UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione

Corso di laurea Magistrale in Psicologia Clinica dello Sviluppo

Tesi di laurea Magistrale

LA NUMEROSITÀ ZERO HA UN POSTO SPECIALE NELLA MENTE DEL BAMBINO? UNA RICERCA.

Does zero numerosity hold a special place in a child's mind? A study.

Relatrice:
Prof.ssa Daniela Lucangeli

Correlatrice:
Dott.ssa Annamaria Porru

Francesca Forner

Matricola: 2056185

Anno Accademico 2023/24

Abstract

Sebbene la conquista della competenza matematica rappresenti una sfida impegnativa, la predisposizione ai numeri è presente fin dalla nascita (Spelke & Kinzler, 2007).

I meccanismi psicologici che stanno alla base delle rappresentazioni numeriche pre-verbali e non simboliche precoci sono stati studiati attraverso approcci comportamentali e neurobiologici (Feigenson et al., 2004; Izard et al., 2009; Siegler & Lortie-Forgues, 2014; Xu et al., 2005).

Già poco dopo la nascita un neonato associa immagini e suoni sulla base del numero (Izard et al., 2009); dai sei mesi discrimina due insiemi di oggetti di diversa numerosità, secondo un meccanismo di approssimazione che dipende dal rapporto tra le due numerosità e che si perfeziona nel corso del tempo (Xu et al., 2005); a partire dai cinque mesi di vita attua semplici operazioni aritmetiche tra piccole numerosità di oggetti, come evidenziato da esperimenti di abituazione visiva (Wynn, 1992); l'idea di un ordine naturale dei numeri è più tardiva e sembra inizi a delinearsi dai quindici mesi (Dehaene, 2011).

Meno chiaro è il ruolo esercitato dall'assenza di quantità non simbolica e simbolica, lo zero, nella formazione della rappresentazione numerica nel bambino. Le ricerche mostrano che la comprensione dei significati dello zero matura gradualmente e per stadi, ed è solo dopo qualche anno di vita che lo zero viene riconosciuto come numero, oltre che come insieme vuoto o come assenza di quantità, e posizionato al limite inferiore della successione dei numeri naturali (Wellman & Miller, 1986).

Il nostro lavoro si inserisce all'interno di questo filone di ricerca e si propone di esaminare il riconoscimento dell'insieme vuoto in relazione alle piccole e grandi numerosità. A tale scopo sono stati somministrati compiti di riconoscimento visivo non simbolico, di aritmetica approssimata e di conteggio a bambini di 5-6 anni.

I risultati di questo studio preliminare contribuiscono a comprendere come l'insieme vuoto venga rappresentato nella mente del bambino rispetto alle altre numerosità.

Indice

1. LE RADICI BIOLOGICHE DELLA COGNIZIONE NUMERICA

1.1 Elaborazione quantitativa di stimoli ambientali negli animali

In natura esistono numerosi esempi di animali che sono in grado di distinguere stimoli sensoriali corrispondenti a piccole numerosità come sequenze di suoni, numero di chicchi, ecc.
Nell'opera "*Il pallino della matematica*" Stanislas Dehaene definisce questa capacità innata "istinto del numero", un'abilità che, al pari di altre, è il risultato di selezioni successive operate dall'evoluzione biologica; in pratica la selezione naturale avrebbe dotato il cervello animale di un processore numerico utile alla sopravvivenza (Dehaene, 2011).
Secondo l'autore, le abilità numeriche degli animali possono essere paragonate a quelle di un neonato umano, e come altri animali anche l'uomo è equipaggiato con la capacità precoce di rappresentare le quantità in modo intuitivo. Tuttavia Dehaene osserva ancora che, a fronte di un cervello che si modifica secondo i tempi lunghi della selezione darwiniana, l'uomo è sottoposto anche ad una spinta evolutiva molto più veloce, quella culturale. Il rapido modificarsi delle conoscenze umane, in particolare quelle astratte della matematica, è reso possibile grazie al "riutilizzo" di circuiti cerebrali inizialmente destinati ad altri scopi; la mancanza di moduli specificatamente destinati al processamento numerico potrebbe spiegare le diffuse difficoltà nella matematica (Dehaene & Cohen, 2007).
Evidenze sperimentali della presenza di abilità numeriche si riscontrano in diverse specie animali. Nei primi esperimenti risalenti agli anni Cinquanta i ratti imparavano a premere un tasto per un numero di volte circa pari a n al fine di evitare una punizione e ottenere una ricompensa in cibo: la precisione diminuiva all'aumentare di n (Mechner, 1958). Un esperimento più recente dimostra che i ratti sono in grado di focalizzare l'attenzione anche su una grandezza continua come la durata temporale degli eventi (Mechner & Guevrekian, 1962). Inoltre, la rappresentazione numerica non dipende dalla modalità di stimolazione sensoriale (uditiva o visiva), in quanto i ratti riescono a "contare" correttamente anche sequenze di due o quattro stimoli misti operando una sorta di primitiva addizione aritmetica (Meck & Church, 1983).
Una conoscenza intuitiva delle frazioni e della loro combinazione è stata invece dimostrata negli scimpanzé. Sempre utilizzando il paradigma del condizionamento operante, Woodruff e Premack scoprirono che gli animali potevano distinguere frazioni pari ad un quarto, un mezzo e tre quarti, e non soltanto quando dovevano riconoscere parti di uno stesso oggetto (per esempio di una mela) ma anche quando il riconoscimento avveniva tra oggetti diversi (per esempio una frazione di mela e un

bicchiere di latte riempito per una certa parte). Inoltre gli scimpanzé si dimostrarono abbastanza bravi anche nell'eseguire la combinazione tra un quarto ed un mezzo (Woodruff & Premack, 1981).

In aggiunta alle addizioni, gli scimpanzé svolgono abilmente anche il confronto tra due quantità numeriche dopo che le hanno sommate; infatti, messi di fronte a mucchietti di 4 e 3 cioccolatini piuttosto che di 5 e 1, scelgono preferenzialmente la prima opzione; ciò significa che possiedono rudimentali nozioni di "maggiore" e "minore" (Rumbaugh et al., 1987).

Questi e altri esempi che il mondo animale offre dimostrano che la capacità di contare precede l'acquisizione del linguaggio. Il sistema di riconoscimento numerico degli scimpanzé, così come quello di altri animali, incluso l'uomo, è caratterizzato da due particolari effetti. Il primo è l'effetto "distanza": due quantità discrete vengono riconosciute come distinte quanto maggiore è la loro differenza; il secondo è l'effetto "grandezza": la percezione delle piccole numerosità è caratterizzata da una migliore accuratezza (Dehaene, *op. cit.*).

Un modello teorico che si basa sulle reti neurali (Dehaene & Changeux, 1993), propone che il cervello sia equipaggiato con particolari neuroni deputati al riconoscimento di specifiche quantità di oggetti (per esempio 3, 4 o 5). I diversi "neuroni numerici" risponderebbero simultaneamente alle stimolazioni sensoriali corrispondenti ad un numero all'incirca uguale al loro *optimum* e la precisione di risposta diminuirebbe al crescere del numero.

Gli animali sono dunque sensibili alla numerosità anche se il loro network cerebrale opera il conteggio soltanto in modo analogico, e dunque approssimato, a differenza di quello umano che è in grado di contare gli oggetti in modo discreto calcolandone il numero esatto.

Alcuni esperimenti effettuati a partire dagli anni Ottanta con gli scimpanzé e successivamente anche con delfini e macachi, evidenziarono che è possibile addestrare gli animali anche ad associare pittogrammi astratti e anche i simboli arabici alle numerosità comprese tra 0 e 9; nel caso degli scimpanzé anche ad addizionare simboli (Boysen & Berntson, 1989; Matsuzawa, 1985; Washburn & Rumbaugh, 1991).

Se la predisposizione innata al riconoscimento simbolico è così diffusa nel mondo animale, quali sono allora le specificità che permettono all'uomo di sviluppare abilità matematiche così uniche e sofisticate?

Innanzitutto l'uomo è dotato di una capacità di riconoscere ed utilizzare simboli che non ha eguali tra gli animali: gli stessi scimpanzé per esempio, necessitarono di lunghi addestramenti prima di riuscire ad associare qualche cifra numerica a dei simboli (Dehaene, 2011). In secondo luogo, grazie a questa attitudine all'uso dei simboli, l'uomo può assorbire e sviluppare naturalmente un linguaggio ricco e articolato ed una elaborata competenza numerica, che gli permettono di comunicare e di condividere attività e progetti. Infine, può formare ricordi e utilizzarli per costruire idee complesse. In definitiva, la tesi sostenuta da Dehaene è che l'uomo abbia di fatto una rappresentazione mentale della quantità molto simile a quella degli altri animali e che tuttavia, grazie a specifiche facoltà e predisposizioni mentali, possa sviluppare questa eredità biologica comune in conoscenze matematiche molto complesse non riscontrabili in nessun'altra specie.

1.2 Le abilità numeriche non simboliche preverbali nei bambini

I primi studi con i bambini piccoli condotti negli anni Ottanta utilizzando il costrutto dell'abituazione-disabituazione visiva dimostrarono che i neonati individuano la costanza della numerosità di 2 e 3 oggetti, anche se in movimento (Antell & Keating, 1983; Starkey & Cooper, 1980). Le ricerche condotte negli ultimi vent'anni hanno dimostrato inequivocabilmente che i neonati e anche gli animali possono rilevare la corrispondenza numerica tra 2 o 3 *item* in modalità sensoriale visiva, uditiva e tattile, suggerendo che il cervello sia filogeneticamente dotato di un modulo a-modale astratto di percezione dei numeri (Féron et al., 2006; Jordan & Brannon, 2006; Kobayashi et al., 2005).
In un celebre esperimento con il pupazzo di Topolino, Karen Wynn dimostrò che la capacità degli scimpanzé di calcolare 1+1 e 2-1 è presente anche nei bambini di quattro o cinque mesi di vita (Wynn, 1992). Qualche anno più tardi Simon e colleghi replicarono l'esperimento di Wynn modificandone i personaggi: i risultati dimostrarono che la capacità aritmetica dei bambini non era legata all'identità o alla posizione degli oggetti (Simon et al., 1995).
Le capacità di riconoscimento e di calcolo dei bambini al di sotto dell'anno di età si limitano ai numeri 1, 2 e 3, cioè non sanno distinguere cinque da sei oggetti, confermando anche nel bambino la presenza dell'effetto grandezza.
Per riassumere in chiave evolutiva i risultati degli studi citati, si potrebbe dire che l'esperienza matematica inizia già poche settimane dopo la nascita, allorché il neonato distingue uno, due, tre oggetti o suoni; a partire dai sei agli otto mesi emerge la capacità di astrarre la numerosità, a prescindere dalla modalità sensoriale; le capacità protoaritmetiche desunte dagli esperimenti di Karen Wynn riguardano bambini con più di cinque mesi; dai quindici mesi emerge l'idea di un ordine stabile dei numeri naturali e, analogamente agli scimpanzé dello studio di Rumbaugh, i bambini acquisiscono le nozioni di "maggiore" e "minore".

