono da questo l'aberrazione del fronte d'onda. Il rilevamento nel piano di apertura può essere considerato come un rilevamento diretto mentre quello nel piano immagine solitamente come indiretto.

Anche se la maggior parte delle tecniche di correzione del fronte d'onda rientrano in queste due categorie, alcune tecniche non appartengono strettamente a questa classificazione. Il *phase diversity* è una tecnica che misura la fase con informazioni sul piano dell'immagine e non sul piano di apertura. Il *phase diversity* è descritto come metodo indiretto di rilevamento del fronte d'onda.

2.5.2.1 Rilevamento Diretto - *Direct Wavefront Sensing*

Nel rilevamento diretto, il dispositivo per misurare il fronte d'onda deve essere veloce e ad alta risoluzione spaziale per poter applicare la correzione in tempo reale. Metodi diretti forniscono informazioni sulla fase del fronte d'onda e questa informazione viene utilizzata per guidare un correttore di fronte d'onda come descritto alla sezione 2.5. Generalmente metodi diretti sono impiegati in scienza dell'atmosfera e della visione, dove la correzione deve essere fatta ad alta velocità un tasso più elevato ed è la forma più comune di correzione in ottica adattiva. Ulteriori discussioni sui sensori di fronte d'onda diretto sono presentati qui di seguito.

Shack-Hartmann Il sensore Shack-Hartmann [4, 32], figura 2.5.4, divide l'apertura del telescopio in una matrice di sotto-aperture più piccole ed una matrice di lenti viene utilizzata per produrre immagini multiple. Quando un fronte d'onda in arrivo è piano, tutte le immagini si trovano su una griglia regolare definita dalla geometria delle lenti. Un fronte d'onda distorto incidente sulla matrice di lenti causerà uno spostamento delle immagini dalle posizioni normali. Gli spostamenti dei baricentri delle immagini in due direzioni ortogonali x e y sono proporzionali alla pendenza media su x, y del fronte d'onda sulle sotto-aperture.

Se $\phi(r)$ è la fase del fronte d'onda, la pendenza in x del sensore è

$$x = \frac{\lambda}{2\pi S} \int_S \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

dove S è l'area delle sotto-aperture. La pendenza x è stimata dallo spostamento dei centroidi dell'immagine

$$x = \frac{\sum_{ij} x_{ij} I_{ij}}{\sum_{ij} I_{ij}} \quad (2.2)$$

con I_{ij} le intensità della luce sui pixel del sensore CCD, lo stesso vale per le posizioni y .

L'errore di misurazione dei centroidi dell'immagine è dovuto al rumore dei fotoni ed al rumore di lettura nel rivelatore. In pratica i sensori Shack-Hartmann utilizzati per oggetti estesi, spesso utilizzano un metodo di correlazione per determinare i baricentri e quindi la pendenza del fronte d'onda.

Il sensore Shack-Hartmann è acromatico ed il movimento dell'immagine è indipendente dalla lunghezza d'onda, fonti estese possono essere utilizzate nei limiti di misura delle sotto immagini.

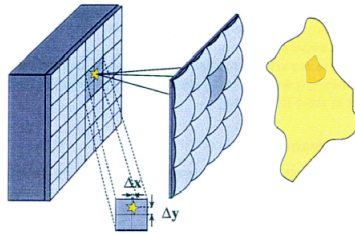


Figura 2.5.4: Rilevamento diretto di tipo Shack-Hartmann.

Sensore di Curvatura Un approccio completamente diverso da quello di Shack Hartmann è il sensore a rilevamento di curvatura del fronte d'onda[4, 32].

Esso si basa sulla misura della distribuzione di intensità in due piani diversi corrispondenti ad entrambi i lati di messa a fuoco, ed utilizza la differenza tra le distribuzioni normalizzate. Questa differenza è una misura della curvatura del fronte d'onda in ingresso della pupilla del sistema ottico.

L'immagine prima della messa a fuoco, è chiamata immagine intrafocale; l'immagine dopo la messa a fuoco è l'immagine extrafocale, come illustrato nella figura 2.5.5. L'immagine intrafocale (*inside plane*) sarà più luminosa nelle regioni che hanno una curvatura positiva e l'immagine sarà più scura in regioni con curvatura negativa così che l'intensità dell'immagine extrafocale (*Outside plane*) sarà invertita rispetto all' intensità misurate nell'immagine intrafocale. In linea di principio è necessaria solo una immagine di messa a fuoco per misurare la curvatura del fronte d'onda di una sorgente puntiforme.

Tuttavia, utilizzando entrambe le immagini intrafocale ed extrafocale si permette al sistema di lavorare meglio per diverse ragioni:

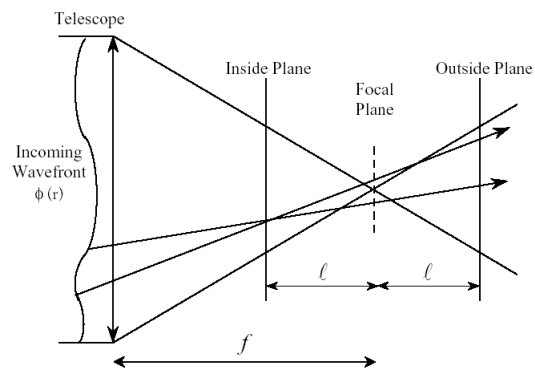


Figura 2.5.5: Rilevamento diretto sensore a rilevamento di curvatura. Una curvatura positiva nel punto di incidenza del fronte d'onda corrisponde ad un eccesso di intensità luminosa nel piano intrafocale ed ad una diminuzione di intensità nel piano extrafocale, e viceversa.

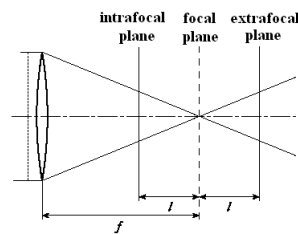


Figura 2.5.6: Fronte d'onda piatto focalizzato da una lente e piano intra- ed extra focale. In un sistema di ottica adattiva i due piani di misura sono molto vicini al piano immagine, 0.1% della distanza tra piano immagine e piano pupilla.

- (a) esiste compensazione automatica degli errori sistematici - variazione in efficienza quantica, guadagno elettronico, ecc.,
- (b) non vi è compensazione di scintillazione atmosferica, e
- (c) il segnale di controllo è semplice – sposta lo specchio deformabile, in modo che la differenza di intensità sia zero.

In un sistema di ottica adattiva a curvatura, l'obiettivo è di rendere l'intensità uguale su entrambi i lati di misura rispetto al piano focale, ciò si verifica quando il fronte d'onda è piatto. Le intensità delle due distribuzioni sono registrate nei due piani, inside e outside; ognuna a distanza l ; dal piano focale.

La risoluzione locale nella misurazione del fronte d'onda è determinata dalle dimensioni della distorsione: se la separazione l è troppo piccola, questa sfocatura è troppo piccola per essere misurata. Inoltre, se i pixel del sensore sono troppo grandi questa sfocatura non può essere risolta e i modi corrispondenti all'aberrazione di queste dimensioni non possono essere misurati. Così, la separazione l e la dimensione del pixel devono essere regolati secondo il grado di sensibilità necessaria, figura 2.5.6.

Al fine di ottenere il segnale misurato dalle immagini intrafocale ed extrafocale, dobbiamo considerare la propagazione del campo elettrico del fronte d'onda. Definendo la

direzione di propagazione dal piano pupilla al piano immagine come la direzione z e le due direzioni ortogonali come x e y , l'ampiezza complessa $U(x,y,z)$ del campo in un piano z è la radice quadrata dell'intensità $I(x,y,z)$ moltiplicato per il fasore complesso della fase del fronte d'onda $\varphi(x,y,z)$:

$$U(x,y,z) = \sqrt{I(x,y,z)} \exp(ik\phi(x,y,z)), \quad (2.3)$$

dove k è il numero d'onda ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) e λ è la lunghezza d'onda. La propagazione del campo a breve distanza, campo vicino, è definita dall'equazione di trasporto [1]:

$$\nabla I \nabla \phi + I \nabla^2 \phi + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

con $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ il gradiente e $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ il laplaciano.

L'ultimo termine nell'equazione, $\frac{\partial I}{\partial z}$, è il cambiamento di intensità in funzione della direzione di propagazione z . Il cambiamento di intensità inoltre è il risultato di due termini:

- $\nabla \phi$ è la derivata seconda del fronte d'onda, cioè la curvatura,
- $\nabla I \nabla \phi$ è il tilt del fronte d'onda ed ha importanza nei punti in cui ho un rapido cambiamento dell'intensità come ai bordi della pupilla.

La variazione di intensità dei piani intrafocale ed extrafocale è dovuto alla curvatura del fronte d'onda sulla pupilla e l'inclinazione del fronte d'onda ai bordi. L'utilità di questo metodo per l'ottica adattiva è stato riconosciuto in primo luogo da Francois Roddier nel 1987 [3] il quale ha presentato per la prima volta un concetto di sistema a curvatura per la correzione del fronte d'onda.

Utilizzando il vettore \mathbf{r} per la posizione x, y in un piano z , I_1, I_2 , per le immagini intrafocale ed extrafocale, ed l per la distanza intra- ed extrafocale, Roddier utilizzò l'approssimazione dell'ottica geometrica per derivare il segnale di curvatura

$$S(\mathbf{r}) = \frac{I_2(\mathbf{r}) - I_1(-\mathbf{r})}{I_2(\mathbf{r}) + I_1(-\mathbf{r})} = \frac{\lambda f \cdot (f - l)}{2\pi l} \left[\nabla^2 \phi\left(\frac{f \cdot \mathbf{r}}{l}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial n}\left(\frac{f \cdot \mathbf{r}}{l}\right) \delta_c \right] \quad (2.5)$$

dove f è la focale del telescopio, $\frac{\partial}{\partial n}$ è la derivata verso l'esterno (direzione normale) e δ_c è un impulso ai bordi della pupilla.

È importante sottolineare che la (2.5) è corretta se l'approssimazione dell'ottica geometrica è valida. L'ottica geometrica è valida se la distorsione della pupilla è più piccola della dimensione delle aberrazioni del fronte d'onda che vogliamo misurare.

Un modo fisico per comprendere l'approssimazione dell'ottica geometrica è il seguente. Come la luce si propaga dal piano pupilla al piano dell'immagine, ogni fronte d'onda inclinato si propagherà causando la concentrazione più o meno intensa della luce nelle regioni di curvatura, figura 2.5.7. Questo è ciò che vogliamo misurare, ma non vogliamo che la luce da una sotto-apertura interferisca troppo con la luce di un'altra sotto-apertura. La quantità di luce che viaggia "lateralmente" in una vicina sotto-apertura è data dall'angolo di seeing, $\frac{r_0}{\lambda}$, propagato alla distanza $(f - l)$. Noi vogliamo che questa distorsione sia più piccola della sotto-apertura d scalata dalle dimensioni della pupilla (causata dalla propagazione al piano immagine, ossia l/f). Così, per l'ottica geometrica deve essere valida l'equazione:

$$\frac{\lambda}{r_0} (f - l) < d \left(\frac{l}{f}\right)$$

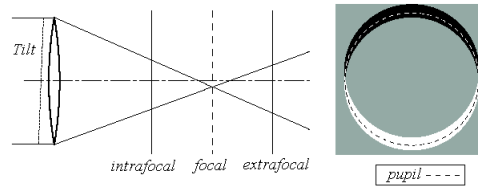


Figura 2.5.7: Propagazione di un fronte d'onda piatto ma inclinato, e curvatura risultante a destra. In bianco indico la curvatura positiva, in nero indico la curvatura negativa.

Se f è molto più grande di l , possiamo approssimare $(f - l)$ con f , ottenendo così

$$l > \frac{\lambda f^2}{r_0 d}$$

Altri tipi di rilevamento I due metodi di rilevamento di fronte d'onda discussi finora si basano sull'ottica geometrica. Un terzo metodo, lo *shearing interferometer*, utilizza l'ottica ondulatoria (*wave optics*). Qui, il fronte d'onda interferisce con una versione spostata della pupilla. Le frange d'interferenza vengono utilizzate per determinare la pendenza locale del fronte d'onda.

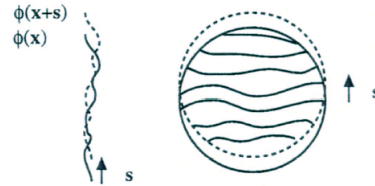


Figura 2.5.8: Principio del metodo shearing interferometer. Un fronte d'onda aberrato interferisce con una versione traslata dello stesso creando un modello di intreferenza dal quale è possibile ricavare la pendenza locale del fronte d'onda.

La figura 2.5.8 visualizza il principio di base.

Un altro tipo di sensore di fronte d'onda utilizzato è un sensore a piramide [32]. L'idea di base è che una piramide rifrangente viene inserita nel piano focale dividendo un'immagine in quattro parti. Ogni fascio è deviato in quattro fasci i quali formano quattro immagini sul rivelatore CCD, in modo simile, in linea di principio, al knife test di Foucault.

2.5.2.2 Rilevamento indiretto - *Indirect Wavefront Sensing*

Le tecniche indirette non misurano direttamente il fronte d'onda, ma utilizzano alcune informazioni riguardanti il fronte d'onda per fornire il segnale all'elemento correttivo. In questo senso non sono sensori di fronte d'onda in sé, ma un elemento di un sistema a circuito chiuso che opera per migliorare la qualità dell'immagine e attraverso questo correggere le aberrazioni del fronte d'onda. Tecniche indirette comprendono, nitidezza dell'immagine

(*image sharpness*), la diversità di fase (*phase diversity*) e il recupero di fase (*phase retrieval*) e queste tecniche sono descritte nelle sezioni seguenti. Metodi indiretti sono utilizzati più spesso nelle applicazioni industriali e medicali. Una delle principali tecniche indirette è il *phase diversity*. Altre tecniche comprendono vari metodi di correzione, ad esempio la deconvoluzione della PSF [9, 16]. La tecnica della diversità di fase è descritta nella sezione seguente.

Phase Diversity Il recupero di fase (*phase retrieval*) [15], è stato proposto come alternativa ai metodi convenzionali di rilevamento del fronte d'onda per il controllo di un sistema di ottica adattiva. Utilizza l'output principale del sistema ottico per stimare il fronte d'onda. Una modifica, chiamata diversità di fase (*phase diversity*), utilizza due o più immagini contemporaneamente. Una rappresentazione generale della tecnica *phase diversity* può essere visto in figura 2.5.9.

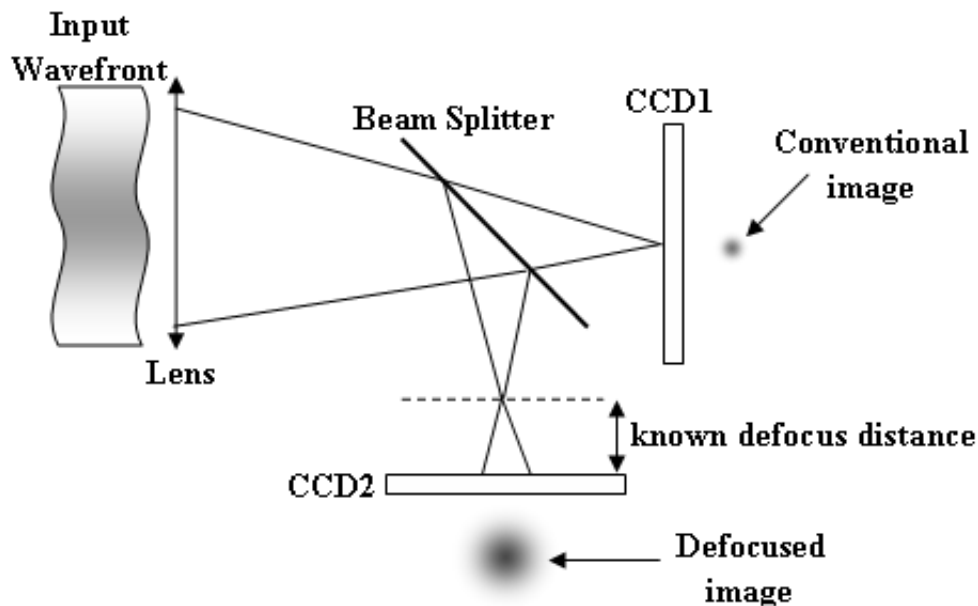


Figura 2.5.9: Principio della tecnica Phase diversity .Vengono rilevate due immagini, una delle quali è defocalizzata ad una distanza nota introducendo una diversità quadratica, questo permette di determinare la fase del fronte d'onda.

