



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Formulazione hamiltoniana della dinamica dei gas

Relatore
Prof. Antonio Ponno

Laureando
Giacomo Di Dio

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Ricerca di una Hamiltoniana	3
1.1	Prima formulazione hamiltoniana	3
1.2	Cambio di variabili	4
2	Studio attorno agli equilibri in assenza di potenziale esterno	6
2.1	Ricerca degli equilibri del sistema	6
2.2	Linearizzazione attorno agli equilibri	7
2.3	Applicazione della teoria delle perturbazioni	7
3	Studio attorno agli equilibri per potenziali funzione della densità	11
3.1	Ricerca degli equilibri del sistema	11
3.2	Applicazione della teoria delle perturbazioni	11
3.3	L'equazione di Korteweg-de Vries	13
4	Appendici	15
4.1	Appendice A: Equazione delle onde	15
4.2	Appendice B: Teoria delle perturbazioni	16
5	Bibliografia	19

Introduzione

Per il completamento del Corso di Laurea triennale in Fisica ho ritenuto opportuno approfondire lo studio dell'utilizzo dei sistemi hamiltoniani per descrivere i gas. Per questo, sono partito dalla descrizione di un gas tramite le equazioni di continuità e conservazione del momento al fine di giungere alle equazioni che regolano lo sviluppo della densità e della velocità nel gas.

Pendendo le mosse da queste equazioni nel **Capitolo 1** ho ricercato l'hamiltoniana più adatta a descrivere il gas, anche operando opportuni cambi di variabili, che comunque consentono di preservare sempre la struttura hamiltoniana del problema.

Nel **Capitolo 2** ho utilizzato la descrizione così derivata per studiare il sistema nel contesto di assenza di un potenziale esterno. In particolare, ho ricavato le equazioni del moto e le relative soluzioni attorno agli equilibri, prima tramite una semplice linearizzazione e, susseguentemente, applicando la teoria perturbativa.

Nel **Capitolo 3**, ho ampliato l'analisi considerando il caso di un potenziale dipendente dalla densità. Alla fine ho ricavato le equazioni di descrizione, che risultano essere della tipologia Korteweg-de Vries.

Nelle **Appendici** sono riportati alcuni aspetti dell'equazione delle onde e della teoria delle perturbazioni, utili per la miglior comprensione dell'esposizione.

1 Ricerca di una Hamiltoniana

1.1 Prima formulazione hamiltoniana

Assumiamo di voler studiare un generico gas ideale composto da N particelle e racchiuso in un dominio monodimensionale $D=[0; L]$. Per esso, possiamo definire punto per punto una densità $n(t, x)$ e una velocità $u(t, x)$, con la condizione che entrambe queste variabili di stato appartengano allo spazio $L_2(D)$ delle funzioni modulo quadro sommabili.

Inoltre, assumiamo come condizioni al contorno che, per ogni istante di tempo t , sia n che u siano uguali sul bordo del dominio D . Cioè

$$\begin{aligned} n(t, 0) &= n(t, L) \quad ; \\ u(t, 0) &= u(t, L) \quad . \end{aligned} \tag{1.1}$$

La situazione nel caso di n è presentata nella figura sottostante.

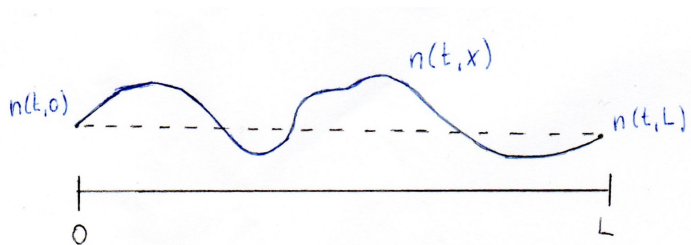


Figura 1:
Rappresentazione del modello unidimensionale per un gas.

Una descrizione minimale, ma efficace, del gas è ottenibile postulando che esso obbedisca alla leggi di continuità e di conservazione del momento totale. Ovvero¹

$$\begin{cases} n_t + (nu)_x = 0 \\ (nu)_t + (nu^2 + P)_x = 0 \end{cases} \quad , \tag{1.2}$$

ove la funzione $P[n]$ rappresenta la generica forza di stress applicata sul sistema, che in questo caso possiamo identificare come una pressione.

Introducendo il potenziale di velocità $\phi(t, x) = u_x$ e la funzione ausiliaria $\Phi(n) = \int^n \frac{P_s(s)}{s} ds$, una semplice operazione di integrazione della seconda equazione snellisce il sistema a

$$\begin{cases} n_t = -(n\phi_x)_x \\ \phi_t = -\frac{1}{2}(\phi_x)^2 - \Phi \end{cases} \quad , \tag{1.3}$$

la cui forma richiama già a vista quella delle equazioni di Hamilton.

¹I pedici denotano la differenziazione rispetto alla relativa variabile.

Dunque, definito $z = (n, \phi)^T$, ricerchiamo una Hamiltoniana $H[n, \phi]$ tale che si abbia

$$z_t = \mathbb{J} \nabla_z H \quad , \quad (1.4)$$

ove \mathbb{J} è l'unità simplettica standard 2×2

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (1.5)$$

In definitiva, dobbiamo avere

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \phi} &= -(n\phi_x)_x \quad , \\ -\frac{\delta H}{\delta n} &= -\frac{1}{2}(\phi_x)^2 - \Phi \quad . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Effettuiamo un tentativo con il funzionale

$$H[n, \phi] = \int_D \frac{1}{2} n \phi_x^2 + V(n) \, dx \quad . \quad (1.7)$$

Esso è composto da un contributo di natura cinetica e in un potenziale $V(n)$ la cui forma deve dipendere direttamente da quella della pressione P .