1.3 Due meccanismi distinti per l'intuizione quantitativa della numerosità

Il tempo che impieghiamo per contare una quantità fissa di oggetti è all'incirca lo stesso per numerosità da uno a tre mentre aumenta rapidamente in modo lineare con più di quattro oggetti

(Mandler & Shebo, 1982). Gli autori lo hanno dimostrato in un esperimento in cui i soggetti dovevano riconoscere il numero di punti di un *array*: fino a quattro elementi il tempo impiegato per rispondere aumentava di 25-100 millisecondi per ogni elemento che veniva aggiunto; per insiemi con più di quattro elementi, in media il tempo di risposta aumentava invece di 250-350 millisecondi per ogni elemento aggiuntivo. Una flessione analoga nell'intorno di quattro elementi si osserva anche se anziché il tempo di reazione viene misurato il livello di accuratezza in funzione del numero di elementi (Oyama et al., 1981).

La maggior parte degli autori attualmente spiegano queste differenze sostenendo che il processo mentale utilizzato per contare insiemi con al massimo quattro elementi è diverso dal processo attraverso il quale viene determinato il numero di elementi di insiemi più numerosi.

In particolare, si suppone che le numerosità da uno a tre non vengano affatto contate, bensì riconosciute *in toto* attraverso un processo denominato "*subitizing*" (dall'agg. latino "*subitus*", immediato), che richiede appena 40–100 millisecondi per ciascun oggetto, lo stesso tempo necessario a riconoscere un volto familiare (Dehaene, 2011; Trick & Pylyshyn, 1993). Diversamente, il processo mentale attraverso il quale vengono processati gli insiemi più numerosi è definito "*counting*".

Gallistel e Gelman suggeriscono che il *subitizing* sia basato sul conteggio preverbale, cioè sulla rappresentazione di grandezze, un meccanismo rapido ma poco accurato; di conseguenza, contare preverbalmente porterebbe a risultati inaccurati se applicato a insiemi numerosi, per i quali è più vantaggioso il conteggio verbale, lento ma tuttavia più preciso (Gallistel & Gelman, 1992). Un'altra teoria che spiega il *subitizing* è quella proposta da Trick e Pylyshyn, che lo riconducono ad un'operazione preattentiva di rilevamento contemporaneo delle caratteristiche di uno, due, tre o quattro stimoli distinti; con più di quattro stimoli avviene invece una scansione progressiva degli stimoli per gruppi di massimo quattro elementi, ciascuno specificato da una parola numerica, che alla fine vengono riuniti per formare un totale (Trick & Pylyshyn, 1993, 1994).

Il *subitizing* viene considerato come una delle manifestazioni del meccanismo OTS (*Object Tracking System*), mediante il quale gli oggetti sono rappresentati come individui distinti che possono essere monitorati nel tempo e nello spazio. Una delle proprietà distintive di questo sistema è appunto quella di avere una capacità limitata a tre o quattro individui per volta. Per gli insiemi con più di tre o quattro elementi, l'enumerazione è possibile soltanto o tramite il conteggio esatto, che implica una scansione seriale, oppure tramite una stima.

La stima approssimativa rientra nei vincoli computazionali dell'ANS (*Approximate Number System*), e riflette la legge di Weber attraverso la variabilità scalare. Il sistema ANS permette al bambino, così come all'adulto, di rappresentare in modo approssimato le grandezze numeriche restituendo stime "automatiche" abbastanza accurate di numerosità elevate (Dehaene, 2009; Feigenson et al., 2004;

Odic & Starr, 2018). A differenza del meccanismo OTS, l'ANS risente di alcuni bias sistematici, come la tendenza alla sovrastima se gli oggetti sono disposti in modo regolare e, viceversa, alla sottostima se sono disseminati nello spazio; inoltre la stima dipende dalla densità spaziale degli oggetti. Tuttavia l'accuratezza della stima migliora notevolmente se vengono forniti alcuni indizi (Frith & Frit, 1972; Izard & Dehaene, 2008; Krueger, 1972).
L'accuratezza nell'approssimazione della numerosità è influenzata sia dall'effetto distanza sia da quello di grandezza, così come negli animali. In particolare, l'effetto di grandezza è evidente nel confronto tra due numeri: serve più tempo per decidere che 15 è maggiore di 14 piuttosto che 2 è maggiore di 1. Il nostro cervello contiene una rappresentazione progressiva dei numeri naturali, posizionati su una linea orientata, in modo tale che la distanza tra due numeri successivi si "comprime" secondo una funzione logaritmica al crescere del loro valore; ecco perché a livello intuitivo 14 sembra più vicino a 15 di quanto 1 sembri vicino a 2 (Dehaene, 2003).
L'esistenza di due percorsi distinti di cognizione numerica pre-verbale è stata riscontrata fin dai 6 -7 mesi di vita anche a livello neurale, attraverso la misurazione dei potenziali evento-correlati (ERP): il sistema OTS risponde a piccole numerosità di singoli oggetti mentre l'ANS risponde a grandi quantità formando una rappresentazione numerica approssimativa (Hyde & Spelke, 2011).
A differenza dei numeri naturali, tutti gli altri numeri (interi relativi, razionali, irrazionali, ecc.), e presumibilmente anche lo zero, non vengono processati intuitivamente, cosicché per comprenderli la mente deve ricorrere ad elaborazioni matematiche più sofisticate, che si sviluppano in età successive attraverso l'apprendimento della matematica.

1.4 Alcuni studi rappresentativi dei diversi meccanismi *ANS* e *OTS*.

Da tempo si discute se il *subitizing* e l'OTS riflettano veramente un meccanismo dedicato ai piccoli insiemi, o se, piuttosto, riflettano l'ANS, che per la sua natura weberiana codifica i piccoli numeri con una precisione maggiore rispetto a quella dei numeri più grandi. Molti studi sperimentali che utilizzano compiti comportamentali diversi mostrano tuttavia che non c'è correlazione tra OTS e ANS, neppure nei bambini molto piccoli (Piazza, 2011).
Le rappresentazioni di numerosità del sistema ANS possono essere suddivise in sottogruppi, manipolate dal punto di vista aritmetico e confrontate tra loro. Il sistema infatti, funziona confrontando e discriminando due insiemi di oggetti secondo un meccanismo che dipende soltanto dal rapporto tra le loro numerosità, indipendentemente da altre variabili continue come area, misura del perimetro o luminosità, cosicché rapporti come 8:12 e 16:24 si equivalgono in termini percettivi (Halberda & Feigenson, 2008). Un bambino di circa sei mesi può distinguere due insiemi se il

rapporto tra le numerosità è 2:1; crescendo il sistema percettivo si affina e il valore del rapporto diminuisce: a nove mesi raggiunge 3:2, a tre anni 4:3, a sei anni 6:5. Nello studio di Halberda questi valori furono ricavati attraverso il paradigma dell'abituazione visiva, dimostrando così che i neonati di sei mesi percepiscono come distinti due insiemi formati da 8 *vs* 16 oppure da 16 *vs* 32 oggetti ma non formati da 8 *vs* 12 oppure da 16 *vs* 24 oggetti. E' stato dimostrato che, se le numerosità dei due insiemi sono basse (1 *vs* 2, 2 *vs* 4 e 2 *vs* 3), gli stessi rapporti non producono disabituazione nel bambino piccolo (Dehaene, 2011; Xu et al., 2005; Xu & Spelke, 2000).

Il sistema ANS è presente trasversalmente in tutte le età, culture, ed è stato evidenziato in diverse specie animali (Vallortigara, 2017). È interessante che le competenze numeriche preverbali sembrano variare su base individuale; è stato riscontrato che la capacità discriminativa a sei mesi di vita è predittiva della performance in compiti matematici di tipo simbolico a tre anni (Starr et al., 2013).

Il sistema OTS permette di rappresentare contemporaneamente uno, due, tre oggetti; in altre parole 1, 2, 3 sono quantità percettive che il cervello computa automaticamente e senza contarle (Feigenson et al., 2004). In un compito motivazionale in cui bambini di 10 e 12 mesi vedevano lo sperimentatore nascondere in sequenza uno, due o tre biscotti uguali all'interno di due contenitori vicini, essi riuscivano poi a scegliere sempre il contenitore con il numero maggiore di biscotti (Feigenson et al., 2002). Se invece in uno dei due contenitori venivano posti 4 o più biscotti, la scelta era casuale tra 1 *vs* 4 oppure 3 *vs.* 6. L'ipotesi degli autori è che tale comportamento non sia guidato dalla percezione di un rapporto numerico tra due insiemi (come avviene nell'ANS) bensì dalla rappresentazione contemporanea e immediata di un numero assoluto di oggetti, che può essere al massimo 3 nel bambino: se i biscotti sono più di 3 il bambino ne prende uno soltanto e poi smette di cercarne altri. Inoltre nella scelta del contenitore più allettante i bambini riuscivano a valutare contemporaneamente non solo il numero di biscotti (variabile discreta) ma anche la loro grandezza (variabile di tipo continuo): tra due contenitori contenenti rispettivamente uno e due biscotti sceglievano correttamente il primo nel caso in cui i biscotti del secondo contenitore fossero ciascuno grande un quarto rispetto a quelli nel primo.

A tal proposito, alcuni autori obiettano che la presunta percezione e rappresentazione di numerosità potrebbe scaturire dalla percezione di altre variabili continue, come per esempio l'area o la densità di un insieme di punti, in considerazione del fatto che queste variabili aumentano coerentemente con l'aumentare del numero (Gebuis et al., 2016). Tuttavia, al momento attuale la maggior parte delle evidenze sperimentali converge nell'affermare che la percezione e la rappresentazione dei numeri avvengono mediante il sistema specifico dell'ANS. In particolare, Odic e Starr riassumono così le principali evidenze sulla rappresentazione numerica: è universale e pre-esistente all'apprendimento dei numeri; è attivabile in diverse modalità sensoriali; nel compito del confronto di numerosità

l'accuratezza e la velocità peggiorano se c'è incongruenza tra numero e altre variabili continue, probabilmente a causa di una competizione tra l'ANS e altre modalità percettive indipendenti (per es. se l'array con meno punti ha punti più grandi o più densi); controllando le potenziali incongruenze tra variabili percettive la scelta è guidata primariamente dal numero; infine, bambini e adulti ma anche le scimmie, raggruppano spontaneamente insiemi di punti in base al numero piuttosto che all'area: ciò implica che in assenza di altre istruzioni il numero è una categoria più saliente rispetto ad altre (Ferrigno et al., 2017; Odic & Starr, 2018).
Per concludere, la ricerca ha evidenziato che i bambini piccoli sono capaci di rappresentare stimoli quantitativi sia di tipo continuo sia discreto ma nei compiti in cui sono presenti molti elementi essi rappresentano solo il numero discreto (sistema ANS). Normalizzando tutte le variabili continue (area totale, perimetro, densità degli oggetti, ecc.) i bambini distinguono gruppi di numerosità diversa (es. 8 *vs* 16) attivando rappresentazioni approssimate della grandezza numerica.
Il sistema OTS invece, funziona sia con rappresentazioni di variabili continue sia di numerosità discreta. I bambini sanno cercare il numero esatto di oggetti che lo sperimentatore ha nascosto (Feigenson & Carey, 2003); tuttavia, come avviene nel citato compito dei biscotti che è finalizzato ad un preciso obiettivo, i bambini scelgono massimizzando la quantità totale.