Il *phase diversity* utilizza due o più immagini di un oggetto esteso per rendere la stima congiunta dell'oggetto e del fronte d'onda distorto. La diversità è introdotta semplicemente con una componente quadratica misurando l'immagine in vari piani focali. Il fronte d'onda può essere stimato mediante i coefficienti di Zernike, che possono anche essere utilizzati per guidare il sistema di ottica adattiva. La letteratura sul *phase diversity* è ampia ed una revisione è stata recentemente presentata da Gonsalves [15].

Il metodo a diversità di fase offre diversi vantaggi rispetto ad altri metodi di rilevamento delle aberrazioni [31]. L'hardware ottico è essenzialmente un beam splitter ed un secondo rivelatore. La tecnica è meno suscettibile ad errori sistematici introdotti dall'hardware, e si basa su un riferimento esterno, cioè l'oggetto che viene ripreso. La tecnica funziona bene

anche per oggetti estesi ed ogni fotone viene utilizzato per la stima sia dell'immagine che dell'aberrazione.

Un modello matematico del phase diversity è descritto nel capitolo 3.

2.6 Funzioni di qualità ottica

Per descrivere gli effetti e il degrado di un oggetto elaborato con tecniche di imaging servono alcune funzioni di trasferimento così definite: la Point Spread Function (PSF) di un'immagine, l' Optical Transfer Function (OTF), la Modulation Transfer Function (MTF) e il rapporto di Strehl (SR). Il loro legame si può vedere nella figura 2.6.1.

2.6.1 Point Spread Function

La PSF descrive la distribuzione tridimensionale della luce sul piano focale di un sistema ottico per una sorgente puntiforme. Essa può essere rappresentata da

$$PSF = |\mathcal{F}\{P(x, y)\}|^2$$

dove $P(x, y)$ è la funzione pupilla e \mathcal{F} denota la trasformata di Fourier. La PSF per un sistema ottico perfetto, basato su elementi circolari, la funzione di "Airy", che deriva dalla teoria della diffrazione di Fraunhofer. Questo modello è usato anche per determinare la risoluzione di Rayleigh per due sorgenti puntiforme. Se le due sorgenti di luce si sovrappongono in modo tale che i centri delle immagini sono più vicini di quanto lo sia il raggio del disco di Airy, le immagini sono considerate irrisolvibili. Il limite di risoluzione di Rayleigh è dato da,

$$r = 1.22 \cdot \frac{\lambda f}{D}$$

dove λ , è la lunghezza d'onda della luce, f la distanza focale e D il diametro dell'apertura.

2.6.2 Optical Transfer Function e Modulation Transfer Function

La funzione di trasferimento ottica (OTF) può essere rappresentato da

$$I(f) = OTF(f) \cdot O(f)$$

qui f è la frequenza spaziale, I è l'immagine e O rappresenta l'oggetto. Questa funzione descrive il cambiamento del modulo e della fase della trasformata di Fourier dell'oggetto nel processo di imaging. Il modulo della OTF è chiamato *MTF-Modulation Transfer function*. Per l'imaging incoerente $|OTF(f)| \leq 1$. In genere, la *MTF* decresce all'aumentare della frequenza, quindi, piccoli dettagli nell'immagine (le alte frequenza) sono indeboliti ed alla fine persi.

E' noto che per qualsiasi sistema ottico $|OTF(f)| = 0$ per $|f| \geq fc$, dove $fc = \frac{D}{\lambda}$ si chiama frequenza di taglio, e D è la dimensione massima dell'apertura.

La relazione tra la *PSF* e *OTF* è la trasformata di Fourier, come si può vedere nella figura 2.6.1, quindi se si conosce una delle due è possibile ricavare anche l'altra.

Il rapporto tra l'aberrazione di fase e la qualità delle immagini è quantificato, in un sistema di imaging di elevata qualità, con il **rapporto Strehl**, definito come il rapporto tra l'intensità centrale della funzione di diffusione puntiforme aberrata e la funzione puntiforme limitata dalla diffrazione (immagine ideale):

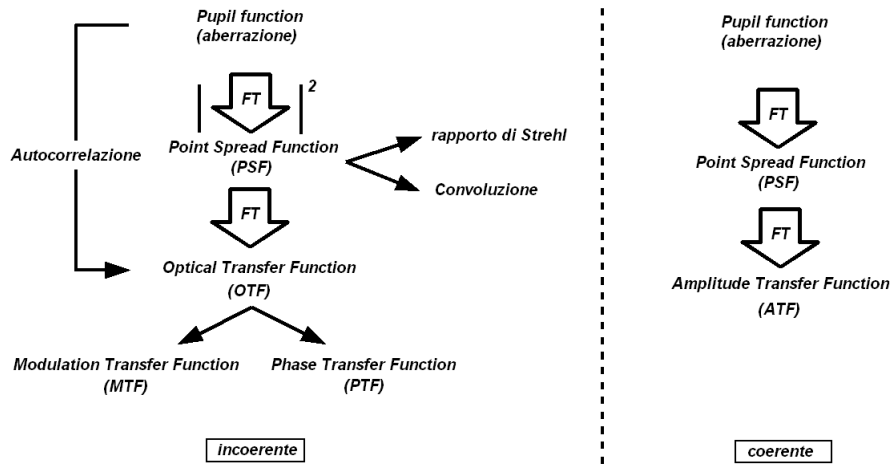


Figura 2.6.1: Rapporti tra le funzioni di qualità delle immagini.

$$SR = \frac{\max PSF_{seeing}}{\max PSF_{unaberrated}} = \frac{I(0,0)_{aberrated}}{I(0,0)_{unaberrated}}$$

dove $I(\eta, \xi)$ è la *Intensity PSF*, e (η, ξ) sono le coordinate spaziali nel piano immagine. Dalla proprietà di trasferimento di Fourier ne segue che $P(0) = \int P(u) du$, e che il rapporto di Strehl è proporzionale all'integrale della OTF su tutte le frequenze.

Capitolo 3

Phase retrieval: Formulazione matematica

3.1 Modello matematico di diffrazione dell'immagine

Un'immagine può essere descritta matematicamente usando sia una descrizione continua che discreta su ciascuno dei domini (spaziale o della frequenza).

Per la semplicità dell'esposizione formulo inizialmente la descrizione in termini del continuo lasciando la discretizzazione alla fine.

Il fronte d'onda è rappresentato come un fasore complesso, $p \exp i\phi$, con ampiezza p e fase ϕ . Nel sistema ottico ideale di figura 1.0.1 si assume che il fronte d'onda sia piano e che ogni deviazione da questo sia considerata una aberrazione nel sistema ottico. Le perturbazioni del fronte d'onda si riflettono sul termine di fase ϕ e si possono presentare in ogni piano perpendicolare all'asse di propagazione.

In prima approssimazione, i dati registrati nel piano immagine sono una proiezione geometrica lungo l'asse di propagazione. Di conseguenza, si considera la fase del fronte d'onda come l'aberrazione o la fase di una funzione pupilla generalizzata, $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $P(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) \exp i\phi(\mathbf{x})$, che si trova nel piano pupilla. Il supporto di $p(\mathbf{x})$ descrive la geometria dell'apertura nel piano pupilla, e $\phi(\mathbf{x})$ descrive le imperfezioni ottiche che provocano il cambiamento lungo il cammino ottico dell'onda. Per una analisi più approfondita si veda [1, 2].

Il sistema ottico ideale di figura 1.0.1 ed il fenomeno della distorsione può essere modellizzato come un operatore di convoluzione. L'immagine d risultante da una sorgente f che emette un'onda ottica piana, incoerente e monocromatica è data dall'equazione integrale di Fredholm del primo tipo in due dimensioni,

$$d(u, v) = [Sf](u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u, v, \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.1)$$

Qui S è l'operatore di convoluzione :

$$Sf(u, v) = s \star f(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u - \xi, v - \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.2)$$

Il nucleo della convoluzione s , ovvero l'operatore di distorsione è la *point spread function* (*PSF*) del sistema ottico. Se la luce emessa dalla sorgente, chiamata anche 'oggetto', è

incoerente, la PSF (*o iPSF - incoherent PSF*) parametrizzata da p e ϕ ha la forma, (ottica di Fourier [1]) :

$$s(\phi(\mathbf{x})) = |\mathcal{F}^{-1}(p(\mathbf{x}) \exp i\phi(\mathbf{x}))|^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.3)$$

dove $p(\mathbf{x})$, funzione pupilla o di apertura, ed è uguale a 1 all'interno dell'apertura del telescopio (obiettivo) e zero altrimenti

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & x \in \text{Apertura} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\phi(\mathbf{x})$ è la funzione di fase che caratterizza l'immagine deformata dal fronte d'onda incidente; \mathcal{F} denota la trasformata di Fourier bidimensionale (2D-FT)

$$(\mathcal{F}h)(\omega) = h(\mathbf{x}) \exp i2\pi \mathbf{x} \cdot \omega dx, \quad \omega \in \mathbb{R}^2 \quad (3.4)$$

e $i = \sqrt{-1}$.

Il problema di recuperare l'oggetto f tanto quanto la fase ϕ dai dati d e dall'ampiezza $p(\mathbf{x}) = A$, è un problema inverso mal-posto (ill-posed inverse problem), lineare in f (deconvoluzione) e non lineare in ϕ (ricostruzione del fronte d'onda).

Il phase retrieval è un caso specifico della 3.2 nel caso in cui $f = \delta$, funzione delta di Dirac.

Nel phase diversity, invece, molti insiemi di dati, d_k , $k = 1, \dots, m$, sono raccolti con l'obiettivo di trovare la fase incognita in comune. Gli insiemi di dati sono chiamati 'immagini di diversità'. Le 'immagini di diversità' sono generate aggiungendo una aberrazione di fase conosciuta, θ_k , $k = 1, \dots, m$, a quella non conosciuta sul supporto della pupilla. La più semplice distorsione da realizzare è il defocus, modellizzato dalla forma quadratica

$$\theta_k(\mathbf{x}) = a_k(x_1^2 + x_2^2) \quad (3.5)$$

dove il parametro a_k è determinato dalla distanza di defocus. θ_k è la funzione di defocus nel k -esimo piano immagine di misura.

Il modello complessivo per la formazione dell'immagine e del tipo :

$$d = S[\phi] \star f + n$$

dove d è l'immagine, distorta e rumorosa, f è l'immagine vera non conosciuta, o l'oggetto, n è il rumore additivo ed S è l'operatore di distorsione. Con più di una immagine di diversità si ottiene

$$d_k = S[\phi + \theta_k] \star f + n_k \quad k = 1, \dots, K \quad (3.6)$$

mentre nel caso di aberrazioni variabili nel tempo si prendono più immagini in tempi diversi per ogni k -esimo piano di misura (*Multiframe Blind Deconvolution*) con oggetto comune f ,

$$d_{ik} = d_k(t_i) = S[\phi(t_i) + \theta_k] \star f + n_k \quad k = 1, \dots, K \quad ; \quad i = 1, \dots, T \quad (3.7)$$

dove K è il numero di 'canali' o immagini di diversità e T è il numero di intervalli di tempo (*time frame*). Per entrambi gli ultimi due modelli $\theta_1 = 0$.

Nella forma più semplice con una coppia di canali ($K = 2$) e un solo time frame ($T = 1$) si ha :

$$\begin{cases} d_1 = s[\phi] \star f + n_1 \\ d_2 = s[\phi + \theta] \star f + n_2 \end{cases}$$

Un primo metodo lineare ed intuitivo per tentare di risolvere la deconvoluzione è la semplice applicazione di un filtro che inverti l'equazione (3.6). Questa inversione è generalmente ill-posed. Questo significa che piccole e limitate deviazioni dei dati di ingresso, comportano una deviazione grande, e non limitata, sulla soluzione di uscita.

Hadamard definì un problema come ben-posto (well-posed) se :

1. Per ogni insieme di dati, esiste una soluzione.
2. La soluzione è unica.
3. La soluzione dipende continuamente sui dati

Un problema si definisce ill-posed se non è well-posed.

Molti problemi di ricostruzione delle immagini violano uno o più di uno di queste condizioni. Per esempio, nel phase retrieval ci sono più soluzioni possibili, anche con le limitazioni sulla positività delle immagini. Inoltre data la formula (3.2) e nota la proprietà commutativa di convoluzione ($S \star f = f \star S$), si vede che non si può distinguere l'oggetto dalla PSF senza ulteriori informazioni, perchè si possono scambiare a vicenda.

Per trasformare il problema da ill-posed a well-posed serve una regolarizzazione e l'aggiunta di altre informazioni (limitazioni dei domini, informazioni aggiuntive ed indipendenti sulle caratteristiche della fase o dell'oggetto).

In genere gli algoritmi lineari per la deconvoluzione (inverse filter, pseudo inverse filter, Weiner filter, Constrained least-square filter) si applicano in un singolo passo, sono molto veloci ma limitati nelle possibilità di recupero. Questo ha portato allo sviluppo di algoritmi iterativi non lineari.

I metodi non lineari non eseguono l'inversione come quelli lineari, ma usando un approccio iterativo producono approssimazioni successive sempre migliori dell'immagine oggetto, finchè una condizione di uscita non viene raggiunta. Lo svantaggio di questi metodi è che richiedono più tempo per eseguire le iterazioni.

Il problema ai minimi quadrati, per la funzione di errore o obiettivo, viene risolto in modo iterativo piuttosto che in modo diretto. Insieme alla funzione di errore si utilizza la derivata di tale funzione nei confronti dell'immagine, per un approccio iterativo di discesa a gradiente (gradient descent method). Per aumentare la velocità di convergenza spesso si applicano metodi del gradiente coniugato (conjugate gradient methods). In modo simile al metodo a discesa del gradiente agisce la tecnica di proiezione su insiemi convessi (Projections onto convex sets - POCS). Un operatore di proiezione non-espansivo impone i limiti mappando ciascun punto non appartenente agli insiemi convessi nel punto più vicino appartenente agli insiemi convessi e lasciando inalterati gli altri punti [13]. I limiti possono essere imposti su entrambi i domini, 'dominio immagine' e 'dominio di Fourier'. Ciascuna iterazione POCS riduce la dimensione degli insiemi in cui può esistere la soluzione.

L'applicazione che più ha avuto successo e che rappresenta questo tipo di deconvoluzione non lineare è l'algoritmo Gerchberg-Saxton (GS). Durante ogni iterazione GS, il recupero avviene imponendo le informazioni conosciute nel dominio di Fourier e nel dominio immagine finchè non viene raggiunta la convergenza necessaria. L'algoritmo GS di base conosciuto come *error-reduction algorithm*, spesso ha una convergenza lenta. Gli sviluppi successivi ottenuti da Fienup denominati algoritmo base input-output (*basic input-output*, *BIO*) e algoritmo ibrido input-output (*Hybrid input-output*, *HIO*), ne hanno accelerato la convergenza e hanno eliminato alcuni problemi di stagnazione [13].

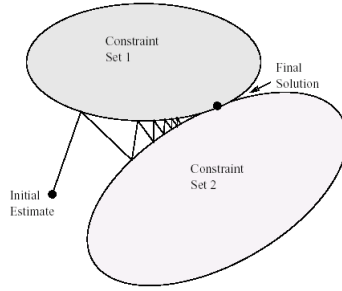


Figura 3.1.1: Diagramma concettuale di ricostruzione con metodo di proiezione su insiemi convessi (POCS).

3.2 Formulazione e risoluzione del problema di ottimizzazione

Il sistema di equazione (3.7) è lineare in f (deconvoluzione) e non lineare in ϕ . Per stimare la fase ϕ e l'oggetto f dai dati misurati d , si applica un criterio di fit-to-data gaussiano ovvero si definisce il funzionale di costo (funzione obiettivo) come una misura ai minimi quadrati (*least squares*) dell'errore:

$$J_{data}[\vec{\phi}, f] = \left\| \frac{1}{2KT} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K s[\phi_t + \theta_k] \star f - d_{k,t} \right\|^2 \quad (3.8)$$

dove $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_T)$ e $\|\cdot\|$ indica la norma standard in L^2 . Una considerazione comune in ottica adattiva è che l'ampiezza del fronte d'onda nel supporto della pupilla è costante ed unitaria. Questo limite può essere aggiunto come 'minima penalità' nella funzione obiettivo.

Dato che deconvoluzione e recupero di fase sono problemi ill-posed ho instabilità rispetto alle perturbazioni dei dati. E' necessario aggiungere una regolarizzazione. La forma più usata è la regolarizzazione di Tikhonov, così che inserendo i termini di regolarizzazione si ottiene il funzionale di costo completo

$$J_{full}[\vec{\phi}, f] = J_{data}[\vec{\phi}, f] + \gamma J_{object}[f] + \alpha J_{reg}[\vec{\phi}] \quad (3.9)$$

Qui i parametri di regolarizzazione α, γ sono numeri reali positivi, ed i funzionali di regolarizzazione forniscono stabilità rispettivamente per le perturbazioni su f e su ϕ , inserendo ulteriori informazioni a priori.