La variazione prima, definita come

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_D \frac{\delta H}{\delta n} \delta n + \frac{\delta H}{\delta \phi} \delta \phi \, dx \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} H[n + \epsilon \delta n, \phi + \epsilon \delta \phi] \right|_{\epsilon=0} \quad , \end{aligned} \quad (1.8)$$

nel caso in specie vale

$$\begin{aligned} \delta H &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_D \frac{1}{2} (n + \epsilon \delta n) (\phi_x + \epsilon \delta \phi_x)^2 + V(n + \epsilon \delta n) \, dx \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_D \left(\frac{1}{2} \phi_x^2 + V_n \right) \delta n - (n\phi_x)_x \delta \phi \, dx \quad , \end{aligned} \quad (1.9)$$

per le opportune condizioni al bordo (1.1).

Da un veloce raffronto di (1.9) con (1.6) riscontriamo che H costituisce l'Hamiltoniana del sistema (1.3) per

$$V_n = \Phi \quad . \quad (1.10)$$

E' utile anche notare che conseguentemente la forma del potenziale V risulta essere

$$V(n) = \int^n \Phi(r) dr = \int^n dr \int^r \frac{P_s(s)}{s} \, ds \quad (1.11)$$

1.2 Cambio di variabili

Una volta scoperta la struttura hamiltoniana su cui soggiace il sistema, può essere interessante ricondursi alle variabili di partenza $n(t, x)$ e $u(t, x)$.

Preliminarmente a questa operazione, è opportuno ricordare che un generico cambio di variabili preserva sempre la struttura hamiltoniana del problema. In generale, infatti, le parentesi di Poisson sono caratterizzate da proprietà indipendenti dalle coordinate.

Effettuiamo, perciò, in tranquillità il cambio di variabili

$$f : (n, u)^T \rightarrow (n, \phi)^T = f(n, u)^T = (n, \int u(t, x) dx)^T \quad . \quad (1.12)$$

L'Hamiltoniana H e l'unità simplettica \mathbb{J} sono trasformati in

$$\tilde{H}[n, u] = H[n, \phi] \circ f^{-1} = \int_D \frac{1}{2}nu^2 + V(n) dx \quad ; \quad (1.13)$$

$$\tilde{\mathbb{J}} = \frac{\partial(n, u)}{\partial(n, \phi)} J \frac{\partial(n, u)^T}{\partial(n, \phi)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \partial x \quad . \quad (1.14)$$

Non servendoci più nel proseguo della coppia di variabili (b, u) con abuso di notazione indicheremo da questo momento in poi \tilde{H} e $\tilde{\mathbb{J}}$ rispettivamente come H e \mathbb{J} .

Date due qualsiasi funzioni $F, G \in L_2(D)$ il nuovo tensore \mathbb{J} produce le parentesi di Poisson

$$\{F, G\} = \langle \nabla F, \mathbb{J} \nabla G \rangle = - \int_D \frac{\delta F}{\delta n} \left(\frac{\delta G}{\delta u} \right)_x + \frac{\delta F}{\delta u} \left(\frac{\delta G}{\delta n} \right)_x \quad . \quad (1.15)$$

che come atteso soddisfano tutte le proprietà che contraddistinguono tali operatori. In particolare l'antisimmetria è garantita dalla derivata ∂x , in associazione con le condizioni a contorno (1.1).

Gli invarianti di Casimir associati a \mathbb{J} , ovvero quelle funzioni che sono costanti del moto per qualsiasi Hamiltoniana H , sono date risolvendo $\mathbb{J} \nabla C = 0$ e valgono

$$C = a(t) \int_D n(t, x) dx + b(t) \int_D u(t, x) dx \quad . \quad (1.16)$$

Quindi tutte le combinazioni lineari degli integrali $\int_D n(t, x) dx$ e $\int_D u(t, x) dx$, con eventualmente coefficienti dipendenti dal tempo, sono costanti del moto.////// A loro volta, le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} n_t = -(nu)_x \\ u_t = -(\frac{1}{2}u^2 + V_n)_x \end{cases} \quad . \quad (1.17)$$

La natura del sistema 1.17 può essere rivelata scrivendolo in notazione matriciale.

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} n \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & n \\ V_{nn} & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ u \end{bmatrix}_x = 0 \quad . \quad (1.18)$$

Questo è un sistema iperbolico quasi-lineare. La non linearità di (1.18) è dovuta alla presenza di n e u nella matrice che moltiplica la derivata spaziale e sarà un fattore da tenere in considerazione nel proseguo.

2 Studio attorno agli equilibri in assenza di potenziale esterno

Una volta estrapolata la formulazione hamiltoniana che meglio caratterizza il gas in questione, procediamo col discutere la forma delle soluzioni delle equazioni del moto che si presentano intorno agli equilibri del sistema per diversi tipi di potenziale $V(n)$. Cominciamo considerando cosa accade in assenza di tale potenziale. Un tipico gas ideale in assenza di un potenziale esterno può essere modellizzato assumendo che la pressione valga punto per punto

$$P(n) = nT \quad , \quad (2.1)$$

ove T rappresenta una sorta di temperatura del sistema.

Questa forma, infatti, richiama già a vista l'equazione di stato dei gas perfetti $PV = NKT$, ma accomoda anche il caso in cui la densità di molecole non sia costante nello spazio.

Tramite l'uso di (1.11), il corrispondente potenziale risulta valere

$$V(n) = nT(\ln(n) - 1) \quad , \quad (2.2)$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\begin{cases} n_t = -(nu)_x \\ u_t = -(\frac{1}{2}u^2 + T \ln(n))_x \end{cases} \quad . \quad (2.3)$$

2.1 Ricerca degli equilibri del sistema

In primis, ricerchiamo gli equilibri che caratterizzano il sistema. Richiedendo che le equazioni di Hamilton siano nulle si ottiene

$$\begin{cases} nu = c_1 \\ \frac{u^2}{2} + T \ln(n) = c_2 \end{cases} \quad ,$$

ove c_1 e c_2 sono due costanti che dipendono dalle condizioni iniziali del gas.