2. SVILUPPO DELLA COMPETENZA MATEMATICA

2.1 La rappresentazione simbolica dei numeri

Fin dagli albori della sua storia l'uomo ha imparato a contare e ha sentito la necessità di espandere la sua conoscenza numerica; a partire da una base di conteggio primitiva come 1, 2, 3, il meccanismo del "digitare" si è ampliato prendendo in considerazione tutte le dita. Una volta stabilita una base numerica di conteggio, per esempio 5 come le dita di una mano, oppure 10 come le dita di entrambe le mani, tutti gli altri numeri potevano essere espressi come combinazione di altri.
La necessità di utilizzare e rappresentare in modo scritto numeri sempre più complessi attraverso semplici simboli accompagna lo sviluppo culturale dell'umanità. Il nostro cervello è in grado di associare molto efficacemente un simbolo ad una rappresentazione mentale e di richiamarne rapidamente il significato. Lo sviluppo del linguaggio umano poggia proprio su questo presupposto, una straordinaria capacità che ha reso possibile il graduale superamento dell'approssimazione e l'estensione della comprensione numerica a quantità sempre più grandi: da una corrispondenza biunivoca numero-simbolo per i numeri più piccoli, alla combinazione di simboli, allo sviluppo di meccanismi additivi e moltiplicativi sia per i numeri sia per i simboli (Dehaene, 2011).

L’esplosione della capacità di calcolo raggiunse il suo apice con l’invenzione del sistema posizionale delle cifre, che consentì di rappresentare qualsiasi numero attraverso una sintassi molto efficace. Ma anche la notazione posizionale poteva generare equivoci nei numeri in cui veniva a mancare un certo ordine di grandezza, un problema che poté in seguito essere superato con l’invenzione del simbolo dello zero (Dehaene, 2011).
Il bambino piccolo impara presto i nomi dei numeri, recitandoli sotto forma di filastrocca. Tuttavia soltanto dopo qualche anno di vita, grazie all’esperienza, impara ad associare alle parole-numero un significato quantitativo. Mano a mano che incontra numeri sempre più grandi, difficili da rappresentare a livello mentale, impara anche ad utilizzare le parole e le strutture linguistiche che servono per approssimarli (ad esempio “circa”, “almeno”, “quasi”, ecc.).

2.2. I primi calcoli

Fino ai quattro anni contare per i bambini equivale a recitare una filastrocca, ed è solo a partire da quell’età che all’attività del contare viene associato un significato di descrizione quantitativa del mondo circostante (Wynn, 1990, 1992). Da quel momento i bambini riescono quasi spontaneamente a sommare e a sottrarre numeri servendosi inizialmente delle dita e successivamente di stratagemmi di calcolo a mente intuitivi e sempre più efficaci (Dehaene, 2011). Infine, con l’entrata alla scuola primaria, il bambino apprende gli algoritmi del calcolo scritto nonché strategie più raffinate per velocizzare il calcolo a mente.
Sappiamo che il tempo impiegato per calcolare a mente la somma oppure il prodotto di due numeri cresce notevolmente all’aumentare dei due numeri, secondo un modello non lineare; ciò significa che, almeno nei giovani adulti, il calcolo non si basa più sul conteggio, come invece accade nei bambini piccoli, bensì sul recupero dalla memoria dei fatti aritmetici imparati (Ashcraft, 1995; Ashcraft & Battaglia, 1978). D’altro canto le difficoltà con i numeri più grandi permangono anche in età adulta, nonostante la ragione non sia stata del tutto chiarita.

2.3 Come viene rappresentato lo zero nella mente del bambino e negli animali?

Lo sguardo dei bambini di cinque mesi si sofferma più a lungo quando l’esito numerico di una certa operazione viola la loro aspettativa. Questo effetto non si osserva in bambini di otto mesi se l’operazione chiama in causa lo zero; infatti non sembrano in grado di differenziare gli esiti di 1-1=1 e 0+1=1 (Wynn & Chiang, 1998). Questo risultato, apparentemente contraddittorio, fu interpretato da Wynn e colleghi come incapacità di intendere la quantità nulla.

Lungo il percorso che dalla prima infanzia conduce agli anni prescolari (3-6 anni) il bambino impara a padroneggiare le proprietà cardinali e ordinali dei numeri ma soltanto al termine di una serie di tappe giunge a comprendere che anche lo zero è un numero e come tale può essere elaborato in processi aritmetici (Wellman & Miller, 1986). Una volta assegnato allo zero lo "status" di numero, a circa sei anni il bambino riesce a collocarlo al limite inferiore della successione dei numeri naturali.
In un compito di confronto visivo non simbolico tra coppie di *array* di punti, i bambini di quattro anni si dimostrarono più accurati nell'ordinare piccole numerosità rispetto a coppie di *array* in cui uno dei due era privo di punti (Merritt & Brannon, 2013). Nello stesso studio ci fu una certa variabilità nell'elaborazione dell'insieme vuoto come categoria quantitativa; infatti non tutti i bambini evidenziarono un "effetto distanza". L'effetto distanza è molto significativo in quanto indicativo dell'integrazione dello zero nella successione numerica; nello studio tuttavia, non tutti sembravano discriminare più facilmente zero dalle numerosità maggiori piuttosto che zero da uno.
Successivamente (6-9 anni) i bambini diventano più abili nel padroneggiare semplici regole algebriche, e lo fanno addirittura meglio se queste coinvolgono lo zero: comprendono e giustificano che $0 < n$; $n + 0 = n$; $n – 0 = n$ (Wellman & Miller, 1986).
Esperimenti condotti con animali mostrano che essi sono in grado di rappresentare il "nulla" non soltanto come assenza di uno stimolo ma anche come categoria significativa in compiti comportamentali (Nieder, 2016). Per esempio i macachi rhesus furono istruiti a premere uno o due pulsanti per indicare la presenza o assenza di lievi stimoli tattili o visivi (de Lafuente & Romo, 2005; Merten & Nieder, 2012). In un altro studio una scimpanzé imparò ad associare il simbolo "0" ad un quadrato privo di punti ma non fu poi in grado inserire lo zero in un compito di ordinamento simbolico crescente: il passaggio dal dominio cardinale a quello ordinale richiese ulteriore addestramento (Biro & Matsuzawa, 1999, 2001).
Una prova importante della rappresentazione quantitativa dell'insieme vuoto all'interno di una "linea numerica" negli animali derivò dal riscontro dell'effetto distanza in compiti di riconoscimento e ordinamento condotti con i macachi rhesus (Merritt et al., 2009). A conclusioni analoghe giunsero gli autori di uno studio successivo utilizzando un compito di riconoscimento visivo di numerosità chiamato "delayed match-to-numerosity task" (in quanto la presentazione dei due stimoli test viene differita di 1 s rispetto allo stimolo campione): nonostante le scimmie commettessero pochi errori nell'attribuzione dell'insieme vuoto, esse assegnarono erroneamente l'insieme vuoto alla numerosità 1 più frequentemente che alla numerosità 2 (Ramirez-Cardenas et al., 2016). Sappiamo però che gli animali non possiedono una comprensione simbolica dei numeri e pertanto non possono raggiungere né una piena comprensione delle relazioni che intercorrono tra essi né di conseguenza l'abilità di applicare le regole algebriche (Nieder, 2009).

2.4 Un lungo percorso alla "conquista" dello zero

Nello sviluppo della competenza numerica lo zero occupa un posto a parte. A differenza degli altri numeri naturali, che corrispondono a quantità reali e possono essere contati, lo zero può essere associato ad una quantità o ad un concetto numerico soltanto ricorrendo al pensiero astratto (Butterworth, 1999).

Nel loro studio pionieristico, Wellman e Miller mostrarono che lo sviluppo del concetto di zero nel bambino prevede il superamento di alcune fasi che sfociano nell'acquisizione delle prime competenze algebriche (Wellman & Miller, 1986). Nei due esperimenti realizzati dagli autori emerge che la comprensione dello zero è successiva a quella dei numeri da 1 a 9 ma è tuttavia il presupposto sul quale si fonda l'acquisizione dei primi compiti algebrici (per es. $a – a = 0$, $a + 0 = a$, $a + 1 > a$). Nello studio, bambini di 3-7 anni evidenziarono una prestazione più scadente quando i compiti di conteggio all'indietro, di riconoscimento del numero più piccolo, del simbolo "0" e di confronto numerico, chiamavano in causa l'elaborazione dello zero. In particolare, nel compito di conteggio all'indietro veniva tolto un cubo alla volta da una pila e via via il bambino nominava il numero di cubi rimasti. Quando anche l'ultimo cubo veniva rimosso quasi tutti i bambini riuscivano a comprendere la quantità " nulla" ma soltanto alcuni la sapevano etichettare come "zero". Inoltre, il compito di riconoscimento del numero più piccolo evidenziò che l'integrazione del valore quantitativo dello zero come più piccolo tra i numeri naturali (aspetto cardinale) è un'acquisizione tardiva ed è preceduta da un periodo in cui i bambini, pur conoscendo le forme araba e verbale di "zero", e pur sapendo che zero rappresenta il "nulla", continuano a considerare "uno" come il numero più piccolo in assoluto.

A fronte di una comprensione concettuale e formale dello zero successiva ad altri numeri, i risultati del secondo esperimento evidenziarono che i bambini della scuola primaria possedevano una buona conoscenza delle regole algebriche di base e che, in questo ambito, l'accuratezza del ragionamento era migliore nei problemi in cui era coinvolto lo zero. Gli autori conclusero che l'iniziale difficoltà nel concettualizzare lo zero poteva accrescere la probabilità che il bambino imparasse ad applicare regole implicite speciali per operare con questo numero in problemi matematici oltre il mero conteggio.

Gli studi principali che via via si sono occupati dell'acquisizione del concetto di zero riguardano in particolare le competenze numeriche precoci (Wynn & Chiang, 1998), i disturbi nell'elaborazione numerica e nel calcolo (Granà et al., 2003; McCloskey et al., 1990) e l'introduzione dello zero nei sistemi numerici posizionali dal punto di vista storico (Butterworth, 1999). Nello studio di Granà, esaminando le difficoltà di elaborazione dello zero in pazienti con lesioni cerebrali, si riscontrarono deficit selettivi del tipo "zero sintattico" (quando cioè lo zero riguarda la sintassi del numero ma non modifica la forma ortografica, per es. nel numero 2003) e del tipo “zero lessicale” (lo zero modifica la forma lessicale, per es. in 5230): secondo gli autori lo “zero lessicale” sarebbe più facile da elaborare. Sokol e McCloskey riscontrarono difficoltà selettive nel processamento dello zero in pazienti con specifiche lesioni cerebrali, a sostegno dell’ipotesi che lo zero viene elaborato diversamente dagli altri numeri.

