



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Perturbazioni cosmologiche covarianti e invarianti di gauge

Covariant and gauge-invariant cosmological perturbations

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Lorenzo Barone

Anno Accademico 2022/2023

Indice

1	Introduzione	1
2	Dinamica relativistica dei fluidi	3
2.1	Coordinate comoventi e cinematica relativistica	3
2.2	Leggi di conservazione	6
2.3	Equazioni di stato dei fluidi	8
2.4	Dinamica relativistica	9
3	Problema di gauge	11
3.1	Descrizione del problema	11
3.2	Lemma di Stewart-Walker	12
3.3	Approccio covariante e gauge-invariante	13
4	Dinamica delle perturbazioni	15
4.1	Equazioni di propagazione esatte	15
4.2	Linearizzazione	17
4.3	Equazioni al secondo ordine	18
4.4	Decomposizione armonica	20
4.5	Soluzioni di onda lunga	21
5	Applicazioni	23
5.1	Falso vuoto	23
5.2	Stiff matter	23
5.3	Pressure-free matter	24
5.3.1	Universo di Einstein-de Sitter	25
5.4	Radiazione	26
5.5	Perturbazioni di isocurvatura	27
5.6	Cenni sull'analisi di fluidi multicomponente	27
6	Conclusioni	29
	Riferimenti bibliografici	31
	Ringraziamenti	33

Abstract

La presente tesi mira ad approfondire le principali caratteristiche della teoria delle perturbazioni cosmologiche attraverso un approccio covariante e invariante di gauge. Tale approccio non solo propone una descrizione relativistica applicata alla dinamica dei fluidi (analogo classico della materia cosmica) ma si fonda su equazioni completamente indipendenti dalla scelta delle coordinate (la “covarianza”). Particolare attenzione va poi prestata al problema della dipendenza di gauge da parte dei termini perturbativi. Per ovviare a questa complicazione di natura prettamente matematica è opportuno fornire una descrizione esaustiva delle perturbazioni in termini di quantità gauge-invarianti che non risentono dunque di questa dipendenza. Una volta poste le basi di questa descrizione si può procedere con l’analisi dell’evoluzione di questi nuovi elementi perturbativi e applicarla ad alcuni casi semplici.

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio delle perturbazioni cosmologiche è uno dei temi principali della cosmologia recente che ha coinvolto numerosi fisici e matematici, impegnati nell'obiettivo di fornire un'analisi coerente ed esaustiva dei meccanismi che portano formazione delle strutture cosmiche. Prima di allora infatti il modello di riferimento per descrivere l'evoluzione dell'universo era il ben noto universo di *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* ("FLRW") basato sui presupposti di omogeneità ed isotropia della materia cosmica (oltre a considerare quest'ultima come un fluido perfetto). Queste assunzioni possono essere ritenute valide su grande scala, ma tale modello non può funzionare per scale inferiori per le quali il cosmo risulta tutt'altro che omogeneo e ordinato. Per risolvere questo problema è necessario dunque introdurre il concetto di *perturbazione* e applicarlo all'universo idealizzato per descrivere le disomogeneità e la loro evoluzione nello spazio-tempo.

I punti chiave che caratterizzano sia il modello ideale che quello perturbato sono due: la relatività generale e la dinamica dei fluidi. La prima è la teoria che fa da contorno all'intera descrizione, in quanto le particelle di materia in gioco (che su grandi scale possono essere associate a vere e proprie galassie) obbediscono alle equazioni di campo di Einstein (*Einstein field equations*, d'ora in avanti "EFE") e, in assenza di altre forze esterne, seguono in caduta libera il percorso tracciato dalle geodetiche dello spazio, la cui evoluzione dipende dalla metrica dello spazio stesso. Un'altra caratteristica fondamentale che proviene da questa teoria è la *covarianza* delle equazioni in gioco, ossia la non dipendenza di esse dalla scelta del sistema di coordinate locali in un intorno dello spazio-tempo (che, come noto, è descritto da una struttura di *varietà differenziabile*). Il secondo punto suggerisce invece una descrizione della materia e della sua dinamica in analogia con la meccanica classica dei fluidi, definendo quelle che sono le principali quantità in gioco e come queste, interagendo fra loro, si propagano nello spazio-tempo. La convergenza di questi due ingredienti fondamentali pone le basi dell'intera descrizione, ossia la *Dinamica relativistica dei fluidi*.

Nell'ambito della teoria perturbativa c'è però un problema che affligge la validità dei risultati e che rappresenta tutt'ora una delle più interessanti discussioni nella cosmologia recente: il problema della libertà di gauge. Si tratta di una complicazione di natura matematica che consente di scegliere i parametri perturbativi con una libertà che rende qualunque descrizione fisica inconsistente. Nel 1980 il fisico statunitense James Bardeen pubblicò un articolo su *Physical Review* ([6]) in cui affrontò il problema sviluppando la *Metric based perturbation theory*, una teoria basata sullo studio delle perturbazioni applicate alla metrica che lo portò alla definizione di una serie di variabili gauge-invarianti. L'approccio fu molto apprezzato, ma le quantità ricavate da Bardeen avevano una difficile interpretazione fisica poiché non direttamente collegabili a delle effettive perturbazioni. Una valida alternativa fu proposta da George Ellis e Marco Bruni nel 1989 con l'obiettivo di semplificare il problema. Questa nuova teoria, per quanto non includesse gli stessi presupposti teorici della proposta precedente, prevedeva un approccio non solo gauge-invariante ma anche covariante, introducendo dunque una serie di variabili che fossero più facilmente inseribili in un contesto relativistico e più interpretabili come disomogeneità in un universo *quasi-FLRW*.

L'obiettivo della tesi è quello di approfondire questa alternativa, discutendone sia le assunzioni teoriche che i risultati ottenuti. Si procederà dapprima con un'introduzione alla dinamica relativistica dei fluidi (capitolo 2) e alle equazioni cardine di tale descrizione, per poi discutere più in profondità il problema di gauge (capitolo 3) e affrontarlo mediante l'approccio di Ellis e Bruni (capitolo 4) ed infine analizzare i risultati e applicarli in qualche caso semplice (capitolo 5).

Capitolo 2

Dinamica relativistica dei fluidi

Il punto di partenza della descrizione relativistica^{[3],[4]} delle perturbazioni cosmologiche CGI (*Covariant and gauge-invariant*, per abbreviare) consiste nella trattazione delle principali equazioni relativistiche che regolano la dinamica della materia. Come già accennato, quest'ultima sarà trattata come fluido monocomponente che evolve e si muove nello spazio-tempo con una specifica 4-velocità. Più in generale per descrivere il moto complessivo delle particelle sarà opportuno definire un insieme di 4-velocità, ovvero un campo vettoriale, le cui curve integrali costituiranno le *linee di universo fondamentali* rispetto alle quali la materia tenderà ad evolvere. L'obiettivo di questo primo capitolo è dunque quello di impostare le basi dell'intera descrizione definendo le quantità cinematiche e dinamiche in gioco e ricavando le equazioni fondamentali della loro evoluzione.

2.1 Coordinate comoventi e cinematica relativistica

Il primo ingrediente fondamentale della cinematica relativistica è il concetto di *coordinate comoventi*. Esse sono definite come quelle coordinate che, data una 4-velocità u^a , sono adattate alla linea di universo associata muovendosi coerentemente con essa. Per caratterizzare al meglio questo sistema di coordinate si considerino i seguenti passaggi^[3]:

- 1) Si sceglie un'iper-superficie spaziale qualunque e si valutano le intersezioni con le linee di universo ponendo un'etichetta y^i a ciascuna di esse.
- 2) Si estende questa etichetta a tutta la linea di universo mantenendola costante. Le y^i sono dunque le coordinate spaziali che rimangono fisse lungo le linee.
- 3) Si definisce infine una coordinata temporale t lungo la linea.

Compiuti questi tre passaggi ecco che (t, y^i) sono le coordinate comoventi e l'osservatore che descrive lo spazio-tempo rispetto a questo sistema è dunque detto *osservatore fondamentale* ed è dunque a riposo rispetto alla particolare 4-velocità che lo caratterizza. Se poi la coordinata temporale coincide con il tempo proprio τ dell'osservatore (tale per cui $u^a = \left(\frac{\partial x^a}{\partial \tau}\right)_{y^i=const}$ con $x^a = x^a(\tau, y^i)$ generiche coordinate) allora si parla di coordinate comoventi *normalizzate*. La differenza che intercorre tra le coordinate comoventi (t, y^i) e le generiche x^a è analoga a quella tra coordinate lagrangiane ed euleriane nel caso classico: le prime descrivono l'evoluzione nel tempo di una singola particella di fluido muovendosi insieme ad essa, le altre analizzano il moto generale di un intero campo vettoriale costituito da tutte le particelle mantenendosi fisse. In coordinate comoventi inoltre la 4-velocità assume la forma $\delta^a_0 = (1, 0, 0, 0)$.

L'esistenza di una velocità di riferimento implica dunque l'esistenza di uno spazio a riposo di riferimento per ogni punto dello spazio tempo e quindi di una *superficie di simultaneità* locale relativa ad ogni osservatore. Ciò consente di operare una scomposizione (1+3) dello spazio tempo in termini di quantità parallele e ortogonali ad u^a . In particolare, dato un 4-vettore v_a si definisce la sua decomposizione $v_a = v_{\parallel a} + v_{\perp a}$ dove i costituenti si ottengono mediante opportuni tensori proiezione definiti come segue:

$$v_{\parallel a} = U_a^b v_b, \quad U_a^b = -u_a u^b, \quad v_{\perp a} = h_a^b v_b, \quad h_a^b = g_a^b + u_a u^b$$

dove g_{ab} è il tensore metrico. Si nota direttamente la scomposizione della metrica $g_{ab} = U_{ab} + h_{ab}$ che implica la possibilità di indurre una metrica sullo spazio e sul tempo separatamente. Infatti, valutando l'intervallo

spazio-temporale ds^2 si ha che:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = h_{ab}dx^a dx^b + U_{ab}dx^a dx^b = (\delta l)^2 - (\delta t)^2$$

Qualunque sia la 4-velocità con cui l'osservatore si muove è sempre possibile riscrivere tale intervallo come differenza tra i moduli quadri di distanza spaziale (nello spazio a riposo) e temporale (lungo la linea di universo) attraverso i tensori proiezione. Questo fatto consente di dare un'interpretazione alternativa alla dilatazione dei tempi e alla contrazione delle lunghezze: al variare di u_a la decomposizione (1+3) di ds risulta diversa. Nel caso di tensori simmetrici di rango due applicare la proiezione ortogonale tramite h_{ab} consente di calcolare la loro componente ortogonale e priva della traccia (in inglese *projected symmetric trace-free part*, abbreviato in PSTF). La notazione scelta da Ellis per indicare questi tensori fa uso delle parentesi uncinate (per comodità la si può applicare anche alle proiezioni dei vettori anche se tale notazione non sarà adottata nei capitoli successivi se non in qualche circostanza) e sono pertanto così definiti:

$$V_{\langle a \rangle} = h_a{}^b V_b, \quad S_{\langle ab \rangle} = \left[h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} \right] S_{cd}$$

dove le parentesi tonde sottintendono una combinazione simmetrica rispetto ai due indici (quadre per quella antisimmetrica). Per definizione un tensore PSTF è ortogonale ad u_a rispetto ad ogni suo indice. I tensori di rango due ammettono dunque la seguente scomposizione:

$$S_{ab} = (h_a{}^c + U_a{}^c)(h_b{}^d + U_b{}^d)S_{cd} = \frac{1}{3} h_{ab}(h^{cd}S_{cd}) + S_{\langle ab \rangle} + h_a{}^c h_b{}^d S_{[cd]} - (h_a{}^c S_{cd} u^d) u_b - u_a (u^c S_{cd} h_b{}^d) + u_a u_b (u^c u^d S_{cd}) \quad (2.1)$$

Si definisce infine la derivata rispetto alle linee di universo (e dunque derivata temporale) per un tensore qualunque:

$$\dot{T}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = \nabla_e T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} u^e = T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} ;_e u^e \quad (2.2)$$

con ∇_e derivata covariante. Si definisce invece *derivata spaziale* o *gradiente spaziale* la proiezione ortogonale della derivata covariante:

$$\bar{\nabla}_e T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = h_e{}^f h_{\nu_1}^{\mu_1} h_{\nu_2}^{\mu_2} \dots h_{\nu_p}^{\mu_p} h_{\nu_1}^{b_1} h_{\nu_2}^{b_2} \dots h_{\nu_q}^{b_q} \nabla_f T_{b_1 b_2 \dots b_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \quad (2.3)$$

Una particolare applicazione della derivata temporale consiste nel derivare la stessa 4-velocità che vale $\dot{u}_a = u^b \nabla_b u_a$ con la condizione $\dot{u}^a u_a = 0$ e con $\dot{u}_a = 0$ se e solo se le linee di universo sono geodetiche (in tal caso la materia si muove in caduta libera e ciò implica assenza di forze esterne e dunque accelerazione pari a zero). Calcolando il gradiente spaziale di u_a e sviluppando l'espressione dei proiettori $h_a{}^b$ si ottiene la seguente identità:

$$\nabla_b u_a = \bar{\nabla}_b u_a - \dot{u}_a u_b \quad (2.4)$$

che si estende anche a funzioni scalari generiche:

$$\nabla_a f = \bar{\nabla}_a f - \dot{f} u_a \quad (2.5)$$

Queste ultime risulteranno cruciali nelle prossime derivazioni.

Si consideri ora una superficie S tale per cui $\tau = \tau_0$ (in coordinate comoventi) che interseca le linee di universo e si consideri una curva $y_i = y_i(v)$ in tale superficie che collega le varie linee. Se ciò vale per τ_0 allora per ogni altro valore di τ sarà possibile definire una superficie S' e la curva conetterà sempre la stessa famiglia di linee. Allo stesso modo si può introdurre il concetto di *vettore congiungente* β^μ come quel vettore che collega sempre la stessa coppia di linee di universo in ogni istante temporale (ammettendo che la distanza tra le curve sia sufficientemente piccola da poter essere rappresentata dal vettore tangente alla curva). Esso si può esprimere in coordinate comoventi come $\beta^\mu = \frac{dx^\mu}{dv} \delta v = (0, \delta y^i)$ (tangente alla curva) e in coordinate generali come $\beta^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \right)_{\tau=const} \delta y^i$ e deve rispettare la condizione:

$$\mathcal{L}_u(\beta^\mu) = \frac{\partial \beta^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu - \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} \beta^\nu = \beta^\mu{}_{,\nu} u^\nu - u^\mu{}_{,\nu} \beta^\nu = 0$$

dove \mathcal{L} è la derivata di Lie (la derivata rispetto alle coordinate generali $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ la si può indicare con la virgola). Se quest'ultima è zero vuol dire che tale vettore rimane costante lungo il flusso del campo vettoriale generato

da u_a e pertanto esso collega sempre la stessa coppia di curve integrali.