Appare evidente che le soluzioni siano tutte e sole le coppie di funzioni costanti nel tempo e nello spazio $(n, u) = (\bar{n}, \bar{u})$. In particolare, definendo $\tilde{c} = c_1 e^{-\frac{c_2}{T}}$ e sostituendo nella seconda equazione la forma della densità che si ricava dalla prima, si ottiene la seguente forma per u al variare di \tilde{c}

$$ue^{-\frac{u^2}{2T}} = \tilde{c} \quad .$$

Una visualizzazione di (2.1) è offerta nella figura sottostante.

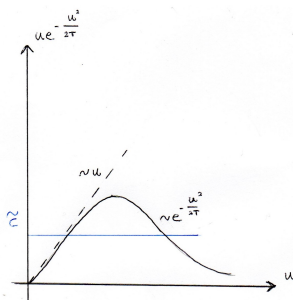


Figura 2:
Grafico delle possibili scelte di \bar{u} al variare di \tilde{c}

2.2 Linearizzazione attorno agli equilibri

A questo punto, possiamo procedere linearizzando il sistema intorno agli equilibri $\bar{z} = (\bar{n}, \bar{u})$.

Per fare ciò, calcoliamo innanzitutto la variazione seconda dell'Hamiltoniana, che risulta essere pari a

$$\delta^2 H = \int_D \frac{T}{n} \delta n^2 + 2u \delta n \delta u + n \delta u^2 \, dx \quad , \quad (2.4)$$

o, in forma matriciale,

$$\delta^2 H = \int_D [n, u] \begin{bmatrix} \frac{T}{n} & u \\ u & n \end{bmatrix} [n, u] \, dx \quad ,$$

ove la matrice 2×2 \mathbb{H} all'interno dell'integrale rappresenta l'hessiana dell'Hamiltoniana.

A questo punto, utilizzando l'usuale notazione $z = (n, u)$ e $\bar{z} = (\bar{n}, \bar{u})$, il sistema linearizzato attorno a un generico \bar{z} è

$$z_t = \mathbb{H}(\bar{z})(z - \bar{z}) \quad , \quad (2.5)$$

o, in forma estesa,

$$\begin{cases} n_t = -(\bar{u}n + \bar{n}u)_x \\ u_t = -(\frac{T}{\bar{n}}n + \bar{u}u)_x \end{cases} \quad . \quad (2.6)$$

Possiamo quindi approcciarci allo studio del sistema attorno ai suddetti equilibri. A tale scopo, deriviamo temporalmente le due equazioni che compongono (2.6) ottenendo

$$\begin{cases} n_{tt} = (T + \bar{u}^2)n_{xx} + 2\bar{n}\bar{u}u_{xx} \\ u_{tt} = (T + \bar{u}^2)u_{xx} + 2\frac{T}{\bar{n}}\bar{u}n_{xx} \end{cases} \quad , \quad (2.7)$$

che, nel caso $\bar{u} = 0$, si riducono a

$$\begin{cases} n_{tt} = Tn_{xx} \\ u_{tt} = Tu_{xx} \end{cases} \quad . \quad (2.8)$$

Queste sono le ben note equazioni delle onde. In particolare, esse descrivono due onde che si muovono con velocità $c = \sqrt{T}$. Una trattazione più particolareggiata di tali equazioni è riportata nella **Appendice A**.

Nel proseguo ci limiteremo a studiare solo il caso \bar{u} , ben consci però questa scelta non fa perdere in generalità la trattazione. Infatti, dato in partenza un qualsiasi altro valore di \bar{u} , possiamo ricondurci a $\bar{u} = 0$ tramite il cambio della coordinata spaziale $x' = x - \bar{u}t$, che muta le equazioni (2.7) in quelle (2.8).

Fisicamente, si tratta semplicemente di applicare l'invarianza galileiana portandosi nel sistema di riferimento in quiete rispetto al gas.

2.3 Applicazione della teoria delle perturbazioni

Siccome la linearizzazione ha condotto a equazioni delle onde, possiamo aspettarci che un'analisi più fine conduca a equazioni d'onda non lineari. A tal fine facciamo riferimento alla teoria della perturbazioni, di cui i principali teoremi, risultati e definizioni sono riassunti nell'**Appendice B**.

Poniamo nuovamente l'attenzione su equilibri del tipo $\bar{z} = (\bar{n}, \bar{u})$.

Riscriviamo le variabili n, u vicino a \bar{z} come

$$\begin{aligned} n &= \bar{n} + \eta \\ u &= \bar{u} + \nu \end{aligned} \quad (2.9)$$

e ricalcoliamo l'Hamiltoniana del gas (1.13) in funzione delle nuove variabili η e ν ottenendo

$$H[\eta, \nu] = \int_D \frac{(\bar{n} + \eta)(\bar{u} + \nu)^2}{2} + T(\bar{n} + \eta)(\ln(\bar{n} + \eta) - 1) \, dx \quad .$$