Che lo zero rivesta un ruolo speciale nell’acquisizione delle competenze numeriche è provato anche dalle statistiche sugli errori di calcolo: i più frequenti tra quelli commessi sui banchi di scuola riguardano in qualche modo lo zero (Brown & Burton, 1978).

Zamarian e colleghi hanno riproposto e approfondito lo studio pionieristico di Wellman e Miller, mettendo a confronto la conoscenza dello zero con la conoscenza dei numeri da 1 a 9, delle decine 10 e 20 e dei numeri da 11 a 19, in un gruppo di bambini di 5-6 anni (Zamarian et al., 2007). I risultati sono in linea con i precedenti sia per quanto riguarda la precoce familiarità con la cifra “0” e con il vocabolo ”zero”, sia per la comprensione che zero rappresenta la quantità nulla. Tuttavia anche in questo studio la maggior parte dei bambini ancora non possedeva una relazione d’ordine stabile tra zero e gli altri numeri, come dimostrato in particolare dalla credenza che il numero più piccolo in assoluto sia uno. In un compito di confronto non simbolico in cui dovevano indicare quello tra due cestini che conteneva il numero minore di frutti, i bambini incontravano alcune difficoltà nei casi in cui lo zero doveva essere confrontato con una quantità di frutti inferiore a 5, avvalorando la presenza dell’effetto distanza; d’altro canto questa difficoltà non veniva rilevata nel confronto tra numeri in cifre arabe, forse proprio grazie alla familiarità con il simbolo “0” (Zamarian et al., 2007).

In parziale disaccordo con i risultati di Wellman e Miller, uno studio recente mostra che i bambini riescono ad operare correttamente con gli insiemi vuoti in compiti numerici a soli tre o quattro anni, o comunque non appena comprendono i numeri positivi e il principio di cardinalità, e alcuni di loro li sanno anche etichettare come “zero” (Krajcsi et al., 2021) . Gli autori sostengono che la poca familiarità con il vocabolo “zero” nel linguaggio comune (non si dice “prendi zero matite” bensì “non prendere nessuna matita”) potrebbe condizionare la prestazione nei compiti “give-N task”. Tuttavia, anche in questo studio emerge che i bambini in età prescolare non sono sicuri che lo zero sia un numero. L’interpretazione degli autori è che in questa fascia evolutiva i numeri siano compresi come proprietà di elementi o di oggetti: lo zero non può essere considerato un numero poiché un insieme vuoto è privo di elementi e gli elementi mancanti non possono avere alcuna proprietà. Lo studio identifica inoltre tre componenti della conoscenza sullo zero: operativa (confronto, addizione e sottrazione, ecc.), linguistica (comprensione del vocabolo “zero”) e metaconoscenza (zero come numero). Rimane da chiarire come mai i bambini sappiano operare correttamente con lo zero pur non considerandolo un numero.

Il nostro studio si inserisce in questa linea di ricerca, che si propone di comprendere in che modo il concetto di nulla, pur presente nella mente già in tenera età, gradualmente si trasformi in una complessa e talvolta insidiosa conoscenza numerica. Per farlo abbiamo chiesto ai bambini di giocare con lo zero e con le numerosità, mettendoli a confronto con diversi compiti di riconoscimento e di addizione, in diverse condizioni.

3. LA RICERCA

3.1 Premessa

Le ricerche su come i bambini interiorizzano il concetto di nullità sembrano orientate a riconoscere uno sviluppo stadiale nella rappresentazione dell'insieme vuoto, del significato del numero "zero" e del pensiero algebrico (Nieder, 2016). Alcune questioni aperte riguardano modi e tempi nei quali si sviluppa la capacità di utilizzare l'insieme vuoto come operando e sulla formazione di un ordine stabile tra lo zero e gli altri numeri naturali; infatti i dubbi dei bambini sullo zero come numero e come più piccolo tra i numeri naturali sembrano sciogliersi piuttosto tardivamente (Krajcsi et al., 2021; Zamarian et al., 2007).

Il nostro studio si propone di approfondire la capacità di utilizzare l'insieme vuoto in un contesto di riconoscimento e di operazionalità additiva utilizzando in modo sistematico compiti digitalizzati in condizioni controllate. Per l'esame del giudizio di grandezza, nello studio di Wellman e Miller veniva chiesto ai bambini di confrontare numeri presentati in cifre arabiche, mentre nel successivo lavoro di Zamarian si utilizzavano anche coppie di cestini contenenti dei frutti (Wellman & Miller, 1986; Zamarian et al., 2007).

I bambini da noi esaminati hanno effettuato il riconoscimento di quantità attraverso un compito presentato sotto forma di gioco elettronico su tablet, confrontando *array* discreti di punti normalizzati per l'area totale. Oltre al compito di confronto diretto con il target, abbiamo chiesto ai bambini anche di memorizzare la numerosità prima di identificarla tra due alternative.

La capacità di addizionare e sottrarre lo zero era stata indagata da Krajcsi e colleghi con operazioni nel *range* delle piccole numerosità attraverso compiti verbali o con oggetti reali (Krajcsi et al., 2021). Il nostro compito aritmetico approfondisce la capacità di operare in modo additivo con gli insiemi vuoto e unitario rispetto a quelli più numerosi, sia in termini di accuratezza sia dei tempi di risposta.

3.2 Ipotesi

Abbiamo utilizzato tre tipologie di test visivi non simbolici per esaminare: 1) le abilità di riconoscimento di numerosità non soltanto nella condizione classica di confronto diretto ma anche in seguito a scomparsa dello stimolo e recupero del ricordo dalla memoria e 2) le abilità di operare in modo additivo con lo zero e con le altre numerosità.
Nello specifico, ci siamo chiesti se l'accuratezza vari in modo significativo:

a) nel riconoscimento diretto e differito (con ricordo) di insiemi vuoti, unitari e con numerosità maggiori. Ci aspettiamo che l'insieme vuoto e l'insieme unitario siano riconosciuti facilmente: a 5-6 anni i bambini hanno pressoché interiorizzato il significato semantico di zero (Krajcsi et al., 2021) e inoltre l' uno viene processato attraverso il *subitizing*, come descritto nella parte introduttiva.
D'altro canto ci aspettiamo una prestazione meno accurata nel riconoscimento di numerosità maggiori, soprattutto se il rapporto target/distrattore è maggiore di 2:3 (Odic & Starr, 2018), in accordo con quanto previsto dal modello teorico dell'ANS e dalla legge di Weber .
Non ci aspettiamo differenze significative nel compito differito rispetto a quello diretto nel riconoscimento di insiemi vuoti e unitari, mentre ipotizziamo una diminuzione di accuratezza nel riconoscimento di numerosità, in quanto le prestazioni potrebbero essere condizionate dalla capacità di memoria a breve termine.

b) nel riconoscimento diretto e differito di insiemi con piccole (<8) rispetto a grandi numerosità (≥8). Ci aspettiamo prestazioni migliori nel riconoscimento di pochi elementi, come previsto dal modello teorico dell'approssimazione (ANS), secondo cui la stima è condizionata dall'effetto di grandezza. Anche in questo caso ipotizziamo un calo di accuratezza nel compito differito per $n \geq 8$.

c) nell'operare in modalità additiva con gli operandi 0, 1, 2, a > 2.
Non ci aspettiamo variazioni significative nell'operare additivo con i piccoli numeri; in particolare studi recenti hanno evidenziato che nell'età del campione in esame i bambini padroneggiano concettualmente lo zero, sanno confrontarlo e utilizzarlo a livello operazionale (Krajcsi et al., 2021). Ipotizziamo invece prestazioni meno accurate con addendi maggiori in quanto potrebbero entrare in gioco fattori legati all'approssimazione.
In aggiunta ci aspettiamo delle differenze in termini di tempi di risposta nel processamento dello zero come addendo rispetto ad altre numerosità. Infatti, stando a quanto emerge dalla letteratura, i bambini nell'età prescolare hanno oramai interiorizzato il concetto zero sia dal punto di vista semantico sia

operazionale, pertanto dovrebbero essere abbastanza rapidi, oltre che abili, nel “non aggiungere nulla”.

3.3 Partecipanti

Hanno partecipato allo studio 33 bambini di età compresa tra i 70 e gli 81 mesi (età media = 74.545 mesi; d.s. = 2.917 mesi) distribuiti per genere (F = 16; M = 17). I bambini sono tutti regolarmente iscritti e frequentanti il terzo anno della scuola dell’infanzia nel territorio italiano.

3.4 Metodi e strumenti

3.4.1 Procedura

Inizialmente sono state illustrate agli insegnanti e ai genitori le finalità dello studio ed è stato compilato da parte di quest’ultimi il modulo di consenso informato. Le situazioni particolari, come la presenza particolari disabilità sensoriali o di difficoltà nell’esecuzione del compito sono state annotate a parte.
Le abilità numeriche sono state misurate mediante tre batterie di test digitalizzate su tablet. I bambini sono stati valutati singolarmente in due sessioni della durata di circa 30 minuti la prima e di circa 15 minuti la seconda, intervallate di alcuni giorni. Le sessioni si sono tenute nella biblioteca della scuola materna, dove i bambini venivano accomodati in assenza di distrazioni visive e uditive. Il tablet era posizionato su un supporto verticale distante circa 50 cm dal partecipante. Dopo aver messo a proprio agio il bambino lo sperimentatore avviava la sessione. Durante la prima sessione venivano somministrati nell’ordine il compito di riconoscimento visivo, il compito verbale di conteggio ed infine il compito aritmetico. Durante la seconda sessione veniva somministrato il compito aritmetico mnemonico. Nel caso in cui i bambini mostrassero segni di impazienza o di stanchezza potevano interrompere momentaneamente la sessione.

3.4.2 Valutazione delle abilità di riconoscimento numerico non simbolico

La valutazione delle abilità di riconoscimento della numerosità è avvenuta attraverso una batteria digitalizzata con la piattaforma Labvanced. I partecipanti hanno utilizzato un tablet Samsung Galaxy Tab S2 oppure un tablet Ipad Pro, entrambi da 9.7’’.

Sono state esaminate due condizioni, ciascuna con una specifica batteria di test: la prima condizione, abbreviata con VR (*visual recognition*) prevedeva il riconoscimento diretto tra due alternative, mentre la seconda, VRM (*visual recognition memory*), richiedeva al bambino di ricordare l'array di punti visto e di identificarlo tra due alternative dopo un ritardo di 3000 millisecondi.

