

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria meccanica

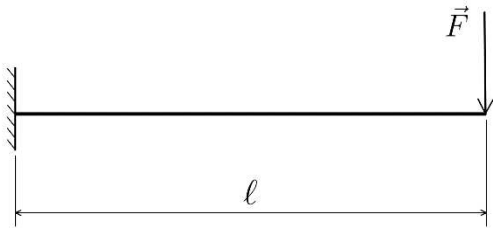
***Relazione per la prova finale  
«Modellazione numerica ad Elementi  
Finiti di una gru idraulica»***

Tutor universitario: Prof.ssa Pomaro Beatrice

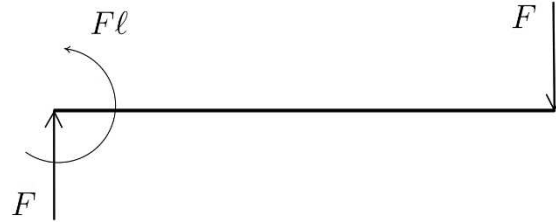
Correlatore: Prof. Mazzucco Gianluca

Laureando: *Marana Riccardo*

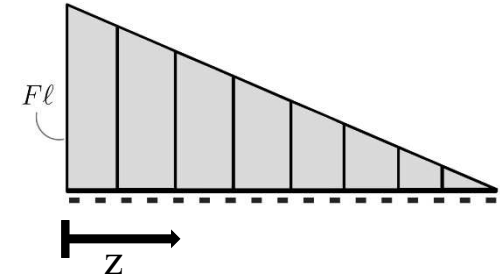
Padova, 18/03/2024



**Modello di trave**



**Trave risolta**



**Diagramma momento flettente**

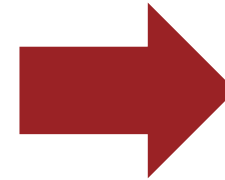
**Funzione momento flettente:**

$$M(z) = Fz - F\ell$$

**Equazione differenziale linea  
elastica  
e condizioni al contorno:**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{M(z)}{EI} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varphi(z=0) = 0 \\ v(z=0) = 0 \end{array} \right.$$

**Forma  
forte**



Si ottengono le soluzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(z) = -\frac{Fz^2}{2EI} + F\ell z \\ v(z) = -\frac{Fz^3}{6EI} + \frac{F^2}{2EI} \end{array} \right.$$

Moltiplicando per la **funzione test**  $\psi(z)$  l'equazione differenziale, otteniamo la **forma debole** del problema differenziale (**teorema dei lavori virtuali**):

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \psi(z) dz + \int_0^\ell \frac{M(z)}{EI} \psi(z) dz = 0$$

Nello spazio:

**Equazioni indefinite di equilibrio:**

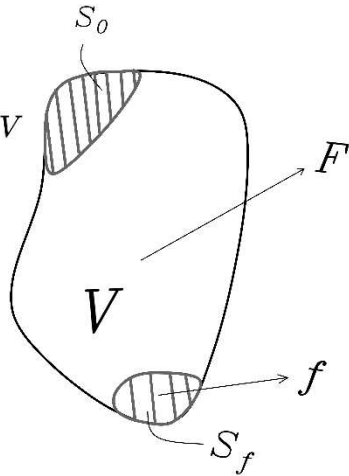
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}, \forall P \in V$$

**Condizioni al contorno:**

$$[\sigma] \cdot \hat{n} = f, \forall P \in S_f$$

$$s = s_0, \forall P \in S_0$$

**Forma forte**



- campo di spostamenti arbitrario  $\mathbf{v}$ ;
- Volume dell'elemento  $\mathbf{V}$

**Forma debole**

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i dV + \int_{\Omega} f_i v_i dV = 0$$