Per la regolarizzazione dell'oggetto si prende la "minima informazione preventiva"

$$J_{object}[f] = \frac{1}{2} \|f\|^2 \quad (3.10)$$

il che corrisponde alla condizione minima che l'oggetto abbia intensità definita. Per la regolarizzazione del termine di fase ci sono molte scelte. Uno studio di queste è dato in [16].

Definito

$$J_{reg}[\vec{\phi}] = J_{reg}[\phi_1, \dots, \phi_T] = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \|L\phi_t\|^2 \quad (3.11)$$

la scelta del termine L determina la regolarizzazione della fase. Come minima assunzione che la fase abbia intensità finita si prende $L = I$. Un ulteriore vincolo sulla fase come funzione derivabile (*smoothness*) è utile imponendo L come operatore differenziale, tipicamente un Laplaciano. Nella situazione della turbolenza atmosferica si adoperava un modello di processo aleatorio di Von Karman. Questo modello è del secondo ordine, stazionario, isotropico con media nulla ed è caratterizzato dalla densità spettrale di potenza, $\Phi(\omega) = \frac{C_1}{(C_2 + |\omega|^2)^{11/6}}$, con $\omega = (\omega_x, \omega_y)$ frequenza spaziale. Per la fase si prende il funzionale di regolarizzazione

$$J_{phase}[\phi_1 \dots \phi_T] = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \langle \Phi^{-1} \mathcal{F}\{\phi_t\}, \mathcal{F}\{\phi_t\} \rangle \quad (3.12)$$

dove $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)g^*(\omega)d\omega$, e $*$ indica il complesso coniugato.

3.3 Funzione di costo ridotta e suo gradiente

Utilizzando il teorema di deconvoluzione e il fatto che la trasformata di Fourier preserva la norma in L^2 (Teorema di Parseval), è possibile esprimere il funzionale di costo completo in termini e nel dominio della trasformata di Fourier. I termini maiuscoli indicano le trasformate di Fourier rispettivamente di $F = \mathcal{F}\{f\}$, $D_{k,t} = \mathcal{F}\{d_{k,t}\}$ ed $S_{tk} = S_k[\phi_t] = \mathcal{F}\{s[\phi_t + \theta_k]\}$,

$$J_{data}[\vec{\phi}, F] = \frac{1}{2KT} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \|S_k[\phi_t] \cdot F - D_{k,t}\|^2 \quad (3.13)$$

$$J_{object}[f] = \frac{1}{2} \|f\|^2 = \frac{1}{2} \|F\|^2 \quad (3.14)$$

$$J_{phase}[\vec{\phi}] = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \langle \Phi^{-1} \mathcal{F}\{\phi_t\}, \mathcal{F}\{\phi_t\} \rangle$$

$$J_{full}[\vec{\phi}, F] = \frac{1}{2KT} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \|S_k[\phi_t] \cdot F - D_{k,t}\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|F\|^2 + \frac{\alpha}{2} J_{phase}[\phi_1, \dots, \phi_T] \quad (3.15)$$

Da notare che la regolarizzazione dell'oggetto (3.14) è quadratica e la dipendenza del funzionale di costo sull'oggetto (3.13) è quadratica. Tuttavia l'Hessiano riferito all'oggetto del funzionale di costo completo (3.15) è simmetrico e positivo con autovalori vincolati da γ . Ponendo il gradiente rispetto all'oggetto uguale a zero, si ottiene un'equazione lineare la cui soluzione rende l'oggetto una minimizzazione di J_{full} .

Dalla 3.15 si ottiene un problema di minimizzazione con un grande numero di variabili incognite. Con matrici dell'immagine di $n_x \times n_y$ pixel, si hanno $(T + 1)n_x n_y$ incognite. Come in [8, 9] si elimina l'oggetto e si riducono le incognite di $n_x n_y$.

Ponendo $\frac{\partial J}{\partial F} = 0$ e dalle (3.13), (3.14), e (3.15) si ottiene la rappresentazione di Fourier dell'oggetto.

$$F[\vec{\phi}] = \frac{P[\vec{\phi}]^*}{Q[\vec{\phi}]} \quad (3.16)$$

dove

$$P[\vec{\phi}] = \sum_{kt} D_{k,t}^* S_k[\phi_t] \quad Q[\vec{\phi}] = \gamma + \sum_{kt} |S_k[\phi_t]|^2 \quad (3.17)$$

l'asterisco * indica il complesso coniugato e $|\cdot|$ indica il modulo componente per componente. Data una stima della fase $\vec{\phi}$, si può ottenere la stima dell'oggetto f attraverso la trasformata di Fourier inversa di $F[\vec{\phi}]$. Il termine γ ale denominatore inoltre fornisce stabilità prevenendo la divisione per piccole quantità o per zero.

Sostituendo la (3.16) nelle (3.13), (3.15) si ottiene il funzionale di costo ridotto

$$J_{reduced}[\vec{\phi}] = J_{reduced\ data}[\vec{\phi}] + \alpha J_{phase}[\vec{\phi}] \quad (3.18)$$

con

$$J_{reduced\ data}[\vec{\phi}] = \sum_{kt} \|D_{k,t}\|^2 - \left\langle \frac{P[\vec{\phi}]}{Q[\vec{\phi}]}, P[\vec{\phi}] \right\rangle \quad (3.19)$$

ovvero

$$J_{reduced\ data}[\vec{\phi}] = \sum_{kt} \|D_{k,t}\|^2 - \left\| \frac{\sum_{kt} D_{k,t}^* S_k[\phi_t]}{\gamma + \sum_{kt} |S_k[\phi_t]|^2} \right\|^2 \quad (3.20)$$

Il gradiente del funzionale di costo ridotto ha la seguente rappresentazione,

$$(g[\vec{\phi}])_t = -2 \sum_{k=1}^T \text{Imag}(H_{tk}^* \mathcal{F}(\text{Real}(h_{kt} \mathcal{F}^{-1}(V_{tk})))) + \alpha (g_{reg}[\vec{\phi}])_t \quad \text{per } t = 1, \dots, T; \theta_1 = 0 \quad (3.21)$$

e

$$H_{tk} = p \exp i(\phi_t + \theta_k) \quad h_{tk} = \mathcal{F}^{-1}(H_{tk}) \quad (3.22)$$

$$s_{tk} = |h_{tk}|^2 \quad S_{tk} = \mathcal{F}(s_{tk}) \quad (3.23)$$

$$V_{tk} = F^* D_{tk} - |F|^2 S_{tk} \quad (3.24)$$

(per i dettagli vedere appendice B di [16]), $g_{reg}[\vec{\phi}]$ è il gradiente del funzionale $J_{phase}[\vec{\phi}]$, in accordo con la scelta di L in (3.12).

L'obiettivo è minimizzare la (3.18) per recuperare la fase ϕ . Per poterlo fare è necessario un algoritmo efficace. Proprio per questo motivo si usa un metodo quasi-Newton, o secante, conosciuto come *limited memory BFGS* (L-BFGS). L'oggetto f è ricostruito in un secondo stadio.

Capitolo 4

Metodi numerici

Il problema da analizzare è la minimizzazione di una funzione nonlineare $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, nel caso in cui il numero di variabili è elevato, e dove è disponibile sia una espressione analitica di J che l'espressione del gradiente $g = \nabla J$. I metodi più usati per la risoluzione sono: (i) metodo di Newton e sue variazioni, (ii) metodi a gradiente coniugato, (iii) metodi quasi-Newton limitati in memoria; (vedere [5]).

Dalla precedente trattazione si vede come questi metodi sono impiegati nelle due principali implementazioni del phase retrieval, Gerchberg-Saxton e Phase Diversity. Nel seguente capitolo descrivo il metodo GS (che fa parte dei metodi a gradiente coniugato) per poi soffermarmi su una più ampia spiegazione del metodo di ottimizzazione scelto per l'attività di questa tesi, (metodo quasi-Newton limitato in memoria).

4.1 Algoritmo Gerchberg-Saxton (GS)

L'algoritmo Gerchberg-Saxton (GS) fu il primo metodo usato per risolvere l'inverse problem. Consiste fondamentalmente nell'imporre alternativamente le limitazioni conosciute su ciascun dominio del problema, dominio di Fourier e dominio spaziale dell'immagine. È una tecnica POCS.

L'algoritmo GS è uno schema iterativo di phase retrieval che fu originariamente sviluppato da R.W. Gerchberg e W.O. Saxton nel 1972 (ma non matematicamente per problemi di stagnazione) e successivamente esplorato in dettaglio da J. Fienup (1982) che descrisse la sua natura di error reduction methods (ER) su insiemi di proiezione convessi. Una trattazione rigorosamente matematica si può trovare in [11].

L'algoritmo richiede l'acquisizione di due misure di intensità su due piani diversi e l'assunzione di una trasformazione lineare tra il campo elettrico dal primo piano al secondo. Per la trasformazione spesso si assume la trasformata di Fourier bidimensionale, tuttavia l'algoritmo può essere usato con qualsiasi trasformazione che conservi l'energia (ad esempio la propagazione di Fresnel). L'algoritmo basato sulla propagazione diretta ed inversa della trasformata di Fourier è anche classificato come *Iterative Transform Algorithm (ITA)*. Il diagramma a blocchi nella figura 4.1.2 descrive il metodo generale.

Si assume di conoscere le distribuzioni di ampiezza nel piano di apertura e nel piano immagine. Esprimo l'ampiezza complessa dell'onda nel piano di apertura con $A(x, y) \exp i(\phi(x, y))$ e nel piano immagine come $B(u, v) \exp i(\theta(u, v))$; con (x, y) e (u, v) esprimo le coordinate nei due piani considerati, A e B sono ottenute direttamente dalla radice quadrata delle

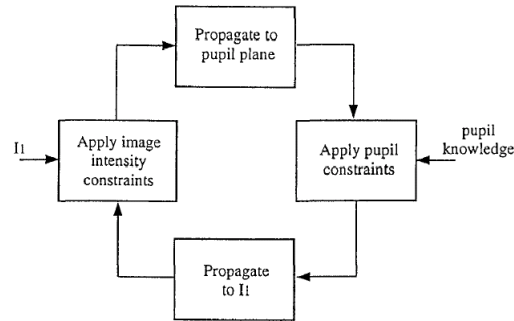


Figura 4.1.1: Diagramma a blocchi del metodo Error Reduction.

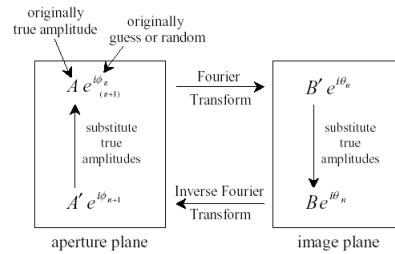


Figura 4.1.2: Schema Gerchberg-Saxton tra l'iterazione n-esima ed (n+1)-esima.

distribuzioni di intensità nei due piani. Nel caso in cui ho una sola misura di intensità nel piano focale, l'ampiezza $A(x, y)$ nell'apertura si considera costante.

L'algoritmo inizia costruendo l'ampiezza complessa nel piano di apertura con una stima iniziale della fase sconosciuta $\phi_n(x, y)$. Inizialmente si pone una fase casuale o nulla. Attraverso la trasformata di Fourier di $A(x, y) \exp i(\phi_n)$ calcolo il campo nel piano immagine. Il modulo trovato si sostituisce con il valore misurato $B(u, v)$, mentre la fase $\theta_n(u, v)$ viene mantenuta. A questo punto si inverte l'operazione di propagazione con la trasformata inversa di Fourier e si sostituisce il nuovo valore di ampiezza trovato con quello conosciuto sull'apertura $A(x, y)$ mentre si mantiene la nuova fase $\phi_{n+1}(x, y)$, figura 4.1.2.

Si ripete questo processo per molte iterazioni finché l'errore quadratico medio, tra intensità misurata e stimata non raggiunge un livello accettabile. La convergenza del metodo è dimostrata attraverso il teorema di Parseval [32]. Malgrado le molte iterazioni necessarie, il metodo è molto veloce perché le operazioni primarie sono singole FFT. Una variazione utile di questo metodo, consiste nel misurare l'intensità non nel piano focale (*in focus*) ma in una posizione fuori fuoco (*out of focus*). In questo modo si può aumentare la precisione e diminuire il tempo di convergenza del metodo.

Le condizioni fondamentali per la caratteristica di convessità dei domini, per il dominio oggetto sono che l'oggetto sia reale nonnegativo e nullo all'esterno del supporto della pupilla. Generalmente il dominio immagine (di Fourier) non è convesso; in molti casi pratici, però, in cui conosco il modulo nel dominio immagine (da misure) e so per certo come agisce la trasformata di Fourier, il dominio immagine è invece convesso. Ci sono ulteriori

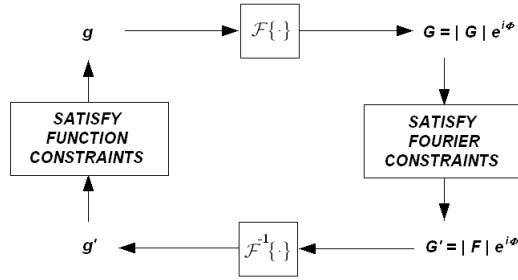


Figura 4.1.3: Diagramma a blocchi dell'algoritmo Error-Reduction (GS)

limitazioni: la prima, legata al modo di rivelamento del campo nel dominio immagine, è l'eliminazione dei pixel saturati (*bad pixel*), la seconda che il diametro dell'oggetto ricostruito non superi il diametro dell'oggetto reale (che corrisponde a metà del diametro di autocorrelazione).

4.1.1 Algoritmi di Fienup

J.R. Fienup introdusse tre tipologie di algoritmi di tipo *Input-Output* per avere una convergenza più veloce rispetto all'*error reduction* - GS di figura 4.1.3:

- Output-Output (che copre l'algoritmo Gerchberg-Saxton)
- Basic Input-Output (BIO)
- Hybrid Input-Output (HIO)

Le equazioni in sintesi dell'*error reduction* sono :

$$G_k(\mathbf{u}) = |G_k(\mathbf{u})| \exp[i\phi_k(\mathbf{u})] = \mathcal{F}\{g_k(\mathbf{x})\} \quad (4.1)$$

$$G'_k(\mathbf{u}) = |F(\mathbf{u})| \exp[i\phi_k(\mathbf{u})] \quad (4.2)$$

$$g'_k(\mathbf{x}) = |g'_k(\mathbf{x})| \exp[i\theta'_k(\mathbf{x})] = \mathcal{F}^{-1}\{G'_k(\mathbf{u})\} \quad (4.3)$$

$$g_{k+1}(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})| \exp[i\theta_{k+1}(\mathbf{x})] = |f(\mathbf{x})| \exp[i\theta'_k(\mathbf{x})] \quad (4.4)$$

Separando le prime tre equazioni dall'ultima, che fa riferimento all'iterazione successiva, si può rimodellare il ragionamento con uno schema ingresso-uscita (*Input-Output*), figura 4.1.4. Si va poi ad agire sulla funzione d'ingresso dell'iterazione successiva in modo da portare l'uscita nella direzione di convergenza.

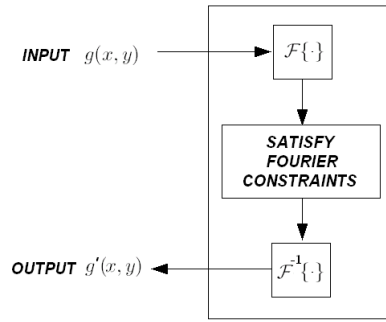


Figura 4.1.4: Diagramma a blocchi base degli algoritmi di Fienup *Input-Output*

La funzione d'ingresso in questo modo non deve soddisfare i limiti del dominio oggetto, rendendo l'algoritmo più flessibile.

Se si vuole in uscita una variazione $\beta\Delta g(x)$ è intuitivo considerare il cambiamento all'uscita $g_{k+1}(\mathbf{x}) = g_k(\mathbf{x}) + \beta\Delta g(\mathbf{x})$ con

$$\Delta g_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & x \notin \gamma \\ -g'_k(\mathbf{x}) & x \in \gamma \end{cases} \quad (4.5)$$

dove γ è l'insieme di punti in cui $g'(x)$ viola i limiti del dominio oggetto e β costante.