Espandendo $\ln(\bar{n} + \eta)$ in serie di Taylor attorno a \bar{n} e ordinando i termini presenti nell'Hamiltoniana in base al grado in η e ν abbiamo

$$\begin{aligned} H &= \int_D \frac{\bar{n}\bar{u}^2}{2} + T\bar{n} \ln\left(\frac{\bar{n}}{e}\right) \, dx + \int_D \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + T \ln(\bar{n})\eta + \bar{n}\bar{u}\nu\right) \, dx \\ &+ \int_D \frac{T}{2\bar{n}}\eta^2 + \bar{u}\eta\nu + \frac{\bar{n}}{2}\nu^2 \, dx + \int_D -\frac{T}{6\bar{n}^2}\eta^3 + \frac{\eta\nu^2}{2} \, dx + O(4) \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Siccome analizzeremo solo equilibri in cui il gas è in quiete rispetto al sistema di riferimento, ovvero in cui si abbia $\bar{u} = 0$, possiamo ridurre ulteriormente (2.10) a

$$H = \int_D T\bar{n} \ln\left(\frac{\bar{n}}{e}\right) \, dx + \int_D T \ln(\bar{n})\eta \, dx + \int_D \frac{T}{2\bar{n}}\eta^2 + \frac{\bar{n}}{2}\nu^2 \, dx + \int_D -\frac{T}{6\bar{n}^2}\eta^3 + \frac{\eta\nu^2}{2} \, dx + O(4) \quad . \quad (2.11)$$

Soffermiamoci ad analizzare uno ad uno i vari termini che contribuiscono quest'ultima Hamiltoniana e il loro ruolo nelle equazioni del moto.

- $H_0 = \int_D T\bar{n} \ln\left(\frac{\bar{n}}{e}\right) \, dx$: è una costante, pertanto non porta contributo alla dinamica del sistema ed è eliminabile;
- $H_1 = \int_D T \ln(\bar{n})\eta \, dx$: anch'esso non partecipa alle equazioni di Hamilton e si può sopprimere. Infatti, una volta differenziato in η , esso diviene una costante e la successiva derivata rispetto allo spazio dovuta al tensore di Poisson \mathbb{J} fornisce risultato nullo;
- $H_2 = \int_D \frac{T}{2\bar{n}}\eta^2 + \frac{\bar{n}}{2}\nu^2 \, dx$: è il primo termine che influisce realmente nell'evoluzione temporale dello stato del gas e, come si vedrà in seguito, conduce alle equazioni delle onde;
- $H_3 = \int_D -\frac{T}{6\bar{n}^2}\eta^3 + \frac{\eta\nu^2}{2} \, dx$: anch'esso ha un ruolo nelle equazioni del moto fornendo i termini non lineari.

Pertanto, eliminando i termini che non danno contributo all'evoluzione del sistema, l'Hamiltoniana si semplifica a

$$H = H_2 + H_3 = \int_D \frac{T}{2\bar{n}}\eta^2 + \frac{\bar{n}}{2}\nu^2 \, dx + \int_D -\frac{T}{6\bar{n}^2}\eta^3 + \frac{\eta\nu^2}{2} \, dx \quad . \quad (2.12)$$

Per poter applicare la teoria delle perturbazioni inseriamo un parametro λ che poi fisseremo a 1 ottenendo

$$H = H_2 + \lambda H_3 + O(4) \quad (2.13)$$

e potendo in questo modo trattare H_3 come una perturbazione dell'Hamiltoniana imperturbata H_2 .

Ricerchiamo, dunque, la forma normale al primo ordine di H , che, come osservato in **Appendice B**, sarà

$$H = H_2 + \langle H_3 \rangle_{H_2} + O(4) \quad . \quad (2.14)$$

Ricordiamo che per poter applicare i teoremi presentati in **Appendice B** è necessario che si conosca il flusso dell'Hamiltoniana imperturbata e che esso sia limitato in D .

Pertanto cominciamo con l'analizzare la dinamica descritta da H_2 .

Le equazioni del moto che ne derivano sono

$$\begin{cases} \eta_t = -\bar{n}\nu_x \\ \nu_t = -\frac{T}{\bar{n}}\eta_x \end{cases} \quad . \quad (2.15)$$

Come ci si poteva aspettare, tale sistema si riconduce a quello di 2.6 ponendo $\bar{u} = 0$. Ritroviamo dunque le stesse equazioni delle onde di (2.8) che si propagano con velocità $c = \sqrt{T}$, ovvero

$$\begin{cases} \eta_{tt} = T\eta_{xx} \\ \nu_{tt} = T\nu_{xx} \end{cases} \quad . \quad (2.16)$$

In maniera analoga a quanto visto in **Appendice A** è utile definire le nuove variabili

$$w^{s,d} = \sqrt{\frac{c}{2\bar{n}}}(\eta \mp \frac{\bar{n}}{c}\nu) \quad (2.17)$$

Imponiamo, inoltre, che $w^{s,d}$ siano periodiche. Risulta naturale fissare il periodo $\tau = \frac{L}{c}$.

Osserviamo, inoltre, che, essendo $w^{s,d}$ delle combinazioni lineari di η e ν , i loro integrali nel dominio sono costanti del moto, essendo integrali di Casimir come di può evincere da (1.16).

Rispetto a queste due nuove variabili le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} w_t^s = cw_x^s \\ w_t^d = -cw_x^d \end{cases} \quad (2.18)$$

e il tensore di Poisson diventa

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \partial x \quad . \quad (2.19)$$

A loro volta, le Hamiltoniane H_2 e H_3 diventano rispettivamente

$$H_2[w^s, w^d] = \int_D c \frac{(w^s)^2 + (w^d)^2}{2} dx \quad (2.20)$$

$$H_3[w^s, w^d] = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{c}{2\bar{n}}} \int_D w^{s^3} - 3w^{s^2}w^d - 3w^s w^{d^2} + w^{d^3} dx \quad (2.21)$$

In particolare, notiamo che H_2 ha, come atteso, la stessa forma descritta in **Appendice A**, tipica dell'equazione delle onde.