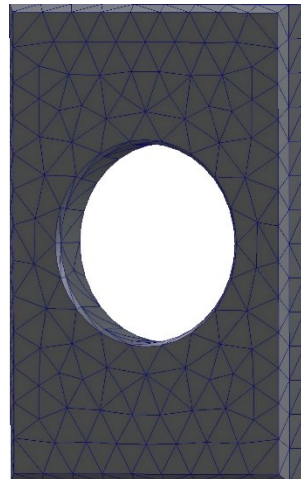
**Integrando per parti**

$$-\int_V \underbrace{\varepsilon_{ij} \sigma_{ij}}_{L_{vi}} dV + \int_V v_i f_i dV + \int_{\Gamma} \underbrace{v_i \sigma_{ij} n_j}_{L_{ve}} d\Gamma = 0$$

Gli elementi possono essere:



**Discretizzazione del dominio in elementi**



Beam (1D)

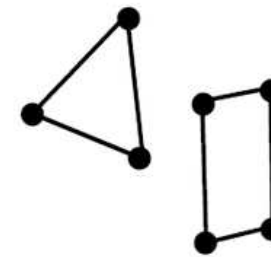
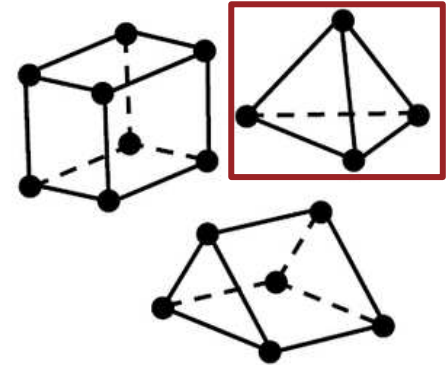
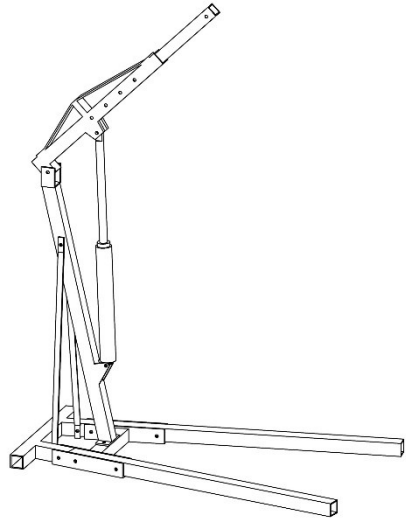


Plate (2D)



Solid (3D)

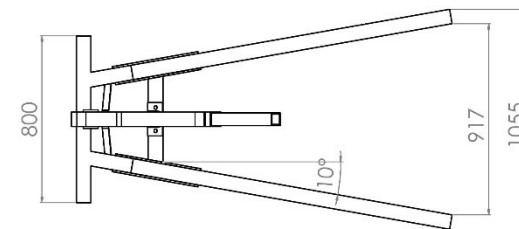
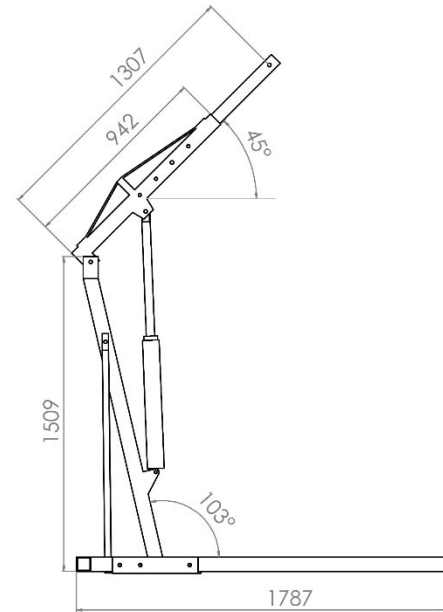
Basandoci su esemplari di gru da officina già in commercio, abbiamo rappresentato su SolidWorks un modello che possiamo analizzare. Per valutare le dimensioni principali, ci siamo affidati ai cataloghi che si possono trovare in rete.