Quindi dove si rispettano le limitazioni la funzione non viene cambiata mentre dove vengono violate si modifica la funzione nella direzione voluta. Se la nuova funzione ingresso è formata con

$$g_{k+1}(\mathbf{x}) = g_k(\mathbf{x}) + \beta\Delta g(\mathbf{x}) = \begin{cases} g_k(\mathbf{x}) & x \notin \gamma \\ g_k(\mathbf{x}) - \beta g'_k(\mathbf{x}) & x \in \gamma \end{cases} \quad (4.6)$$

ottengo il metodo Basic Input-Output (BIO).

Scegliendo invece come

$$g_{k+1}(\mathbf{x}) = g'_k(\mathbf{x}) + \beta\Delta g(\mathbf{x}) = \begin{cases} g'_k(\mathbf{x}) & x \notin \gamma \\ g'_k(\mathbf{x}) - \beta g'_k(\mathbf{x}) & x \in \gamma \end{cases} \quad (4.7)$$

si ottiene il metodo Output-Output. Da notare che con $\beta = 1$ ho l'algoritmo GS.

Unendo invece la prima equazione della (4.7) con la seconda della (4.6) si ottiene il metodo HIO

$$g_{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} g'_k(\mathbf{x}) & x \notin \gamma \\ g_k(\mathbf{x}) - \beta g'_k(\mathbf{x}) & x \in \gamma \end{cases} \quad (4.8)$$

che utilizza un principio simile ad una retroazione negativa.

Uno schema utile per capire come il metodo GS faccia parte dei metodi a gradiente coniugato è quello di figura 4.1.5 e l'analisi dettagliata si trova in [11].

Questi risultati portarono a nuove applicazioni e sviluppi del phase retrieval anche nel campo dell'elaborazione delle immagini, in dispositivi di calibrazione e riduzione di aberrazioni statiche, in sistemi di ottica adattiva, metrologia ottica e misura di superfici. Tecniche basate su questo tipo di phase retrieval sono state adoperate per la calibrazione

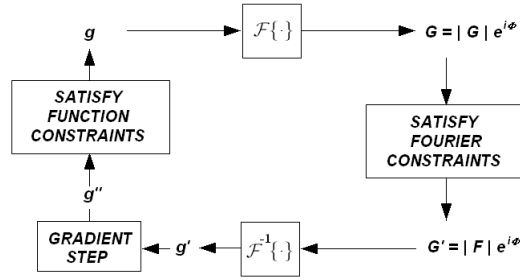


Figura 4.1.5: Diagramma a blocchi del metodo di ricerca a gradiente coniugato evidenziato da Fienup

di sistemi ottici adattivi per il telescopio spaziale Hubble, nonché per il suo allineamento e la sua riparazione[20, 22].

4.2 Limited Memory Optimization (L-BFGS)

Il metodo di ottimizzazione Limited memory BFGS (L-BFGS) è stato descritto da Nocedal (1980) ed è identico al più conosciuto metodo BFGS, sviluppato indipendentemente da Broyden, Fletcher, Goldfarb, e Shanno. L'unica differenza è nella memorizzazione delle matrici. L'utente decide il numero m di correzioni BFGS da immagazzinare, e fornisce una matrice simmetrica e definita positiva H_0 , che approssima l'inverso dell'Hessiano di J . Durante le prime m iterazioni il metodo è come quello BFGS; invece per $k > m$ H_k è ottenuto applicando m aggiornamenti BFGS di H_0 usando le informazioni delle m precedenti iterazioni.

In seguito denoto x ed f come la discretizzazione della fase $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_T)$ e dell'oggetto f , con $x, f \in \mathbb{R}^n$. Dato che $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile (o C^∞ , o *smooth*), considerando l'espansione di Taylor al secondo ordine di $J(x)$ alla k -esima iterazione,

$$J(x_k + \Delta x) = J(x_k) + \nabla J(x_k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T B_k \Delta x \quad (4.9)$$

dove B_k è l'approssimazione della matrice Hessiana valutata in x , ($B_k = \text{Hess } J(x_k)$ derivata parziale seconda di J), e $\nabla J(x_k)$ il gradiente valutato in x_k .

Il gradiente dell'espansione (4.9), rispetto a Δx è

$$\nabla J(x_k + \Delta x) \approx \nabla J(x_k) + B_k \Delta x \quad (4.10)$$

e, posto a zero, si ottiene il passo di Newton

$$\Delta x = -B_k^{-1} \cdot \nabla J(x_k) \quad (4.11)$$

(chiamata anche equazione secante¹).

La variabile sconosciuta è x_k e $\Delta x = (x_k - x_{k-1})$ è la direzione di ricerca.

¹In una dimensione trovare B e applicare il passo di Newton con il nuovo valore è equivalente al metodo 'secante'. Nel caso multidimensionale B è sotto determinata.

L'aggiornamento del passo alla successiva iterazione, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \Delta x$, è ricavato con il gradiente $\nabla J(x_k)$ e l'inversa dalla matrice Hessiana approssimata, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, in modo da soddisfare l'equazione quasi-Newton $B_k \Delta x = \nabla J(x_k + \Delta x) - \nabla J(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k B^{-1} \nabla J(x_k) \quad (4.12)$$

con $\alpha_k \in \mathbb{R}$ la lunghezza del passo, nella direzione di ricerca Δx , scelta per soddisfare le *condizioni di Wolfe*.

Sempre nel nuovo punto, calcolo il nuovo gradiente $\nabla J(x_{k+1})$ e la differenza $y_k = \nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_k)$ per ricavare la nuova approssimazione della matrice Hessiana B_{k+1} o direttamente la sua inversa $H_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$, secondo le formule di tabella 4.1:

Tabella 4.1: Approssimazioni della matrice Hessiana B_{k+1} e sua inversa H_{k+1}

Metodi	B_{k+1}	$H_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$
DFP	$\left(I - \frac{y_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k}\right) B_k \left(I - \frac{\Delta x_k y_k^T}{y_k^T \Delta x_k}\right) + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T \Delta x_k}$	$H_k + \frac{\Delta x_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k} - \frac{H_k y_k y_k^T H_k^T}{y_k^T H_k y_k}$
BFGS	$B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T \Delta x_k} - \frac{B_k \Delta x_k (B_k \Delta x_k)^T}{\Delta x_k^T B_k \Delta x_k}$	$\left(I - \frac{y_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k}\right)^T H_k \left(I - \frac{y_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k}\right) + \frac{\Delta x_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k}$
Broyden	$B_k + \frac{y_k - B_k \Delta x_k}{\Delta x_k^T \Delta x_k} \Delta x_k^T$	$H_k + \frac{(\Delta x_k - H_k y_k) y_k^T H_k}{y_k^T H_k \Delta x_k}$
SR1	$B_k + \frac{(y_k - B_k \Delta x_k)(y_k - B_k \Delta x_k)^T}{(y_k - B_k \Delta x_k)^T \Delta x_k}$	$H_k + \frac{(\Delta x_k - H_k y_k)(\Delta x_k - H_k y_k)^T}{(\Delta x_k - H_k y_k)^T y_k}$
Broyden Family	$(1 - \varphi_k) B_{k+1}^{BFGS} + \varphi_k B_{k+1}^{DFP}, \varphi \in [0, 1]$	

La proprietà fondamentale del metodo BFGS è che se B_k è definita positiva (SPD) e α_k è scelta per soddisfare le *condizioni di Wolfe* allora B_{k+1} è definita positiva.

Una approssimazione lineare di $B_0 = I$ è spesso sufficiente per fornire una rapida convergenza.

4.2.1 Condizioni di Wolfe

Nel problema di minimizzazione non limitata, le condizioni di Wolfe sono un insieme di disuguaglianze per realizzare una ricerca di linea inesatta (*inexact line search*) specialmente in metodi quasi-Newton.

La ricerca di linea inesatta è un modo efficiente per calcolare una lunghezza del passo accettabile in modo da ridurre sufficientemente la funzione obiettivo (*objective function*), così da minimizzarla. L'algoritmo di ricerca di linea può usare le condizioni di Wolfe come un obbligo per ogni tentativo di α prima di trovare una nuova direzione.

Descritta una funzione ϕ ristretta alla direzione d_k come

$$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha_k d_k) \quad (4.13)$$

una lunghezza di passo α_k si dice che soddisfa le condizioni di Wolfe se sono rispettate le seguenti due disuguaglianze :

$$\begin{aligned} i) \quad & f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k d_k^T \nabla f(x_k) \\ ii) \quad & d_k^T \nabla(x_k + \alpha_k d_k) \leq c_2 d_k^T \nabla f(x_k) \end{aligned} \quad (4.14)$$

con $0 < c_1 < c_2 < 1$; c_1 è scelta spesso di piccolo valore mentre c_2 è più grande. Nocedal fornisce alcuni esempi di valori di $c_1 = 10^{-4}$ e $c_2 = 0.9$ per metodi Newton o quasi-Newton e $c_2 = 0.1$ per metodi del gradiente coniugato nonlineari (*nonlinear conjugate*

gradient methods). La prima disuguaglianza *i*) è conosciuta come la regola di Armijo (*Armijo rule*) e la *ii*) come la condizione di curvatura (*curvature condition*); *i*) assicura che il passo α_k decresca *f* 'sufficientemente', e *ii*) assicura che la pendenza sia stata ridotta sufficientemente. Le condizioni di Wolfe, tuttavia, possono risultare in un valore per la lunghezza del passo che non è vicino ad un minimo per ϕ . Se modifichiamo la condizione di curvatura nella seguente ,

$$ii a) \quad |d_k^T \nabla(x_k + \alpha_k d_k)| \leq c_2 |d_k^T \nabla f(x_k)| \quad (4.15)$$

allora *i*) e *ii a*) formano la condizione forte di Wolfe (*strong Wolfe conditions*), e forza α_k a stare vicino ad un punto critico (*critical point*) di ϕ .

La ragione principale per imporre le condizioni di Wolfe in un algoritmo di ottimizzazione dove $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ è per permettere la convergenza del gradiente a zero. In particolare, se il coseno dell'angolo tra d_k e il gradiente,

$$\cos\theta_k = \frac{\nabla f(x_k)^T d_k}{\|\nabla f(x_k)\| \|d_k\|} \quad (4.16)$$

è limitato distante da zero e la *i*) e la *ii*) sono mantenute, allora $\nabla f(x_k) \rightarrow 0$

Un motivo in più , nel caso dei metodi quasi-Newton è che con $d_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$, dove la matrice B_k è aggiornata dalla formula BFGS o DFP, allora se B_k è definita positiva (SPD) la *ii*) implica B_{k+1} anche lei definita positiva.

4.2.2 Limited Memory BFGS/Line Search Method

Definisco la notazione

$$d_k \equiv \Delta x \quad (4.17)$$

$$s_k \equiv x_{k+1} - x_k \quad (4.18)$$

$$y_k \equiv \nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_k) \equiv g_{k+1} - g_k \quad (4.19)$$

data l'approssimazione iniziale B_0 risulta

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{(B_k s_k)(B_k s_k)^T}{s_k^T B_k s_k} \quad (4.20)$$

Se B_k è definita positiva ed $y^T s$ è positiva ($y^T s > 0$), allora è garantito che B_{k+1} è definita positiva. Se valgono inoltre le condizioni di J differenziabile (o C^∞ o *smooth*), x_0 sufficientemente vicino al minimo x_* , B_0 sufficientemente vicina a $B[x_*]$, e $B[x_*]$ definita positiva (SPD); il metodo BFGS converge rapidamente. In altre parole è garantito che d_k è una direzione di discesa : $J(x_k + \alpha_k d_k) < J(x_k)$ con α sufficientemente piccolo.

Una formula ricorsiva per l'inversa H è

$$H_{k+1} = \left(I - \frac{s_k y_k^T}{y_k^T s_k}\right) H_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k} \quad (4.21)$$

Il metodo L-BFGS mantiene al massimo N coppie di vettori $\{(s_k y_k), \dots, (s_{k-N+1} y_{k-N+1})\}$ ed N passi di recursione, se $k > N$ applico la recursione per $k, k-1, \dots, k-N$.

Algorithm 4.1 Algoritmo quasi-Newton/Line Search

```

k = 0;
x0 = stima iniziale per x*
inizio iterazioni quasi-Newton
  gk = gradJ(xk)      % calcolo del gradiente
  Bk approssimazione SPD di Hess J(xk)
  dk = -Bk-1gk      % calcolo del passo quasi-Newton
  αk = argminα>0J(xk + αkdk)      % line search
  xk+1 = xk + αkdk      % nuova stima sella soluzione
  k = k + 1
fine iterazioni quasi-Newton

```

Algorithm 4.2 Algoritmo (L-BFGS)

-
- (1) scelgo x_0 stima iniziale
 scelgo una approssimazione iniziale dell'Hessiano B_0
 prendo $0 < c_1 < \frac{1}{2}$, $c_1 < c_2 < 1$
 set $k = 0$
 - (2) $d_k = -H_k g_k$
 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
 (con α_k che soddisfa le condizioni di Wolfe).
 - (3) dato $m = \min\{\tilde{k}, m - 1\}$
 trovo H_{k+1} con $\{y_j, s_j\}_{j=k-\tilde{m}}^k$ per recursione.
 - (4) $k = k + 1$
 torna a (2)
-

Capitolo 5

Risultati di simulazione

In questa sezione presento i risultati ottenuti applicando l'algoritmo L-BFGS.

Il primo passo del processo di simulazione è quello di generare la funzione di fase ovvero il fronte d'onda $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2)$, la funzione quadratica di diversità di fase $\theta_k(\mathbf{x}) = a_k(x_1^2 + x_2^2)$, (3.5), e la funzione pupilla o di apertura $p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2)$.

I dati sono stati ottenuti con un sistema phase diversity a 2-canali ed un solo frame temporale; quindi nelle equazioni (3.15), (3.20) $K = 2$ e $T = 1$. Per il canale 1 (in-focus) $a_1 = 0$ mentre per il canale 2 (defocus) $a_2 = -1.19 \cdot 2\pi$ in (3.5) così che $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -1.19 \cdot 2\pi \cdot (x_1^2 + x_2^2)$ in (3.7). Con queste condizioni si calcolano le due PSF, $s_1[\phi + \theta_1]$ e $s_2[\phi + \theta_2]$, dall'equazione (3.3).

Il passo successivo è quello di generare una immagine oggetto $f(x_1, x_2)$, eseguire la convoluzione con le due PSF ed aggiungere un eventuale termine di rumore per ottenere la coppia di immagini a diversità di fase

$$d_1 = s[\phi] \star f + n_1$$

e

$$d_2 = s[\phi + \theta] \star f + n_2$$

Gli integrali di convoluzione sono approssimati usando le FFT bidimensionali, mentre il termine di rumore è considerato come una distribuzione Gaussiana a media nulla e varianza σ^2 .

Il terzo passo di simulazione dopo aver generato le due immagini d_1 e d_2 è quello di risolvere il problema di minimizzazione precedentemente descritto.

I parametri di regolarizzazione hanno per quasi tutte le simulazioni il valore di $\alpha = 5 \cdot 10^{-1}$ e $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$. I valori di questi parametri sono stati scelti per tentativi in modo da ottenere la ricostruzione migliore dell'oggetto a partire dai dati d'ingresso generati. Se α e γ decrescono troppo, la ricostruzione dell'immagine si degrada per una amplificazione del rumore oppure perchè le condizioni di Wolfe non vengono rispettate. Allo stesso modo un valore troppo alto dei due parametri non permette la riuscita della ricostruzione per la violazione delle condizioni di ricerca di linea.

Le fasi vengono inizializzate a zero e le immagini hanno una dimensione di 128x128 pixel. L'oggetto è ottenuto deconvolvendo i dati utilizzando la PSF corrispondente.

Come descritto la simulazione consiste in due parti ben distinte: una prima parte di setup ed una seconda di stima della distorsione e ricostruzione dell'oggetto.

Ciascuna parte inizializza i rispettivi parametri di ingresso per il controllo del metodo di minimizzazione :

- La prima parte si divide ulteriormente in due tipi di setup :
 - a) **'Setup_sim'**: setup di simulazione che genera una immagine oggetto ed una distorsione di fase ed esegue la convoluzione attraverso FFT a due dimensioni per creare le immagini nei due piani di misura (focus plane, defocus plane).
 - b) **'Setup_data'**: simile al setup di simulazione, ma che si preoccupa solo di impostare due immagini predefinite nei due piani di misura, senza alcuna convoluzione e generazione di fase.
- La seconda parte consiste nel metodo iterativo L-BFGS precedentemente descritto (vedi equazione 4.2) per la stima della fase e dell'oggetto,
 - **'Min_Reduced_Cost'**: minimizza la funzione di costo ridotta (3.18).
- Ulteriori test sono stati eseguiti inserendo una statistica di rumore gaussiano con media nulla e varianza σ^2 .
- L'algoritmo implementato in MATLAB è stato eseguito su notebook – Intel Pentium 4, processore da 1.8GHz, 512MB RAM, con dimensione delle strutture dati da 128x128 pixel.