Il vettore congiungente non è però ortogonale ad entrambe le linee che collega, in quanto in generale non esiste un'iper-superficie ovunque ortogonale alle linee di flusso. Si definisce allora il vettore *posizione relativa* come la proiezione ortogonale $\beta^{<\mu>}$ del vettore congiungente. Da quest'ultima definizione è dunque possibile giungere al concetto di velocità relativa, definita come segue:

$$v^a = h^a_b (\beta^{}) \cdot = h^a_b u^d \nabla_d (h^b_c \beta^c)$$

Sviluppando la derivata temporale e proiettando si ottiene:

$$v^a = h^a_b [(\dot{u}_c u^b + u_c \dot{u}^b) \beta^c + h^b_c \nabla_d (\beta^c) u^d]$$

dalla definizione di vettore congiungente si ricava l'identità di Lie con la derivata covariante (possibile in quanto la connessione Γ è simmetrica):

$$u^d \nabla_d (\beta^c) = \beta^d \nabla_d (u^c)$$

Si sviluppano i conti applicando la definizione del tensore proiezione e l'espressione si riscrive come segue:

$$v^a = \nabla_d (u^a) \beta^{<d>} + u^a u_c \nabla_d (u^c) \beta^d$$

Applicando infine (2.4) si trova che il secondo termine si annulla mentre il primo diventa:

$$v^a = V^a_b \beta^{} = \bar{\nabla}_b u^a \beta^{}$$

che è l'espressione della velocità relativa. Da qui è possibile definire le principali quantità cinematiche che avranno un ruolo centrale nel proseguo del capitolo. In particolare, il tensore V_{ab} può essere riscritto nella seguente forma:

$$V_{ab} = \bar{\nabla}_b u_a = \Theta_{ab} + \omega_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \Theta h_{ab} + \omega_{ab} \quad (2.6)$$

Si definisce *vorticità* $\omega_{ab} = V_{[ab]}$ la componente antisimmetrica, mentre la parte simmetrica $\Theta_{ab} = V_{(ab)}$ si suddivide nella traccia $\frac{1}{3} \Theta h_{ab}$, (definendo con $\Theta = \bar{\nabla}_a u^a$ il *fattore di espansione* di volume) e nella PSTF rappresentata dal tensore $\sigma_{ab} = \Theta_{<ab>}$ che viene definito come *shear* (tradotto impropriamente in "taglio"). Per comprendere il senso fisico di queste quantità cinematiche si procede scomponendo il vettore posizione in $\beta^{<a>} = \delta l \cdot e^a$ dove δl è il modulo della distanza relativa e e^a è la direzione espressa rispetto ad un sistema di riferimento localmente inerziale non rotante (ovvero che rispetta l'equazione di Fermi $\dot{e}_{<a>} = 0$ e tale che $e^a u_a = 0$ e $e_a e^a = 1$). Sostituendo questa forma nella definizione di velocità relativa si trova che:

$$e^a \dot{\delta l} = V^a_b e^b \delta l - h^a_b \dot{e}^b \delta l$$

dalla quale si ricavano poi le due equazioni di propagazione:

$$\frac{\dot{\delta l}}{\delta l} = \frac{1}{3} \Theta + \sigma_{ab} e^a e^b \quad (2.7)$$

che corrisponde alla *Legge di Hubble generalizzata*. Di conseguenza:

$$h^a_b \dot{e}^b = \dot{e}^{<a>} = \omega^a_b e^b + \sigma^a_b e^b - (\sigma_{cd} e^c e^d) e^a \quad (2.8)$$

che rappresenta la proiezione della derivata temporale della direzione relativa. Da queste ultime relazioni è dunque possibile comprendere la natura dei parametri in gioco:

- Caso 1) $\omega_{ab} = \sigma_{ab} = 0$: l'effetto di Θ restituisce $\frac{\dot{\delta l}}{\delta l} = \frac{1}{3} \Theta$ e $h^a_b \dot{e}^b = 0$ che corrisponde fisicamente ad un'espansione isotropa che modifica le distanze relative tra le particelle lasciando inalterate le direzioni. Da qui si ricava facilmente il tasso di espansione del volume locale $\delta V \propto (\delta l)^3$. Questa inferenza non è vera in generale in quanto se lo shear è diverso da zero non è possibile definire un'espansione locale che dipenda solo da Θ (si veda la discussione delle altre due variabili nei punti successivi). Considerando però una distribuzione di materia sferica si osserva che esistono almeno due direzioni e_a e $-e_a$ che rimangono fisse (dal *teorema del punto fisso* per i campi vettoriali su una superficie sferica^[3]). Su questa base è possibile definire globalmente un *fattore di scala di lunghezza* $l(\tau)$ tale per cui vale la *Legge di Hubble*:

$$H = \frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3} \Theta, \quad \frac{\dot{V}}{V} = \Theta \quad (2.9)$$

dove H è il parametro di Hubble. In questo caso $l(\tau)$ è la versione più generale del fattore di scala $a(\tau)$ caratteristico del modello FLRW e può essere interpretato definito come distanza media delle particelle di un flusso arbitrario (o dimensione di un generico volume di materia). Si ha che $l \equiv a$ se solo se $\omega_{ab} = \sigma_{ab} = 0$ e tali vincoli, come sarà approfondito nella sezione 2.4, sono alla base delle ipotesi di FLRW.

- Caso 2) $\omega_{ab} = \Theta = 0$: si ottengono le equazioni $\frac{\delta l}{\delta t} = \sigma_{ab} e^a e^b$ e $h^a_b \dot{e}^b = \sigma^a_b e^b - (\sigma_{cd} e^c e^d) e^a$ che vengono interpretate come una deformazione quadrupolare del volume di fluido. Infatti, l'assenza di espansione implica che il volume resta invariato (si ha un'espansione lungo un asse e contemporaneamente una contrazione lungo un altro asse) e integrando la derivata della direzione in tutto il volume si osserva che mediamente anch'essa è rimasta invariata (assenza di rotazione). Inoltre, data la simmetria di σ_{ab} , è possibile individuare una base di autovettori dello *shear* che corrispondono a quelle direzioni che definiscono gli assi di deformazione; questi ultimi rimangono dunque invariati a seguito di tale fenomeno.
- Caso 3) $\sigma_{ab} = \Theta = 0$: l'azione della vorticità restituisce $\frac{\delta l}{\delta t} = 0$ e $h^a_b \dot{e}^b = \omega^a_b e^b$ e corrisponde dunque ad una vera e propria rotazione che preserva le distanze e modifica tutte le direzioni relative (ω_{ab} è a tutti gli effetti una matrice di rotazione). Da qui è possibile ricavare il vettore che individua l'asse di rotazione che in alcuni casi verrà utilizzato per definire la vorticità stessa:

$$\omega_a = \frac{1}{2} \eta_{abc} \omega^{bc} \iff \omega_{ab} = \eta_{abc} \omega^c$$

La vorticità è una variabile cruciale per lo studio di alcune proprietà dello spazio-tempo. In particolare, l'asse di rotazione può essere definito in modo alternativo come $\omega_a = -\frac{1}{2} \text{curl}(u_a)$ dove il rotore $\text{curl}(u_a) = \eta_{abc} \bar{\nabla}^b u^c$ è definito nel 3-spazio ortogonale (locale). A questo punto è evidente che:

$$\omega_a = 0 \iff \eta_{abc} \bar{\nabla}^b u^c = 0 \iff \eta_{abc} (\nabla^b u^c + u^b \dot{u}^c) \iff u^d \nabla^b u^c - u^b \nabla^d u^c = 0$$

dove nell'ultimo passaggio si sfrutta l'identità $u_d u^d = -1$ per riscrivere il rotore. Sviluppando ulteriormente il conto si giunge a:

$$u_{[b} u_{c,d]} = 0 \iff \text{esistono localmente le funzioni } r \text{ e } t \text{ tali che } u_a = -r t_{,a}$$

dove l'implicazione da destra a sinistra è garantita dal Teorema di Darboux. Questo fatto è di notevole importanza fisica: l'assenza di vorticità garantisce l'esistenza di iper-superfici $t = \text{cost}$ ortogonali a tutte le linee di campo di u_a (per mezzo del *gradiente* della funzione-coordinata t) che corrispondono all'unione di tutti gli spazi ortogonali definiti dal tensore proiezione h_{ab} per ogni linea di universo. Ciò implica l'esistenza di un *tempo cosmico* rispetto al quale tutti gli osservatori fondamentali possono sincronizzare i loro orologi e definire uno spazio di *simultaneità* complessivo e globale. Da un punto di vista geometrico ciò equivale a dire che, ammesso $\omega_a \neq 0$, se esiste una curva tale da essere sempre ortogonale alle linee essa non è mai chiusa (cioè non torna al punto di partenza). Valutando infine la derivata rispetto al tempo proprio $\dot{t} = t_{,a} u^a = -r^{-1} u^a u_a = r^{-1}$ si nota che scegliendo $r = 1$ il tempo cosmico coincide con quello proprio. Ciò è possibile nel caso in cui l'accelerazione sia nulla (altrimenti imponendo che $t \equiv \tau$ lungo una linea non necessariamente tale equivalenza viene preservata lungo le altre):

$$\omega_a = \dot{u}_a = 0 \iff u_{[a,b]} = 0 \iff \text{esiste localmente la funzione } t \text{ tale che } u_a = -t_{,a}$$

dove la doppia implicazione è garantita dal fatto che u_a è interpretabile come forma differenziale esatta (data dal gradiente di un potenziale) che è dunque necessariamente chiusa.

2.2 Leggi di conservazione

Nei paragrafi precedenti sono state poste le basi matematiche e geometriche per descrivere l'evoluzione degli eventi nello spazio-tempo. Il prossimo passaggio consiste nell'individuare le leggi di conservazione che regolano la dinamica della materia nell'approssimazione di fluido monocomponente. Una certa quantità è detta *conservata* se, una volta integrata su un'iper-superficie (finita o infinita), tale integrale non dipende dall'iper-superficie scelta. Per effettuare integrali di volume una n -varietà Riemanniana ci fornisce una forma di volume naturale $dV = \sqrt{|\det(g)|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ e attraverso il *pull-back* si può indurre la metrica su una sottovarietà e definire

dunque l'elemento di volume su quest'ultima. Nel caso particolare di una varietà quadridimensionale e una sottovarietà tridimensionale di tipo spazio con metrica indotta $g^{(3)}$ la forma di volume è la seguente:

$$d^3V = \frac{1}{3!} \eta_{\mu\nu\rho} dx^\mu dx^\nu dx^\rho = \sqrt{|\det(g^{(3)})|} d^3x, \quad dS_a = -|d^3V|n_a$$

dove $\eta_{\mu\nu\rho} = -\sqrt{|\det(g^{(3)})|} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\sigma$ è la forma di Levi-Civita, $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ e dS_a è l'elemento di volume orientato (con n_a vettore normale all'iper-superficie che deve essere di tipo tempo se questa è di tipo spazio). Considerando ora un vettore di tipo tempo J^a , il suo flusso attraverso una superficie di tipo spazio S è dato da:

$$I = \int_S J^a dS_a$$

Si considera adesso una superficie chiusa cilindrica, le cui basi S_1 e S_2 sono di tipo spazio mentre la superficie laterale è di tipo tempo e si indica il volume racchiuso con V . Supponendo $J_a = 0$ ai lati (si potrebbe verificare nel caso in cui la superficie laterale è parallela al vettore oppure se in corrispondenza di questa esso si annulla) allora si ha che:

$$I_1 = I_2 \iff \oint J^a dS_a = 0 \iff \int_V \nabla_a J^a = 0 \iff \nabla_a J^a = 0$$

La quantità J^a è dunque conservata se la sua divergenza è nulla. La prima quantità che si può individuare sulla base di questo principio è la massa: si può definire il 4-vettore di *corrente di massa a riposo* nel seguente modo:

$$J^a = \frac{1}{dV} \sum_i (m_i, m_i v_i) = \rho_N u_{CM}^a$$

con v_i 3-velocità delle singole particelle, ρ_N densità di massa e u_{CM}^a 4-velocità del centro di massa. Scegliendo quest'ultimo come sistema di riferimento si ha che $J^a = (\rho_N, 0, 0, 0)$ e pertanto il momento complessivo delle particelle rispetto ad esso è nullo. Applicando la legge di conservazione e la (2.9) si ottiene:

$$\dot{\rho}_N + \rho_N \Theta = 0, \quad \rho_N l^3 = \text{cost} \quad (2.10)$$

Questa è la *legge di conservazione della massa* ottenuta scegliendo come 4-velocità fondamentale quella del centro di massa di una distribuzione di particelle ($u^a = u_{CM}^a$). Questa scelta non è l'unica che si può effettuare, un'alternativa potrebbe essere il sistema *Landau-Lifshitz* che prevede che non vi sia flusso di energia ($q_a = 0$, si veda poco sotto) o il sistema di *Eckart* che annulla il flusso di particelle.

Un ruolo centrale nella descrizione dinamica è assunto dall'energia e dall'impulso misurati da un osservatore fondamentale. Il tensore energia-impulso associato, a seguito di decomposizione (1+3) assume la seguente forma generale:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + q_a u_b + q_b u_a + p h_{ab} + \pi_{ab} \quad (2.11)$$

dove $\rho = T_{ab} u^a u^b$ è la densità di energia (massa ed energia interna), $p = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}$ è la pressione relativistica, $q_a = -h_a{}^b T_{bc} u^c$ (interpretabile sia come flusso di energia relativo ad u_a sia come densità di momento) è un vettore associato a processi di diffusione di calore e conduttività ed infine $\pi_{ab} = T_{\langle ab \rangle}$ è la pressione anisotropa dovuta ad effetti di viscosità. Dalla EFE è ben nota la legge di conservazione $\nabla_b T^{ab} = 0$ che consente di ricavare le principali equazioni differenziali per le quantità scalari appena descritte. Sviluppando i conti si giunge a:

$$\dot{\rho} u^a + \rho \dot{u}^a + \rho \Theta u^a + \dot{q}^a + q^a \Theta + (\nabla_b q^b) u^a + (\nabla_b u^a) q^b + (\nabla_b p) h^{ab} + p \dot{u}^a + p \Theta u^a + \nabla_b \pi^{ab} = 0$$

Si procede effettuando la decomposizione (1+3) delle derivate covarianti che nel caso di vettori e tensori si ricavano a seguito delle due identità seguenti (che non verranno dimostrate per non appesantire troppo la trattazione):

$$\nabla_b V_a = -u_b [h_a{}^d \dot{V}_d + \dot{u}_c V^c u_a] + u_a \left[\frac{1}{3} \Theta V_b + \sigma_{bc} V^c + \eta_{bcd} \omega^c V^d \right] + \bar{\nabla}_b V_a \quad (2.12)$$

$$\nabla_c S_{ab} = -u_c [\dot{S}_{\langle ab \rangle} + 2u_{(a} S_{b)d} \dot{u}^d] + 2u_{(a} \left[\frac{1}{3} \Theta S_{b)c} + S_b{}^d (\sigma_{cd} - \eta_{cde} \omega^e) \right] + \bar{\nabla}_c S_{ab} \quad (2.13)$$

Riscrivendo $\nabla_b p$ con (2.5), $\nabla_b u^a$ con (2.4) e $\nabla_b \pi^{ab}$ con (2.13) e considerando che $u_a q^a = 0$, $u_a \pi^{ab} = 0$ e $\pi^{ab} \eta_{abc} = 0$ si ottiene:

$$\dot{\rho} u^a + (\rho + p) \dot{u}^a + (\rho + p) \Theta u^a + \dot{q}^a + q^a \Theta + [\bar{\nabla}_b (q^b) u^a + \dot{u}_c q^c u^a] + \bar{\nabla}_b (u^a) q^b + \bar{\nabla}_b (p) h^{ab} + [\bar{\nabla}_b \pi^{ab} + u^a \pi^{bd} \sigma_{bd} + \pi^{ad} \dot{u}_d] = 0$$

Riscrivendo $\dot{q}^a = h^a_b \dot{q}^b + \dot{u}_c q^c u_a$ attraverso (2.12) e $\bar{\nabla}_b(u^a)$ attraverso (2.6) e isolando la componente parallela ad u_a si ottiene la legge di *conservazione dell'energia*:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \bar{\nabla}_b q^b + 2\dot{u}_c q^c + \pi^{bd}\sigma_{bd} = 0 \quad (2.14)$$

mentre la componente ortogonale definisce la legge di *conservazione del momento* (che corrisponde alla versione relativistica della legge di *Navier-Stokes*):

$$h^a_b \dot{q}^b + (\rho + p)\dot{u}^a + \frac{4}{3}\Theta q^a + \bar{\nabla}^a p + \bar{\nabla}_b \pi^{ab} + \pi^{ad}\dot{u}_d + (\sigma^a_b + \omega^a_b)q^b = 0 \quad (2.15)$$

Il termine $\rho + p$ rappresenta la densità di massa inerziale e si osserva dalla (2.14) che $(\rho + p)\Theta \propto -\dot{\rho}$ (l'espansione della materia provoca una riduzione della densità di energia) mentre dalla (2.15) che $(\rho + p)\dot{u}^a \propto -\bar{\nabla}^a p$ (la materia si muove in direzione del gradiente di pressione). In entrambi i casi è naturale richiedere $\rho + p > 0$ che prende il nome di *condizione di energia debole* (*weak energy condition*).

Potrebbe sembrare automatico che a queste leggi di conservazione corrispondano integrali costanti rispetto al dominio di integrazione (come nel caso del flusso di massa I visto poco sopra). In realtà non è possibile costruire una quantità associata all'energia o all'impulso totale in quanto non esiste una definizione per l'energia gravitazionale. In altre parole, il fatto che la relatività generale sia *autoconsistente* (ovvero vi è continua interazione tra spazio-tempo e materia in quanto quest'ultima curva lo spazio e lo spazio ne influenza il moto) impedisce l'esistenza di uno spazio-tempo di fondo che possa fungere da "zero" di riferimento per un'ipotetica energia potenziale gravitazionale. Questo concetto è l'essenza della *libertà di gauge* che sarà discussa nel prossimo capitolo (3).