Non resta, dunque, che da calcolare $\langle H_3 \rangle_{H_2}$. Essendo il flusso di H_2 $\frac{L}{c}$ -periodico, la media temporale si riduce a

$$\langle H_3 \rangle_{H_2} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{c}{2\bar{n}}} \frac{c}{L} \int_0^{\frac{L}{c}} \int_D w^{s^3} - 3w^{s^2}w^d - 3w^s w^{d^2} + w^{d^3} dx ds \quad . \quad (2.22)$$

e si calcola valere

$$\langle H_3 \rangle_{H_2} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{c}{2\bar{n}}} \int_D w^{s^3} + w^{d^3} dx \quad . \quad (2.23)$$

In definitiva, l'effetto della media temporale è stato quello di eliminare i termini misti. Infatti, per i termini che coinvolgono singolarmente w^s o w^d si trova facilmente che $\{H_2, w^{(s,d)^k}\} = 0$ per ogni $k \geq 1$ e sono, quindi, costanti del moto. Pertanto la loro media temporale coincide con loro stessi moltiplicati per il periodo.

Dunque, non considerando i termini di ordine 4 o superiore, l'Hamiltoniana in forma normale è

$$H = \int_D c \frac{(w^s)^2 + (w^d)^2}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{c}{2\bar{n}}} (w^{s^3} + w^{d^3}) dx \quad . \quad (2.24)$$

Essa risulta essere somma di due componenti indipendenti $K_{(s,d)} = \int_D c \frac{w^{(s,d)^2}}{2} + \sqrt{\frac{c}{18\bar{n}}} w^{(s,d)^3} dx$. Per la struttura del tensore di Poisson (2.19), anche la dinamica che ne consegue è scissa nelle due dinamiche non interagenti di w^s e w^d . Quindi, l'effetto totale del passo perturbativo è stato quello di semplificare un moto complesso, in cui gli sviluppi temporali delle due variabili si intrecciano tra di loro, in uno in cui le dinamiche di w^s e w^d sono indipendenti.

Infatti, le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\begin{cases} w_t^s = cw_x^s + \sqrt{\frac{c}{2\bar{n}}} w^s w_x^s \\ w_t^d = -cw_x^d - \sqrt{\frac{c}{2\bar{n}}} w^d w_x^d \end{cases} \quad , \quad (2.25)$$

che, come atteso, corrispondono a equazioni d'onda non lineari.

3 Studio attorno agli equilibri per potenziali funzione della densità

Consideriamo, ora, il caso in cui al gas venga applicato un potenziale esterno, funzione della densità n , e debolmente dipendente anche dalla derivata spaziale n_x . Possiamo riassumere questa ipotesi assumendo un potenziale $V(n, \epsilon^{\frac{1}{2}}n_x)$, ove ϵ è un piccolo parametro.

L'Hamiltoniana avrà la forma

$$H = \int_D \frac{nu^2}{2} + V(n, \epsilon^{\frac{1}{2}}n_x) dx \quad (3.1)$$

e la sua variazione prima (ricordando che in generale vale che $\frac{\delta V}{\delta n}(n, n_x) = V_n - \frac{d}{dx} V_{n_x}$) è

$$\delta H = \int_D (nu) \delta u + \left(\frac{u^2}{2} + V_n - \epsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} V_{n_x} \right) \delta n dx \quad (3.2)$$

Le corrispettive equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} n_t = -(nu)_x \\ u_t = -\left(\frac{u^2}{2} + V_n - \epsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} V_{n_x} \right)_x \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1 Ricerca degli equilibri del sistema

La richiesta di annullare le equazioni (3.3) conduce al sistema

$$\begin{cases} nu = c_1 \\ \frac{u^2}{2} + V_n - \epsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} V_{n_x} = c_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

ove c_1, c_2 sono delle costanti.

Esso è già a vista più complicato di quello affrontato nella **Paragrafo 2.3**. La forma generale degli equilibri, infatti, è ottenibile solo risolvendo una equazione differenziale.

Quello che però interessa ai fini di questa trattazione è che le coppie di costanti (\bar{n}, \bar{u}) siano ancora equilibri. Infatti, è banale osservare come esse siano soluzione del sistema soprastante.

In particolare, soffermiamoci un'altra volta a studiare la dinamica attorno all'equilibrio $(\bar{n}, 0)$.

3.2 Applicazione della teoria delle perturbazioni

In analogia con quanto fatto nella **Paragrafo 2.3** prima di effettuare il passo perturbativo, riscriviamo n e u in prossimità di $(\bar{n}, 0)$. In questo caso, postuliamo anche che esse dipendano debolmente da η e ν , ovvero che si abbia

$$\begin{aligned} n &= \bar{n} + \epsilon \eta \quad , \\ n_x &= \epsilon \eta_x \quad , \\ u &= \epsilon \nu \quad . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Espandendo $V(n, \epsilon^{\frac{1}{2}}n_x)$ in serie di Taylor attorno a $(\bar{n}, 0)$ e ordinando i termini dell'Hamiltoniana derivante in base al grado delle potenze di ϵ otteniamo²

$$H = \int_D \bar{V} dx + \epsilon \int_D \bar{V}_n \eta dx + \epsilon^2 \int_D \frac{\bar{V}_{nn}}{2} \eta^2 + \frac{\bar{n}}{2} \nu^2 dx + \epsilon^3 \int_D \frac{\bar{V}_{n_x n_x}}{2} \eta_x^2 + \frac{\bar{V}_{nnn}}{6} \eta^3 + \frac{\eta \nu^2}{2} dx + O(\epsilon^4). \quad (3.6)$$

²Per snellire la notazione, una barra sopra una qualsiasi quantità indica che essa è stata calcolata nel punto di equilibrio prescelto $(\bar{n}, 0)$. Ad esempio $\bar{V} = V(\bar{n}, 0)$

Nel calcolo dell'Hamiltoniana soprastante si è tenuto conto che, per le condizioni al bordo (1.1) l'integrale $\int_D \eta^k \eta_x dx$ è nullo per ogni k (in particolare anche per $k = 0$).