Note per la comprensione:

- La distorsione di ingresso è stata simulata con una rappresentazione modale (o di Zernike, vedi paragrafo 2.4.3), oppure attraverso il modello von Karman per la turbolenza atmosferica [8].
- Il legame tra la distanza di defocus $z_{defocus}$ e il coefficiente di defocus a è espresso dalle seguenti equazioni, :

$$U(\mathbf{x}) = \exp ik\theta(\mathbf{x})$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\theta(\mathbf{x}) = a \cdot (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{pupill}}{R} \right)^2 \cdot z_{defocus}.$$

con r_{pupill} raggio della pupilla e R raggio della sfera di riferimento gaussiana che corrisponde al doppio della distanza tra piano di apertura e piano immagine e $0 \leq (x_1^2 + x_2^2) \leq 1$.

- Nelle figure di simulazione si indica con :
 - 1) **L_BFGS_iter**: il numero di iterazioni del processo di minimizzazione.
 - 2) **stored_vectors**: il numero di vettori interni del metodo BFGS per la stima ricorsiva della matrice Hessiana della funzione di costo.
 - 3) α e γ : i parametri di regolarizzazione per il problema “ill-posed inverse problem”.
 - 4) **noise_std-dev**: la deviazione standard della statistica di rumore.
 - 5) **Mode (Setup_sim o Setup_data)**: Per indicare il tipo di setup nella prima parte della simulazione.

-
- 6) Zernike_vector: il vettore contenete i coefficienti di Zernike, adoperati per la fase del fronte d'onda, secondo la conversione da doppio a singolo indice $Z_{nm} \rightarrow Z_j$ di tabella 2.2.
 - 7) Defocus: i coefficienti di defocus nei rispettivi due piani di misura (focus plane e defocus plane).
 - 8) rms: valore efficace (root mean square).
 - 9) Cost function: funzione di costo ridotta.
 - 10) Gradient_norm: norma del gradiente della funzione di costo ridotta.
- Per ogni simulazione vengono riportate le figure nel seguente ordine :
 - 1) Immagine reale, fronte d'onda generato dai polinomi di Zernike, PSF generata dal fronte d'onda nei due piani di misura, immagine a fuoco e sfocata ottenuta dalla convoluzione tra immagine e PSF.
 - 2) Confronto tra fronte d'onda reale, fronte d'onda recuperato, errore tra i due in micron rms e relativi parametri di simulazione.
 - 3) Confronto tra immagine a fuoco e recuperata.
 - 4) Curve caratteristiche, funzione di costo e norma del gradiente della funzione di costo per il metodo L-BFGS.
 - Le curve caratteristiche decrescenti indicano il buon funzionamento dell'algorithm, e sono state ricavate con 50 iterazioni BFGS e 30 vettori di ricorsione per la stima della matrice Hessiana.
 - Aumentando le iterazioni si ottengono risultati migliori con tempi di calcolo complessivi più lunghi. Lo stesso vale se, a parità di iterazioni, si aumentano i vettori di ricorsione interna.
 - Ogni iterazione L-BFGS impiega circa 1 secondo.
 - In presenza di rumore il tempo di calcolo raddoppia a parità di errore rms finale.
 - La stima iniziale della fase è stata inizializzata a zero nel processo di minimizzazione.

5.1 Simulazione 1

Nella prima simulazione prendo in considerazione una immagine sorgente puntiforme distorta da una funzione pupilla generalizzata di ampiezza unitaria, su di un supporto circolare, e con una funzione di fase composta dai modi di Zernike di indice 6, 7 e 12. A partire dalla funzione di fase calcolo le due PSF corrispondenti ai due piani di misura. Eseguo la convoluzione tra le due PSF e l'immagine di input ottenendo le due immagini (Focused Image, Defocused Image) che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.1.2. Dopo 50 iterazioni dell'algoritmo, con 30 vettori interni del metodo BFGS per la stima ricorsiva della matrice Hessiana della funzione di costo, ottengo una fase è molto vicina alla fase generata inizialmente. Le curve caratteristiche evidenziano la convergenza decrescente della funzione di costo equivalente alla diminuzione dell'errore ad ogni iterazione mentre la norma del gradiente mostra una convergenza decrescente. La norma del passo ed il parametro per la ricerca di linea indicano come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. In questa simulazione non è presente un termine di rumore. Come desiderato l'immagine recuperata è un'immagine impulsiva e l'errore rms tra fase generata e recuperata ammonta a $0.037\mu m$ confermando l'ottimo risultato finale.

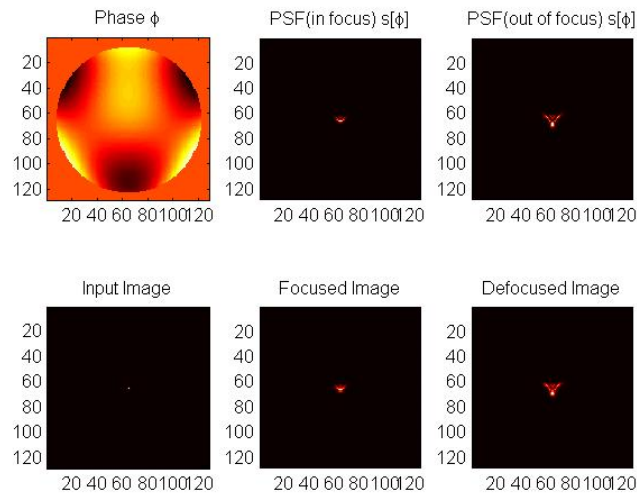


Figura 5.1.1: Nell'ordine sono visibili il fronte d'onda (Phase) generato con coefficienti di Zernike visibili nella figura successiva, le due PSF (in focus e out of focus) relative al fronte d'onda nei due piani di misura (piano focale ed extrafocale), l'immagine oggetto impulsiva (Input Image) e le due immagini (Focused Image, Defocused Image) ottenute dalla convoluzione tra Input Image e PSF, che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.1.2.

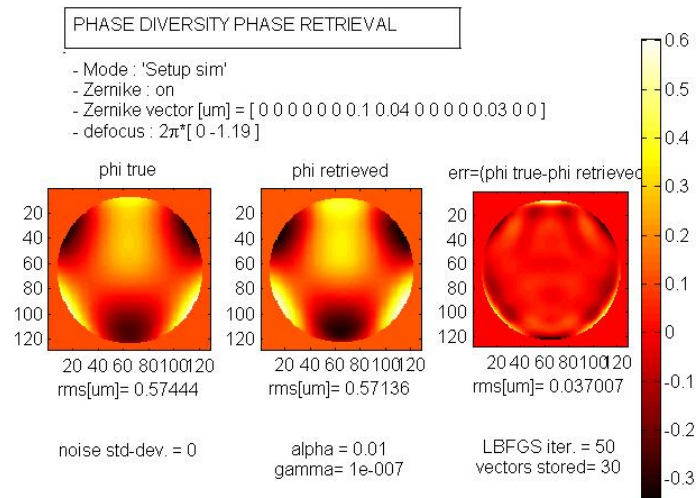


Figura 5.1.2: Confronto tra fronte d'onda generato (ϕ true) e recuperato (ϕ retrieved) e relativa differenza (err). La figura riassume anche tutti i parametri adoperati per la simulazione. Dall'osservazione di ϕ retrieved e dell'errore si evidenzia come la fase recuperata dopo 50 iterazioni, senza rumore, è molto vicina alla fase generata inizialmente.

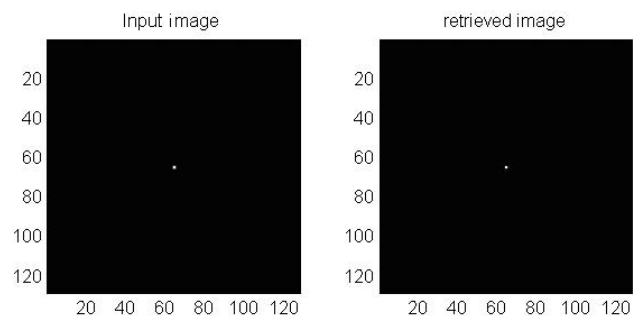


Figura 5.1.3: Immagine ideale ed immagine recuperata dopo 50 iterazioni L-BFGS. Come ci si aspettava l'immagine recuperata è un'immagine impulsiva.

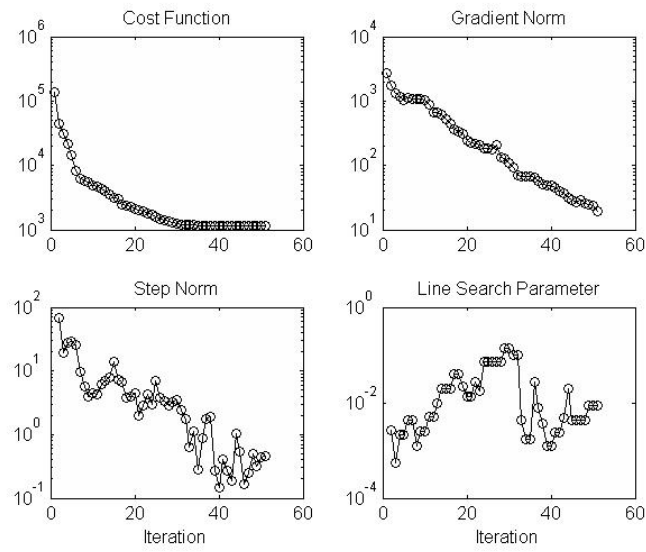


Figura 5.1.4: In figura sono riportate le curve caratteristiche del metodo L-BFGS applicato alla funzione obiettivo ridotta in funzione del numero di iterazioni. La norma del passo e la norma del gradiente mostrano una convergenza decrescente come desiderato, mentre il parametro per la ricerca di linea indica come vengono rispettate le condizioni di Wolfe.

5.2 Simulazione 2

Nella seconda simulazione prendo in considerazione come immagine oggetto una qualsiasi immagine di dimensioni 128x128 pixel distorta da una funzione pupilla generalizzata di ampiezza unitaria, su di un supporto circolare, e con una funzione di fase composta dai modi di Zernike di indice 6, 7 e 12. A partire dalla funzione di fase calcolo le due PSF corrispondenti ai due piani di misura. Eseguo la convoluzione tra le due PSF e l'immagine di input ottenendo le due immagini (Focused Image, Defocused Image) che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.2.2. Dopo 50 iterazioni dell'algoritmo, con 30 vettori interni del metodo BFGS per la stima ricorsiva della matrice Hessiana della funzione di costo, ottengo una fase è molto vicina alla fase generata inizialmente. Le curve caratteristiche evidenziano la convergenza decrescente della funzione di costo equivalente alla diminuzione dell'errore ad ogni iterazione mentre la norma del gradiente mostra una convergenza decrescente. La norma del passo ed il parametro per la ricerca di linea indicano come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca molto lentamente. In questa simulazione non è presente un termine di rumore. Rispetto alla simulazione 1 si nota che a parità di iterazioni, l'errore è maggiore. L'errore rms tra fase generata e recuperata ammonta a $0.0574\mu m$. Come desiderato l'immagine recuperata è più nitida dell'immagine osservata nel piano focale e dal confronto con l'immagine di input si vede l'ottimo risultato finale ottenuto.

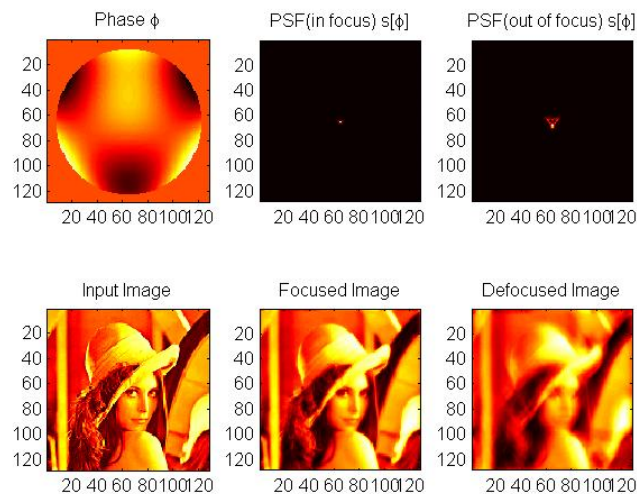


Figura 5.2.1: Nell'ordine sono visibili il fronte d'onda (Phase) generato con coefficienti di Zernike visibili nella figura successiva, le due PSF (in focus e out of focus) relative al fronte d'onda nei due piani di misura (piano focale ed extrafocale), l'immagine oggetto (Input Image) e le due immagini (Focused Image, Defocused Image) ottenute dalla convoluzione tra Input Image e PSF, che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.2.2.

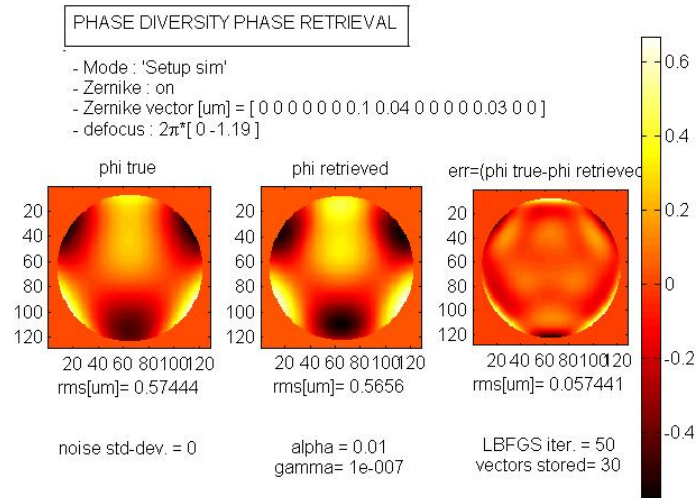


Figura 5.2.2: Confronto tra fronte d'onda generato (phi true) e recuperato (phi retrieved) e relativa differenza (err). La figura riassume anche tutti i parametri adoperati per la simulazione. Dall'osservazione di phi retrieved e dell'errore si evidenzia come la fase recuperata dopo 50 iterazioni, senza rumore, è molto vicina alla fase generata inizialmente. Rispetto alla simulazione 1 si nota che a parità di iterazioni, l'errore è maggiore.

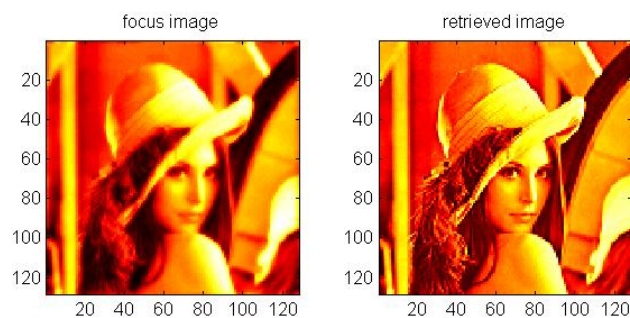


Figura 5.2.3: Immagine nel piano focale ed immagine recuperata dopo 50 iterazioni L-BFGS. L'immagine recuperata utilizzando il fronte d'onda recuperato è più nitida dell'immagine osservata nel piano focale.

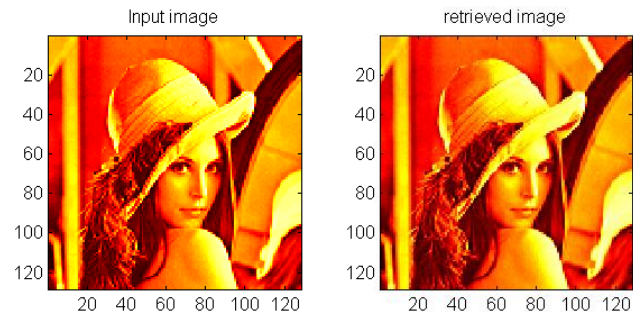


Figura 5.2.4: Immagine originaria ed immagine recuperata dopo 50 iterazioni L-BFGS.