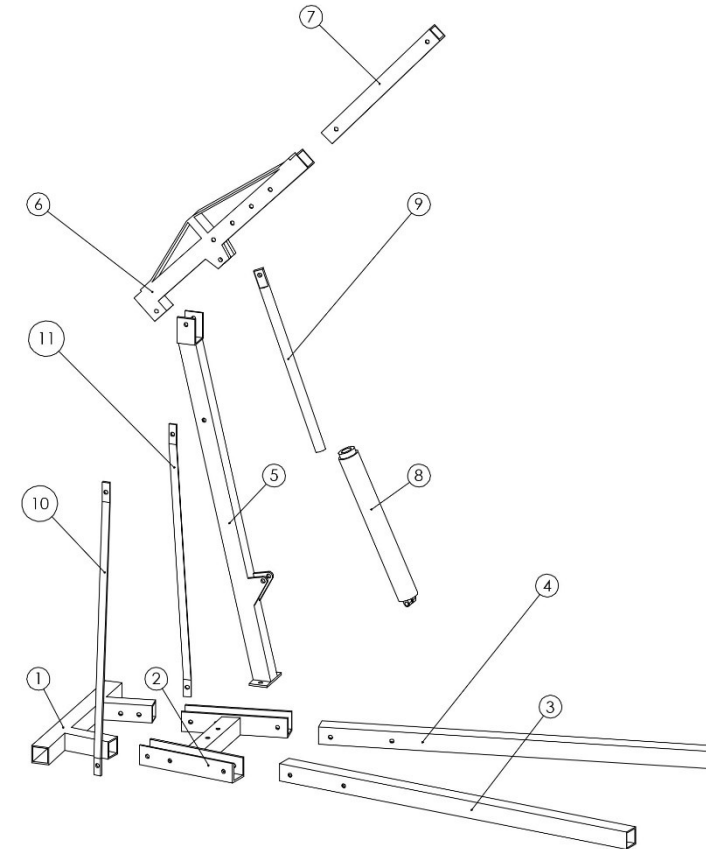
Vista assonometrica

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo Elastico = $E$	210000	$\frac{N}{mm^2}$
Coefficiente di Poisson = $\nu$	0.28	
Modulo di taglio = $G$	79000	$\frac{N}{mm^2}$
Densità di massa = $\rho$	7700	$\frac{Kg}{m^3}$
Tensione di snervamento = $\sigma_s$	620	$\frac{N}{mm^2}$

**Caratteristiche del materiale:** per semplicità supponiamo che tutti i membri siano composti dello stesso materiale.



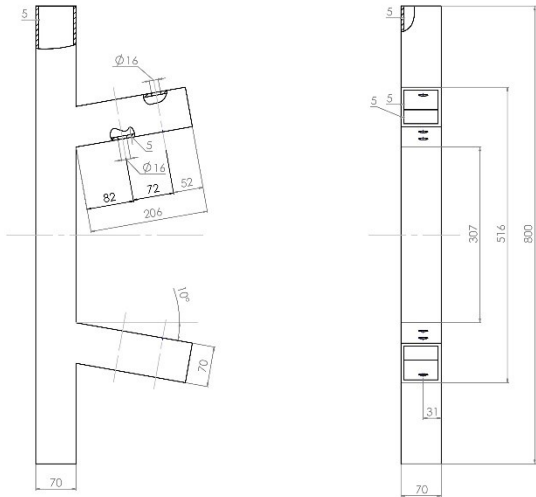
Messa in tavola dell'assieme, utile per valutare l'ingombro