I test VM e VRM erano strutturati in blocchi:

a) tre esempi introduttivi che permettevano al bambino di familiarizzare con il compito. Al centro dello schermo veniva visualizzato il disegno di un animale; dopo qualche secondo comparivano altri due disegni, uno dei quali corrispondente allo stimolo target, che il bambino doveva indicare toccando lo schermo. Il programma forniva al bambino le seguenti istruzioni vocali: "*Adesso apparirà un disegno e tu dovrai trovare quello uguale; facciamo una prova insieme?*"; "*Dove vedi lo stesso disegno? Toccalo con il tuo ditino*".
b) alcune prove in cui il bambino familiarizzava con i test veri e propri (non utilizzate nell'analisi).
c) le 72 domande del test. Al centro dello schermo veniva presentato un array di pallini bianchi disposti su un quadrato nero; dopo 3000 ms comparivano due array, corrispondenti rispettivamente allo stimolo target e ad un distrattore, con i pallini distribuiti casualmente sullo sfondo ma normalizzati per l'area totale. Lo stimolo target iniziale rimaneva visibile al centro dello schermo. Lo sperimentatore spiegava ai bambini che i pallini non dovevano essere contati bensì riconosciuti visivamente. Il programma forniva al bambino le seguenti istruzioni vocali: "*Dove vedi lo stesso numero di pallini? Toccalo con il tuo ditino*". La risposta corretta veniva premiata con la comparsa di una volpe felice accompagnata da un segnale acustico vivace; in caso di risposta errata compariva una volpe triste (Figura 1).

   Le domande sono suddivise in riconoscimento di *numerosità* (54 domande), riconoscimento dell'*insieme vuoto* (9 domande) e riconoscimento dell'*insieme unitario* (9 domande). Ai fini dell'analisi le domande sono ulteriormente suddivise in base alla numerosità del target (maggiore o minore di 8). I rapporti di numerosità target/distrattore variano da 0:2 a 1:2 ad un massimo di 4:5, corrispondente per il target/distrattore 8/10. (Tabella 1).

Per ogni risposta venivano registrati sia il tempo di risposta (in millisecondi) sia l'accuratezza della risposta (1 = corretta, 0 = errata). La tabella 1 specifica nel dettaglio la composizione dei test di riconoscimento visivo VR e VRM.

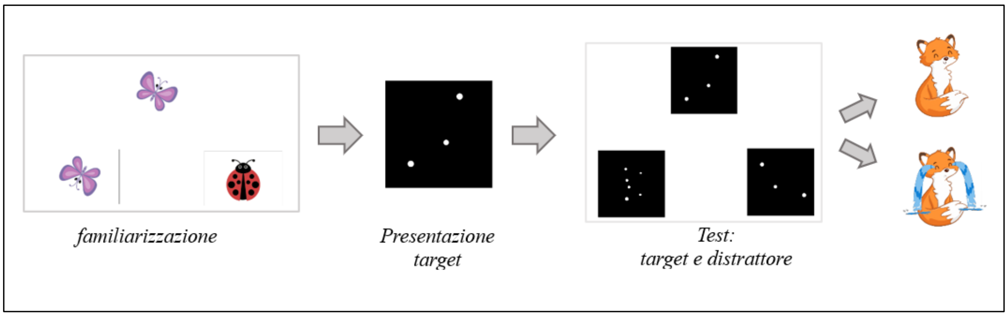

***Figura 1**. Successione grafica dei test di riconoscimento visivo (VR e VRM).*

<table>
<tr><th rowspan="2">Task block</th><th colspan="2">Target | Distrattore</th><th rowspan="2"></th></tr>
<tr><th>target < 8 pt</th><th>target ≥ 8 pt</th></tr>
<tr><td>Familiarizzazione</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Numerosity</td><td>2|4
3|6
4|8</td><td>8|16
16|32
32|64</td><td>3 volte</td></tr>
<tr><td>Zero</td><td>0|2
0|4
0|8</td><td></td><td rowspan="3">3 volte</td></tr>
<tr><td>One</td><td>1|3
1|5
1|9</td><td></td></tr>
<tr><td>Numerosity</td><td>3|5
3|7
3|11
3|9
3|15</td><td>8|27
8|10
8|12
8|16
8|24
8|40
8|72</td></tr>
</table>

***Tabella 1**. Composizione dei test di riconoscimento VR e VRM*

3.4.3 Valutazione delle abilità operazionali non simboliche

La valutazione delle abilità aritmetiche è avvenuta attraverso una batteria digitalizzata con la piattaforma Labvanced. I partecipanti hanno utilizzato un tablet Samsung Galaxy Tab S2 e un tablet Ipad Pro, entrambi da 9.7''.

Durante la fase di familiarizzazione veniva proposto il seguente messaggio vocale: "*Ciao sono volpe e oggi faremo un gioco insieme. Mi aiuti a scoprire quanti pallini si nascondono dietro alla scatola? Guarda qui … adesso guarda qua. Hai visto? I pallini adesso sono dentro alla scatola. Adesso ti mostro con il ditino quanti pallini ci sono dentro alla scatola*". Contestualmente al messaggio al centro dello schermo (sfondo nero) veniva visualizzato un quadrato verde. Dal lato sinistro dello schermo compariva un quadrato nero con un pallino bianco che si sovrapponeva al quadrato iniziale;

subito dopo dal lato destro compariva un secondo quadrato contenente un pallino che si sovrapponeva al quadrato inziale. In questa fase il bambino poteva verificare che sul quadrato verde iniziale erano presenti due pallini bianchi. Venivano quindi visualizzati due *array* alternativi mentre un ditino sceglieva correttamente l'unica alternativa corretta (somma pari a due pallini).
Successivamente venivano proposte le seguenti istruzioni: "*Durante il nostro gioco insieme devi stare molto attento perché la scatola sarà chiusa. Guarda bene come faccio io*". Nell'esempio il bambino vedeva i due *array* di pallini entrare nella scatola da sinistra e da destra e poi scomparire. Il ditino sceglieva la corretta corrispondenza tra le due alternative proposte, in cui i pallini presenti erano diversi in numero ma normalizzati per l'area totale. Infine il turno del bambino veniva introdotto dal seguente messaggio: "*Adesso tocca a te. Proviamo insieme*". Venivano presentati la scatola, i due array di pallini tra cui il target e il distrattore e infine il messaggio "*Quanti pallini sono dentro la scatola?*". Il bambino doveva toccare lo schermo in corrispondenza della somma corretta di pallini tra le due alternative. Le risposte corrette ed errate venivano segnalate come nei compiti precedenti (Figura 2). La composizione del test, denominato "ARIT", prevedeva 23 domande ripetute per tre volte e suddivise rispettivamente nei blocchi "numerosity" in cui gli addendi (a_1 e a_2) sono maggiori o uguali a 3 (3+3, 4+4, 8+8, 16+16, 32+32, 64+64), "zero" in cui $a_1 = 0$ (0+0, 0+2, 0+3, 0+4, 0+8, 0+16, 0+32, 0+64), "one" in cui $a_1 = 1$ (1+1, 1+2, 1+3, 1+4, 1+15, 1+31) e "two" (14+2, 30+2, 62+2). Il rapporto tra l'array somma (target $a_1 + a_2$) e il distrattore era sempre 1 : 2 (con l'eccezione del caso 0 : 2); tale valore è stato scelto per evitare che la risposta fosse condizionata da fattori confondenti legati al rapporto di numerosità (Tabella 2). A seconda della numerosità della somma le domande sono ulteriormente specificate in "small" e "large". Per ogni risposta venivano registrati il tempo di risposta (in millisecondi) e l'accuratezza (1 = corretta, 0 = errata).

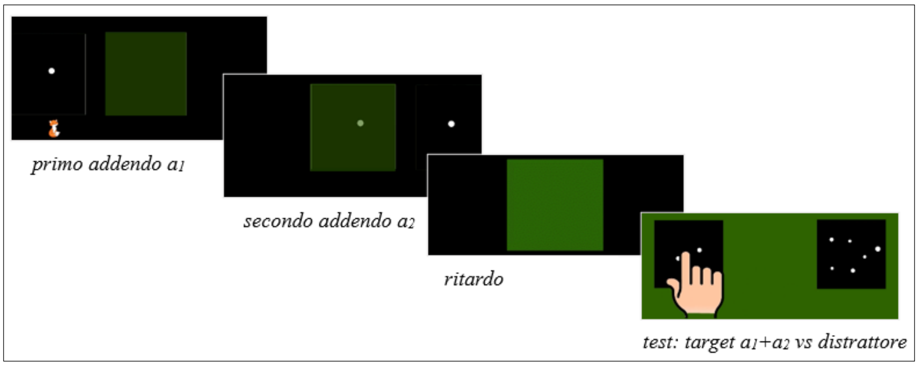

Figura 2. *Esempio di successione grafica del test aritmetico (ARIT).*

Addendo (a_1)	***target*** **≤ 8 (“small”)**		***target*** **> 8 (“large”)**		
	distanza a_1***-***a_2	***target/distrattore***	***distanza*** a_1***-***a_2	***target/distrattore***	
Familiarizzazione					
0	+0 +2 +3 +4	0|2 2|4 3|6 4|8	+16 +32 +64	16|32 32|64 64|128	3 volte
1	+1 +2 +3 +4	2|4 3|6 4|8 5|10	+15 +31	16|32 32|64 64|128	
2	-	-	+2 +2 +2	16|32 32|64 64|128	
$a_1 > 2$	+3 +2 +4	6|12 4|8 8|16	+8 +16 +32	16|32 32|64 64|128	

Tabella 2*. Test sulle abilità di operare in modo additivo (ARIT).*

3.5 Analisi dei dati

Nel nostro studio abbiamo esplorato le conoscenze relative all’insieme vuoto rispetto ad altre numerosità prendendo in esame le abilità di riconoscimento e di addizione. Sono stati condotti due livelli di analisi statistica dei dati (accuratezza e tempi di risposta) utilizzando il software statistico “R”: un primo livello descrittivo per il calcolo delle medie e delle deviazioni standard, e un secondo livello inferenziale per l’analisi della varianza con ANOVA.

Analisi statistica descrittiva

La capacità di operare con le numerosità è stata esaminata attraverso i tre compiti digitalizzati precedentemente descritti e denominati rispettivamente “VR”, “VRM”, “ARIT”.

Nei compiti di riconoscimento diretto (VR) e differito (VRM) è stata calcolata l’accuratezza media di riconoscimento nei tre casi $n = 0$, $n = 1$, $n > 1$ (“numerosity”): alla risposta corretta è stato assegnato un punto, a quella errata zero punti e la media è stata calcolata come quoziente tra la sommatoria dei punteggi e il numero di osservazioni. Ai fini dell’analisi l’insieme “numerosity” è stato ulteriormente specificato nelle categorie “small” ($n < 8$) e “large” ($n \geq 8$).

Nel compito aritmetico (ARIT) è stata calcolata l’accuratezza nel riconoscimento della somma distinguendo innanzitutto quattro livelli in cui uno dei due addendi corrisponde rispettivamente ad $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a > 2$ (“numerosity”); per ciascun livello si è specificato l’array somma nelle categorie “small” (somma ≤ 8) e “large” (somma > 8). Alla risposta corretta è stato assegnato un punto, a quella errata zero punti. L’accuratezza media è stata calcolata come nei compiti precedenti.