Analizziamo uno a uno i termini che compongono l'Hamiltoniana (3.6):

- $H_0 = \int_D \overline{V} dx$: è una costante, pertanto influisce nell'evoluzione del sistema ed è eliminabile;
- $H_1 = \int_D \overline{V_n} \eta dx$: contenendo solo termini di primo grado in η e ν , per quanto visto nel **Paragrafo 3.3** non opera ai fini della dinamica totale;
- $H_2 = \int_D \frac{\overline{V_{nn}}}{2} \eta^2 + \frac{\overline{n}}{2} \nu^2 dx$: è il termine che genera l'equazione delle onde;
- $H_3 = \int_D \frac{\overline{V_{n_x n_x}}}{2} \eta_x^2 + \frac{\overline{V_{nnn}}}{6} \eta^3 + \frac{\eta \nu^2}{2} dx$: fornisce i contributi non lineari che si aggiungono all'equazione delle onde.

Dunque, possiamo togliere i termini H_0 e H_1 e riscalarlo il tutto di ϵ^{-2} (che fisicamente corrisponde a una contrazione dei tempi), ottenendo

$$H[\eta, \nu] = \int_D \frac{\overline{V_{nn}}}{2} \eta^2 + \frac{\overline{n}}{2} \nu^2 dx + \epsilon \int_D \frac{\overline{V_{n_x n_x}}}{2} \eta_x^2 + \frac{\overline{V_{nnn}}}{6} \eta^3 + \frac{\eta \nu^2}{2} dx + O(\epsilon^2) . \quad (3.7)$$

Interessiamoci, innanzitutto, delle equazioni generate da H_2 . Anche in questo caso siamo in presenza di onde

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \overline{n V_{nn}} \eta_{xx} \\ \nu_{tt} = \overline{n V_{nn}} \nu_{xx} \end{cases} , \quad (3.8)$$

che si propagano con velocità $\sqrt{\overline{n V_{nn}}}$. E' da notare che, come ci si poteva aspettare, per il caso in assenza di potenziale esterno si ha proprio che $\sqrt{\overline{n V_{nn}}} = \sqrt{T}$.

Passiamo, dunque, alle usuali variabili $\frac{L}{c}$ -periodiche

$$w^{s,d} = \sqrt{\frac{c}{2\overline{n}}} (\eta \mp \frac{\overline{n}}{c} \nu) . \quad (3.9)$$

che conducono al tensore di Poisson (2.19) e trasformano le Hamiltoniane H_2 e H_3 rispettivamente in

$$H_2[w^s, w^d] = \int_D c \frac{(w^s)^2 + (w^d)^2}{2} dx , \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} H_3[w^s, w^d] = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\overline{n}}{2c}} \int_D \frac{\overline{V_{n_x n_x}}}{2} \sqrt{\frac{\overline{n}}{2c}} (w_x^s + w_x^d)^2 + \frac{\overline{V_{nnn}} \overline{n}^2 + 3c^2}{6\overline{n}c} (w^{s^3} + w^{d^3}) + \\ & + \frac{\overline{V_{nnn}} \overline{n}^2 - c^2}{2c} (w^{s^2} w^d + w^s w^{d^2}) dx . \end{aligned} \quad (3.11)$$

A questo punto, cerchiamo una forma normale al primo ordine per H . Per quanto già visto nella **Paragrafo 2.3** e riportato in **Appendice B** abbiamo che la forma normale è

$$H = H_2 + \langle H_3 \rangle_{H_2} , \quad (3.12)$$

con

$$\langle H_3 \rangle_{H_2} = \frac{c}{L} \int_0^{\frac{L}{c}} \int_D H_3 \circ \Phi_{H_2}^s dx ds . \quad (3.13)$$

La conseguenza della media temporale è nuovamente quello di eliminare i termini misti, scindendo le dinamiche delle variabili, rimanendo con un'Hamiltoniana somma di due termini indipendenti $K_{w^{(s,d)}}$. Infatti, la media temporale vale

$$\langle H_3 \rangle_{H_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{n}}{2c}} \int_D \frac{\overline{V_{n_x n_x}}}{2} \sqrt{\frac{\bar{n}}{2c}} (w_x^{s^2} + w_x^{d^2}) + \frac{\overline{V_{nnn}} \bar{n}^2 + 3c^2}{6\bar{n}c} (w^{s^3} + w^{d^3}) \, dx \quad . \quad (3.14)$$

Le equazioni del moto susseguenti risultano essere

$$\begin{cases} w_t^s = cw_x^s + \frac{\overline{V_{n_x n_x}} \bar{n}}{4c} w_{xxx}^s + \sqrt{\frac{\bar{n}}{2c} \frac{\overline{V_{nnn}} \bar{n}^2 + 3c^2}{2\bar{n}c}} w^s w_x^s \\ w_t^d = -cw_x^d - \frac{\overline{V_{n_x n_x}} \bar{n}}{4c} w_{xxx}^d - \sqrt{\frac{\bar{n}}{2c} \frac{\overline{V_{nnn}} \bar{n}^2 + 3c^2}{2\bar{n}c}} w^d w_x^d \end{cases} \quad . \quad (3.15)$$

Il contributo dovuto alla perturbazione del tipo $A w_{xxx}^{(s,d)} + B w^{(s,d)} w_x^{(s,d)}$ è la famosa equazione di Korteweg-de Vries (KdV), di cui di seguito è riportato un approfondimento.

3.3 L'equazione di Korteweg-de Vries

Introdotta da Joseph Boussinesq nel 1877, l'equazione di Korteweg-de Vries (KdV) per un campo scalare $w(t,x)$ definito sull'insieme $\mathbb{R} \times D$ (sia L la lunghezza di D),

$$w_t = Aw_{xxx} + Bww_x \quad (3.16)$$

fu riscoperta da Diderik Korteweg e Gustav de Vries nel 1895, nell'ambito dello studio delle onde marine in acqua poco profonda.