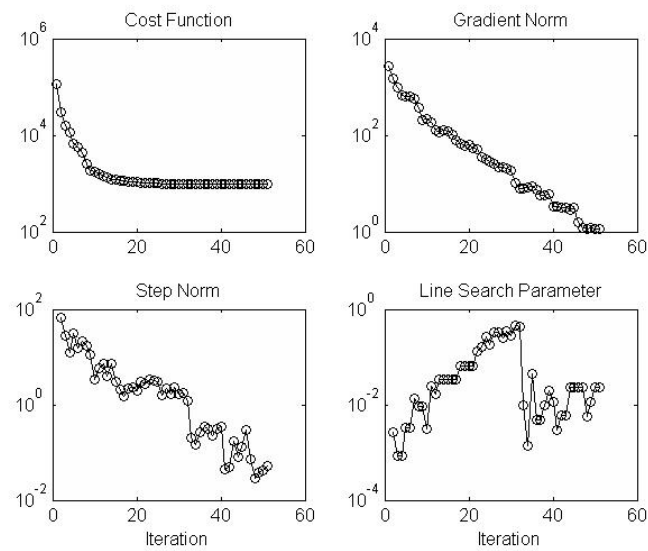


Figura 5.2.5: In figura sono riportate le curve caratteristiche del metodo L-BFGS applicato alla funzione obiettivo ridotta in funzione del numero di iterazioni. La norma del passo e la norma del gradiente mostrano una convergenza decrescente come desiderato, mentre il parametro per la ricerca di linea indica come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca molto lentamente.

5.3 Simulazione 3

Nella terza simulazione prendo in considerazione una immagine sorgente puntiforme distorta da una funzione pupilla generalizzata di ampiezza unitaria, su di un supporto circolare, e con una funzione di fase composta dai modi di Zernike di indice 6, 7 e 12. A partire dalla funzione di fase calcolo le due PSF corrispondenti ai due piani di misura. Eseguo la convoluzione tra le due PSF e l'immagine di input ottenendo le due immagini (Focused Image, Defocused Image) che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. Alle immagini distorte ho aggiunto un termine di rumore gaussiano a media nulla e deviazione standard non trascurabile $\sigma = 5$. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.3.2. Dopo 50 iterazioni dell'algoritmo, con 30 vettori interni del metodo BFGS per la stima ricorsiva della matrice Hessiana della funzione di costo, ottengo una fase è molto vicina alla fase generata inizialmente. Le curve caratteristiche evidenziano la convergenza decrescente della funzione di costo equivalente alla diminuzione dell'errore ad ogni iterazione mentre la norma del gradiente mostra una convergenza decrescente. La norma del passo ed il parametro per la ricerca di linea indicano come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Come desiderato l'immagine recuperata è un'immagine impulsiva e l'errore rms tra fase generata e recuperata ammonta a $0.0534\mu\text{m}$, maggiore rispetto alla simulazione 1 a causa del rumore. Complessivamente il confronto tra l'immagine di input e quella recuperata conferma un ottimo risultato finale.

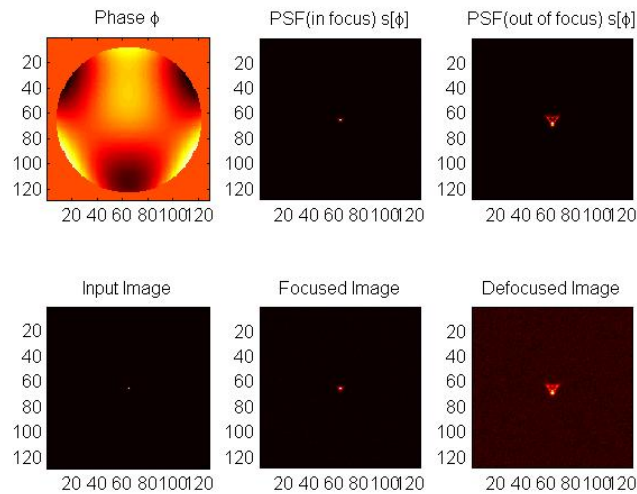


Figura 5.3.1: Nell'ordine sono visibili il fronte d'onda (Phase) generato con coefficienti di Zernike visibili nella figura successiva, le due PSF (in focus e out of focus) relative al fronte d'onda nei due piani di misura (piano focale ed extrafocale), l'immagine oggetto impulsiva (Input Image) e le due immagini (Focused Image, Defocused Image) ottenute dalla convoluzione tra Input Image e PSF, che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.3.2.

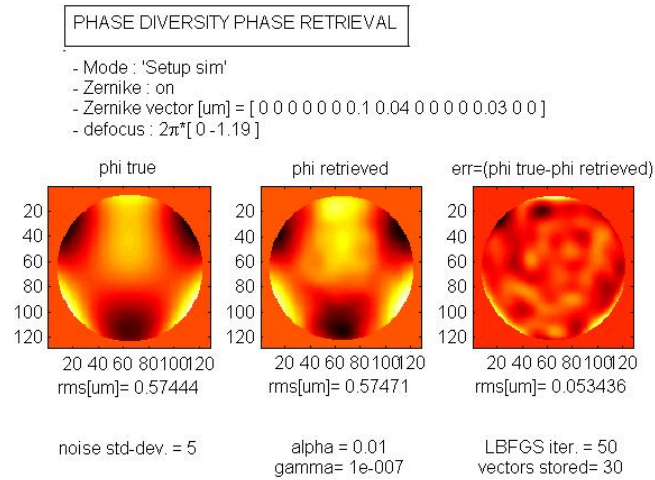


Figura 5.3.2: Confronto tra fronte d'onda generato (phi true) e recuperato (phi retrieved) e relativa differenza (err). La figura riassume anche tutti i parametri adoperati per la simulazione. Dall'osservazione di phi retrieved e dell'errore si evidenzia come la fase recuperata dopo 50 iterazioni, con rumore, è vicina alla fase generata inizialmente ma con un errore maggiore rispetto alla simulazione 1.

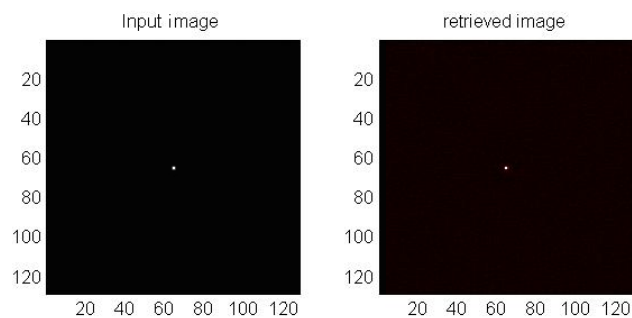


Figura 5.3.3: Immagine originaria ed immagine recuperata dopo 50 iterazioni L-BFGS. Come ci si aspettava l'immagine recuperata è un'immagine impulsiva.

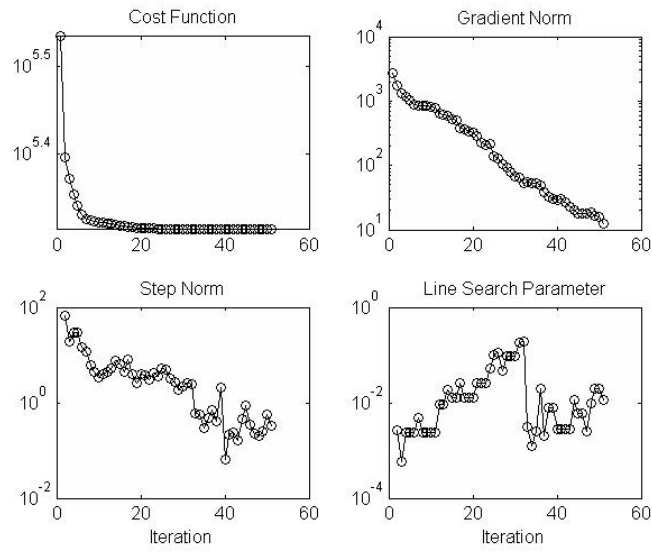


Figura 5.3.4: In figura sono riportate le curve caratteristiche del metodo L-BFGS applicato alla funzione obiettivo ridotta in funzione del numero di iterazioni. La norma del passo e la norma del gradiente mostrano una convergenza decrescente come desiderato, mentre il parametro per la ricerca di linea indica come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca molto lentamente.

5.4 Simulazione 4

Nella quarta simulazione prendo in considerazione come immagine oggetto una qualsiasi immagine di dimensioni 128x128 pixel distorta da una funzione pupilla generalizzata di ampiezza unitaria, su di un supporto circolare, e con una funzione di fase composta dai modi di Zernike di indice 6, 7 e 12. A partire dalla funzione di fase calcolo le due PSF corrispondenti ai due piani di misura. Eseguo la convoluzione tra le due PSF e l'immagine di input ottenendo le due immagini (Focused Image, Defocused Image) che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.4.2. Alle immagini distorte ho aggiunto un termine di rumore gaussiano a media nulla e deviazione standard $\sigma = 5$. Dopo 80 iterazioni dell'algoritmo, con 40 vettori interni del metodo BFGS per la stima ricorsiva della matrice Hessiana della funzione di costo, ottengo una fase abbastanza vicina alla fase generata inizialmente. Rispetto alla simulazione 2 la presenza di rumore elevato rende il tempo di stima del fronte d'onda più lungo (numero di iterazioni maggiore). Le curve caratteristiche evidenziano la convergenza decrescente della funzione di costo equivalente alla diminuzione dell'errore ad ogni iterazione mentre la norma del gradiente mostra una convergenza decrescente. La norma del passo ed il parametro per la ricerca di linea indicano come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca molto lentamente. L'errore rms tra fase generata e recuperata ammonta a $0.189\mu m$, maggiore rispetto alla simulazione 2 a causa del rumore. L'immagine recuperata, sebbene corrotta dal rumore, è ben definita confrontandola rispetto all'immagine di input. Il risultato finale è da considerarsi buono dato l'elevato livello di rumore inserito.

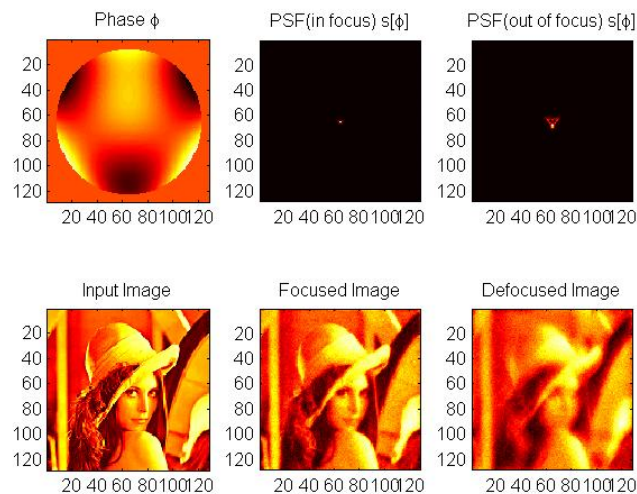


Figura 5.4.1: Nell'ordine sono visibili il fronte d'onda (Phase) generato con coefficienti di Zernike visibili nella figura successiva, le due PSF (in focus e out of focus) relative al fronte d'onda nei due piani di misura (piano focale ed extrafocale), l'immagine oggetto (Input Image) e le due immagini (Focused Image, Defocused Image) ottenute dalla convoluzione tra Input Image e PSF, che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.4.2.

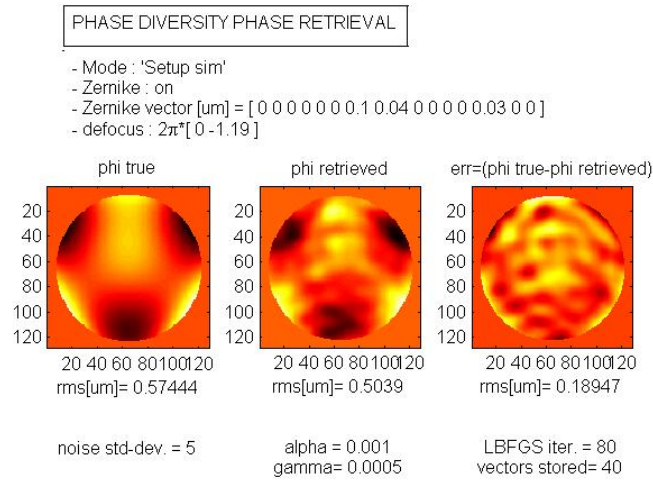


Figura 5.4.2: Confronto tra fronte d'onda generato (phi true) e recuperato (phi retrieved) e relativa differenza (err). La figura riassume anche tutti i parametri adoperati per la simulazione. Dall'osservazione di phi retrieved e dell'errore si evidenzia come la fase recuperata dopo 80 iterazioni, con rumore, è abbastanza vicina alla fase generata inizialmente. Rispetto alla simulazione 2 la presenza di rumore elevato rende il tempo di stima del fronte d'onda più lungo (numero di iterazioni maggiore).

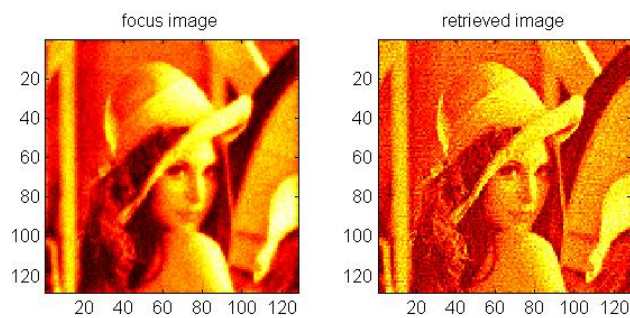


Figura 5.4.3: Immagine nel piano focale ed immagine recuperata dopo 80 iterazioni L-BFGS. L'immagine recuperata utilizzando il fronte d'onda recuperato è più nitida dell'immagine osservata nel piano focale.

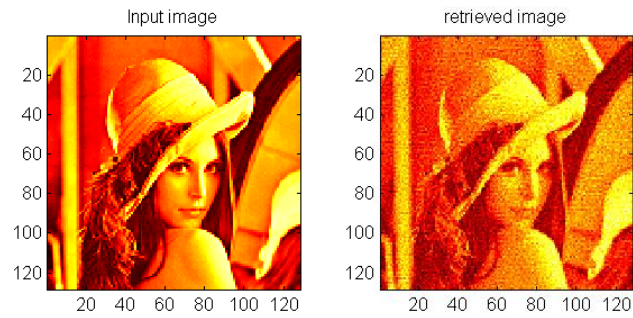


Figura 5.4.4: Immagine originaria ed immagine recuperata dopo 80 iterazioni L-BFGS. La presenza di rumore elevato causa un errore maggiore nella stima del fronte d'onda che si riflette e disturba la ricostruzione finale dell'immagine oggetto.

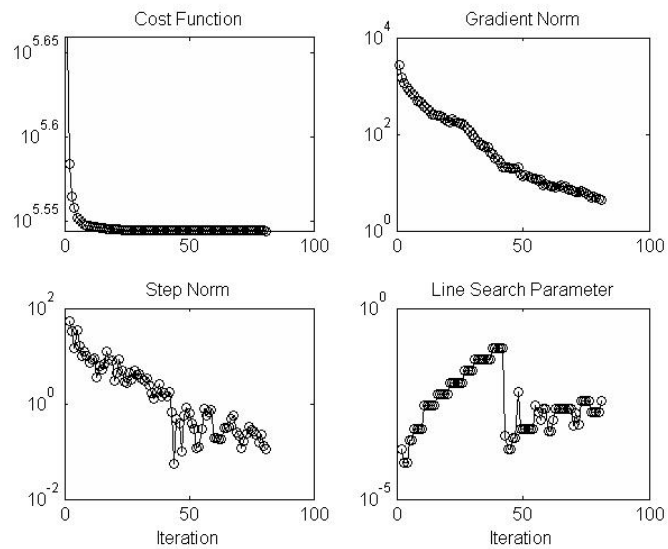


Figura 5.4.5: In figura sono riportate le curve caratteristiche del metodo L-BFGS applicato alla funzione obiettivo ridotta in funzione del numero di iterazioni. La norma del passo e la norma del gradiente mostrano una convergenza decrescente come desiderato, mentre il parametro per la ricerca di linea indica come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca molto lentamente.

5.5 Simulazione 5

Nella quinta simulazione prendo in considerazione come immagine oggetto una qualsiasi immagine di dimensioni 128x128 pixel distorta da una funzione pupilla generalizzata di ampiezza unitaria, su di un supporto circolare, e con una funzione di fase composta dai modi di Zernike di indice 6, 7 e 12. In questo caso applicando cinque diversi coefficienti di defocus (simmetrici rispetto al coefficiente nullo, ovvero il piano focale) per simulare cinque diversi piani di misura, compreso il piano focale, corrispondenti a due distanze simmetriche al piano focale (-14.22mm, -7.11mm, +7.11mm, +14.22mm). La simulazione prosegue scegliendo due immagini tra le cinque generate, ed applicando la minimizzazione L-BFGS. Dopo 50 iterazioni dell'algoritmo, con 30 vettori interni del metodo BFGS per la stima ricorsiva della matrice Hessiana della funzione di costo, ottengo una fase abbastanza vicina alla fase generata inizialmente. Rispetto alle altre simulazioni la presenza delle due immagini extrafocali comporta un tempo di stima del fronte d'onda più lungo. Le curve caratteristiche evidenziano la convergenza decrescente della funzione di costo equivalente alla diminuzione dell'errore ad ogni iterazione mentre la norma del gradiente mostra una convergenza decrescente. La norma del passo ed il parametro per la ricerca di linea indicano come vengono rispettate le condizioni di Wolfe.