Nei compiti VR e VRM sono state calcolate le medie dei tempi di risposta (TR), espressi in millisecondi, nelle condizioni n = 0, n = 1, n > 1, mentre nel compito ARIT sono state calcolate le medie dei TR nelle condizioni a = 0, a = 1, a = 2, a > 2. Ai fini del calcolo sono stati esclusi i valori *outliers* ($\mu \pm 3$ ds).

Analisi della varianza

L'analisi della varianza (ANOVA) è stata eseguita con il software "R" per valutare se la variabilità nell'accuratezza e nei tempi tra le diverse condizioni esaminate e tra i diversi tipi di compiti fosse significativa.

Dapprima è stata condotta una analisi a due fattori per ogni compito, prendendo in esame solo gli effetti principali: il fattore numerosità, con tre livelli per i compiti di riconoscimento (0, 1, n > 1) e con quattro livelli per il compito aritmetico (0, 1, 2, n > 2), e il fattore grandezza, con due livelli (small/large). In un secondo tempo è stata condotta una ANOVA con tre fattori prendendo in esame gli effetti principali e le interazioni: il fattore compito (livelli VR, VRM, ARIT), il fattore numerosità (livelli 0, 1, 2, n > 2) e il fattore grandezza (small/large).

Nel caso di fattori con tre o più livelli è stato applicato anche il test post hoc di Tukey per risultati statisticamente significativi, per individuare quali condizioni fossero effettivamente diverse tra loro.

3.6 Risultati

3.6.1. Riconoscimento di numerosità: analisi descrittiva

Nei due compiti di riconoscimento è stata indagata l'*accuratezza* nell'identificazione della numerosità nelle due condizioni di riconoscimento diretto (stimolo presente) e differito.

Nel compito di riconoscimento diretto i bambini sono molto bravi nell'identificare sia gli insiemi vuoti (M = 0.990; ds. = 0.101) sia unitari (M = 0.993; ds. = 0.082) ma anche gli insiemi con meno di 8 elementi (M = 0.960; ds. = 0.197), mentre mostrano qualche incertezza con gli insiemi più numerosi (M = 0.872; ds. = 0.335), (Tabella 3).

E' interessante notare che nel compito differito i bambini hanno più difficoltà a ricordare e poi riconoscere l'insieme vuoto (M = 0.824; ds. = 0.381) rispetto all'insieme unitario (M = 0.976; ds. = 0.154) e alle altre numerosità.

Numerosità	*Media*	*ds*	*Numerosità*	*Media*	*ds*
Riconoscimento diretto			*Riconoscimento differito*		
0	0.990	0.101	0	0.824	0.381
1	0.993	0.082	1	0.976	0.154
< 8	0.960	0.197	< 8	0.956	0.206
≥ 8	0.872	0.335	≥ 8	0.928	0.259
	0.954	*0.057*		*0.921*	*0.068*

Tabella 3. *Analisi descrittiva dell'accuratezza di riconoscimento di numerosità.*

I *tempi di risposta* suggeriscono che nel compito diretto (VR) i bambini sono più veloci a riconoscere zero (M = 2112.9, ds. = 1720.7) e uno (M = 2197.8, ds. = 1985.5) e più lenti con le numerosità maggiori (M = 3174.3, ds. = 3631.8). Nel compito di memoria (VRM) invece, riconoscono più velocemente gli insiemi unitari (M = 2379.9, ds. = 1493.4) rispetto alle numerosità (M = 2706.3, ds. = 2076.1) ma anche rispetto allo zero (M = 2721.3, ds. = 1673.6).

3.6.2. Riconoscimento di numerosità: analisi della varianza

Per l'analisi della varianza vengono indicati i gradi di libertà di ogni criterio (DF o degrees of freedom), la somma dei quadrati (SS), la media quadratica (MS) e il valore del Test F (Tabella 4).

- Nel compito di riconoscimento diretto emerge in generale un'*accuratezza* elevata in tutte le condizioni esaminate (0, 1, n > 1), tuttavia la varianza è significativa tra le diverse numerosità: $F(2, 2366) = 23.30$, $p < .001$. L'analisi post hoc non rileva differenza nel riconoscimento di 0 *vs* 1 mentre il riconoscimento sia di 0 sia di 1 è più accurato se paragonato alle numerosità ($p < .001$). La varianza risulta significativa anche considerando come criterio "small" vs "large", dove la categoria "small" comprende le numerosità minori di 8, inclusi 0 e 1: $F(1, 2366) = 54.93$, $p < .001$ (Grafico 1).

  Per quanto riguarda i *tempi di risposta*, nel VR i bambini sono significativamente più rapidi nel riconoscere zero e uno rispetto alle numerosità maggiori ($p < .001$).
- Anche nel compito differito la differenza di *accuratezza* è significativa nei tre casi 0, 1, n > 1, $F(2, 2291) = 31.073$, $p < .001$, così come nelle condizioni "small" *vs* "large" $F(1, 2291) = 5.181$, $p < .05$ (Grafico 1). Tuttavia, come riscontrato ad un livello descrittivo, l'analisi post hoc dimostra che in questo caso la variabilità è spiegata dalle condizioni 0 *vs* 1 ($p < .001$) e 0 *vs* n > 1 ($p < .001$) per il fatto che le prestazioni meno accurate si registrano nel ricordo-riconoscimento dell'insieme

vuoto. Diversamente da quanto emerso nel compito diretto, in questo non è invece significativa la differenza 1 *vs* n > 1 (p = 0.069).

Per quanto riguarda i *tempi di risposta*, nel VRM i bambini appaiono più lenti nel riconoscere non solo le numerosità, ma anche lo zero, rispetto all'uno (p < .05), mentre non si riscontra differenza nei TR dello zero e delle numerosità.

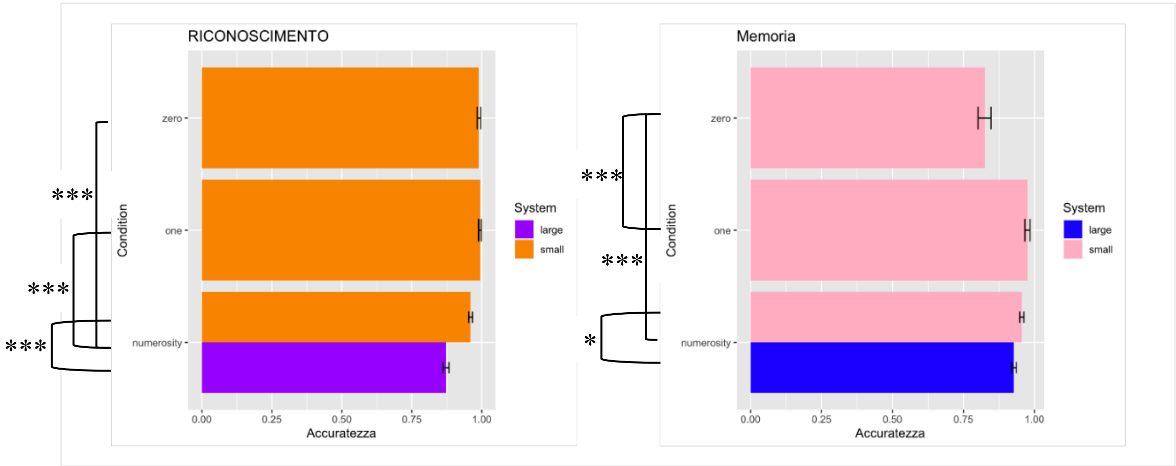

Grafico 1. *Accuratezza nel riconoscimento immediato (a sinistra) e differito (a destra) di numerosità. Nella legenda le condizioni sono n < 8 ("small") e n ≥ 8 elementi ("large").*

Riconoscimento diretto						***Riconoscimento differito***					
Origine variazione	***DF***	***SS***	***MS***	***F***	***p***	***Origine variazione***	***DF***	***SS***	***MS***	***F***	***p***
n = 0, 1, >1	2	2.88	1.44	23.30	<.001	n = 0, 1, >1	2	3.90	1.95	31.07	<.001
small / large	1	3.40	3.40	54.93	<.001	small / large	1	0.33	0.33	5.18	<.05
Errore	2366	146.37	0.06			Errore	2291	143.76	0.06		

Tabella 4*. ANOVA relativa alla variabile accuratezza nei compiti VR e VRM.*

3.6.3. Abilità additiva: analisi descrittiva

Nel compito additivo di numerosità sono state esaminate più nel dettaglio entrambe le variabili:

- l'*accuratezza* nel riconoscimento della somma di due addendi: come illustrato nella Tabella 5 i dati sono suddivisi per il fattore grandezza (small/large) e numerosità dell'addendo (0, 1, 2, a > 2). In questo compito i bambini sembrano più in difficoltà rispetto ai precedenti, evidenziando accuratezze inferiori sia nella condizione in cui la somma risulta minore o uguale a 8 (small), sia nella condizione in cui la somma è maggiore di 8 (large); specificamente, nella condizione "small" la prestazione migliore si è registrata con l'addendo a = 1 (M = 0.790; ds. = 0.408) mentre nella condizione "large" con a = 0 (M = 0.801; ds. = 0.400). Il numero maggiore di errori si è riscontrato con a = 2. È opportuno specificare, come si evince dalla Tabella 5, che le addizioni con a = 2 afferiscono unicamente alla condizione “large”.

L’esame delle accuratezze con addendi a = 0 e a = 1 è stato ulteriormente specificato nelle due diverse condizioni di numerosità del secondo addendo (+1, +2, +3 nella prima condizione e +4, +8, +16, +32 nella seconda). Nelle addizioni con a = 0 si registra un’accuratezza leggermente più alta nel secondo gruppo (M = 0.803, ds. = 0.398) rispetto al primo (M = 0.751, ds. = 0.433). Nelle addizioni con a = 1 la situazione è invertita: l’accuratezza è leggermente più elevata nel primo gruppo (M = 0.818, ds. = 0.386) rispetto al secondo (M = 0.753, ds. = 0.432).

Condizione “small” (somma ≤ 8)			*Condizione “large” (somma > 8)*		
Addendo (a)	***Media***	***ds***	***Addendo (a)***	***Media***	***ds***
0	0.765	0.424	0	0.801	0.400
1	0.790	0.408	1	0.768	0.423
2	-	-	2	0.737	0.440
> 2	0.747	0.435	> 2	0.774	0.419
totale	*0.767*	*0.422*	*totale*	*0.770*	*0.421*

Tabella 5. *Medie dell’accuratezza nel riconoscimento additivo in base al valore dell’addendo.*

- i *tempi di risposta*, che evidenziano maggiore rapidità nella stima della somma quando uno degli addendi è a = 0 (M = 2279,096; ds. = 1281,630). I bambini sono invece un pò più lenti a riconoscere la somma se a = 1 (M = 2521,754; ds. = 1598,187), a = 2 (M = 2427,538; ds. = 1363,439) e a > 2 (M = 2676,827; ds. = 1821,727), (Grafico 2).