Essa ammette come integrale primo il funzionale

$$H[w] = \int_D A \frac{w_x^2}{2} + B \frac{w^3}{6} \, dx \quad (3.17)$$

e da esso la KdV può essere ricavata come

$$w_t = \partial_x \frac{\delta H}{\delta w} \quad . \quad (3.18)$$

Essendo l'operatore ∂_x antisimmetrico, allora questo può essere considerato un tensore di Poisson. Di conseguenza, l'equazione (3.18) è di natura hamiltoniana.

Proprio questo tipo di derivazione è stata quella effettuata nel **Paragrafo 3.2**: il tensore di Poisson \mathbb{J} (2.19) consiste in una derivata parziale in x e la media temporale $\langle H_3 \rangle_{H_2}$ (3.14) ha forma analoga a quella di $H[w]$ per ognuna delle due variabili $w^{(s,d)}$.

Questa natura hamiltoniana è messa maggiormente in luce rappresentando la funzione w in serie di Fourier $w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{inx}$. Ricordiamo che vale $H_{u_n} = \int_D \frac{\delta H}{\delta u} u_{u_n} \, dx = \int_D \frac{\delta H}{\delta u} e^{inx} \, dx$, da cui si ottiene tramite (3.18) che $u_{n,t} = \frac{in}{L} F_{u_{-n}}$. Allora posto $q_n = \frac{w_n}{n}$, $p_n = w_{-n}$ e $K = \frac{i}{L} H$ ricaviamo

$$\begin{cases} q_{n,t} = K_{p_n} \\ p_{n,t} = -K_{q_n} \end{cases} \quad , \quad (3.19)$$

ovvero le usuali equazioni di Hamilton.

In realtà l'equazione di Korteweg-de Vries ammette anche una seconda formulazione hamiltoniana. Definiamo, perciò, l'operatore $\mathcal{D} = \partial_x^3 + \frac{B}{8A}(2w\partial_x + w_x)$ e il funzionale (e integrale del moto) $S[w] = \int_D \frac{Au^2}{2} dx$. Abbiamo, allora,

$$w_t = \mathcal{D} \frac{\delta S}{\delta w} . \quad (3.20)$$

Proprio per questa duplice natura hamiltoniana, la KdV ammette infinite costanti del moto, che si possono ricavare in maniera ricorsiva.

4 Appendici

4.1 Appendice A: Equazione delle onde

Consideriamo l'equazione delle onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad (4.1)$$

da cui discende

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , \quad (4.2)$$

ove il campo scalare $u(t, x)$ può essere definito in un dominio spaziale D qualsiasi. Per conformità con quanto presentato precedentemente assumiamo che sia un intervallo chiuso $D = [0; L]$ e che u abbia un valore uguale agli estremi. Moltiplicando entrambi i membri di (4.2) per u_t e integrandoli in D otteniamo

$$0 = \int_D u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = \frac{d}{dt} \int_D \frac{u_t^2 + c^2 u_x^2}{2} dx \quad , \quad (4.3)$$

in quanto tutti i termini di bordo che compaiono nello svolgimento dell'integrale sono nulli per le condizioni al bordo poste.

Pertanto la quantità

$$H[u, u_t] = \int_D \frac{u_t^2 + (cu_x)^2}{2} dx \quad (4.4)$$

è una costante del moto.

Per giungere ad una formulazione hamiltoniana del problema riconduciamo l'equazione (4.3) ad un sistema del primo ordine. Posto $p = u_t$, abbiamo

$$\begin{cases} u_t = p \\ p_t = c^2 u_{xx} \end{cases} \quad , \quad (4.5)$$

e H diventa

$$H[u, p] = \int_D \frac{p^2 + (cu_x)^2}{2} dx \quad . \quad (4.6)$$

Detto $z = (u, p)$, già ad un primo sguardo, appare evidente che abbiamo

$$z_t = \mathbb{J} \nabla_z H \quad ,$$

ove \mathbb{J} è l'unità simplettica standard 2×2 .

Dunque H rappresenta effettivamente l'Hamiltoniana dell'equazione delle onde.

A questo punto effettuiamo un cambio di variabile. Definiamo, pertanto, le variabili

$$w^{s,d} = \frac{p \pm cu_x}{\sqrt{2c}} \quad .$$

L'Hamiltoniana e le equazioni del moto diventano rispettivamente

$$H = \int_D c \frac{(w^s)^2 + (w^d)^2}{2} dx \quad (4.7)$$

e

$$\begin{cases} w_t^s = cw_x^s \\ w_t^d = -cw_x^d \end{cases} . \quad (4.8)$$

Il tensore di Poisson, invece, si trasforma in

$$\tilde{\mathbb{J}} = \frac{\partial(w^s, w^d)}{\partial(u_x, p)} J \frac{\partial(w^s, w^d)^T}{\partial(u_x, p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \partial x \quad . \quad (4.9)$$

Quest'ultimo, per ogni coppia di funzioni $F(w^s, w^d)$ e $G(w^s, w^d)$, produce parentesi di Poisson date da

$$\{F, G\} = \langle \nabla F, \tilde{\mathbb{J}} \nabla G \rangle = \int_D \frac{\delta F}{\delta w^s} \left(\frac{\delta G}{\delta w^s} \right)_x - \frac{\delta F}{\delta w^d} \left(\frac{\delta G}{\delta w^d} \right)_x dx \quad . \quad (4.10)$$

L'utilità di questa nuova formulazione è dovuta alla constatazione che, rispetto a queste due variabili, la dinamica totale del sistema risulta scissa in due dinamiche indipendenti tra loro: quelle di w^s e w^d .

Inoltre è opportuno far notare che, dalla particolare forma delle equazioni (4.8), discende che le due funzioni $w^{s,d}$ abbiano la peculiare forma

$$w^{s,d}(t, x) = w(0, x \pm ct) \quad (4.11)$$

e dunque corrispondano alla traslazione rispettivamente sinistra e destra del profilo iniziale con velocità c .