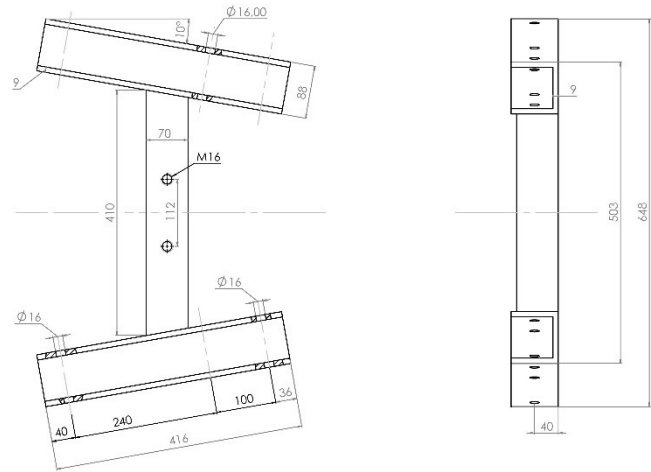
Vista esplosa

NUMERO	NOME COMPONENTE
1	PARTE TERMINALE
2	PARTE CENTRALE
3	GAMBA SINISTRA
4	GAMBA DESTRA
5	ASTA PORTANTE
6	BRACCIO PRINCIPALE
7	ESTENSIONE TELESCOPICA
8	CAMICIA DEL MARTINETTO
9	STELO DEL MARTINETTO
10	SUPPORTO SINISTRO
11	SUPPORTO DESTRO

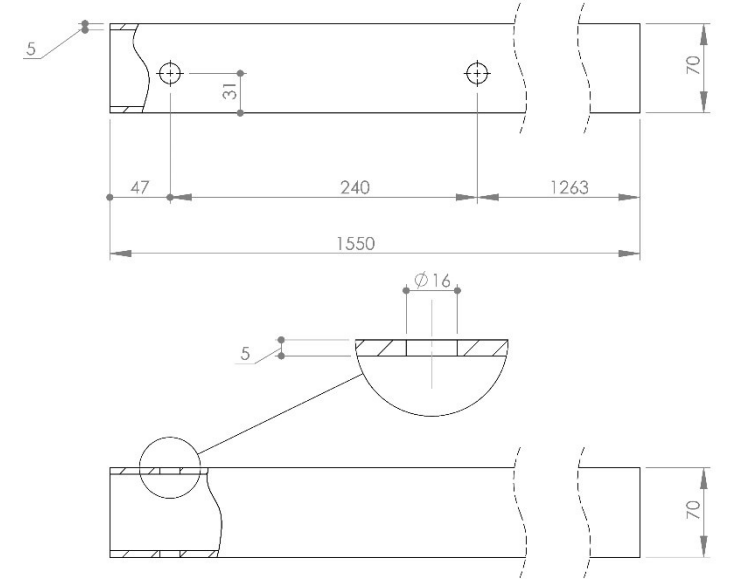
Rappresentiamo i disegni di ciascun membro che compone la gru:



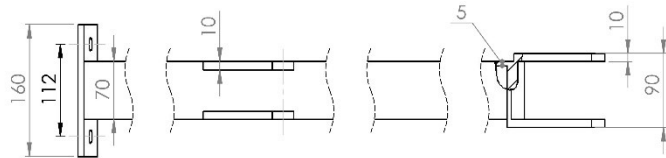
Parte terminale



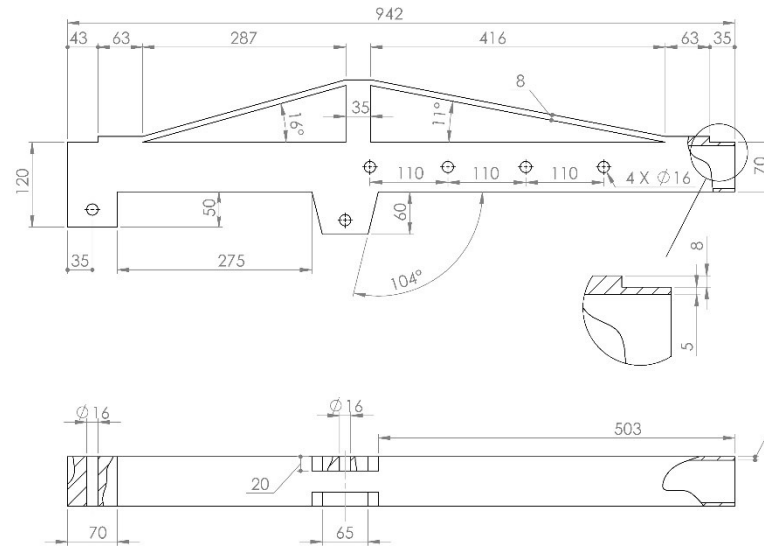
Parte centrale



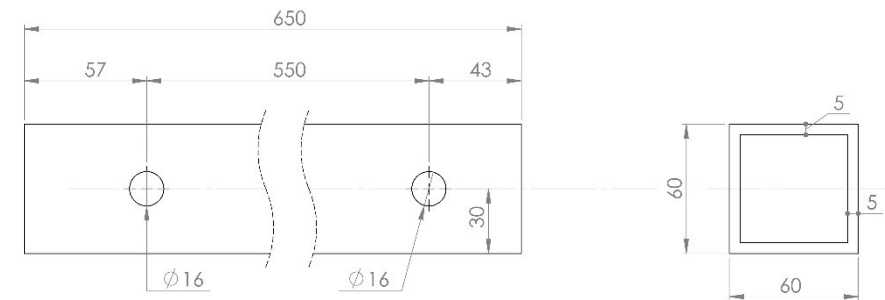
Gamba



Asta portante



Braccio principale



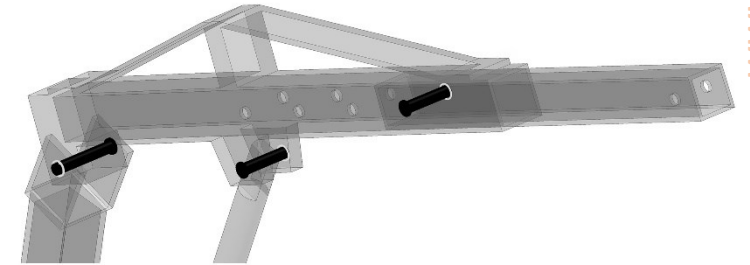
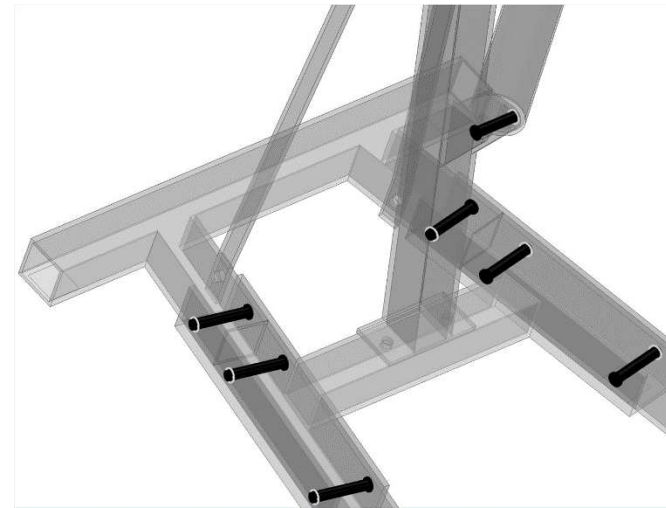
Estensione telescopica