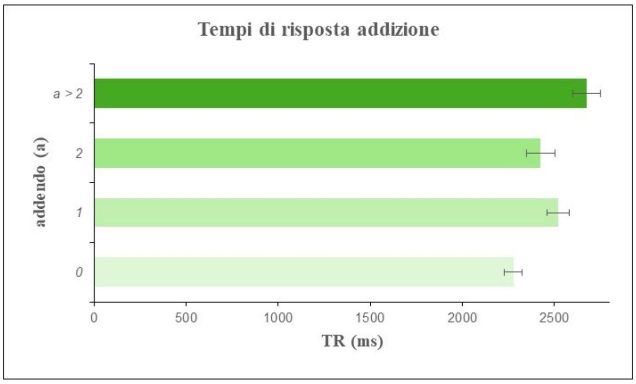

Grafico 2. *Tempi di risposta nel compito additivo.*

3.6.4. Abilità additiva: analisi della varianza

- Per quanto riguarda la variabile *accuratezza* non emergono differenze significative in base al tipo di addendo, i bambini sono ugualmente bravi a svolgere le addizioni con 0, 1, 2 e con addendi maggiori di 2. Nemmeno le condizioni "small" vs "large" mostrano differenze significative (Grafico 3).

  L'ulteriore esame delle differenze tra le accuratezze nelle addizioni con a = 0 o a = 1 con la specificazione del valore del secondo addendo, come descritto al paragrafo precedente, sono al limite di significatività per a = 0 ($p = .05$) e significative per a = 1 ($p < .05$).

  Sono state approfondite anche le interazioni tra il valore dell'addendo e della somma per evidenziare possibili effetti combinati (per esempio a = 0, target = "small" *vs* a = 0, target = "large"), ma in nessuno dei casi emergono differenze significative.
- L'andamento osservato per i *tempi di risposta* è stato approfondito con l'analisi della varianza nelle quattro condizioni esaminate, evidenziando una differenza significativa, $F(3, 2236) = 7.28$, $p < .001$ (Tabella 6). Nello specifico, i bambini sono più veloci ad indicare la somma quando uno degli addendi è 0 sia rispetto alla condizione in cui uno degli addendi è 1 ($p < .05$) sia alla condizione in cui sono entrambi maggiori di 2 ($p < .001$).

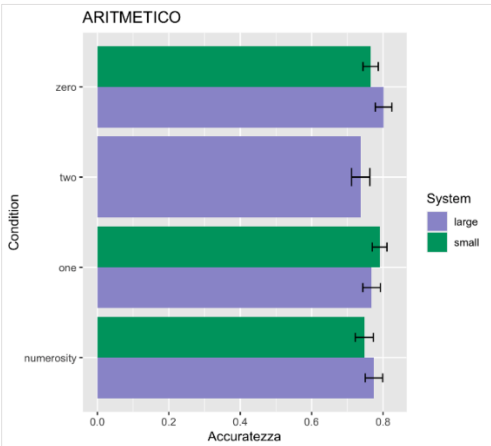

Grafico 3. *Accuratezza nell'addizione.*

Origine della variazione Fattore a = 0, 1, 2, >2	***DF***	***SS***	***MS***	***F***	***p***
Tra gruppi	3	$5{,}219 \cdot 10^7$	$1{,}740 \cdot 10^7$	7,28	<.001
In gruppi	2236	$5{,}340 \cdot 10^9$	$2{,}388 \cdot 10^6$		

Tabella 6. *ANOVA dei tempi di risposta nel compito ARIT.*

Per maggiore chiarezza riportiamo in una tabella riassuntiva i principali risultati fin qui descritti (Tabella 7). Accanto ad ogni tipologia di test sono riportate le condizioni che risultano significative rispetto a quelle confrontate.

Test	*Accuratezza*	*Tempi di risposta*
Riconoscimento diretto (VR)	zero > numerosity *p< .001* one > numerosity *p< .001* small > large *p< .001*	zero < numerosity *p< .001* one < numerosity *p< .001*
Riconoscimento differito (VRM)	zero < numerosity *p< .001* zero < one *p< .001* small > large *p< .05*	zero > one *p< .05* numerosity > one *p< .05*
Aritmetico (ARIT)	*non significative*	zero < one *p< .05* zero < numerosity *p< .05*

Tabella 7. Riepilogo delle differenze significative riscontrate nei tre compiti.

3.6.5. Confronti tra diversi compiti

Da ultimo abbiamo esteso l'analisi della varianza relativa all'accuratezza anche al fattore compito (VR, VRM, ARIT) (Tabella 8). Emerge che i bambini fanno molta più fatica nel compito aritmetico rispetto ai due compiti di riconoscimento delle numerosità $F(2, 6927)=198.066$, $p < .001$. L'approfondimento delle interazioni evidenzia che la differenza è significativa per tutte le condizioni di numerosità in tutti i compiti ($p < .001$), con l'unica eccezione dello zero nel compito VRM.

Per gli altri effetti principali (numerosità e grandezza) i risultati supportano in linea generale quanto emerso dalle analisi precedenti: la numerosità "small" è più facile da riconoscere della "large" ($p < .001$) e uno è più facile sia delle numerosità ($p < .001$) sia di zero che di due ($p < .05$).

Rispetto all'interazione "compito" x "numerosità" si sottolinea che mentre i bambini sono più accurati nel riconoscere lo zero nell'immediato piuttosto che dopo recupero dalla memoria ($p < .001$), sono invece ugualmente abili nel riconoscere l'uno e le numerosità maggiori, così come le condizioni small e large, nei due diversi compiti.

Origine della variazione	*DF*	*SS*	*MS*	*F*
Compito (VR, VRM, ARIT)	2	39.6	19.804	198.066
Numerosità (0, 1, 2, >2)	3	1.7	0.563	5.635
Grandezza (small, large)	1	1.4	1.389	13.889
Compito *vs* numerosità	4	5.7	1.416	14.165
Compito *vs* grandezza	2	2.4	1.182	11.824
Numerosità *vs* grandezza	2	0.3	0.168	1.684
Errore	6927	692.6	0.100	

Tabella 8. *ANOVA a tre fattori con gli effetti principali e le interazioni.*

3.7 Discussione

Il lavoro presentato si inserisce in una linea di ricerca che si propone di comprendere come le intuizioni precoci dei bambini intorno al "nulla" evolvano gradualmente in conoscenze numeriche. Abbiamo utilizzato per la prima volta in modo sistematico e in condizioni controllate tre compiti digitalizzati, presentati sotto forma di giochi elettronici ad un gruppo di bambini di cinque anni.
L'obiettivo di questo studio preliminare è stato di effettuare un esame comparativo (tra insiemi vuoti, unitari e con cardinalità diverse) delle accuratezze e dei tempi di risposta in compiti di a) riconoscimento diretto, b) memorizzazione e riconoscimento differito, c) addizione. Il compito di riconoscimento, che consiste nel valutare il numero di punti di un *array*, ha coinvolto unicamente la variabile discreta della numerosità, in quanto la variabile continua dell'area totale è stata controllata attraverso normalizzazione.
Quasi tutti i bambini che hanno svolto i *tasks* hanno manifestato un segno di sorpresa alla prima comparsa sullo schermo dell'*array* vuoto, come se l'assenza di elementi costituisse di per sé un motivo di ambiguità. Di fatto, in accordo con la nostra ipotesi iniziale, i risultati del compito di riconoscimento diretto dimostrano buona familiarità con gli insiemi vuoto e unitario, diversamente dalle numerosità maggiori che sono caratterizzate da imprecisione e tempi di risposta più lunghi, a conferma della presenza di un effetto di grandezza. Lo stesso effetto si riscontra nella migliore prestazione osservata a livello generale con le piccole numerosità rispetto alle grandi, in entrambi i compiti a) e b), dato che corrobora la nostra seconda ipotesi e conferisce validità di costrutto ai test.
L'evidenza più inattesa riguarda il compito di memorizzazione; infatti in questo caso è proprio l'insieme vuoto a mettere più in difficoltà i bambini nel recupero e riconoscimento, e non soltanto rispetto ad uno ma anche rispetto alle altre cardinalità. Questo dato è avvalorato anche dal riscontro sui tempi di risposta relativi allo zero, che risultano confrontabili con quelli impiegati per riconoscere le numerosità più elevate. Un'interpretazione adeguata richiederebbe ulteriori approfondimenti, tuttavia a livello speculativo si potrebbe supporre che la formazione di un ricordo sulla nullità renda i bambini in qualche modo incerti in fase di recupero, in quanto lo zero potrebbe essere rappresentato come "estraneo" tra le altre numerosità. D'altro canto alcuni studi dimostrano che l'attribuzione di uno *status* di numero allo zero è un'acquisizione piuttosto tardiva nello sviluppo delle competenze numeriche del bambino (Krajcsi et al., 2021; Merritt & Brannon, 2013) .
In accordo con la terza ipotesi, il compito di operazionalità additiva è stato il più difficile da svolgere; il task è più articolato rispetto ai precedenti, richiede di riconoscere le numerosità dei due addendi, di sommarli, memorizzarli e infine di identificarne la somma. Tuttavia in questo caso non si sono osservati effetti di grandezza, il target somma viene riconosciuto indipendentemente dalle numerosità.

Non è così per i tempi di risposta: i bambini sono più veloci nell'operare con l'addendo nullo rispetto all'uno, al due e alle diverse numerosità, suggerendo la conoscenza implicita della regola di neutralità dello zero a + 0 = a. Il dato richiama la precoce capacità di operare con l'addendo neutro riscontrata nei bambini di 3-4 anni nelle somme entro il quattro presentate sia sotto forma di domande-storiella in cui il termine "zero" viene sostituito con "nessuno", sia in forma oggettuale utilizzando due gruppi di oggetti reali posti alle estremità di un tavolo (Krajcsi et al., 2021).

Il nostro studio ha esteso ulteriormente l'esame dell'effetto principale del tipo di addendo, determinando che nel contesto dell'addizione a + 0 la difficoltà nel riconoscere il risultato è maggiore con addendi piccoli (0, 1, 2, 3), diversamente dal contesto a + 1 nel quale si riscontra una migliore accuratezza con addendi piccoli. Sarebbe interessante approfondire l'origine di questa differenza, al fine di comprendere se l'incertezza sia legata alla fase di memorizzazione dell'operando nullo, come sembra emergere anche dal compito di riconoscimento, oppure sia dovuta ad una sorta di effetto distanza tra i due addendi (nonostante essi siano presentati in successione e non contemporaneamente). A questo proposito è interessante citare un compito di confronto tra due gruppi di oggetti reali di diversa numerosità, in cui bambini di 5-6 anni presentavano le maggiori difficoltà nel riconoscere l'insieme più piccolo nel caso in cui uno dei due fosse vuoto, e specialmente nelle coppie in cui l'altro addendo era un numero minore di cinque (Zamarian et al., 2007). Inoltre, le coppie diverse da zero risultavano più difficili da confrontare se la differenza era di uno piuttosto che di tre oggetti, evidenziando anche un effetto distanza.