In questa simulazione si evidenzia come il metodo dia un risultato positivo anche nel caso in cui una delle immagini di ingresso non sia quella nel piano focale. Le immagini devono comunque essere vicine al piano focale. Complessivamente il confronto tra l'immagine di input e quella recuperata conferma un ottimo risultato finale.

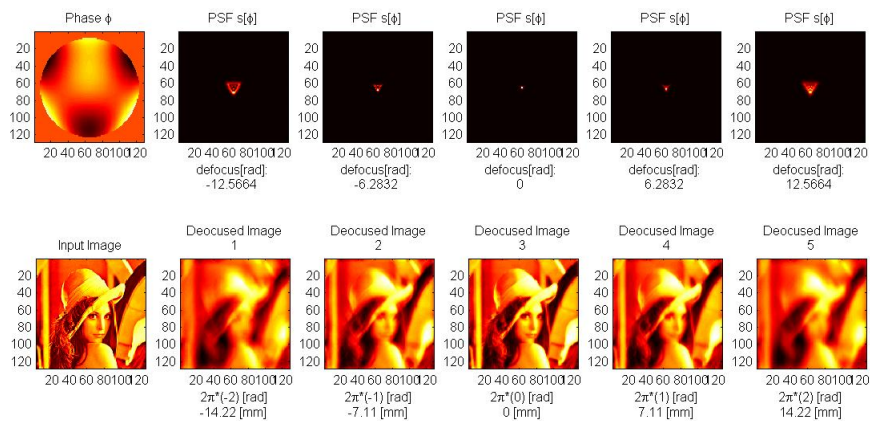


Figura 5.5.1: Nell'ordine sono visibili il fronte d'onda (Phase) generato con coefficienti di Zernike visibili nella figura successiva, le PSF (in focus al centro e out of focus) relative al fronte d'onda nei piani di misura ciascuno con un diverso coefficiente di defocus, l'immagine oggetto (Input Image) e le immagini (Deocused Image 1, 2, 3, 4, 5) ottenute dalla convoluzione tra Input Image e PSF. Come input dell'algoritmo L-BFGS è possibile scegliere una coppia di immagini tra le cinque generate. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.5.3.

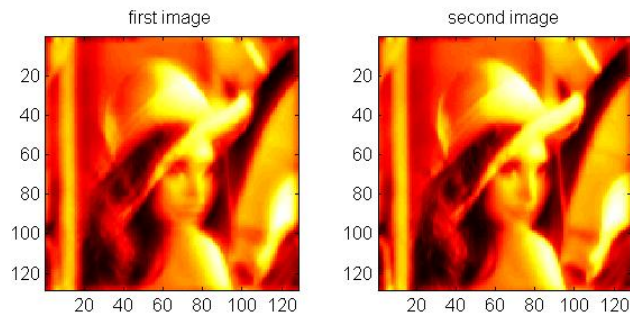


Figura 5.5.2: Due immagini selezionate tra le cinque precedentemente generate per l'input del metodo L-BFGS. In questo caso sono rispettivamente la Defocus Image 2 e 4 della figura precedente.

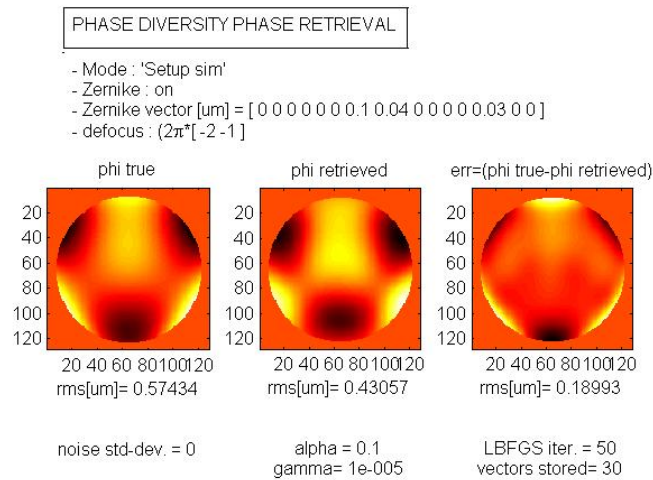


Figura 5.5.3: Confronto tra fronte d'onda generato (phi true) e recuperato (phi retrieved) e relativa differenza (err). La figura riassume anche tutti i parametri adoperati per la simulazione. Dall'osservazione di phi retrieved e dell'errore si evidenzia come la fase recuperata dopo 50 iterazioni, con rumore, è molto vicina alla fase generata inizialmente. Rispetto alla simulazione 2 ho un errore maggiore, prevalentemente ai bordi della pupilla.

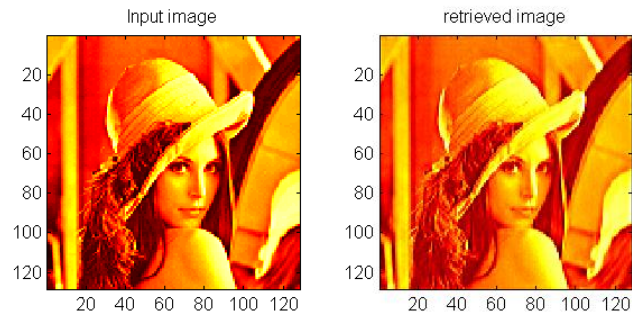


Figura 5.5.4: Immagine originaria e recuperata dopo 50 iterazioni L-BFGS. L'immagine recuperata utilizzando il fronte d'onda recuperato è più nitida dell'immagine osservata nel piano focale. L'immagine recuperata è molto vicina all'immagine d'ingresso.

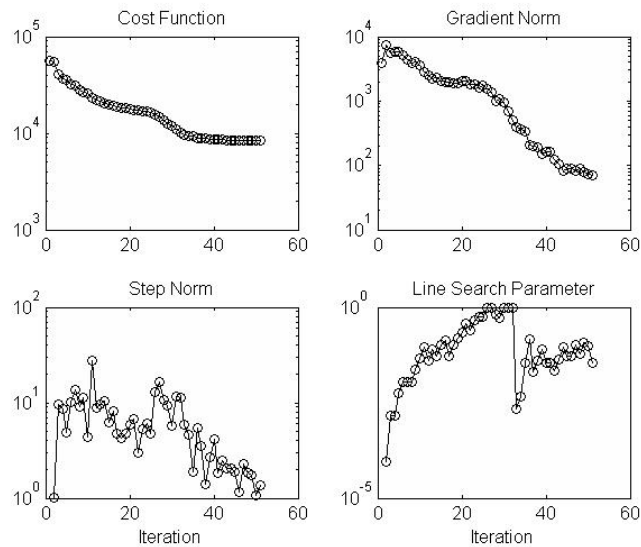


Figura 5.5.5: In figura sono riportate le curve caratteristiche del metodo L-BFGS applicato alla funzione obiettivo ridotta in funzione del numero di iterazioni. La norma del passo e la norma del gradiente mostrano una convergenza decrescente come desiderato, mentre il parametro per la ricerca di linea indica come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca più lentamente.

5.6 Simulazione 6

Nella sesta simulazione prendo in considerazione una immagine sorgente costituita da due impulsi puntiformi. L'immagine viene distorta da una funzione pupilla generalizzata di ampiezza unitaria, su di un supporto circolare, e con una funzione di fase che simula il seeing secondo il modello di von Karman per la turbolenza atmosferica. A partire dalla funzione di fase calcolo le due PSF corrispondenti ai due piani di misura. Eseguo la convoluzione tra le due PSF e l'immagine di input ottenendo le due immagini (Focused Image, Defocused Image) che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.6.2. Dopo 50 iterazioni dell'algoritmo, con 30 vettori interni del metodo BFGS per la stima ricorsiva della matrice Hessiana della funzione di costo, ottengo una fase è vicina alla fase generata inizialmente. Le curve caratteristiche evidenziano la convergenza decrescente della funzione di costo equivalente alla diminuzione dell'errore ad ogni iterazione mentre la norma del gradiente mostra una convergenza decrescente. La norma del passo ed il parametro per la ricerca di linea indicano come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. In questa simulazione non è presente un termine di rumore. Come desiderato l'immagine recuperata è un'immagine con due impulsi e l'errore rms tra fase generata e recuperata è molto piccolo confermando l'ottimo risultato finale.

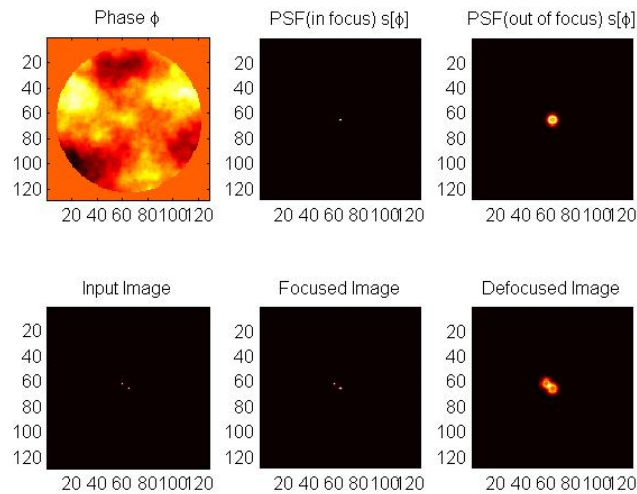


Figura 5.6.1: Nell'ordine sono visibili il Fronte d'onda (Phase) generato con il modello di von Karman per il seeing atmosferico, le due PSF (in focus e out of focus) relative al fronte d'onda nei due piani di misura (piano focale ed extrafocale), l'immagine oggetto con due impulsi traslati (Input Image) e le due immagini (Focused Image, Defocused Image) ottenute dalla convoluzione tra Input Image e PSF, che andranno come input all'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.6.2.

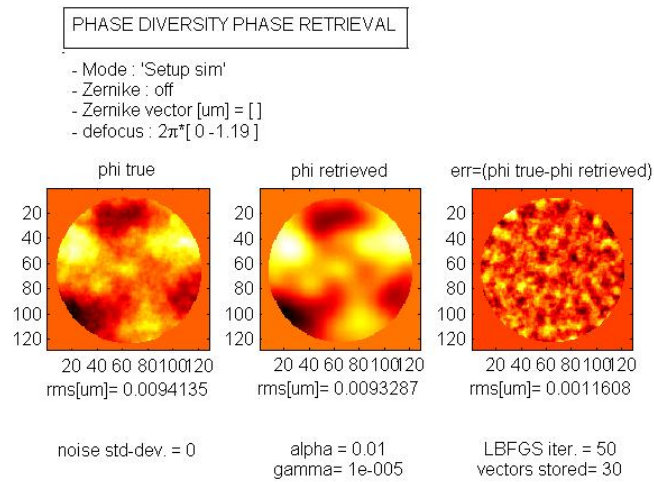


Figura 5.6.2: Confronto tra fronte d'onda generato (phi true) e recuperato (phi retrieved) e relativa differenza (err). La figura riassume anche tutti i parametri adoperati per la simulazione. Dall'osservazione di phi retrieved e dell'errore si evidenzia come la fase recuperata dopo 50 iterazioni, senza rumore, è vicina alla fase generata inizialmente.

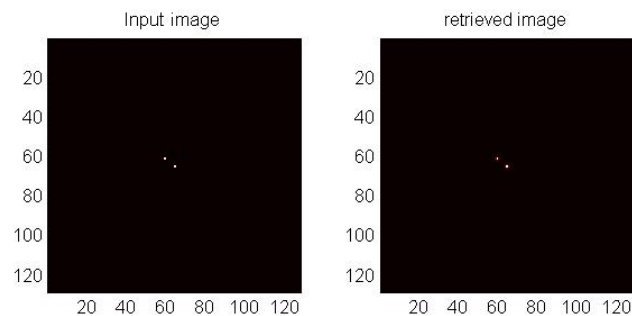


Figura 5.6.3: Immagine originaria ed immagine recuperata dopo 50 iterazioni L-BFGS.

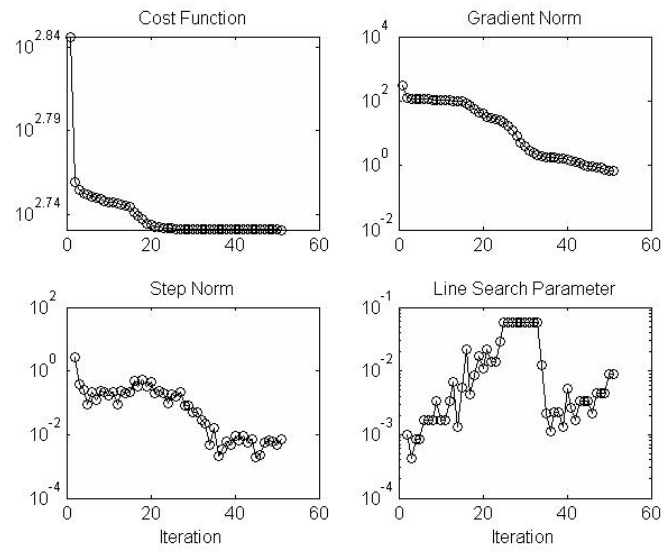


Figura 5.6.4: In figura sono riportate le curve caratteristiche del metodo L-BFGS applicato alla funzione obiettivo ridotta in funzione del numero di iterazioni. La norma del passo e la norma del gradiente mostrano una convergenza decrescente come desiderato, mentre il parametro per la ricerca di linea indica come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca molto lentamente.

5.7 Simulazione 7

Nella settima simulazione non genero numericamente nessuna immagine oggetto e funzione pupilla generalizzata ma utilizzo direttamente due immagini reali di retina di occhio umano fortemente astigmatico. La prima delle due immagini è presa a fuoco mentre la seconda viene rilevata spostando di 1 mm lo strumento di misura. Di queste due immagini, figura 5.7.1 e 5.7.2, (ciascuna con 2304x1920 pixel) seleziono due partizioni quadrate di 512x512 pixel (vedi figura 5.7.3) poi scalate a 128x128 pixel per essere utilizzate come input all'algoritmo di minimizzazione dell'errore. La fase è recuperata dopo 50 iterazioni dell'algoritmo. Il fronte d'onda stimato dovrebbe fornire informazioni sul difetto dell'occhio in esame. L'immagine recuperata utilizzando il fronte d'onda recuperato è leggermente più definita dell'immagine osservata nel piano focale ma la presenza di rumore e di un coefficiente di defocus non esatto causa un errore nella stima del fronte d'onda che si riflette e disturba la ricostruzione finale dell'immagine oggetto. Nell'immagine finale recuperata comunque non ho perdita di informazione.



Figura 5.7.1: Immagine a fuoco della retina. Dimensione 2304x1920 pixel.

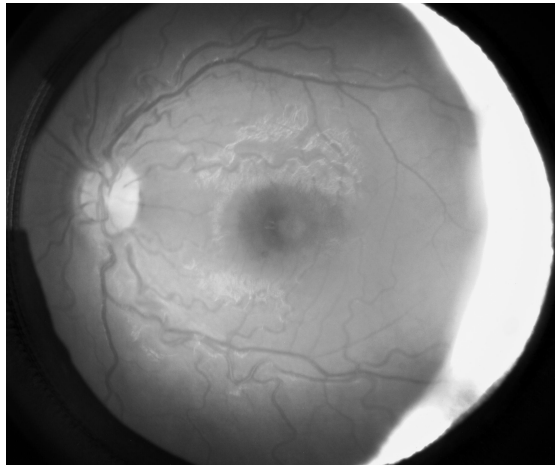


Figura 5.7.2: Immagine sfocata della retina. Dimensione 2304x1920 pixel.