2.3 Equazioni di stato dei fluidi

Per completare la descrizione è opportuno definire la *funzione di stato* che governa il comportamento della materia come fluido. Nel caso generale, definendo l'energia interna ϵ con $\rho = (1 + \epsilon)\rho_N$, $v = \frac{1}{\rho_N}$ volume specifico, T temperatura, s entropia specifica e p_t pressione all'equilibrio termodinamico, la prima legge della termodinamica e la sua derivata temporale valgono:

$$d\epsilon + p_t dv = T ds \Rightarrow \rho_N T \dot{s} + (p - p_t)\Theta = \dot{\rho} + (\rho + p)\Theta = -(\bar{\nabla}_b q^b + 2\dot{u}_c q^c + \pi^{bd}\sigma_{bd})$$

Si definisce ora il *flusso di entropia* nel seguente modo:

$$S^a = \rho_N s u^a + \frac{q^a}{T}$$

dove il secondo addendo rappresenta il contributo del flusso di calore scambiato. Si valuta ora la divergenza di questo vettore:

$$\nabla_a S^a = -\rho_N \Theta s - \frac{1}{T} [\bar{\nabla}_b q^b + 2\dot{u}_c q^c + \pi^{bd}\sigma_{bd} + (p - p_t)\Theta] + \rho_N \Theta s + \frac{\nabla_a q^a}{T} + q^a \nabla_a \frac{1}{T}$$

riscrivendo $\nabla_a q^a = \bar{\nabla}_a q^a + \dot{u}_a q^a$ e $q^a \nabla_a \frac{1}{T} = -q^a \frac{1}{T} \bar{\nabla}_a (\ln T)$ si ottiene:

$$\nabla_a S^a = -\frac{1}{T} [q^a (\dot{u}_a + \bar{\nabla}_a (\ln T)) + \pi^{bd}\sigma_{bd} + (p - p_t)\Theta]$$

Dal momento che $\nabla_a S^a \geq 0$ allora è necessario che $\pi_{ab} = -\lambda \sigma_{ab}$ con λ coefficiente di viscosità, $q_a = -k_c (T \dot{u}_a + \bar{\nabla}_a T)$ con k_c coefficiente di conduzione di calore ed infine $p - p_t = -\zeta \Theta$ con ζ coefficiente di viscosità di dilatazione (*bulk viscosity*). È dunque chiara l'interpretazione fisica delle quantità dinamiche anisotrope: π_{ab} è una pressione anisotropa associata ad effetti di viscosità che provocano deformazioni quadrupolari (prendono anche il nome di "sforzi di taglio"); q^a come già accennato è legato al flusso di energia e calore dispersi rispetto ad u_a (non a caso esso ha solo componente ortogonale diversa da zero). Infine, la pressione all'equilibrio p_t può essere causa di espansioni e compressioni rapide, smorzate da un fattore che rappresenta la resistenza a questo tipo di deformazioni (appunto la viscosità di dilatazione).

Un particolare caso semplice è quello dei *fluidi perfetti*, in cui si trascurano tutti gli effetti che provocano anisotropia nella distribuzione del fluido di materia, vale a dire $\pi_{ab} = 0$ e $q^a = 0$ e l'equazione di stato è della forma $p = p(\rho, s)$. Le leggi di conservazione (2.14) e (2.15) assumono la seguente forma semplificata:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta = 0 \quad (2.16)$$

$$(\rho + p)\dot{u}_a + \bar{\nabla}_a p = 0 \quad (2.17)$$

$$\rho_N T \dot{s} = -(p - p_t)\Theta \quad (2.18)$$

Ancora più nello specifico l'equazione di stato può talvolta assumere la forma $p = p(\rho)$ che è l'*equazione di stato barotropica*. Un fluido barotropico è caratterizzato dal fatto che la pressione è costante laddove lo è la densità (in altre parole i gradienti delle due quantità sono sempre paralleli). Se infine il fluido si trova in condizioni di equilibrio termodinamico si avrà che $p = p_t$ e dalla (2.18) si osserva che $\dot{s} = 0$. L'ultima è la condizione di *reversibilità* che caratterizza i fluidi detti *isentropici*.

A questo punto è ragionevole supporre che un fluido perfetto barotropico e isentropico obbedisca all'equazione dei gas ideali $pV^\gamma = \text{cost}$ che implica a sua volta attraverso (2.10) la relazione:

$$p = A\rho_N^\gamma \quad (2.19)$$

con A costante. Da (2.16) e da (2.10) si ricava che:

$$\dot{\rho} = \rho \frac{\dot{\rho}_N}{\rho_N} + A\rho_N^{\gamma-1} \dot{\rho}_N \Rightarrow \frac{\dot{\rho}\rho_N - \rho\dot{\rho}_N}{\rho_N^2} = A\rho_N^{\gamma-2} \dot{\rho}_N$$

integrando ambo i membri:

$$\rho = C\rho_N + \frac{p}{\gamma - 1}$$

con C costante e $\gamma \neq 1$. L'equazione di stato assume dunque una forma lineare che nel caso semplificato in cui $C = 0$ diventa:

$$p = (\gamma - 1)\rho = w\rho \quad (2.20)$$

che è l'equazione di stato lineare per i fluidi barotropici. Nel capitolo 5 si farà abbondante uso di questa relazione per trattare alcuni casi semplici (sarà estesa anche al caso $\gamma = 1$).

Nota l'equazione di stato è infine possibile valutare la velocità del suono che nel caso barotropico e adiabatico è espressa come $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$ ed è vincolata da $0 \leq c_s^2 \leq 1$. Pertanto, facendo riferimento a (2.20), si dovrà avere $0 \leq w \leq 1$ per poter considerare fluidi fisicamente accettabili.

Il fatto di trattare la materia come fluido ideale è dunque un passaggio cruciale nella presente teoria in quanto permette di semplificare notevolmente la descrizione della dinamica. Ponendo gli ulteriori vincoli $\sigma_{ab} = \omega_{ab} = \dot{u}^a = 0$ è possibile ottenere un modello ancora più semplificato che oltre a riproporre l'assunzione di fluido perfetto ammette anche la totale omogeneità e isotropia dell'universo da esso descritto. Questa proprietà è alla base del già citato modello FLRW in cui necessariamente si ha che *le osservazioni astronomiche di ciascun osservatore fondamentale sono isotrope ad ogni istante temporale*^[3]. In particolare l'ipotesi di vorticità nulla garantisce l'esistenza di un tempo cosmico che definisce a sua volta le superfici di simultaneità (con $u_a = -t_{,a}$) pertanto le quantità scalari ρ , p e Θ che descrivono le principali proprietà fisiche dipendono solo da questa coordinata e sono pertanto omogenee rispetto alle superfici ortogonali (è possibile infatti dimostrare anche che i gradienti spaziali $\bar{\nabla}_a \rho$, $\bar{\nabla}_a p$ e $\bar{\nabla}_a \Theta$ sono identicamente nulli, a conferma di tale omogeneità).

2.4 Dinamica relativistica

Per completare la descrizione è infine necessario analizzare il comportamento della materia fluida nello spazio-tempo relativistico. Il legame tra questi due è espresso dalla EFE nella forma $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ con $k = 8\pi G$ costante gravitazionale (in unità naturali). In particolare, il tensore di Ricci $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ è definito come traccia del tensore curvatura di Riemann $R_{\lambda\mu\rho\nu}$. Dalla definizione di quest'ultimo si ricava un'importante relazione matematica che prende il nome di *identità di Ricci*:

$$\nabla_c(\nabla_d u_a) - \nabla_d(\nabla_c u_a) = R_{abcd}u^b \quad (2.21)$$

L'identità di Ricci è fondamentale in quanto permette di ricavare tutte le principali equazioni che descrivono l'evoluzione delle quantità cinematiche nello spazio-tempo. Contraendo la (2.21) con u^c si ottiene:

$$(\nabla_d u_a)' - \nabla_d \dot{u}_a + (\nabla_c u_a)(\nabla_d u^c) = R_{abcd}u^b u^c \quad (2.22)$$

Considerando ora la traccia di quest'ultima e riscrivendo $R_{ab} = k(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}) + \Lambda g_{ab}$ con $T = T^a_a$ si ottiene sostituendo (2.6) e (2.11) l'equazione di *Raychaudhuri-Ehlers*:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - A + \frac{k}{2}(\rho + 3p) - \Lambda = 0 \quad (2.23)$$

con $A = \nabla_a \dot{u}^a$. Questa equazione descrive l'evoluzione nel tempo del fattore di espansione Θ , pertanto attraverso (2.9) è possibile riscriverla nella forma seguente

$$3\frac{\ddot{l}}{l} + 2(\sigma^2 - \omega^2) - A + \frac{k}{2}(\rho + 3p) - \Lambda = 0 \quad (2.24)$$

Quest'ultima mette in risalto il comportamento delle variabili cinematiche in relazione al fattore di scala dell'universo: shear, pressione e densità di energia tendono a favorire il collasso gravitazionale mentre la vorticità, la divergenza dell'accelerazione e la costante cosmologica (ammettendo sia positiva) lavorano a favore dell'espansione senza fine. In particolare, si nota che la condizione $\rho + 3p > 0$ deve essere soddisfatta affinché si possa effettivamente parlare di *massa gravitazionale attiva* in grado di indurre il collasso. Questa prende il nome di *condizione di energia forte* (*strong energy condition*).

Imponendo ora $\omega_{ab} = \sigma_{ab} = \dot{u}_a = 0$ (universo FLRW) e notando che (2.16) si può riscrivere nella forma $l\dot{l}(\rho + 3p) = -(\rho l^2)'$, si sostituisce quest'ultima nella (2.24) e integrando si ottiene l'*equazione di Friedmann*¹:

$$3(\dot{l})^2 - (k\rho + \Lambda)l^2 = E \quad (2.25)$$

dove E è una costante associata alla curvatura spaziale dell'universo FLRW. Per comprendere il significato fisico della curvatura spaziale si considera l'equazione di Gauss che mette in relazione quest'ultima con la curvatura di Riemann attraverso un tensore che, nel caso in cui $\omega_{ab} = 0$, rappresenta la curvatura estrinseca delle superfici spaziali ortogonali alle linee fondamentali:

$${}^3R_{abcd} = R_{abcd} - K_{ac}K_{bd} + K_{bc}K_{da} \quad (2.26)$$

con $K_{ab} = \Theta_{ab}$ che prende il nome di *seconda forma fondamentale* (la *prima* corrisponde invece alla metrica indotta sullo spazio ortogonale h_{ab}). Contraendo gli indici a e c di (2.26) e sfruttando la proiezione ortogonale di (2.22) si ottiene una nuova identità (richiamando opportunamente gli indici):

$${}^3R_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{3}\Theta^2 h_{ab} - \Theta\sigma_{ab} - h_a^c h_b^d (\bar{\nabla}_d u_c)' + \dot{u}_a \dot{u}_b + h_a^c h_b^d (\bar{\nabla}_d \dot{u}_c) - R_{acbd} u^c u^d$$

scomponendo quest'ultima con (2.1) e sfruttando (2.23) si ottiene:

$${}^3R_{ab} = \bar{\nabla}_{\langle a} \dot{u}_{b \rangle} - l^{-3} (l^3 \sigma)'_{\langle ab \rangle} + \dot{u}_{\langle a} \dot{u}_{b \rangle} + k\pi_{ab} + \frac{2}{3}(\sigma^2 - \frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda + k\rho)h_{ab} \quad (2.27)$$

In particolare, la traccia ${}^3\mathcal{R} = 2(\sigma^2 - \frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda + k\rho)$ prende il nome di *equazione di Friedmann generalizzata* e si osserva che nel caso FLRW essa coincide con la (2.25) se e solo se ${}^3\mathcal{R} \frac{l^2}{2} = -E$.

Assumendo il caso generale (non-FLRW) di fluido perfetto, Ellis^[1] definisce la curvatura scalare K esattamente nella stessa forma dello scalare di Ricci:

$$K = 2(\sigma^2 - \frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda + k\rho) \quad (2.28)$$

con l'unica differenza che le due quantità coincidono se e solo se $\omega_{ab} = 0$. Nel contesto delle perturbazioni sarà opportuno riferirsi a K dal momento che queste saranno descritte in un universo *quasi*-FLRW. La variazione nel tempo di questa quantità in generale non è zero e sostituendo (2.16) e (2.23) nelle derivate delle rispettive quantità essa vale (sempre in approssimazione di fluido perfetto):

$$(K - 2\sigma^2)' = \frac{2}{3}\Theta(6\sigma^2 - K - 2A) \quad (2.29)$$

Questa equazione tornerà utile nei capitoli successivi.

¹Nel caso FLRW l coincide esattamente con il fattore di scala a , pertanto a rigor di logica l'equazione di Friedmann andrebbe scritta sostituendo quest'ultimo ad l .

Capitolo 3

Problema di gauge

Fino a questo momento è stato citato più volte il modello FLRW che per quanto sia molto semplice consente di dare una buona descrizione dell'universo su grande scala. Restringendo lo sguardo su scale inferiori non è più possibile affidarsi ad un modello che concerne omogeneità e isotropia, dal momento che l'universo reale presenta un alto grado di disomogeneità che è il risultato di una lunga evoluzione a partire da piccole fluttuazioni di densità fino a strutture cosmiche complesse. Proprio queste lievi fluttuazioni possono essere il punto di partenza di una teoria perturbativa se trattate come deviazioni da un universo FLRW ideale ad un *quasi*-FLRW reale (ovvero perturbazioni al primo ordine del modello ideale). La scelta di questa particolare “deviazione” non è univoca e ciò riflette il già citato problema di gauge delle perturbazioni cosmologiche.

3.1 Descrizione del problema

La teoria perturbativa in ambito cosmologico necessita di due varietà differenziabili S e \bar{S} : la prima rappresenta l'universo “reale”, la seconda quello “fittizio” o “imperturbato”. Si definisce poi una corrispondenza tra questi due universi mediante un'apposita mappa differenziabile¹ (Figura 1) $\Phi : \bar{S} \rightarrow S$, $\bar{x}^\mu \rightarrow \Phi^\mu(\bar{x}^\mu) = x^\mu$ che prende il nome di *gauge*. L'esistenza della gauge consente dunque di confrontare i due universi e di definire le perturbazioni di una certa quantità come differenza tra il valore reale in S e l'immagine mediante Φ in \bar{S} del valore che la stessa quantità assume in \bar{S} . Ad esempio, per la densità di energia (quantità che sarà presa come riferimento) vale: $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$.

Modificare questa corrispondenza mantenendo fisse le coordinate di \bar{S} equivale ad introdurre una *trasformazione di gauge*. Sembrerebbe che applicare una trasformazione di gauge porti semplicemente ad un cambio di coordinate in S , il che non sarebbe un problema data la covarianza delle equazioni; in realtà essa è molto più problematica in quanto ad essere modificata è la specifica corrispondenza tra i punti delle due varietà e quindi la corrispondenza tra ρ e $\bar{\rho}$. Inoltre, nel capitolo 2 è stato brevemente discusso il problema dell'assenza di un riferimento nell'ambito della relatività generale che comporta la non esistenza di uno spazio-tempo di fondo. Di conseguenza il valore di $\delta\rho$, centrale nella presente descrizione, è completamente dipendente dalla scelta della gauge e pertanto, noto S , non è possibile determinare \bar{S} in modo univoco. Per comprendere meglio la natura fisica del problema si sintetizzano nel seguente elenco^[1] le principali caratteristiche della gauge Φ .

- Si definiscono una famiglia di linee di universo in \bar{S} (che saranno indicate con $\bar{\gamma}$) rispetto alle quali è possibile descrivere l'evoluzione nel tempo delle fluttuazioni di densità. La scelta più ovvia ricade sulle *linee di universo fondamentali* definite dal campo vettoriale della 4-velocità fondamentale (la velocità del centro di massa della distribuzione di materia) e parametrizzate dal tempo \bar{t} (quest'ultima affermazione non vale in generale per tutte le linee di universo). Ciascuna linea rappresenta dunque un osservatore fondamentale.
- Si definisce una corrispondenza specifica tra le linee di universo nelle due varietà (che è quindi una corrispondenza tra gli osservatori fondamentali). Questa scelta è irrilevante se \bar{S} è FLRW in quanto vale la condizione di omogeneità e isotropia per ognuno osservatore.
- Si definiscono le superfici “di tipo spazio” Σ (tali per cui ogni vettore su tale superficie è di tipo spazio) in \bar{S} e le corrispondenti superfici in S . Anche in questo caso vi è una scelta ovvia che concerne le superfici

¹Le immagini in S delle grandezze in \bar{S} verranno denotate anch'esse con una barra

spaziali ortogonali alle linee di universo e tali per cui $\bar{t} = \text{cost}$. Siccome per \bar{S} valgono le assunzioni di FLRW, $\bar{t} = \text{cost} \Rightarrow \bar{\rho} = \text{cost}$, e poiché Φ mappa superfici di uguale densità in superfici di uguale densità allora l'immagine delle Σ rappresenta superfici di densità omogenea in S .

- Infine si definisce una specifica corrispondenza tra le superfici spaziali nei due universi attraverso la quale è possibile assegnare un valore temporale \bar{t} e di conseguenza uno di $\bar{\rho}$ ad ogni evento q in S . Questo è il passaggio cruciale che definisce univocamente la gauge e la perturbazione. Inoltre, restringendo l'analisi ad una sottofamiglia di superfici Σ_i è possibile descrivere l'evoluzione temporale della fluttuazione $\delta\rho$.

Seguendo questo procedimento è dunque possibile modificare a piacimento il valore di $\delta\rho$ (Figura 3.2) semplicemente cambiando la corrispondenza delle superfici spaziali. Un esempio che dimostra quanto questa possibilità renda il problema inconsistente è il seguente: supponiamo che per un punto q in S il valore della densità sia $\rho = \rho_q$, posso assegnare allo stesso q una densità di riferimento $\bar{\rho} = \rho_q$ senza alcuna difficoltà e di conseguenza si avrà $\delta\rho = 0$ in quel preciso punto dello spazio-tempo. Inoltre, indicando poi con $\rho_q(t)$ l'evoluzione lungo γ in S della densità reale è possibile porre $\bar{\rho}(t) = \rho_q(t)$ e rendere la perturbazione identicamente nulla lungo quella linea di universo. A questo punto è ormai chiaro come la libertà di gauge si traduca in arbitrarietà di $\delta\rho$ e come tale descrizione sia inconsistente.