In definitiva i nostri risultati contribuiscono a comprendere il modo in cui i bambini operano, interiorizzano e rappresentano l'assenza di quantità. Nello specifico dimostrano che i bambini riconoscono l'insieme vuoto con accuratezze e tempi di risposta paragonabili alle piccole numerosità, anche se non sempre lo recuperano correttamente dalla memoria. Inoltre manifestano qualche incertezza nell'addizionare lo zero alle piccole numerosità, un riscontro interessante che fornisce lo spunto per ulteriori indagini.

Conclusioni

Lo zero è un numero speciale. Come abbiamo appreso dalla letteratura precedentemente citata i bambini possiedono una comprensione intuitiva precoce di questo numero, infatti lo sanno riconoscere in varie rappresentazioni e utilizzare come operando; tuttavia rimangono per lungo tempo incerti sul suo significato numerico. Molte ambiguità sembrano derivare anche dall'utilizzo di vocaboli alternativi per indicare la quantità "zero" nel linguaggio comune.

Nonostante siano stati condotti diversi studi comportamentali sulla comprensione dello zero, molte domande rimangono aperte; per esempio non è del tutto chiaro come avvenga lo sviluppo concettuale dello zero e attraverso quale meccanismo la mente rappresenti l'assenza di quantità.

Nel nostro studio ci siamo posti l'obiettivo di esaminare tre aspetti specifici concernenti la rappresentazione degli insiemi vuoti in età prescolare: il riconoscimento, la memorizzazione e l'operazionalità. Lo abbiamo fatto utilizzando compiti non simbolici digitalizzati presentati sotto forma di giochi e in condizioni controllate.

I risultati ottenuti concordano e approfondiscono i dati disponibili in letteratura. I nostri bambini hanno dimostrato di riconoscere la numerosità zero in termini di accuratezza e di rapidità altrettanto bene di come riconoscono le piccole numerosità e meglio rispetto alle numerosità elevate. Hanno anche evidenziato un comportamento inatteso in un compito di memorizzazione e riconoscimento differito dello zero, commettendo un numero di errori confrontabile agli insiemi numerosi e con tempi di risposta simili. Nelle addizioni con l'insieme vuoto non ci sono state differenze rispetto alle altre numerosità; tuttavia sembrano insorgere alcune incertezze quando lo zero deve essere combinato con le piccole numerosità, un effetto che sarebbe interessante approfondire ulteriormente.

Bibliografia

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, *54*(3), 695–701.

Ashcraft, M. H. (1995). Cognitive Psychology and Simple Arithmetic: A Review and Summary of New Directions. *Mathematical Cognition*, *1*(1), 3–34.

Ashcraft, M. H., & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, *4*(5), 527–538.

Biro, D., & Matsuzawa, T. (1999). Numerical ordering in a chimpanzee (Pan troglodytes): Planning, executing, and monitoring. *Journal of Comparative Psychology*, *113*(2), 178–185.

Biro, D., & Matsuzawa, T. (2001). Chimpanzee numerical competence: Cardinal and ordinal skills. In *Primate origins of human cognition and behavior* (pp. 199–225). Springer-Verlag Publishing.

Boysen, S. T., & Berntson, G. G. (1989). Numerical competence in a chimpanzee (Pan troglodytes). *Journal of Comparative Psychology*, *103*(1), 23–31.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, *2*(2), 155–192.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain* (London : Macmillan).

de Lafuente, V., & Romo, R. (2005). Neuronal correlates of subjective sensory experience. *Nature neuroscience*, *8*(12), 1698–1703.

Dehaene, S. (2003). The neural basis of the Weber–Fechner law: A logarithmic mental number line. *Trends in Cognitive Sciences*, *7*(4), 145–147.

Dehaene, S. (2009). Origins of Mathematical Intuitions: The Case of Arithmetic. *Annals of the New York Academy of Sciences*, *1156*(1), 232–259.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics, Rev. and updated ed* (pp. xxii, 316). Oxford University Press.

Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *5*(4), 390–407.

Dehaene, S., & Cohen, L. (2007). Cultural Recycling of Cortical Maps. *Neuron*, *56*(2), 384–398.

Feigenson, L., & Carey, S. (2003). Tracking individuals via object-files: Evidence from infants' manual search. *Developmental Science*, *6*(5), 568–584.

Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: Object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, *13*(2), 150–156.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, *8*(7), 307–314.

Féron, J., Gentaz, E., & Streri, A. (2006). Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-month-old infants. *Cognitive Development*, *21*, 81–92.

Ferrigno, S., Jara-Ettinger, J., Piantadosi, S. T., & Cantlon, J. F. (2017). Universal and uniquely human factors in spontaneous number perception. *Nature Communications*, *8*(1), 13968.

Frith, C. D., & Frit, U. (1972). The solitaire illusion: An illusion of numerosity. *Perception & Psychophysics*, *11*(6), 409–410.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1), 43–74.

Gebuis, T., Cohen Kadosh, R., & Gevers, W. (2016). Sensory-integration system rather than approximate number system underlies numerosity processing: A critical review. *Acta Psychologica*, *171*, 17–35.

Granà, A., Girelli, L., & Semenza, C. (2003). Writing and Rewriting Arabic Numerals: Dissociated Processing Pathways? *Neurocase*, *9*(4), 308–318.

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the «Number Sense»: The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457–1465.

Hyde, D. C., & Spelke, E. S. (2011). Neural signatures of number processing in human infants: Evidence for two core systems underlying numerical cognition. *Developmental science*, *14*(2), 360–371.

Izard, V., & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition*, *106*(3), 1221–1247.

Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *106*(25), 10382–10385.

Jordan, K. E., & Brannon, E. M. (2006). The multisensory representation of number in infancy. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *103*(9), 3486–3489.

Kobayashi, T., Hiraki, K., & Hasegawa, T. (2005). Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants. *Developmental Science*, *8*(5), 409–419.

Krajcsi, A., Kojouharova, P., & Lengyel, G. (2021). Development of Preschoolers' Understanding of Zero. *Frontiers in Psychology*, *12*.

Krueger, L. E. (1972). Perceived numerosity. *Perception & Psychophysics*, *11*(1), 5–9.

Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, *111*(1), 1–22.

Matsuzawa, T. (1985). Use of numbers by a chimpanzee. *Nature*, *315*(6014), 57–59.

McCloskey, M., Sokol, S. M., Caramazza, A., & Goodman-Schulman, R. A. (1990). Cognitive representations and processes in number production: Evidence from cases of acquired dyscalculia. In *Cognitive neuropsychology and neurolinguistics: Advances in models of cognitive function and impairment* (pp. 1–32). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mechner, F. (1958). Probability relations within response sequences under ratio reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *1*, 109–121.

Mechner, F., & Guevrekian, L. (1962). Effects of Deprivation Upon Counting and Timing in Rats. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *5*(4), 463–466.

Meck, W. H., & Church, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, *9*(3), 320–334

Merritt, D. J., & Brannon, E. M. (2013). Nothing to it: Precursors to a zero concept in preschoolers. *Behavioural Processes*, *93*, 91–97.

Merritt, D. J., Rugani, R., & Brannon, E. M. (2009). Empty sets as part of the numerical continuum: Conceptual precursors to the zero concept in rhesus monkeys. *Journal of Experimental Psychology: General*, *138*(2), 258–269.

Merten, K., & Nieder, A. (2012). Active encoding of decisions about stimulus absence in primate prefrontal cortex neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *109*(16), 6289–6294.

Nieder, A. (2009). Prefrontal cortex and the evolution of symbolic reference. *Current Opinion in Neurobiology*, *19*(1), 99–108.

Nieder, A. (2016). Representing Something Out of Nothing: The Dawning of Zero. *Trends in Cognitive Sciences*, *20*(11), 830–842.

Odic, D., & Starr, A. (2018). An Introduction to the Approximate Number System. *Child Development Perspectives*, *12*(4), 223–229.

Oyama, T., Kikuchi, T., & Ichihara, S. (1981). Span of attention, backward masking, and reaction time. *Perception & Psychophysics*, *29*(2), 106–112.

Piazza, M. (2011). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations, pg 542–551, 2010, with permission from Elsevier. In S. Dehaene & E. M. Brannon (A c. Di), *Space, Time and Number in the Brain* (pp. 267–285). Academic Press.

Ramirez-Cardenas, A., Moskaleva, M., & Nieder, A. (2016). Neuronal Representation of Numerosity Zero in the Primate Parieto-Frontal Number Network. *Current Biology, 26*(10), 1285–1294.

Rumbaugh, D. M., Savage-Rumbaugh, S., & Hegel, M. T. (1987). Summation in the chimpanzee (Pan troglodytes). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, *13*(2), 107–115.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An Integrative Theory of Numerical Development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144–150.

Simon, T. J., Hespos, S. J., & Rochat, P. (1995). Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992). *Cognitive Development*, *10*(2), 253–269.

Spelke, E. S., & Kinzler, K. D. (2007). Core knowledge. *Developmental Science*, *10*(1), 89–96.

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, *210*(4473), 1033–1035.

Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *110*(45), 18116–18120.

Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. (1993). What enumeration studies can show us about spatial attention: Evidence for limited capacity preattentive processing. *Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance*, *19*(2), 331–351.

Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, *101*(1), 80–102.

Vallortigara, G. (2017). 2.2 An animal's sense of number. *The nature and development of mathematics: cross disciplinary perspectives on cognition, learning and culture*, 43–65.

Washburn, D. A., & Rumbaugh, D. M. (1991). Ordinal Judgments of Numerical Symbols by Macaques (Macaca Mulatta). *Psychological Science*, *2*(3), 190–193.

Wellman, H. M., & Miller, K. F. (1986). Thinking about nothing: Development of concepts of zero. *British Journal of Developmental Psychology*, *4*(1), 31–42.

Woodruff, G., & Premack, D. (1981). Primative mathematical concepts in the chimpanzee: Proportionality and numerosity. *Nature*, *293*(5833), Articolo 5833.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, *36*(2), 155–193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*(6389), Articolo 6389.

Wynn, K., & Chiang, W.-C. (1998). Limits to Infants' Knowledge of Objects: The Case of Magical Appearance. *Psychological Science*, *9*(6), 448–455.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, *74*(1), B1–B11.

Xu, F., Spelke, E. S., & Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental Science*, *8*(1), 88–101.

Zamarian, L., Alessia Granà, Carlo Semenza, & Luisa Girelli. (2007). Rappresentarsi il «nulla». Indagine sul concetto di «zero» in bambini di cinque e sei anni. *Giornale italiano di psicologia*, *2*, 427–450.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare le persone che hanno contribuito in diversi modi alla realizzazione del mio percorso di studi in psicologia.

In particolare la dott.ssa Annamaria Porru, che mi ha coinvolta e guidata nella realizzazione di questa appassionante ricerca su come la mente dei bambini pensa lo zero e nella stesura dell'elaborato.

E poi un grazie alla mia famiglia, soprattutto alla mia piccola Anna, sempre pronta a regalarmi il suo sorriso speciale.