4.2 Appendice B: Teoria delle perturbazioni

Supponiamo di voler studiare un sistema descritto dall'Hamiltoniana

$$H_\lambda = h + \lambda P_1 + \dots + \lambda^n P_n + R_{n+1} \quad , \quad (4.12)$$

ove λ è un piccolo parametro e R_{n+1} sia di ordine $\lambda+1$ rispetto a h .

Una Hamiltoniana di tale forma è detta quasi integrabile.

Lo scopo precipuo è quella di trovare un cambio di coordinate canonico³ \mathcal{C}_λ , la cui inversa porti H_λ in forma normale rispetto a h fino all'ordine n . Cioè, richiediamo che la trasformata

$$\tilde{H}_\lambda = H_\lambda \circ \mathcal{C}_\lambda^{-1} = h + \lambda S_1 + \dots + \lambda^n S_n + R_{n+1} \quad , \quad (4.13)$$

sia tale che $\{S_j, h\} = 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$.

Imponiamo, inoltre, che \mathcal{C}_λ sia prossima all'identità sino all'ordine λ , cioè che $\mathcal{C}_\lambda: x \rightarrow y = \mathcal{C}_\lambda(x) = x + O(\lambda)$.

³La richiesta di canonicità non è necessaria ai fini di rimuovere la perturbazione, ma consente di non preoccuparsi di come il cambio di variabili possa modificare la struttura di Poisson

A tale fine postuliamo che H_λ soddisfi tre requisiti:

1. H_λ abbia la forma (4.12) per ogni x appartenente al dominio D ;
2. l'Hamiltoniana imperturbata h sia integrabile in D ;
3. il flusso $\Phi_h^t(x)$ deve essere limitato in D uniformemente nel tempo, ovvero deve esistere una costante C tale che $\|\Phi_h^t\| < C$ per ogni x del dominio.

L'idea dietro alla ricerca di \mathcal{C}_λ è quella di costruirla attraverso n Hamiltoniane generatrici G_j ($j = 1, \dots, n$), il cui flusso $\Phi_{G_j}^{-\lambda^j}$ rimuova il j -esimo gradino della perturbazione. Il cambio di variabile finale sarà poi la composizione di tali flussi. In formule,

$$\mathcal{C}_\lambda = \Phi_{G_n}^{-\lambda^n} \circ \dots \circ \Phi_{G_1}^{-\lambda} \quad . \quad (4.14)$$

Si dimostra che esiste un numero infinito di possibili insiemi di Hamiltoniane generatrici e che, dunque, la forma normale di un'Hamiltoniana non è unica.

Introduciamo, a questo punto, una nozione che sarà utile nel proseguo di questa appendice. Data una funzione F e una Hamiltoniana K , la quantità

$$\langle F \rangle_K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F \circ \Phi_h^s ds \quad (4.15)$$

si chiama media temporale di F lungo il flusso di K .

Invece la quantità

$$\delta_K F = F - \langle F \rangle_h \quad (4.16)$$

è detta deviazione dalla media.

E' importante notare che, nel caso in cui il flusso di K sia periodico di periodo τ , il calcolo della media temporale di una generica funzione F si riduce a

$$\langle F \rangle_K = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F \circ \Phi_h^s ds \quad . \quad (4.17)$$

Per quanto concerne la ricerca della Hamiltoniana in forma normale, il risultato principale della teoria delle perturbazioni è riassunto nel seguente teorema.

Teorema Si consideri una Hamiltoniana H_λ quasi integrabile della forma (4.12) che soddisfi le ipotesi elencate in precedenza. Allora:

1. Per una qualsiasi scelta delle Hamiltoniane generatrici G_1, \dots, G_n , si ha

$$\tilde{H}_\lambda = H_\lambda \circ \mathcal{C}_\lambda = h + \lambda \mathcal{P} + \dots + \lambda^n \mathcal{P} + \mathcal{R}_+ \quad ,$$

ove, partendo da $F_1 = 0$, vale che

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -L_h G_j + P_j + F_j[h, P_1, \dots, P_{j-1}, G_1, \dots, G_{j-1}] \quad , \\ \mathcal{R}_+ &= \lambda^{n+1} (P_{n+1} + F_{n+1}[h, P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n] + O(\lambda^{n+2})) \quad . \end{aligned}$$

2. La perturbazione all'ordine j vale

$$S_j = \mathcal{P} = \langle P_j + F_j \rangle_h \quad .$$

3. Le Hamiltoniane generatrici sono date da

$$G_j = \mathcal{G} + L_h^{-1} \delta_h(P_j + F_j) \quad .$$

In particolare, nel corso di questa trattazione siamo interessati a trovare la forma normale al primo ordine. Il secondo punto del precedente teorema indica che il termine S_1 che compare nell'Hamiltoniana in forma normale valga

$$S_1 = \langle P_1 \rangle_h \quad . \tag{4.18}$$

5 Bibliografia

- [1] C.H. Su, C.S. Gardner; *Korteweg – de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg – de Vries Equation and Burgers Equation*, *Journal of mathematical physics*, vol. 10, num. 3 (1969).
- [2] C.S. Gardner; *Korteweg – de Vries Equation and Generalizations. IV. The Korteweg – de Vries Equation as a Hamiltonian system*, *Journal of mathematical physics*, vol. 12, num. 8 (1971).
- [3] H. Washimi, T. Taniuti; *Propagation of Ion – acoustic Solitary Waves of Small Amplitude*, *Physical review letters*, Springer (1966).
- [4] A.J. Chorin, J.E. Marsden; *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, *Physica*, vol. 40, pagg. 182-196 (1979).
- [5] A. Ponso; *Mathematical Physics Lecture Notes*, (2018).