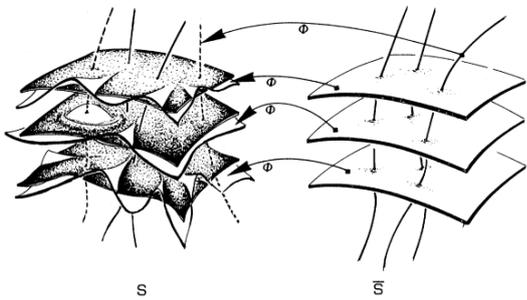


Figura 3.1: Visualizzazione grafica delle perturbazioni

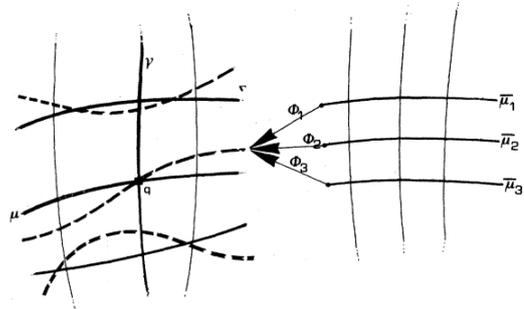


Figura 3.2: Visualizzazione grafica della libertà di gauge

Il modo più diretto per risolvere questo problema è scegliere consapevolmente una gauge specifica al fine di ottenere dei risultati che possano avere senso fisico (anche se in molti casi fissare la gauge non basta a causa della cosiddetta “gauge residua”). Una strategia valida che consente di evitare questo passaggio è quella di selezionare delle quantità gauge-invarianti per descrivere le perturbazioni. Come già accennato in precedenza il metodo formalmente più efficace per determinare tali variabili è la teoria perturbativa sviluppata da Bardeen^[6], i cui risultati sono però difficili da interpretare dal punto di vista fisico. L'approccio alternativo sviluppato da Ellis e Bruni consente invece di individuare delle quantità gauge-invarianti che si ricollegano direttamente alle disomogeneità e che quindi sono facilmente impiegabili nello studio delle perturbazioni e della loro evoluzione. Prima di passare all'analisi di tali variabili è necessario prima approfondire lo strumento teorico su cui si basa questo approccio, vale a dire il *Lemma di Stewart-Walker*^[5] (1974).

3.2 Lemma di Stewart-Walker

Si consideri una famiglia a un parametro di varietà differenziabili S_ϵ di dimensione 4, immerse in una varietà 5-dimensionale N . Si consideri poi un campo vettoriale X^A in N ($A=0,\dots,4$) mai parallelo ad alcuna di queste superfici. Le curve integrali del campo sono parametrizzate da ϵ e permettono di definire una mappa tra $S_0 = \bar{S}$ e S_ϵ identificando i punti di intersezione e attribuendo ad ϵ il significato fisico di “entità della perturbazione” (maggiore è ϵ più ci si allontana dalla varietà di partenza). Si può dire che il campo costituisce un *gruppo ad un parametro di diffeomorfismi*. Si definisce a questo punto una famiglia a un parametro di mappe $\Phi_\epsilon : S_0 \rightarrow S_\epsilon, P_0 \rightarrow P_\epsilon$, ovvero un insieme di campi vettoriali (e quindi di gruppi a un parametro di diffeomorfismi). A questo punto è chiaro come la scelta di gauge corrisponda alla scelta del particolare campo vettoriale che identifica i punti delle varietà. Sia ora T_ϵ una certa quantità (scalare, vettoriale, tensoriale) perturbata, assumendo $\epsilon \ll 1$ e sviluppando al primo ordine la funzione $\Phi_\epsilon(T_0) = T_\epsilon$ si ha che:

$$T_\epsilon = \Phi_{\epsilon*}[T_0 + \epsilon(\mathcal{L}_X T_\epsilon)_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2)]$$

dove $\Phi_{\epsilon*}$ è il push-forward della mappa differenziabile Φ_ϵ (ben definito per ogni tensore in quanto essa è un diffeomorfismo) e $\mathcal{L}_X T_\epsilon$ è la derivata di Lie della quantità T_ϵ lungo il campo vettoriale X . Ciò consente di

definire la perturbazione su S_ϵ come $\delta T = \Phi_{\epsilon*}[\epsilon(\mathcal{L}_X T_\epsilon)_{\epsilon=0}]$. In questo contesto si inserisce il sopra citato lemma:

Lemma (Stewart-Walker)

Una certa quantità T è invariante di gauge se e solo se:

- A) T è un campo scalare costante su \bar{S} (S_0)
- B) $T=0$ identicamente su \bar{S} (S_0)
- C) T è una combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti di delta di *Kronecker*

Dimostrazione

Definita la perturbazione come $\delta T = \Phi_{\epsilon*}[\epsilon(\mathcal{L}_X T_\epsilon)_{\epsilon=0}]$, si considerano due campi vettoriali distinti $X^A = (\xi^\mu, 1)$ e $Y^A = (0, 1)$. Entrambi sono costituiti da una parte quadridimensionale arbitraria (per convezione quella relativa a Y è nulla) e una quinta componente identica (posta convenzionalmente uguale a 1) dal momento che le curve integrali dei due campi collegano la stessa coppia di superfici e sono parametrizzate dallo stesso ϵ . Si definisce dunque la variazione della perturbazione come segue:

$$\Delta(\delta T) = \Phi_{\epsilon*}[\epsilon(\mathcal{L}_X T_\epsilon)_{\epsilon=0}] - \Phi_{\epsilon*}[\epsilon(\mathcal{L}_Y T_\epsilon)_{\epsilon=0}] = \Phi_{\epsilon*}[\epsilon(\mathcal{L}_{X-Y} T_\epsilon)_{\epsilon=0}] = \Phi_{\epsilon*}[\epsilon(\mathcal{L}_\xi T_\epsilon)_{\epsilon=0}]$$

Si ha che $\Delta(\delta T) = 0 \iff (\mathcal{L}_\xi T_\epsilon)_{\epsilon=0} = 0$, ovvero se la derivata di Lie di T su S_0 è nulla per qualunque vettore quadridimensionale ξ^μ definito su S_0 . Ciò avviene solo nei tre casi sopra citati. \square

I casi A) e C) non sussistono nella presente descrizione (nemmeno i campi scalari costanti, pur assumendo l'omogeneità spaziale in generale avranno sempre una dipendenza dal tempo) per cui l'unica via per determinare variabili gauge-invarianti è cercare quantità che svaniscono nell'universo imperturbato. Come verrà approfondito nella prossima sezione (3.3), i casi più semplici e più fisicamente ricollegabili alle perturbazioni sono i gradienti spaziali delle variabili ρ , p e θ , costanti in FLRW.

3.3 Approccio covariante e gauge-invariante

Le equazioni relativistiche della dinamica dei fluidi, ricavate e discusse nel capitolo 2, costituiscono già quello che si definisce *approccio covariante*.

Su questi presupposti e sulla base del lemma di Stewart-Walker è possibile definire le variabili gauge-invarianti. Le variabili più semplici che si possono individuare sono certamente ω_{ab} , σ_{ab} e \dot{u}_a le quali sono identicamente nulle per assioma, ma questa scelta (eccezion fatta per l'accelerazione, che è legata al gradiente di pressione attraverso (2.17)) non consente di descrivere delle vere e proprie perturbazioni ma solo di studiare l'evoluzione di due quantità cinematiche che se non-nulle possono modificare la posizione e direzione relative di due particelle distinte all'interno di un volume comovente (rotazioni e deformazioni). La scelta vincente è invece quella di concentrarsi sui gradienti spaziali ortogonali delle quantità scalari in S che oltre ad essere certamente nulli in \bar{S} danno informazioni circa la direzione di massima variazione locale (e quindi di massima fluttuazione) di tali grandezze. L'elenco delle variabili è riportato in seguito.

- 1) Gradiente di densità di energia: $X_a = k h_a^b \nabla_b \rho = k \bar{\nabla}_a \rho$
- 2) Gradiente di pressione: $Y_a = k h_a^b \nabla_b p = k \bar{\nabla}_a p$
- 3) Gradiente di espansione: $Z_a = h_a^b \nabla_b \Theta = \bar{\nabla}_a \Theta$
- 4) Gradiente di curvatura: $K_a = h_a^b \nabla_b K = -\frac{4}{3} \Theta Z_a + 2X_a + 2h_a^b \nabla_b (\sigma^2)$
- 5) Gradiente di accelerazione: $A_a = h_a^b \nabla_b A = \bar{\nabla}_a A$

Questi cinque saranno i mattoncini per tutto il resto della discussione, oltre alla già citata accelerazione \dot{u}_a . Particolare attenzione va posta al gradiente di energia X_a che può essere direttamente impiegato per descrivere le disomogeneità della distribuzione di massa-energia individuando regioni di “*over density*” (associabili alle protogalassie) e regioni di “*under density*” (interpretabili come vuoti cosmici). Inoltre, è la quantità gauge-invariante più vicina alla precedente $\delta\rho$, resa inutilizzabile dalla libertà di gauge. Talvolta può essere conveniente utilizzare X_a nella sua forma relativa, vale a dire $\mathcal{X}_a = \frac{X_a}{k\rho}$ o nella sua forma *comovente*:

$$D_a = l(\tau) \mathcal{X}_a \tag{3.1}$$

dove $l = l(\tau)$ è il fattore di scala locale. Quest'ultima forma prende il nome di *gradiente relativo comovente della densità di energia* e costituisce la variabile chiave della presente discussione. Il vantaggio di fare riferimento a D_a piuttosto che a X_a o \mathcal{X}_a è che questi ultimi rappresentano la variazione di densità a scala fissata. Ciò significa che al variare di τ varia la scala $l(\tau)$ e di conseguenza tutte le distanze spaziali all'interno del volume (che evolve e si espande), per cui, presi due istanti τ_1 e τ_2 lungo una linea di universo, la distanza tra due osservatori fondamentali si trasforma come segue:

$$d_2 = \frac{l(\tau_2)}{l(\tau_1)} d_1, \quad \frac{d(\tau)}{l(\tau)} = \text{cost} \quad (3.2)$$

Moltiplicando dunque \mathcal{X}_a per $l(\tau)$ si ottiene una quantità adimensionale che rappresenta la variazione relativa di densità tra regioni di fluido comoventi vicine tra loro e la sua derivata lungo le linee di universo ne rappresenta l'evoluzione temporale. Talvolta è conveniente anche riferirsi al suo modulo:

$$D = (D^a D_a)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

Quest'ultimo rappresenta l'analogo gauge-invariante della quantità $\frac{\delta\rho}{\rho}$ e della variabile di Bardeen ϵ_m (che sarà discussa brevemente nella sezione 4.3). In conclusione, è necessario fare un piccolo appunto: in riferimento al fattore di scala l è stata evidenziata la dipendenza dal tempo proprio τ definito sulla particolare linea di universo e non dal tempo cosmico t . Il motivo di ciò è ancora una volta riconducibile al fatto che in generale $\omega_{ab} \neq 0$ in S e pertanto non è possibile definire superfici spaziali ovunque ortogonali alle linee fondamentali. Di conseguenza D_a esprime una variazione relativa tra osservatori comoventi nel momento in cui essi sono abbastanza vicini (in altre parole la perturbazione è *locale*) altrimenti l'effetto della vorticità provocherebbe un salto da una superficie ortogonale ad un'altra rendendo impossibile l'esistenza di un unico gradiente (che per definizione "vive" nel 3-spazio ortogonale).

Le stesse considerazioni possono essere applicate anche a Z_a e ciò conduce alla nuova variabile:

$$\mathcal{Z}_a = l(\tau) Z_a \quad (3.4)$$

interpretabile come *gradiente di espansione comovente*.

Prima di passare allo studio dell'evoluzione e della dinamica delle variabili gauge-invarianti è opportuno sistemare un ulteriore dettaglio. Come ormai noto queste variabili non dipendono dalla scelta della specifica gauge tra \bar{S} e S , ma per descriverne l'evoluzione temporale in S è comunque opportuno effettuare una scelta delle linee di universo rispetto alle quali definire tale evoluzione. La scelta più ovvia ricade sulle linee di universo fondamentali parametrizzate dal tempo proprio τ e pertanto esiste una mappa naturale Φ che collega le linee di \bar{S} a quelle di S . La corrispondenza che si viene a formare fornisce dunque un confronto tra gli osservatori fondamentali nei due universi (tale mappa coincide con la "gauge sincrona" nella trattazione di Bardeen) con l'unica condizione che la definizione del tempo proprio in S è del tutto locale. Considerando poi sempre in S le coordinate comoventi normalizzate (τ, y^i) e calcolando la derivata lungo le linee di tali coordinate si ottiene che $\dot{\tau} = t_{,a} u^a = 1$ e $\dot{y}^i = 0$, il che introduce una libertà nella scelta della coordinata temporale:

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + f(y^i), \quad \dot{\tau}' = 1 \quad (3.5)$$

La coordinata temporale in S è dunque definita a meno di una costante e ciò implica la possibilità di ridefinire lo "zero" della scala dei tempi. Di conseguenza le quantità gauge-invarianti non dipendono direttamente dalla scelta dell'istante iniziale (e quindi della superficie spaziale di partenza) e questo fatto conferma la validità locale delle equazioni perturbative. Ellis e Bruni definiscono in [1] questa arbitrarietà della coordinata temporale in S come "*implied gauge*". L'interpretazione fisica di quest'ultimo fatto è la seguente: la libertà della costante temporale equivale alla libertà di scelta delle costanti di integrazione nella soluzione delle equazioni differenziali (2.16) e (2.23), in cui è chiaro che le quantità scalari sono anch'esse definite lungo le linee di universo a meno di una costante. Ciò potrebbe essere interpretato come la scelta delle condizioni iniziali dell'universo perturbato in termini di istante iniziale a partire dal quale si studia l'evoluzione delle disomogeneità. In altre parole, pur adottando un approccio gauge-invariante, è necessario fissare le condizioni iniziali per trovare una soluzione particolare (esattamente come viene fatto nel caso delle equazioni differenziali risolvendo il problema di Cauchy o nel caso delle equazioni covarianti scegliendo coordinate specifiche).

Capitolo 4

Dinamica delle perturbazioni

La definizione delle variabili gauge-invarianti ampiamente discussa nel capitolo 3 non basta per caratterizzare completamente la teoria perturbativa. Il passaggio successivo consiste nel determinare le equazioni di propagazione di tali quantità descrivendone dunque l'evoluzione nel tempo. La forma specifica di tali equazioni dipende dalla funzione di stato $p = p(\rho, s)$. L'obiettivo della discussione nel presente capitolo è quello di ricavare dapprima le equazioni *esatte* di propagazione delle variabili gauge-invarianti per poi linearizzarle adattandole al caso di *quasi*-FLRW.

4.1 Equazioni di propagazione esatte

Prima di procedere con la descrizione è necessario introdurre i due principali ingredienti matematici che consentiranno di effettuare i calcoli. Il primo è costituito banalmente nelle equazioni differenziali (2.16), (2.17) e (2.23) che descrivono l'evoluzione delle grandezze scalari (le cosiddette “equazioni di ordine zero”). Il secondo, più complesso, consiste nella seguente identità tensoriale:

$$(\bar{\nabla}_a f)^\cdot = \bar{\nabla}_a \dot{f} + (\dot{u}^b \bar{\nabla}_b f) u_a + \dot{u}_a \dot{f} - \frac{1}{3} \Theta \bar{\nabla}_a f - \sigma_{ab} \bar{\nabla}^b f + \eta_{abc} \omega^b \bar{\nabla}^c f \quad (4.1)$$

dove f è una generica funzione scalare. Per ottenerla si sfruttano le già note identità (2.4), (2.5) e (2.6) e ricordando che $u^b \bar{\nabla}_b f = 0$, a causa dell'ortogonalità di $\bar{\nabla}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_a \dot{f} &= (\bar{\nabla}_a \nabla_b f) u^b + (\nabla_b f) (\bar{\nabla}_a u^b) = \nabla_a (\nabla_b f) u^b + (\nabla_b \dot{f}) u_a u^b + (\bar{\nabla}_b f) (\bar{\nabla}_a u^b) - \dot{f} u_b (\bar{\nabla}_a u^b) \\ &= h_a^b (\bar{\nabla}_b f)^\cdot - \dot{f} \dot{u}_a + \bar{\nabla}_b f \left[\frac{1}{3} \Theta h_a^b + \sigma_a^b + \omega_a^b \right] \end{aligned}$$

$$h_a^b (\bar{\nabla}_b f)^\cdot = (\bar{\nabla}_a f)^\cdot + u_a u^b (\bar{\nabla}_b f)^\cdot = \bar{\nabla}_a \dot{f} + \dot{f} \dot{u}_a - \bar{\nabla}_b f \left[\frac{1}{3} \Theta h_a^b + \sigma_a^b + \omega_a^b \right]$$

Considerando infine che $u_a u^b (\bar{\nabla}_b f)^\cdot = -(\dot{u}^b \bar{\nabla}_b f) u_a$ e riaggiustando gli ultimi termini, si ottiene l'espressione (4.1) che sarà cruciale nel computo delle equazioni di propagazione.