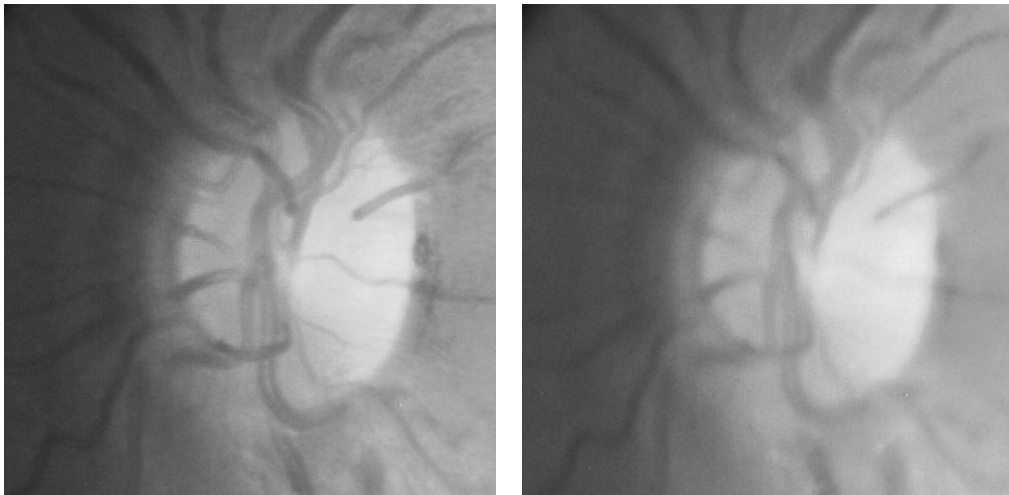


Figura 5.7.3: Sezione dell'immagine a fuoco (a sinistra) e sfocata (a destra) della retina. Ciascuna immagine ha la dimensione di 512x512 pixel.

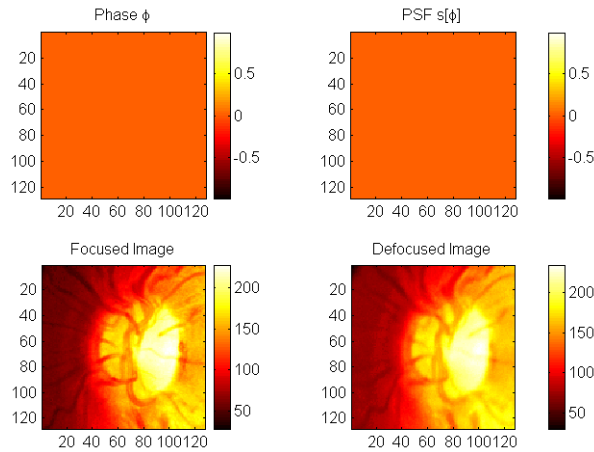


Figura 5.7.4: Immagini della retina. La prima immagine è l'immagine a fuoco (Focused Image). La seconda immagine è sfocata (Defocused Image) ed è stata rilevata spostando lo strumento di misura di 1 mm. I due grafici "Phase" e "PSF" in questo caso non vengono considerati e posti a zero perchè le due immagini sottostanti sono già quelle necessarie all'input dell'algoritmo L-BFGS. I parametri utilizzati per la simulazione sono riassunti in fig. 5.7.5.

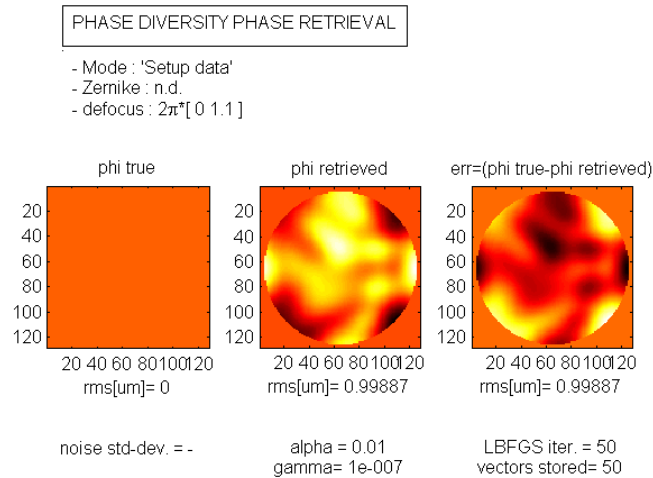


Figura 5.7.5: Fronte d'onda recuperato (phi retrieved). La differenza (err) in questo caso è l'opposto della fase recuperata dato che non è disponibile una fase generata inizialmente (phi true = 0). La figura riassume anche tutti i parametri adoperati per la simulazione. La fase è recuperata dopo 50 iterazioni. Il fronte d'onda stimato dovrebbe fornire informazioni sul difetto dell'occhio in esame.

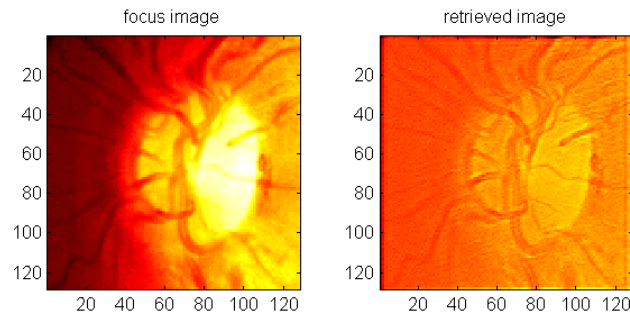


Figura 5.7.6: Immagine nel piano focale ed immagine recuperata dopo 50 iterazioni L-BFGS. L'immagine recuperata utilizzando il fronte d'onda recuperato è leggermente più definita dell'immagine osservata nel piano focale ma la presenza di rumore e di un coefficiente di defocus non esatto causa un errore nella stima del fronte d'onda che si riflette e disturba la ricostruzione finale dell'immagine oggetto. Nell'immagine finale recuperata comunque non ho perdita di informazione.

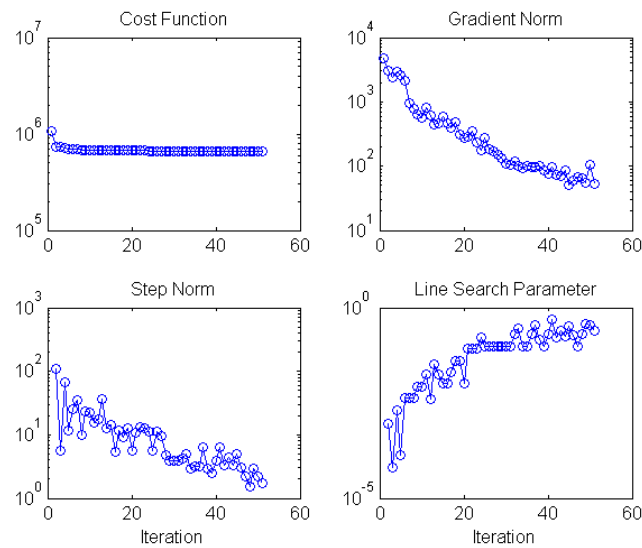


Figura 5.7.7: In figura sono riportate le curve caratteristiche del metodo L-BFGS applicato alla funzione obiettivo ridotta in funzione del numero di iterazioni, la norma del passo e la norma del gradiente mostrano una convergenza decrescente come desiderato, mentre il parametro per la ricerca di linea indica come vengono rispettate le condizioni di Wolfe. Da notare come dopo circa 30 iterazioni la funzione di costo decresca molto lentamente.

Capitolo 6

Considerazioni finali e sviluppi futuri

L'interesse e l'approfondimento del tema considerato in questo lavoro di tesi deriva da un periodo di stage in azienda per conseguire la laurea specialistica in ingegneria elettronica. L'azienda *Adaptica Srl* progetta e produce componenti e sistemi di ottica adattiva ed optoelettronica, rivolta prevalentemente al settore dell'industria e della ricerca.

L'ottica adattiva (OA) è una tecnica sviluppata in astronomia per rimuovere l'effetto delle turbolenze atmosferiche e migliorare la qualità delle immagini stellari. Lo sviluppo tecnologico ha visto l'estensione dell'ottica adattiva verso altre applicazioni, tra cui l'oftalmologia. Attualmente la tecnologia OA è ancora in fase di sviluppo, con ampio margine di miglioramento.

Con questo lavoro si è risolto un problema di approssimazione non-lineare con tecniche di regolarizzazione ai minimi quadrati ed utilizzando le trasformate di Fourier.

In un primo stadio del modello si stima il fronte d'onda (fase del segnale complesso) usando il metodo quasi-Newton denominato BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) per poi successivamente recuperare l'immagine dell'oggetto reale.

Con il *phase diversity* l'obiettivo di recuperare il fronte d'onda e ricostruire l'immagine oggetto è raggiunto.

Il metodo è efficiente e robusto per applicazioni di ottica adattiva priva di sensore di fronte d'onda. I costi in questo caso sono ridotti data la semplificazione hardware e l'utilizzo è rivolto principalmente a dispositivi di videosorveglianza e strumenti oftalmici in cui si devono misurare delle aberrazioni statiche.

I risultati ottenuti nelle diverse simulazioni eseguite sono complessivamente molto buoni nelle situazioni in cui è presente il termine di rumore ed ottimi nei casi privi di rumore. In tutti i casi l'immagine recuperata è vicina a quella ideale d'ingresso. Nella simulazione con le immagini retiniche il risultato è soddisfacente. Infatti si nota che non vengono perse informazioni per la definizione dell'immagine ed i dettagli sono più nitidi. L'errore presente in quest'ultima simulazione è causato dalla distanza di defocus che non si conosce con precisione ed a cui è legato il relativo coefficiente di defocus.

Nello specifico interesse di questa tesi molto ancora si può migliorare in riferimento a prestazioni e precisione.

E' sicuramente possibile ottimizzare il codice, attualmente realizzato per una prima verifica di simulazione, per ridurre il tempo di calcolo e perciò velocizzare la stima del fronte d'onda.

Importante è anche realizzare un banco di test in laboratorio per una verifica sperimentale, su immagini reali, che unita ad una misura simultanea del fronte d'onda con un sensore Shack-Hartmann dia un confronto dei risultati di recupero e stima del fronte d'onda dei due diversi metodi.

Tutte le prove sono state eseguite considerando due piani di misura dell'intensità ed un solo frame temporale. Tuttavia il metodo come dimostrato dalle pubblicazioni [8, 9] è valido anche considerando più frame temporali e più di due piani di misura. Quest'altra tipologia di simulazione prevede però dei tempi di elaborazione molto più lunghi ma si rivela utile in casi di aberrazioni non statiche. Inoltre richiede ulteriori metodi di ottimizzazione (del gradiente coniugato o di tipo Richardson-Lucy) per la stima dell'oggetto a partire da più PSF insieme. Possibili miglioramenti futuri o test possono rivolgersi in questa direzione.

Altri sviluppi possono essere, la creazione di una interfaccia grafica adeguata per un utilizzo più semplice e professionale, o suddividere il problema di recupero, nel caso di dimensioni delle immagini maggiori di quelle qui in esame, applicando il metodo realizzato a partizioni ridotte dell'immagine-oggetto da recuperare.

Quest'ultima metodologia è stata impostata e simulata ma non ha avuto risultati positivi. L'insuccesso nella simulazione è causato dai parametri di regolarizzazione che sono fissi per ogni simulazione relativa alle partizioni. Uno sviluppo futuro è sicuramente quello di ottimizzare i parametri di simulazione per ogni partizione dell'immagine originale.

Uno sviluppo utile è anche riconfigurare l'algoritmo di minimizzazione in funzione dei coefficienti dei polinomi di Zernike. In altri termini, fare in modo che la fase finale venga stimata come la migliore combinazione di polinomi di Zernike che approssima la funzione di fase reale. Durante ciascuna iterazione si agisce sul valore dei coefficienti dei polinomi di Zernike in modo tale da minimizzare l'errore tra fase reale e fase stimata.

Bibliografia

- [1] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, 1996.
- [2] M. Born and E. Wolf., *Principles of Optics*, 6.th edition, 1980.
- [3] F.Roddir, *Adaptive optics in astronomy*, Cambridge University Press, 1999.
- [4] R.K.Tyson, *Adaptive optics engineering handbook*, Dekker, 2000.
- [5] C.T. Kelley, *Iterative Methods for Optimization*, North Carolina State University, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [6] H.W.Babcock, *The possibility of compensating astronomical seeing*, ASP, Vol. 65, No. 386, 1953.
- [7] R. Gerchberg and W. Saxton, *A practical algorithm for the determination of phase from image and diraction plane pictures*, Optic, 1972.
- [8] J.M.Bardsley, *An efficient Phase and Object Estimation Scheme for Phase-Diversity Time Series Data*, IEEE Transaction on Image Processing, volume 17, issue 1, 2007, p. 9-15
- [9] John Bardsley, James Nagy, Robert Plemmons, Stuart Jefferies, *A Computational Method for the Restoration of Images With an Unknown Spatially-Varying Blur*.
- [10] J. R.Fienup, *Reconstruction of a complex-valued object from the modulus of its Fourier transform pairs from noisy data using a support constraint*, JOSA, Vol 4, pp 118-124.
- [11] J.R.Fienup, *Phase retrieval algorithms: a comparison*, Appl. Opt. 21, 1982.
- [12] Russell Luke, James V. Burke, Richard Lyon, *Fast Algorithms for phase diversity and phase retrieval*, July 26, 2000.
- [13] Russell Luke, Heinz H. Bauschke,Patrick L. Combettes, *Phase retrieval, Gerchberg-Saxton algorithm, and Fienup variants: A view from convex optimization*, September 24, (2001).
- [14] Heng Mao and Dazun Zhao, *Alternative Phase-Diverse Phase Retrieval algorithm based on Levenberg- Marquardt nonlinear optimization*, Optics Express, Vol. 17, Issue 6, pp. 4540-4552 (2009)
- [15] R. Gonsalves,*Phase retrieval and diversity in adaptive optics*, Opt.Eng, 21(5), (1982).

-
- [16] Curtis R. Vogel, Tony Chanband, Robert Plemmons, *Fast Algorithms for Phase Diversity- Based Blind Deconvolution*, Department of Mathematical Sciences Montana State University.
- [17] Ting-Chung Poon, Taegeun Kim, *ENGINEERING OPTICS WITH MATLAB®*, World Scientific Publishing Co.,2006.
- [18] Gregory R. Brady and James R. Fienup, *Nonlinear optimization algorithm for retrieving the full complex pupil function*, Optics Express 474, Vol.14, No. 2,(January 2006).
- [19] J. R. Fienup, *Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform*, Opt. Letters 4, Vol. 3, No.1 (July 1978).
- [20] J. R. Fienup, *Phase-retrieval Algorithms for a Complicated Optical System*, Appl. Opt. 32, 1737-1746, (1993).
- [21] C. J. Carrano, S.S. Olivier, J.M. Brase, B.A. Macintosh, J.R. An, *Phase Retrieval Techniques for Adaptive Optics*, SPIE 1998 Symposium on Astronomical Telescopes and Instrumentation (March 1998).
- [22] James M. Brase, Carmen J. Carrano, Bruce A. Macintosh, Scot S. Olivier, Jong R. An, *Phase Retrieval for Adaptive Optics System Calibration*, (August 1997).
- [23] Gerchberg-Saxton algorithm - Wikipedia, the free encyclopedia.
- [24] Adaptive optics - Wikipedia, the free encyclopedia.
- [25] Quasi-Newton method - Wikipedia, the free encyclopedia
- [26] Dr W. Owen Saxton's page (<http://www-hrem.msm.cam.ac.uk/people/saxton/>).
- [27] Applications and publications on phase retrieval from the University of Rochester, Institute of Optics (<http://www.optics.rochester.edu/workgroups/fienup/index.html>).
- [28] Zernike polynomials - Wikipedia, the free encyclopedia
- [29] Jorge Nocedal, D.C. Liu, *On the limited memory BFGS methods for large scale optimization*, Mathematical programming,45,pp. 503-528,1989.
- [30] James R. Fienup, The Institute of Optics. Univ of Rochester; .
<<http://www.optics.rochester.edu/workgroups/fienup/Professor.htm>>.
- [31] R. G. Paxmann, T. J. Schulz and J. R. Fienup, "Joint estimation of object and aberration by using phase diversity", Opt. Soc. Am. A, 1072-1085 (1992).
- [32] Gary Chanan, *Principles of Wavefront Sensing and Reconstruction*, University of California, Department of Physics and Astronomy, Irvine, California.

Ringraziamenti

Per il lavoro di questa tesi desidero ringraziare l'Ing. Ivan Capraro, mio correlatore esterno, per avermi proposto questo lavoro di tesi, per avermi introdotto all'aspetto tecnologico dell'ottica adattiva e per la libertà con la quale mi ha lasciato affrontare il tema e svolgere il lavoro.

Un grazie va al Prof. Giampiero Naletto dell'università per il tempo che ha dedicato nel prestare attenzione al mio lavoro, ricoprendo la carica di relatore interno per l'esame di laurea, nonostante i suoi impegni.

Ringrazio la ditta Adaptica S.r.l ed M31 S.p.a., in particolare per l'estrema ospitalità e cortesia dimostrata.

Un grazie infine alla mia famiglia che mi ha sempre sostenuto sin dall'inizio dei miei studi, a tutti i livelli.