Accelerazione

Derivando la (2.17) rispetto al tempo, assumendo che la funzione di stato sia della forma $p = p(\rho)$ (caso di fluido barotropico) con $\dot{p} = \frac{dp}{d\rho} \dot{\rho}$, applicando (4.1) e sostituendo (2.16) si ricava l'equazione di evoluzione dell'accelerazione:

$$(\dot{\rho} + \dot{p}) \dot{u}_a + (\rho + p) (\dot{u}_a)^\cdot = -(\bar{\nabla}_a p)^\cdot = \bar{\nabla}_a \dot{p} - \dot{u}^b \dot{u}_b (\rho + p) u_a + \dot{u}_a \frac{dp}{d\rho} \dot{\rho} + (\rho + p) \dot{u}_b \left[\frac{1}{3} \Theta h_a^b + \sigma_a^b + \omega_a^b \right]$$

$$\bar{\nabla}_a \dot{p} = \bar{\nabla}_a \left[\frac{dp}{d\rho} \dot{\rho} \right] = -(\rho + p) \bar{\nabla}_a \left[\frac{dp}{d\rho} \Theta \right] - \frac{dp}{d\rho} \Theta \bar{\nabla}_a (\rho + p) = \frac{dp}{d\rho} \Theta (\rho + p) \dot{u}_a + \Theta (\rho + p) \dot{u}_a$$

$$(\dot{u}_a)^\cdot = \Theta \dot{u}_a \left(\frac{dp}{d\rho} - \frac{1}{3} \right) + h_a^b \nabla_b \left(\frac{dp}{d\rho} \Theta \right) - \dot{u}^b \dot{u}_b u_a - \dot{u}_b (\sigma_a^b + \omega_a^b)$$

$$h_a^c(\dot{u}_c)^\cdot = \Theta \dot{u}_a \left(\frac{dp}{d\rho} - \frac{1}{3} \right) + h_a^b \nabla_b \left(\frac{dp}{d\rho} \Theta \right) - \dot{u}_b (\sigma_a^b + \omega_a^b) \quad (4.2)$$

con quest'ultima che rappresenta la proiezione ortogonale della derivata della 4-accelerazione.

Gradiente di densità di energia

Applicando poi il gradiente ortogonale a (2.16) si ottiene l'equazione di propagazione di X_a :

$$\bar{\nabla}_a \dot{\rho} + \bar{\nabla}_a (\rho + p) \Theta + (\rho + p) \bar{\nabla}_a \Theta = 0$$

da cui poi applicando (4.1) e (2.16):

$$\bar{\nabla}_a \dot{\rho} = h_a^b (\bar{\nabla}_b \rho)^\cdot - \dot{\rho} \dot{u}_a + \bar{\nabla}_b \rho \left[\frac{1}{3} \Theta h_a^b + \sigma_a^b + \omega_a^b \right] = -(\bar{\nabla}_a \rho) \Theta - (\bar{\nabla}_a p) \Theta - (\rho + p) \bar{\nabla}_a \Theta$$

riscrivendo tramite (2.17) e (2.16) il gradiente $\bar{\nabla}_a p = -(\rho + p) \dot{u}_a = \frac{\dot{\rho} \dot{u}_a}{\Theta}$ e sostituendo:

$$h_a^b (\bar{\nabla}_b \rho)^\cdot = -(\rho + p) \bar{\nabla}_a \Theta - (\bar{\nabla}_b \rho) \frac{4}{3} \Theta h_a^b - \bar{\nabla}_b \rho \left[\sigma_a^b + \omega_a^b \right]$$

raggruppando i due termini $h_a^b (\bar{\nabla}_b \rho)^\cdot$ e $(\bar{\nabla}_b \rho) \frac{4}{3} \Theta h_a^b$ e ridefinendo la derivata sfruttando $\frac{\Theta}{3} = \frac{\dot{\rho}}{l}$:

$$l^{-4} h_a^b (l^4 X_b)^\cdot = -k(\rho + p) Z_a - X_b \left[\sigma_a^b + \omega_a^b \right] \quad (4.3)$$

che è l'equazione di propagazione del gradiente di densità di energia. Da sottolineare come la massa gravitazionale sia moltiplicata per il gradiente di espansione, il quale assume dunque un ruolo cruciale nell'evoluzione delle disomogeneità di densità.

Gradiente di espansione

Infine, è possibile ottenere l'equazione differenziale per Z_a applicando il gradiente a (2.23):

$$\bar{\nabla}_a \dot{\Theta} + \frac{1}{3} \bar{\nabla}_a (\Theta^2) + 2 \bar{\nabla}_a (\sigma^2) - 2 \bar{\nabla}_a (\omega^2) - \bar{\nabla}_a A + \frac{k}{2} \bar{\nabla}_a (\rho + 3p) - \bar{\nabla}_a \Lambda = 0$$

Applicando ancora (4.1) e sostituendo (2.17) a $\bar{\nabla}_a p$ e (2.23) a $\dot{\Theta}$:

$$\begin{aligned} h_a^b (\bar{\nabla}_b \Theta)^\cdot &= \left[-\frac{1}{3} \Theta^2 - 2\sigma^2 + 2\omega^2 + A + \Lambda - \frac{k}{2} (\rho + 3p) \right] \dot{u}_a + \frac{3}{2} k (\rho + p) \dot{u}_a - \frac{k}{2} \bar{\nabla}_a \rho + \\ &+ \bar{\nabla}_a \left[-\frac{1}{3} \Theta^2 - 2\sigma^2 + 2\omega^2 + A \right] - (\bar{\nabla}_b \Theta) \frac{1}{3} \Theta h_a^b - (\bar{\nabla}_b \Theta) \left[\sigma_a^b + \omega_a^b \right] \end{aligned}$$

definendo ora $\mathcal{R} = -\frac{1}{3} \Theta^2 - 2\sigma^2 + 2\omega^2 + A + \Lambda + k\rho = \frac{K}{2} + A - 3\sigma^2 + 2\omega^2$ e raggruppando come nel caso precedente i termini $h_a^b (\bar{\nabla}_b \Theta)^\cdot$ e $(\bar{\nabla}_b \Theta) \frac{1}{3} \Theta h_a^b$ si ottiene:

$$l^{-3} h_a^b (l^3 Z_b)^\cdot = \mathcal{R} \dot{u}_a + \bar{\nabla}_a \left[-2\sigma^2 + 2\omega^2 + A \right] - \frac{1}{2} X_a - Z_b \left[\sigma_a^b + \omega_a^b \right] \quad (4.4)$$

che descrive l'evoluzione del gradiente di espansione. Anche in questo caso si ha che X_a influenza la dinamica dell'espansione.

Ulteriori equazioni

L'equazione di propagazione di Y_a discende direttamente da (4.3) nota la funzione di stato. Per quanto riguarda invece \mathcal{X}_a e D_a si ricava nel primo caso attraverso (2.16):

$$\begin{aligned} l^{-4} h_a^b (l^4 \mathcal{X}_b)^\cdot &= l^{-4} h_a^b \left(l^4 \frac{X_b}{k\rho} \right)^\cdot = \frac{l^{-4}}{k\rho} h_a^b (l^4 X_b)^\cdot - h_a^b (X_b) \frac{(-\dot{\rho})}{k\rho^2} \\ h_a^b (\mathcal{X}_b)^\cdot &= \mathcal{X}_a \Theta \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{3} \right) - Z_a \left(\frac{p}{\rho} + 1 \right) - \mathcal{X}_b \left[\sigma_a^b + \omega_a^b \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

a questo punto si arriva direttamente all'espressione per D_a e con lo stesso procedimento a quella per \mathcal{Z}_a :

$$h_a^b (D_b)^\cdot = D_a \Theta \left(\frac{p}{\rho} \right) - \mathcal{Z}_a \left(\frac{p}{\rho} + 1 \right) - D_b \left[\sigma_a^b + \omega_a^b \right] \quad (4.6)$$

$$h_a^b(\mathcal{Z}_b)' = l\mathcal{R}\dot{u}_a + l\bar{\nabla}_a[-2\sigma^2 + 2\omega^2 + A] - \frac{1}{2}k\rho D_a - \mathcal{Z}_b \left[\sigma_a^b + \omega_a^b + \frac{2}{3}h_a^b\Theta \right] \quad (4.7)$$

Soffermandosi su (4.3) e (4.4), ammettendo ragionevolmente che $(p + \rho) \neq 0$ (basta che sia valida la *weak condition*) e che anche almeno uno tra \dot{u}_a e i gradienti di σ^2 , ω^2 e A sia anch'esso diverso da zero (difficile che siano tutti identicamente nulli lungo γ), si può osservare che $X_a \neq 0 \Leftrightarrow Z_a \neq 0$, pertanto la condizione in cui uno dei due è nullo non si potrà mai verificare.

Vincoli

Oltre alle equazioni di propagazione delle variabili è necessario introdurre un ultimo ingrediente per completare la discussione della dinamica perturbativa gauge-invariante. Vi sono infatti delle relazioni vincolanti, discendenti dalle ben note identità tensoriali (di Ricci e di Bianchi) e che, se soddisfatte ad un certo istante, impongono ad alcune quantità gauge-invarianti inizialmente non incluse nella discussione (si veda sezione 3.3) di essere necessariamente non nulle.

Contraendo gli indici a e c dell'identità di Ricci (2.21), applicando una proiezione spaziale e sostituendo al secondo membro l'EFE si ottiene:

$$\bar{\nabla}^b\sigma_{ab} - \text{curl}(\omega_a) - \frac{2}{3}Z_a + 2\eta_{abc}\omega^b\dot{u}^c = h_a^c R_{cb}u^b = -kq_a = 0 \quad (4.8)$$

che nel caso di fluido perfetto mette in risalto come $Z_a \neq 0 \Rightarrow \omega_{ab} \neq 0$ o $\sigma_{ab} \neq 0$ e dunque come *shear* e vorticità siano indirettamente correlate alle perturbazioni per quanto nel capitolo precedente fossero state “scartate” come variabili gauge-invarianti di riferimento.

Similmente, dall'identità di Bianchi per la componente PSTF del tensore di Riemann $E_{ab} = C_{abcd}u^b u^d$ con C_{abcd} tensore di Weyl si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^b E_{ab} &= \eta_{abc}\sigma^b{}_d H^{dc} - 3H_{ab}\omega^b + \frac{1}{3}\bar{\nabla}_a\rho - \frac{1}{2}\bar{\nabla}^b\pi_{ba} - \frac{1}{3}\Theta q_a + \frac{1}{2}\sigma_{ab}q^b + \frac{3}{2}\eta_{abc}\omega^b q^c \\ &= \eta_{abc}\sigma^b{}_d H^{dc} - 3H_{ab}\omega^b + \frac{1}{3}X_a \end{aligned} \quad (4.9)$$

che mette in relazione il gradiente di densità con le componenti del tensore di Weyl E_{ab} e H_{ab} anch'esse invarianti di gauge in quanto l'universo FLRW, pur avendo una curvatura $K \neq 0$ può sempre essere ricondotto ad un universo piatto attraverso una trasformazione conforme (si parla di “*conformally flat universe*”) e ciò richiede che il tensore di Weyl svanisca.

4.2 Linearizzazione

Finora si è fatto riferimento ad equazioni esatte, ma gestire tutti i termini che le caratterizzano non solo non è banale ma risulta anche inefficiente nel caso in cui si voglia considerare perturbazioni “piccole”. Ecco che emerge la necessità di adattare le equazioni trovate ad un universo *quasi*-FLRW in un contesto in cui la materia è percepita come fluido perfetto monocomponente. Per fare ciò si effettua una linearizzazione delle equazioni in cui vengono trascurati tutti i termini di ordine due e successivi. Si elencano di seguito le principali equazioni linearizzate^{[1],[2]}:

- L'equazione di Raychaudhuri assume la seguente forma semplificata:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - A + \frac{k}{2}(\rho + 3p) - \Lambda = 0 \quad (4.10)$$

- L'equazione di Friedmann si ottiene linearizzando la (2.28) ed è scritta come segue:

$$3(\dot{l})^2 - (k\rho + \Lambda)l^2 = -3\mathcal{K} \quad (4.11)$$

La forma dell'equazione è analoga a quella del caso FLRW con la differenza che l non coincide con il fattore di scala a (si confronti la sezione 2.4). Il parametro $\mathcal{K} = K\frac{l^2}{6} = -\frac{E}{3}$ che determina la curvatura spaziale (dove deve valere $\omega_{ab} = 0$ affinché ${}^3\mathcal{R} = K^1$.) non è in generale costante. A dimostrazione di ciò, la derivata (2.29) della curvatura K linearizzata diventa:

$$\dot{K} = -\frac{2}{3}\Theta(K + 2A) \quad (4.12)$$

¹Se $\omega_{ab} \neq 0$ ciò è approssimativamente vero per un universo *quasi*-FLRW

e sviluppando i conti si osserva che $\dot{\mathcal{K}} = -\frac{2}{3}\dot{l} \cdot lA$ evidenziando come sia il termine di accelerazione a determinare la variazione nel tempo di \mathcal{K} (d'altronde anche l'equazione di Raychaudhuri (4.10) differisce dal caso FLRW solo perché $A \neq 0$).

- Le equazioni di propagazione dei gradienti diventano:

$$h_a^c (\dot{u}_c)^\cdot = \Theta \dot{u}_a \left(\frac{dp}{d\rho} - \frac{1}{3} \right) + h_a^b \nabla_b \left(\frac{dp}{d\rho} \Theta \right) \quad (4.13)$$

$$l^{-4} h_a^b (l^4 X_b)^\cdot = -k(\rho + p) Z_a \quad (4.14)$$

$$l^{-3} h_a^b (l^3 Z_b)^\cdot = \mathcal{R} \dot{u}_a + A_a - \frac{1}{2} X_a \quad (4.15)$$

con $\mathcal{R} = -\frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda + k\rho = \frac{1}{2}K$ e poi ancora per i gradienti di densità relativi:

$$h_a^b (\mathcal{X}_b)^\cdot = \Theta \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{3} \right) \mathcal{X}_a - \left(\frac{p}{\rho} + 1 \right) Z_a \quad (4.16)$$

$$h_a^b (D_b)^\cdot = \Theta \left(\frac{p}{\rho} \right) D_a - \left(\frac{p}{\rho} + 1 \right) \mathcal{Z}_a \quad (4.17)$$

$$h_a^b (\mathcal{Z}_b)^\cdot = l(\mathcal{R} \dot{u}_a + A_a) - \frac{1}{2} k\rho D_a - \frac{2}{3} \Theta \mathcal{Z}_a \quad (4.18)$$

- Le relazioni vincolari assumono anch'esse una forma più semplice che mette in luce maggiormente la loro funzione:

$$\bar{\nabla}^b \sigma_{ab} - \text{curl}(\omega_a) = \bar{\nabla}^b \sigma_{ab} - \bar{\nabla}^b \omega_{ab} = \frac{2}{3} Z_a, \quad \bar{\nabla}^b E_{ab} = \frac{1}{3} X_a \quad (4.19)$$

Il primo è stato già discusso, il secondo in questo caso dimostra come $X_a \neq 0 \Rightarrow E_{ab} \neq 0$ e che quindi anche la parte elettrica del tensore di Weyl entra indirettamente in gioco nel panorama perturbativo.

4.3 Equazioni al secondo ordine

In questo contesto di *quasi*-FLRW le equazioni appena ricavate regolano la dinamica e l'evoluzione delle fluttuazioni infinitesime che rendono tale universo non perfettamente omogeneo e isotropo. Il prossimo passaggio consiste nel considerare una specifica equazione di stato per completare lo studio della dinamica delle perturbazioni arrivando a determinare anche le equazioni differenziali al secondo ordine^[2] delle variabili in gioco. Il caso più semplice e significativo da un punto di vista fisico è quello di fluido perfetto barotropico della già citata forma (2.20).

Partendo dalle equazioni (4.17) e (4.18), si cerca di ottenere un'equazione che coinvolga solo il gradiente D_a . Nella (4.18) si riscrive $A_a = \frac{-\bar{\nabla}_a(\bar{\nabla}^b Y_b)}{k(\rho+p)}$ attraverso (2.17) e sfruttando poi la commutatività dei gradienti spaziali $\bar{\nabla}^b(\bar{\nabla}_a Y_b) = \bar{\nabla}^b(\bar{\nabla}_b Y_a)$, applicando l'identità di Ricci (2.21) per i campi vettoriali nello spazio ortogonale (dove il gradiente spaziale assume localmente il ruolo di derivata covariante per tali superfici e il tensore curvatura è dato dalla (2.26)):

$$\bar{\nabla}_a(\bar{\nabla}^b Y_b) - \bar{\nabla}^b(\bar{\nabla}_a Y_b) = -{}^3 R_a^{bc} Y_c = -{}^3 R_a^c Y_c$$

ed infine utilizzando la definizione del tensore di Ricci come traccia ${}^3 R_a^c Y_c = \frac{1}{3}(h_a^c Y_c) {}^3 \mathcal{R} = (h_a^c Y_c) \frac{2\mathcal{K}}{l^2}$ si ottiene:

$$A_a = \frac{1}{k(\rho+p)} \left(\frac{2\mathcal{K}}{l^2} Y_a - \bar{\nabla}^2 Y_a \right) \quad (4.20)$$

Si riscrive anche il termine $\frac{1}{2}K \dot{u}_a$ sempre sfruttando la (2.17) e il fatto che $K = \frac{6\mathcal{K}}{l^2}$:

$$\frac{1}{2}K \dot{u}_a = -\frac{1}{k(\rho+p)} \frac{3\mathcal{K}}{l^2} Y_a$$

La forma esplicita di Y_a si ricava facilmente da X_a in quanto $Y_a = \frac{dp}{d\rho} X_a$. Sostituendo quest'ultima in (4.18) e riscrivendo le quantità cinematiche in modo esplicito attraverso (2.20) si ottiene:

$$h_a^b (\mathcal{Z}_b)^\cdot = -\frac{c_s^2}{1+w} \left(\frac{\mathcal{K}}{l^2} D_a + \bar{\nabla}^2 D_a \right) - \frac{1}{2} k\rho D_a - \frac{2}{3} \Theta \mathcal{Z}_a \quad (4.21)$$

$$h_a^b(D_b)^\cdot = w\Theta D_a - (w+1)Z_a \quad (4.22)$$

A questo punto si rimane con due equazioni differenziali nelle variabili D_a e Z_a . Scegliendo la prima come riferimento si deriva nel tempo la (4.22) per poi applicare il gradiente spaziale e linearizzare. Il risultato è il seguente:

$$h_a^c[h_c^b(D_b)^\cdot]^\cdot = h_a^c(\dot{u}_c u^b + \dot{u}^b u_c) \dot{D}_b + h_a^c h_c^b(D_b)^\cdot \cdot$$

Linearizzando, il primo addendo a destra si trascura e sostituendo (4.22) al membro di sinistra si ottiene:

$$h_a^b(D_b)^\cdot \cdot = \dot{w}\Theta D_a + w\dot{\Theta} D_a + w\Theta h_a^c(D_c)^\cdot - \dot{w}Z_a - (1+w)h_a^c(Z_c)^\cdot$$

considerando che $\dot{w} = -(1+w)(c_s^2 - w)\Theta$, sostituendo (4.21) e (4.10) (trascurando A in quanto darebbe origine ad un termine di ordine due) ed infine definendo $\ddot{D}_{\perp a} = h_a^b(D_b)^\cdot \cdot$ e $\dot{D}_{\perp a} = h_a^b(D_b)^\cdot$ si giunge all'equazione seguente:

$$\begin{aligned} \ddot{D}_{\perp a} = & - \left[c_s^2 \Theta^2 + w(c_s^2 - w)\Theta^2 - \frac{2}{3}w\Theta^2 + \frac{k}{2}w(\rho + 3p) + w\Lambda - \frac{k}{2}\rho(1+w) - 3\frac{\mathcal{K}}{l^2}c_s^2 \right] D_a + \\ & + w\Theta \dot{D}_{\perp a} + \left[(1+w)(c_s^2 - w)\Theta + \frac{2}{3}\Theta(1+w) \right] Z_a - c_s^2 \left(\frac{2k}{l^2}D_a - \bar{\nabla}^2 D_a \right) \end{aligned}$$

Eliminando ora Z_a sempre attraverso (4.22) e sostituendo in corrispondenza di Θ^2 l'equazione di Friedmann (4.11) si ottiene l'equazione al secondo ordine per il gradiente di densità:

$$\ddot{D}_{\perp a} = - \left(\frac{2}{3} - 2w + c_s^2 \right) \Theta \dot{D}_{\perp a} + \left[\left(\frac{1}{2} + 4w - \frac{3}{2}w^2 - 3c_s^2 \right) k\rho + (c_s^2 - w)\frac{12k}{l^2} + (5w - 3c_s^2)\Lambda \right] D_a - c_s^2 \left(\frac{2k}{l^2}D_a - \bar{\nabla}^2 D_a \right) \quad (4.23)$$

L'equazione differenziale appena ricavata descrive interamente l'evoluzione del gradiente di densità. Essa ha la forma di un'equazione di moto armonico smorzato ed è facilmente risolvibile in alcuni casi particolari. Per prima cosa si analizzano i vari termini di tale equazione:

- $\left(\frac{2}{3} - 2w + c_s^2\right) \Theta$ è il *termine di smorzamento* che se positivo determina un decadimento delle fluttuazioni di densità (in caso contrario, queste tenderanno a crescere).
- $\left(\frac{1}{2} + 4w - \frac{3}{2}w^2 - 3c_s^2\right)$ rappresenta invece il *termine di materia*, ovvero costituisce la sorgente del campo gravitazionale. Nel caso di materia ordinaria esso è positivo e contribuisce alla crescita esponenziale del gradiente di densità (aggregazione della materia per via dell'attrazione gravitazionale).
- $c_s^2 \left(\frac{2k}{l^2}D_a - \bar{\nabla}^2 D_a\right)$ costituisce infine il *termine di divergenza*. Esso sarà di cruciale importanza per la *decomposizione armonica* di D_a in quanto, se applicato ad un autostato armonico, restituisce l'autovalore corrispondente (sezione 4.4).

Una forma più semplice si può ottenere considerando $w = \text{cost} = c_s^2$:

$$\ddot{D}_{\perp a} = - \left(\frac{2}{3} - w \right) \Theta \dot{D}_{\perp a} + \left[\frac{(1-w)(1+3w)}{2} k\rho + 2w\Lambda \right] D_a - w \left(\frac{2k}{l^2}D_a - \bar{\nabla}^2 D_a \right) \quad (4.24)$$

In questo caso è molto più semplice analizzare il comportamento della materia al variare di w . Ad esempio, per quanto riguarda il termine di smorzamento, si nota che per $w < \frac{2}{3}$ esso è positivo e le fluttuazioni vengono dunque smorzate. Altrettanto semplice è determinare l'intervallo di w tale per cui la materia è *ordinaria* valutando il segno dell'omonimo termine, il quale è positivo per $-\frac{1}{3} < w < 1$. Inoltre, il segno di w determina anche la natura del contributo della costante Λ (se $w > 0$ essa sarà "legante" e tenderà a favorire l'aggregazione, viceversa se negativo).

Nel suo lavoro Bardeen^[6] definisce una versione gauge-invariante della perturbazione di densità relativa al sistema del centro di massa, della forma (riscritta nella notazione sin qui utilizzata) $\epsilon_m = \delta\rho + 3(1+w)\frac{1}{k}\dot{l}(v^{(0)} - B^{(0)})$ dove $v^{(0)}$ e $B^{(0)}$ sono perturbazioni scalari associate rispettivamente alla 3-velocità e alla componente (0,i) della metrica e $k = \frac{\eta}{l}$ è il numero d'onda associato all'autovalore di $\bar{\nabla}^2$ (si veda 4.4). Ci sono altre due variabili gauge-invarianti fondamentali ricavate dalle perturbazioni della metrica a cui egli fa riferimento: il *potenziale newtoniano* Φ_A e la *perturbazione di curvatura* Φ_H . Quest'ultima in particolare è legata a ϵ_m

secondo la relazione^[6]: $2 \left(\frac{k^2 - 3\mathcal{K}}{l^2} \right) \Phi_H = \rho \cdot \epsilon_m$. É dunque possibile determinare l'analogo CGI di questa variabile attraverso il vettore $\Phi_a = k\rho l^2 \cdot D_a$.

Dalle equazioni precedenti (2.16), (2.20), (4.22) e dalla definizione di $lK_a = -\frac{4}{3}\Theta\mathcal{Z}_a + 2k\rho D_a$ linearizzata e riscritta con i gradienti comoventi, si ottiene facilmente l'equazione al primo ordine:

$$\dot{\Phi}_{\perp a} = - \left(\frac{1}{3}\Theta + \frac{3}{2\Theta}(w+1)k\rho \right) \Phi_a + \frac{3}{4\Theta}(w+1)k\rho(l^3 K_a) \quad (4.25)$$

Derivando nuovamente e ripercorrendo il procedimento simile a quello svolto per determinare $\ddot{D}_{\perp a}$ (con l'unica differenza che per derivare il termine $l^3 K_a$ bisogna riutilizzare la sua definizione in termini di D_a e \mathcal{Z}_a e delle loro derivate (4.22) e (4.21)) si ottiene l'equazione al secondo ordine generale:

$$\ddot{\Phi}_{\perp a} = - \left(\frac{4}{3} + c_s^2 \right) \Theta \dot{\Phi}_{\perp a} - \left[(c_s^2 - w)k\rho - \frac{2\mathcal{K}}{l^2}(1 + 3c_s^2) + \Lambda(1 + c_s^2) \right] \Phi_a - c_s^2 \left(\frac{2k}{l^2} \Phi_a - \bar{\nabla}^2 \Phi_a \right) \quad (4.26)$$

$$\ddot{\Phi}_{\perp a} = - \left(\frac{4}{3} + w \right) \Theta \dot{\Phi}_{\perp a} - \left[-\frac{2\mathcal{K}}{l^2}(1 + 3w) + \Lambda(1 + w) \right] \Phi_a - w \left(\frac{2k}{l^2} \Phi_a - \bar{\nabla}^2 \Phi_a \right) \quad (4.27)$$

Dove la seconda è la forma semplificata per $w = c_s^2$. Questa equazione può essere utile per determinare l'espressione esplicita di D_a in alcuni casi particolari (sezione 5.4).

4.4 Decomposizione armonica

Prima di procedere si effettua un'analisi della decomposizione armonica^[2] del gradiente D_a . Questo approccio, molto utilizzato da Bardeen, non solo consente di interpretare le fluttuazioni di densità come vere e proprie oscillazioni armoniche (in termini di una *lunghezza d'onda comovente*) ma anche di separare le variabili in modo da distinguere la dipendenza spaziale da quella temporale. Si parte definendo le autofunzioni armoniche (autostati del laplaciano spaziale) $Q^{(n)}$ tali per cui l'equazione di moto armonico (che in questa circostanza prende il nome di *equazione di Helmholtz*) sia rispettata:

$$\bar{\nabla}^2 Q^{(n)} = -\frac{n^2}{l^2} Q^{(n)} \quad (4.28)$$

dove $n = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il numero d'onda comovente. Si richiede inoltre che queste autofunzioni siano costanti lungo le linee di universo. Da qui si definiscono gli autovettori armonici comoventi $Q_a^{(n)} = l \cdot \bar{\nabla}_a Q^{(n)}$ tali per cui:

$$\bar{\nabla}^2 Q_a^{(n)} = l \cdot \bar{\nabla}^b \bar{\nabla}_b (\bar{\nabla}_a Q^{(n)})$$

Scambiando i gradienti spaziali e applicando nuovamente (2.21):

$$\bar{\nabla}^b \bar{\nabla}_a (\bar{\nabla}_b Q^{(n)}) - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^b (\bar{\nabla}_b Q^{(n)}) = {}^3 R_a{}^{bc} (\bar{\nabla}_c Q^{(n)}) = {}^3 R_a{}^c (\bar{\nabla}_c Q^{(n)})$$

ed di nuovo dalla definizione del tensore di Ricci ${}^3 R_a{}^c (\bar{\nabla}_c Q^{(n)}) = \frac{1}{3} (\bar{\nabla}_a Q^{(n)}) {}^3 \mathcal{R} = (\bar{\nabla}_a Q^{(n)}) \frac{2\mathcal{K}}{l^2}$ e da (4.28) si ottiene:

$$\bar{\nabla}^2 Q_a^{(n)} = \left(\frac{2k}{l^2} - \frac{n^2}{l^2} \right) Q_a^{(n)} \quad (4.29)$$

che è l'equazione di Helmholtz vettoriale. Valutando la derivata temporale di tali autofunzioni, applicando la (4.1) e ricordando che $\dot{Q}^{(n)} = 0$ si osserva che $\dot{Q}_a^{(n)} = (\dot{l}) \bar{\nabla}_a Q^{(n)} + l (\bar{\nabla}_a Q^{(n)}) \cdot = (\dot{l}) \bar{\nabla}_a Q^{(n)} + l (\dot{u}^b \bar{\nabla}_b Q^{(n)}) u_a - (\dot{l}) \bar{\nabla}_a Q^{(n)} - l (\sigma_{ab} \bar{\nabla}^b Q^{(n)} - \eta_{abc} \omega^b \bar{\nabla}^c Q^{(n)})$. Trascurando i termini di ordine superiore al primo si osserva che questa quantità è circa pari a zero e pertanto anche i vettori armonici sono approssimativamente costanti lungo le linee di universo.

Su questi presupposti è possibile procedere con la decomposizione armonica del gradiente di energia nella forma:

$$D_a = \sum_n D^{(n)} Q_a^{(n)}$$

dove $D^{(n)}$ è la componente armonica associata al modo di oscillazione n-esimo ed è tale per cui $\bar{\nabla}_a D^{(n)} \approx 0$. A questo punto è chiaro che i vettori armonici costituiscono la componente spaziale del gradiente mentre i

coefficienti ne rappresentano la dipendenza temporale. Il fatto che questo sia vero solo approssimativamente è conseguenza dell'aver definito D_a in un universo *quasi-FLRW* e dunque la separazione esatta è garantita solo nel caso di perfetta omogeneità e isotropia. Sostituendo questa nuova espressione del gradiente nell'equazione (4.24) è possibile sfruttare l'indipendenza dal tempo dei vettori armonici e la (4.29) per ottenere l'equazione per la componente n-esima:

$$\ddot{D}^{(n)} = - \left(\frac{2}{3} - w \right) \Theta \dot{D}^{(n)} + \left[\frac{(1-w)(1+3w)}{2} k\rho - w \frac{n^2}{l^2} \right] D^{(n)} \quad (4.30)$$

Per convenienza il contributo Λ è stato trascurato. Questa scomposizione non solo offre un metodo alternativo per risolvere l'equazione al secondo ordine per D_a ma consente anche di descrivere l'evoluzione delle singole componenti in funzione del numero d'onda n . Particolare rilievo va dato al segno del termine all'interno della parentesi quadra che determina la natura dell'evoluzione della componente, vale a dire se essa è destinata a crescere (collasso) oppure a diminuire (espansione). Questo consente di definire un nuovo criterio per stabilire se il collasso gravitazionale possa avvenire o meno; questo prende il nome di *criterio di Jeans*^[8].

Dal punto di vista fisico, esso fornisce un metodo per stabilire *se gli effetti stabilizzanti della pressione siano in grado di contrastare la tendenza dell'“auto-gravità” (self gravity) della fluttuazione ad indurre il collasso*^[8]. Una semplice e immediata dimostrazione di questo fatto la si può osservare considerando una distribuzione sferica di fluttuazione di densità (una regione dello spazio in cui $\delta\rho > 0$) di raggio λ . La fluttuazione crescerà se la forza di gravità è superiore alla pressione esercitata dalla materia stessa, in formule si ha approssimativamente la seguente uguaglianza delle forze per unità di massa:

$$F_g \approx \frac{GM}{\lambda^2} > F_p \approx \frac{p\lambda^2}{\rho\lambda^3} \Leftrightarrow \lambda > \lambda_J \approx c_s \left(\frac{1}{G\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Applicando una decomposizione armonica è evidente che la condizione di Jeans si traduce nel determinare il segno dei termini di materia e di divergenza nella (4.24) per ciascun modo di oscillazione. Dalla (4.30) quest'ultima può essere riscritta in termini di lunghezza d'onda come segue:

$$\lambda_n = \frac{2\pi l}{n} > c_s \left(\frac{8\pi^2}{k\rho} \frac{1}{(1-w)(1+3w)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

dove $\lambda_J = c_s \left(\frac{8\pi^2}{k\rho} \frac{1}{(1-w)(1+3w)} \right)^{\frac{1}{2}}$ è la *lunghezza di Jeans* che, seppur con diversi termini correttivi, riproduce l'ordine di grandezza e le dipendenze principali della lunghezza approssimata. L'interpretazione fisica è la seguente: se la fluttuazione ha una lunghezza d'onda maggiore di λ_J (bassi n) allora la pressione non può resistere al collasso gravitazionale e la soluzione sarà della forma esponenziale. Se invece la fluttuazione scende al di sotto della soglia di Jeans (alti n) essa non è sufficiente per generare un collasso e l'equazione è risolta da soluzioni oscillanti.

4.5 Soluzioni di onda lunga

Si considera infine un particolare caso di soluzioni semplificate che prendono il nome di *long wavelength solutions*^[2](soluzioni di onda lunga). La principale assunzione che caratterizza queste soluzioni è $A = 0$ con due importanti conseguenze.

La prima è che l'equazione di Raychaudhuri (4.10) assume la forma:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + \frac{k}{2}(\rho + 3p) - \Lambda = 0, \quad 3\frac{\dot{l}}{l} = -\frac{1}{2}k(\rho + 3p) + \Lambda \quad (4.32)$$

L'equazione di Friedmann assume la forma (4.11) ma in questo caso essa coincide con la versione FLRW in quanto $A = 0 \Rightarrow \dot{\mathcal{K}} = 0$. Di conseguenza ogni linea di universo è associata ad uno specifico valore di \mathcal{K} , che rimane appunto costante nel tempo e ciò implica l'esistenza di un'evoluzione temporale di tipo FLRW diversa e indipendente per ciascuna di esse. É dunque opportuno risolvere le equazioni imponendo delle specifiche condizioni iniziali.

In secondo luogo, posta $A_a = 0$ dalla (4.20) si ricava che:

$$\left(\frac{2k}{l^2} D_a - \bar{\nabla}^2 D_a \right) = 0, \quad \left(\frac{2k}{l^2} \Phi_a - \bar{\nabla}^2 \Phi_a \right) = 0$$

Il termine di divergenza svanisce e l'equazione al secondo ordine (4.24) non solo diventa lineare, per cui risolvibile in maniera più semplice, ma consente anche di considerare eventuali *soluzioni scalari*. Infatti, in generale D_a e $\dot{D}_{\perp a}$ (o analogamente D_a e Z_a) non sono paralleli e anche se lo fossero per un istante il termine di divergenza andrebbe comunque a rompere questa condizione ad istanti successivi. Eliminando questo contributo è dunque possibile ottenere gradienti sempre paralleli e ciò implica che la variazione nel tempo di D_a avviene sempre nella stessa direzione. Questo fatto consente di indagare sulla *massima variazione di densità* possibile attraverso equazioni scalari della forma (dalla (4.24)):

$$\ddot{D} = - \left(\frac{2}{3} - w \right) \Theta \dot{D} + \left[\frac{(1-w)(1+3w)}{2} k\rho + 2w\Lambda \right] D \quad (4.33)$$

È fondamentale poi sottolineare che D è la variazione in modulo di densità nella direzione in cui questa è massima e non tra due volumi comoventi vicini qualunque (anche perché la loro posizione relativa in generale varia nel tempo). Per ottenere quest'ultima è necessario proiettare D_a lungo il vettore congiungente tra due particelle e studiarne le variazioni in modulo.

Infine, si nota come lo stesso risultato si possa ottenere applicando la decomposizione armonica che come visto in 4.4 separa l'equazione vettoriale in un insieme di equazioni scalari, ciascuna relativa ad un modo di oscillazione. Considerando il caso in cui $n = 0$, si osserva che questo implica il limite in cui $\lambda \rightarrow \infty$. In altre parole, dal punto di vista fisico la lunghezza d'onda della fluttuazione è tanto significativa quanto basta per trascurare ogni modo di oscillazione di ordine superiore a quello fondamentale. Ecco dunque spiegato il perché si definisce “di onda lunga” o “di grande lunghezza d'onda” questo limite. Esso verrà utilizzato per risolvere alcuni casi semplici nel prossimo capitolo (sezione 5.4).

Capitolo 5

Applicazioni

In questo ultimo capitolo vengono trattati alcuni casi particolari, nel contesto di fluidi perfetti barotropici, assegnando a w un valore specifico. Le soluzioni consentono di descrivere alcuni casi gravitazionalmente estremi che costituiscono le basi di una descrizione più complessa che può includere fluidi perfetti non barotropici, fluidi perfetti multicomponente con la stessa 4-velocità, fluidi non perfetti multicomponente con diversa 4-velocità e così via. La trattazione include cinque diversi valori di γ attraverso cui è possibile immediatamente constatare il comportamento del fluido. Per determinare la dipendenza di ρ da l è opportuno ricordare le relazioni cinematiche fondamentali (2.10), (2.19), (2.20) e (2.16). Da queste ultime due si ricava integrando la relazione tra densità e fattore di scala:

$$\rho \propto l^{-3(1+w)} \quad (5.1)$$

5.1 Falso vuoto

Il caso di *falso vuoto* si ottiene per $\gamma = 0$ ($w = -1$) e di conseguenza $p = -\rho$ e dalla (2.16) si trova che $\dot{\rho} = 0$. Questo modello prende anche il nome di *costante cosmologica* proprio per il fatto che $\rho = \text{cost}$ lungo le linee di universo. Si osserva inoltre come la velocità del suono $c_s^2 = -1$ non esista dal punto di vista fisico. Riscrivendo il tensore energia impulso nella forma:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + p g_{ab}$$

si nota dunque che $T_{ab} \propto g_{ab}$, il che rende impossibile definire un'unica 4-velocità di riferimento per descrivere il moto del centro di massa di una qualunque distribuzione di materia (ogni 4-velocità è autovettore di g_{ab}). Inoltre, da (2.17) si nota anche che $Y_a = 0$, per cui non esiste un gradiente di pressione in grado di contrastare l'accelerazione e quindi il collasso.

Per quanto riguarda i gradienti è facile notare nella (4.14) come $l^4 X_a = \text{cost}$ lungo le linee di universo e riscrivendo la (4.17) in questo modo

$$h_a{}^b (D_b)^\cdot = \Theta \left(\frac{p}{\rho} \right) D_a = -3 \frac{l^2 \cdot \dot{l}}{l^3} D_a \quad (5.2)$$

si trova integrando che $l^3 D_a = \text{cost}$. mostrando dunque come i gradienti decrescano all'aumentare del fattore di scala.

Questo modello può essere utilizzato in alcuni casi particolari per rappresentare l'inflazione, ma tale descrizione necessita l'introduzione di campi scalari che esula dalla presente tesi.

5.2 Stiff matter

Il secondo caso molto semplice è quello di *Stiff matter* ("materia rigida") che si ottiene per $\gamma = 2$ ($w = 1$) per cui si ha $p = \rho$ e $c_s = 1$ (velocità del suono coincide con la velocità della luce). Dalle relazioni (2.19) e (5.1) si trova che:

$$\rho \propto \rho_N^2 \quad , \quad \rho = \rho_0 \frac{l_0^6}{l^6}$$

Questo modello è il caso di massima pressione fisicamente accettabile e fu proposto da Zel'dovich per studiare alcuni casi dell'universo primordiale dove la pressione doveva essere molto elevata. Inoltre, si tratta di uno dei due casi limiti per il termine di materia nella (4.24) tale per cui esso svanisce. Un altro caso analogo si ha per $w = -\frac{1}{3}$ che corrisponde all'assenza di massa gravitazionale attiva, ma questa ulteriore circostanza non verrà discussa.

5.3 Pressure-free matter

Il caso semplice più rilevante è quello di *pressure-free matter* o *dust* (materia priva di pressione) caratterizzato da $\gamma = 1$ ($w = 0$) che implica $p = Y_a = \dot{u}_a = 0$ (l'ultima uguaglianza proviene da (2.17)). Il modello a zero pressione può essere un'ottima approssimazione per descrivere la dinamica delle fasi finali dell'universo, quando cioè la pressione esercitata dal fluido è sufficientemente trascurabile. L'assenza di accelerazione indica inoltre che la materia si muove in caduta libera (seguendo dunque le geodetiche) senza interferenze dovute al gradiente di pressione. Dalle equazioni (2.19) e (5.1) si trova che:

$$\rho = \rho_N \quad , \quad \rho = \rho_0 \frac{l_0^3}{l^3}$$

che attestano l'assenza di energia interna ϵ . Le equazioni di Raychaudhuri e di Friedmann assumono la forma data da (4.32) e (4.11) che coincidono con le espressioni ottenute in approssimazione di onda lunga (conseguenza del fatto che l'accelerazione è nulla).

Le equazioni dei gradienti ortogonali assumono invece la forma:

$$l^{-4}(l^4 X_a) \cdot = -k\rho Z_a \quad (5.3)$$

$$l^{-3}(l^3 Z_a) \cdot = -\frac{1}{2} X_a \quad (5.4)$$

$$\dot{X}_a = -\frac{1}{3} \Theta X_a - Z_a \quad (5.5)$$

$$\dot{D}_a = -Z_a \quad (5.6)$$

$$\dot{Z}_a = -\frac{1}{2} k\rho D_a - \frac{2}{3} \Theta Z_a \quad (5.7)$$

Dove il gradiente spaziale è stato rimosso in quanto, ripercorrendo la dimostrazione della (4.1), si ha che $u_a u^b (\bar{\nabla}_b f) \cdot = -(\dot{u}^b \bar{\nabla}_b f) u_a = 0$ dato che $\dot{u}^b = 0$. Considerando ora (5.3) e (5.4) è possibile determinare l'equazione al secondo ordine per il gradiente X_a . Moltiplicando per l^3 , derivando (5.3) e sostituendo (5.4) si ottiene:

$$[l^{-1}(l^4 X_a) \cdot] \cdot = \frac{1}{2} k\rho l^3 X_a + 3k\rho(l^2) Z_a \dot{l}$$

con $\dot{\rho} = -3\rho \dot{l}$ da (2.16). Sostituendo di nuovo la (5.3) per Z_a , riscrivendo al primo membro $l^{-1} = l^{-3} l^2$ e derivando l^3 si ha che:

$$[l^2(l^4 X_a) \cdot] \cdot = \frac{1}{2} k\rho l^6 X_a$$

Sostituendo ora l'equazione di Friedmann (4.11) in corrispondenza di $k\rho$ si ottiene:

$$[l^2(l^4 X_a) \cdot] \cdot = \left(\frac{3}{2} \mathcal{K} l^4 + \frac{1}{6} \Theta^2 l^6 - \frac{1}{2} \Lambda l^6 \right) X_a$$

Sviluppando le derivate al primo membro e sostituendo la (4.32) in corrispondenza di $4\dot{l} X_a$ si ricava l'equazione al secondo ordine:

$$\ddot{X}_a + \frac{10}{3} \Theta \dot{X}_a + \frac{1}{2} \left(\frac{11}{3} \Theta^2 - 7 \frac{\mathcal{K}}{l^2} + 5\Lambda \right) X_a = 0 \quad (5.8)$$

Riscrivendo ora la (5.4) come $l^{-3}(l^3 Z_a) \cdot = \Theta Z_a + \dot{Z}_a = -\frac{1}{2} X_a \Rightarrow \dot{Z}_a = -\Theta Z_a - \frac{1}{2} X_a$ che insieme a (5.5) restituisce l'equazione al secondo ordine per il gradiente relativo (sostituendo sempre $k\rho$ attraverso (4.11)):

$$\ddot{X}_a + \frac{4}{3} \Theta \dot{X}_a - \left(\frac{2\mathcal{K}}{l^2} - \Lambda \right) X_a = 0 \quad (5.9)$$

Infine, da (5.6) e (5.7) si ricava:

$$\ddot{D}_a + \frac{2}{3}\Theta\dot{D}_a - \frac{1}{2}k\rho D_a = 0 \quad (5.10)$$

che si ottiene ugualmente ponendo $w = 0$ nell'equazione al secondo ordine generale (4.24). Da sottolineare come tutte queste equazioni differenziali siano omogenee, per cui se $X_a = Z_a = 0$ ad un certo istante tali rimangono per ogni altro istante (analogo per D_a e Z_a). Una condizione simile si ottiene nel caso in cui essi siano paralleli (tali rimangono per ogni altro evento) data l'assenza del termine di divergenza (sezione 4.5) e questo fatto consente di studiare l'equazione scalare seguente:

$$\ddot{D} + \frac{2}{3}\Theta\dot{D} - \frac{1}{2}k\rho D = 0 \quad (5.11)$$

In queste equazioni $k\rho > 0$ induce il collasso gravitazionale delle fluttuazioni di densità mentre l'espansione $\Theta > 0$ tende a frenare questa instabilità (fattore di smorzamento).

A questo punto si può procedere con il calcolo delle soluzioni esatte delle quantità in gioco, restringendo l'analisi ad un caso particolare.

5.3.1 Universo di Einstein-de Sitter

Il modello in questione è quello dell'universo di Einstein-de Sitter, caratterizzato da $\Lambda = \mathcal{K} = 0$. Si tratta dunque di un universo piatto che possiede la minima energia sufficiente ad evitare il collasso gravitazionale ($t \rightarrow \infty \Rightarrow l \rightarrow \infty$) configurandosi dunque come il caso di espansione più semplice da gestire.

Procediamo con la soluzione dell'equazione (4.11) notando che dalla moltiplicazione per l si ottiene:

$$3(\dot{l})^2 l = k\rho l^3 = cost \Leftrightarrow (\dot{l})^2 = Al^{-1} \Leftrightarrow l = \frac{A}{(\dot{l})^2}$$

con $A = \frac{1}{3}k\rho l^3$. Questo tipo di equazioni della forma $y = f(y')$ (con f' continua) si risolvono con il metodo delle soluzioni parametriche ponendo $y' = p$ e scrivendo:

$$y' = \frac{df}{dp}p' = \frac{df}{dp}\frac{dp}{dt} \Rightarrow dt = \frac{1}{p}\frac{df}{dp}dp$$

Integrando ambo i membri si ottiene:

$$t - t_0 = \frac{2}{3}\frac{A}{(\dot{l})^3} \Rightarrow l = a(t - t_0)^{\frac{2}{3}}$$

con $a = \left(\frac{3}{4}k\rho l^3\right)^{\frac{1}{3}}$. Le soluzioni di l , Θ , ρ sono dunque le seguenti:

$$l(t) = a(t - t_0)^{\frac{2}{3}}, \quad \Theta(t) = \frac{2}{(t - t_0)}, \quad \rho = \frac{1}{3k}\Theta^2 = \frac{4}{3}\frac{1}{k(t - t_0)^2}$$

Per risolvere le equazioni dei gradienti è conveniente partire da \mathcal{X}_a poiché esso è regolato dall'unica equazione al secondo ordine che può essere ricondotta ad una del primo ordine, ponendo $\mathcal{X}_a = y_a$:

$$\dot{y}_a + \frac{4}{3}\Theta y_a = 0$$

che si risolve con il metodo della variazione delle costanti:

$$y_a(t) = c_a e^{\int -\frac{4}{3}\Theta dt} = c_a (t - t_0)^{-\frac{8}{3}} \Rightarrow \mathcal{X}_a = c_{1a}(t - t_0)^{-\frac{5}{3}} + c_{2a}$$

con c_{1a} e c_{2a} vettori costanti lungo le linee di universo. Da qui poi si ricavano direttamente le soluzioni per gli altri gradienti:

$$X_a = a_{1a}(t - t_0)^{-\frac{11}{3}} + a_{2a}(t - t_0)^{-2} \quad (5.12)$$

$$D_a = b_{1a}(t - t_0)^{\frac{2}{3}} + b_{2a}(t - t_0)^{-1} \quad (5.13)$$

Si nota che nella maggior parte dei casi le soluzioni tendono a 0 per $t \rightarrow \infty$ eccetto D_a che nel caso in cui $b_{1a} \neq 0$ possiede una soluzione crescente. Si valuta infine la soluzione relativa a $D = (D^a D_a)^{\frac{1}{2}}$:

$$D = [b_{1a} b_1^a (t - t_0)^{\frac{4}{3}} + b_{2a} b_2^a (t - t_0)^{-2} + 2b_{1a} b_2^a (t - t_0)^{-\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

in cui si osserva un termine di interferenza dovuto al fatto che b_{1a} e b_2^a non sono paralleli in generale poiché non lo sono D_a e \dot{D}_a . Nel caso in cui quest'ultima condizione valesse, D assumerebbe una forma analoga a quella di D_a :

$$D = b_1 (t - t_0)^{\frac{2}{3}} + b_2 (t - t_0)^{-1} \quad (5.15)$$

5.4 Radiazione

Il caso di *radiazione* si ottiene per $\gamma = \frac{4}{3}$ ($w = \frac{1}{3}$) e prevede che ogni distribuzione di massa si muova alla velocità della luce. Ciò si traduce nella condizione $k_a k^a = 0$ dove k_a è il 4-momento dell'onda elettromagnetica. Considerando il tensore energia impulso $T_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab}$ si ha che esso può essere riscritto nella forma $T_{ab} = \sum_i k_{ia} k_{ib}$ e pertanto:

$$T^a_a = \sum_i k_i^a k_{ia} = \rho u^a u_a + 3p = -\rho + 3p = 0 \iff \rho = 3p$$

Inoltre, dato che $\rho = \rho_N(1 + \epsilon)$ si ha che $\epsilon \propto \frac{\rho}{\rho_N} \propto T$, dove T è la temperatura (proporzionale all'energia interna). Ricordando poi (2.10) e (5.1) si ottiene $T \propto \rho^{\frac{1}{4}} \iff \rho \propto T^4$ che riproduce esattamente la forma dell'equazione di Stefan-Boltzmann per l'emissione di energia di corpo nero. Anche questo modello può essere una buona rappresentazione dell'universo primordiale in cui le particelle dovevano essere solo ultrarelativistiche e la radiazione dominante rispetto alla materia.

Si procede con il calcolo delle soluzioni in approssimazione di onda lunga (si veda 4.5). Le equazioni di propagazione al primo ordine dei gradienti valgono:

$$h_a^c (\dot{u}_c)^\cdot = h_a^b \nabla_b \left(\frac{1}{3} \Theta \right) \quad (5.16)$$

$$l^{-4} h_a^b (l^4 X_b)^\cdot = -\frac{4}{3} k Z_a \quad (5.17)$$

$$l^{-3} h_a^b (l^3 Z_b)^\cdot = \mathcal{R} \dot{u}_a - \frac{1}{2} X_a \quad (5.18)$$

con $\mathcal{R} = -\frac{1}{3} \Theta^2 + \Lambda + k\rho = \frac{1}{2} K$ e per i gradienti di densità relativi:

$$h_a^b (X_b)^\cdot = -\frac{4}{3} Z_a \quad (5.19)$$

$$h_a^b (D_b)^\cdot = \frac{1}{3} \Theta D_a - \frac{4}{3} \mathcal{Z}_a \quad (5.20)$$

$$h_a^b (Z_b)^\cdot = l \mathcal{R} \dot{u}_a - \frac{1}{2} k \rho D_a - \mathcal{Z}_a \frac{2}{3} \Theta \quad (5.21)$$

Da notare che in questo caso non è possibile eliminare i gradienti spaziali in quanto nel limite di onda lunga $A = 0$ ma non necessariamente $\dot{u}_a = 0$.

Le espressioni delle quantità scalari sono ricavabili a partire dalla soluzione $l(t)$ della (4.11) nel caso in cui $\mathcal{K} = \Lambda = 0$ applicando nuovamente il metodo della soluzione parametrica (con l'unica differenza che in questo caso $3(\dot{l})^2 l^2 = k\rho l^4 = cost$). Si riportano direttamente i risultati:

$$l(t) = a(t - t_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \Theta(t) = \frac{3}{2(t - t_0)}, \quad \rho = \frac{1}{3k} \Theta^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{k(t - t_0)^2}$$

dove $a = (\frac{4}{3} k \rho l^4)^{\frac{1}{4}} = cost$. Dall'equazione (4.24) si ricava l'equazione al secondo ordine per D_a :

$$\ddot{D}_{\perp a} = -\frac{1}{3} \Theta \dot{D}_{\perp a} + \frac{2}{9} \Theta^2 D_a \quad (5.22)$$

In questo caso è più conveniente risolvere l'equazione per la variabile Φ_a e nel caso specifico la (4.27) assume la forma:

$$\ddot{\Phi}_{\perp a} = -\frac{5}{3}\Theta\dot{\Phi}_{\perp a} \quad (5.23)$$

facilmente risolvibile come equazione al primo ordine definendo $\dot{\Phi}_{\perp a} = z_a$ e applicando nuovamente la variazione delle costanti:

$$z_a(t) = d_a e^{\int -\frac{5}{3}\Theta dt} = d_a (t - t_0)^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad \Phi_a = d_{1a}(t - t_0)^{-\frac{3}{2}} + d_{2a}$$

con d_{1a} e d_{2a} vettori costanti lungo le linee di universo. Da qui si giunge facilmente alla soluzione per D_a , sempre della forma polinomiale, che assume in questo caso l'espressione:

$$D_a = b_{1a}(t - t_0)^{-\frac{1}{2}} + b_{2a}(t - t_0) \quad (5.24)$$

$$D = [b_{1a}b_1^a(t - t_0)^{-1} + b_{2a}b_2^a(t - t_0)^2 + 2b_{1a}b_2^a(t - t_0)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \quad (5.25)$$

5.5 Perturbazioni di isocurvatura

Un caso particolare che merita una menzione riguarda le perturbazioni di *isocurvatura*, caratterizzate dal vincolo $K_a = 0$ che implica che la curvatura spaziale su una 3-superficie ortogonale sia costante sulla superficie stessa. Dalla (2.28) si ricava la relazione tra i gradienti:

$$X_a = \frac{2}{3}\Theta Z_a \quad (5.26)$$

da qui è possibile sviluppare i conti derivando, proiettando e applicando (4.14) e (4.15):

$$h_a^b (l^4 X_b)^\cdot = h_a^b \left(\frac{2}{3}\Theta l^3 Z_b \right)^\cdot \\ -k(\rho + p)Z_a = \left[\frac{2}{3}\dot{\Theta} + \frac{2}{9}\Theta^2 \right] Z_a + \frac{2}{3}\Theta \left[\mathcal{R}\dot{u}_a + A_a - \frac{1}{2}X_a \right]$$

Sostituendo ora l'equazione di Raychaudhuri (4.10) e sostituendo (5.26) nuovamente a X_a si ottiene:

$$\left[2k\rho - \frac{2}{3}\Theta^2 + 2\Lambda \right] Z_a + 2\Theta [\mathcal{R}\dot{u}_a + A_a] = K Z_a + 2\Theta [\mathcal{R}\dot{u}_a + A_a] = 0$$

riconoscendo al primo membro l'espressione di K linearizzata. Nel caso in cui $\gamma = 1$ rimane soltanto la condizione $K Z_a = 0$ che indica come le perturbazioni di isocurvatura nel caso *pressure-free* siano possibili solo se $K = 0$, vale a dire solo nel caso in cui le superfici spaziali sono piatte.

Risolvendo per D_a nel caso di Einstein-de Sitter (che alla fine aggiunge solo la condizione $\Lambda = 0$ visto che $\mathcal{K} = 0$ è già richiesta dall'isocurvatura) si trova sostituendo (5.26) in (5.6) in corrispondenza di Z_a :

$$\dot{D}_a = -\frac{3k\rho}{2\Theta} D_a = -\frac{1}{(t - t_0)} D_a$$

e risolvendo l'equazione differenziale nuovamente con il metodo della variazione delle costanti:

$$D_a = c_a(t - t_0)^{-1}, \quad D = c(t - t_0)^{-1} \quad (5.27)$$

con $c = \sqrt{c_a c^a}$. La condizione di isocurvatura impone l'esistenza della sola soluzione decrescente di D_a .

5.6 Cenni sull'analisi di fluidi multicomponente

Le applicazioni discusse finora trattano casi semplici in cui la materia è caratterizzata da una singola componente di fluido perfetto e barotropico. Per offrire una descrizione più corretta e completa è necessario considerare fluidi complessi caratterizzati da due o più componenti perfette, ciascuna descritta da una specifica 4-velocità e interagenti tra loro. Questo tipo di analisi è necessaria dal momento che l'universo, nelle sue fasi più critiche, è costituito da più componenti, ad esempio all'epoca del disaccoppiamento tra materia e radiazione, l'istante in cui è avvenuto "l'ultimo scattering" (*Last scattering surface*) tra fotoni e barioni e l'universo è passato

dall'essere opaco (dominio della radiazione) all'essere trasparente (dominio della materia).

Questo tipo di analisi è in generale molto complessa. I primi a portare avanti lo studio delle perturbazioni di fluidi composti sono stati Kodama & Sasaki nel 1984 sulla base del lavoro di Bardeen. Successivamente agli studi di Ellis e Bruni, nel 1991 fu la volta di Peter Dunsby a portare avanti la descrizione multicomponente prendendo come riferimento le variabili CGI. Dall'articolo [7] di Dunsby si ripropone un caso semplice in cui si considera un fluido composto da materia *pressure-free* e radiazione che si muovono con la stessa 4-velocità e non interagenti. Il modello in questione prende il nome di *Non-interacting dust-radiation universe*.

Si considera innanzitutto un universo FLRW con $\mathcal{K} = \Lambda = 0$. L'equazione (2.16) per le componenti separate assume la forma nota (imponendo $p = 0$ nel caso di *dust* e $p = \frac{1}{3}\rho$ per la radiazione). Combinando queste due si ottengono le espressioni di densità di energia e pressione complessive:

$$\rho = \frac{3}{\beta^2}l^{-4}(1 + \alpha l), \quad p = \frac{1}{\beta^2}l^{-4}$$

con $\alpha = \frac{\rho_d l^3}{\rho_r l^4} = \frac{M_1}{M_2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{3}}{\rho_r l^4}$ e M_1, M_2 costanti (dalla (5.1)). Da qui si ricava facilmente l'equazione di Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{l}}{l}\right)^2 = \frac{k}{\beta^2}l^{-4}(1 + \alpha l)$$

e dalla (2.20) si ricava che:

$$\gamma = \frac{4M_2 + 3M_1 l}{3M_1 l + 3M_2}$$

dalla quale si nota che per $l \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow \frac{4}{3}$ mentre per $l \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 1$ che giustifica dunque il passaggio da un universo dominato dalla radiazione ad un universo dominato dalla materia.

Si procede poi con lo studio delle perturbazioni per mezzo delle variabili D_a e Z_a . La descrizione in questo caso si complica notevolmente, per questo motivo si riportano solo i risultati finali senza dimostrazione: considerando le divergenze $\Delta = l\bar{\nabla}^a D_a$ e $Z = l\bar{\nabla}^a Z_a$ si trova che l'equazione al secondo ordine per il modo armonico n , imponendo che nel caso della radiazione $\Delta_r \approx 0$ (perturbazioni di densità di materia su uno sfondo omogeneo di radiazione), vale:

$$\ddot{\Delta}_d^{(n)} + 2H\dot{\Delta}_d^{(n)} - \frac{1}{2}\rho_d\Delta_d^{(n)} = 0$$

che con opportuni cambi di variabile si risolve nel seguente modo:

$$\Delta_d^{(n)} = A^{(n)} \left(1 + \frac{3}{2}l\right) - \frac{1}{4}B^{(n)} \left[\left(1 + \frac{3}{2}l\right) \ln \left(\frac{\sqrt{l+1} + 1}{\sqrt{l+1} - 1} \right) - 3(l+1)^{\frac{1}{2}} \right]$$

con $A^{(n)}$ e $B^{(n)}$ costanti positive.

Una descrizione ancora più completa la si ottiene considerando l'interazione tra le due componenti nella forma dello scattering Thomson.

Capitolo 6

Conclusioni

L'analisi perturbativa, condotta attraverso l'approccio CGI, permette dunque di ricavare le principali equazioni della dinamica e l'evoluzione delle disomogeneità dell'universo, in termini di un formalismo ben definito che non dipende né dalle coordinate né dalla scelta di gauge. Nel corso della descrizione, è stato possibile caratterizzare alcuni casi semplici risolvendo le equazioni differenziali e discutendone il significato fisico.

Fondamentale anzitutto il legame tra la dinamica della materia cosmica e quella dei fluidi, che consente di fornire un'efficace decomposizione dello spazio-tempo attraverso cui si basa la teoria CGI. Infatti, la possibilità di individuare delle superfici ortogonali alle linee di flusso consente di definire i gradienti spaziali delle grandezze scalari e questi, come visto, sono cruciali nello svolgimento dell'analisi.

La principale differenza rispetto all'approccio di Bardeen sta nell'aver proposto delle variabili di diretta interpretazione fisica che potessero descrivere nel modo più chiaro possibile le perturbazioni, senza fare troppo uso di analisi armoniche (si veda 4.4) e senza dover invocare particolari quantità gauge-invarianti scalari, vettoriali o tensoriali per offrire una descrizione indipendente (come appunto nel caso di Bardeen). Tale approccio risulta dunque efficace e trasparente.

D'altra parte, è chiaro che esso presenti dei limiti: le soluzioni sono state ricavate sulla base di alcune approssimazioni (fluidi perfetti monocomponente, linearizzazione, onda lunga) e in casi particolarmente semplici (Einstein-de Sitter). Queste soluzioni sono affette dalla “*implied gauge*” (sezione 3.3) e necessitano dunque di opportune condizioni iniziali per poter essere determinate completamente. Inoltre, come già specificato in 5.6, è necessario allargare la descrizione ai fluidi multicomponente, includendo anche le interazioni mutue tra i costituenti ed abbandonando l'assunzione dei fluidi perfetti, per la quale vengono trascurati tutti i termini anisotropi.

Si apre dunque un panorama molto complesso in cui fornire una descrizione esaustiva richiede un grosso sforzo formale e probabilmente l'ausilio di ulteriori approssimazioni specifiche. Ciò nonostante, il metodo sin qui esposto costituisce una buona base per affrontare queste problematiche e per impostare le equazioni principali della dinamica perturbativa.

Riferimenti bibliografici

Nota: le fonti dalla [9] in poi sono fonti indirette riportate per approfondimenti sugli argomenti trattati.

- [1] G. F. R. Ellis e M. Bruni, *Phys. Rev. D* 40, 1804-1818 (1989)
- [2] G. F. R. Ellis, J. Hwang e M. Bruni, *Phys. Rev. D* 40, 1819-1826 (1989)
- [3] G. F. R. Ellis, R. Maartens e M. A. H. MacCallum, *Relativistic cosmology* (cap. 1-6, 9, 10) (2012)
- [4] G. F. R. Ellis, *Republication of: Relativistic cosmology* (30 gennaio 2009)
- [5] J. Stewart, *Advanced general relativity* (cap. 1) (1991)
- [6] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* 22, 1882-2006 (1980)
- [7] P. K. S Dunsby, M. Bruni e G. F. R. Ellis *Astrophys. J.* 395, 54-74 (1992)
- [8] P. Coles e F. Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure* (cap 10) (2002)
- [9] E. M. Lifshitz and I. M. Khalatnikov, *Adv. Phys.* 12, 185 (1963)
- [10] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* 147, 73 (1967)
- [11] S. W. Hawking, *Astrophys. J.* 145, 544 (1966)
- [12] D. W. Olson, *Phys. Rev. D* 14, 327 (1976)
- [13] J. Traschen, *Phys. Rev. D* 29, 1563 (1984)
- [14] J. Traschen, *Phys. Rev. D* 31, 283 (1985)
- [15] P. Tod, *Gen. Relativ. Gravit.* 20, 1297 (1988)
- [16] C. Hellaby, *Gen. Relativ. Gravit.* 20, 1203 (1988)
- [17] T. Futamase, *Phys. Rev. Lett.* , 61, 2175 (1988)

- [18] S. W. Goode, *Phys. Rev. D* 39, 2882 (1989)
- [19] J. M. Stewart and M. Walker, *Proc. R. Soc. London A*341 49 (1974)
- [20] J. Ehlers, *Abh. Mainz Akad. Wiss. Lit. (Math. Nat. Kl.)* II, 1 (1961)
- [21] E. M. Lifshitz, *J. Phys. (Moscow)* 10, 116 (1946)
- [22] J. Ehlers, *Abh. Mainz Akad. Wiss. Lit. (Math. Nat. Kl.)* II, 1 (1961)
- [23] G. F. R. Ellis, in *General Relativity and Cosmology*, proceedings of the XLVII Enrico Fermi Summer School, edited by R. K. Sachs (Academic, New York, 1971)
- [24] G. F. R. Ellis, in *Cargese Lectures in Physics*, edited by E. Schatzmann (Gordon and Breach, New York, 1973), Vol. 6, p. 1
- [25] J. Kristian and R. K. Sachs, *Astrophys. J.* 143, 379 (1966)
- [26] D. H. Lyth and M. Mukherjee, *Phys. Rev. D* 38, 485 (1988)
- [27] J. C. Jackson, *Proc. R. Soc. London A*328, 561 (1972)
- [28] D. H. Lyth, *Phys. Rev. D* 31, 1792 (1985)
- [29] J. M. Bardeen, P. Steinhardt, and M. Turner, *Phys. Rev. D* 28, 679 (1983)
- [30] J. A. Frieman and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* 30, 265 (1984)
- [31] K. Sakai, *Prog. Theor. Phys.* 41, 1461 (1969)
- [32] M. Madsen and G. F. R. Ellis, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 234, 67 (1988)
- [33] Kodama, H. & Sasaki, M. 1984, *Prog. Theor. Phys.*, 78,1

Ringraziamenti

Per completare al meglio l'elaborato non posso non includere una sezione a parte dedicata a tutte quelle persone che mi hanno supportato e mi sono state vicine durante questo lungo ed intenso percorso.

Voglio ringraziare innanzitutto il mio relatore, Sabino Matarrese, per i suoi consigli, la sua disponibilità e per avermi guidato in questa fase finale della laurea triennale.

Ringrazio poi l'università e tutti i docenti che hanno contribuito a farmi crescere in questo percorso.

Ringrazio i miei colleghi e amici fisici che hanno condiviso con me lezioni, esami, pomeriggi di studio e tutti quei momenti che hanno reso unici questi tre anni della mia vita.

Un grazie speciale va poi agli amici di una vita che, nonostante la distanza e gli impegni di carriera, saranno sempre parte di me.

Dedico poi la mia tesi a Mamma e Papà, che non hanno mai smesso di supportarmi e sono sempre stati dalla mia parte, anche quelle volte in cui pensavo di non farcela. La dedico poi in particolare alla Nonna Lucia che mi vuole un gran bene e che mi segue sempre da distante senza perdersi nulla, ai miei zii Massimo e Margherita e ai miei cuginetti Roberto e Vittoria.

Infine, dedico la mia tesi a Sophie. Se oggi sono quello che sono lo devo anche a lei, per questo le rivolgo un grande grazie per tutto quello che mi ha dato in quest'ultimo bellissimo anno.