- **Imposizione dei vincoli interni:**



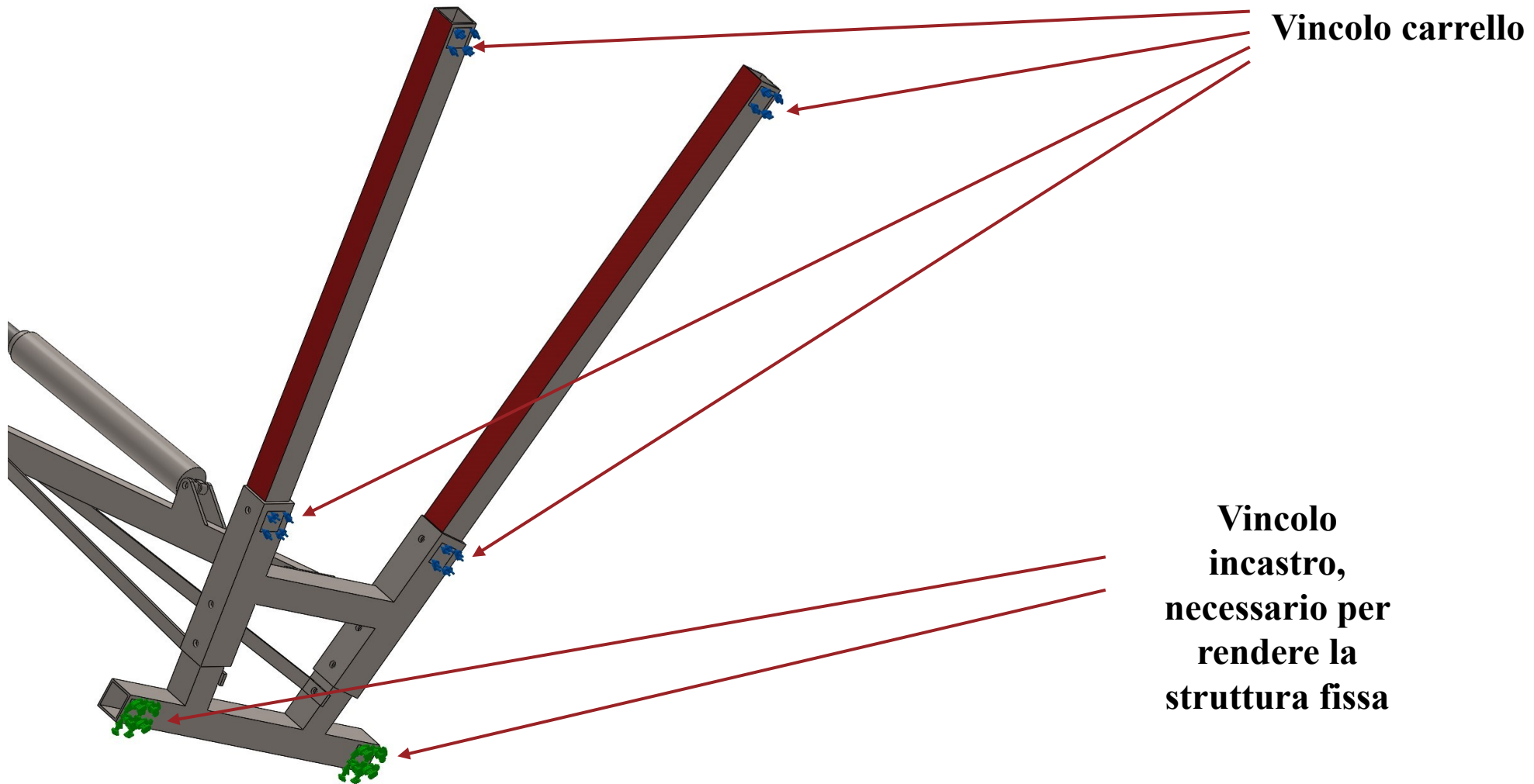
### Giunzioni bullonate

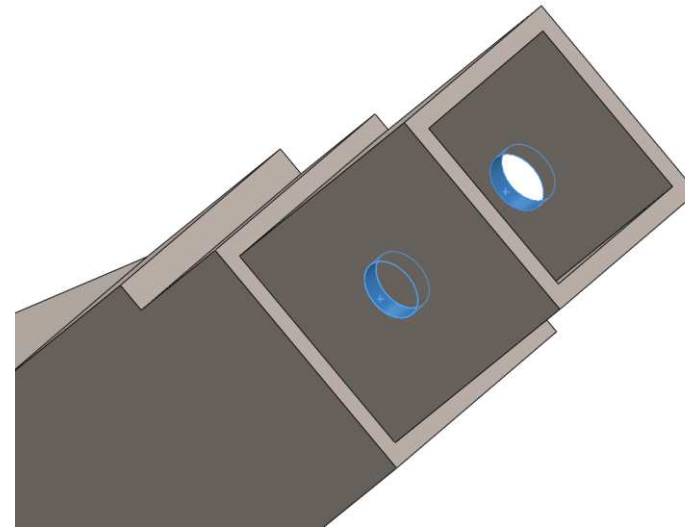
- viti M16, classe di resistenza 4.6;
- Coppia di serraggio 96.5 Nm.



**Collegamenti attraverso perni che  
impediscono la sola traslazione relativa.**

- **Imposizione dei vincoli esterni:**

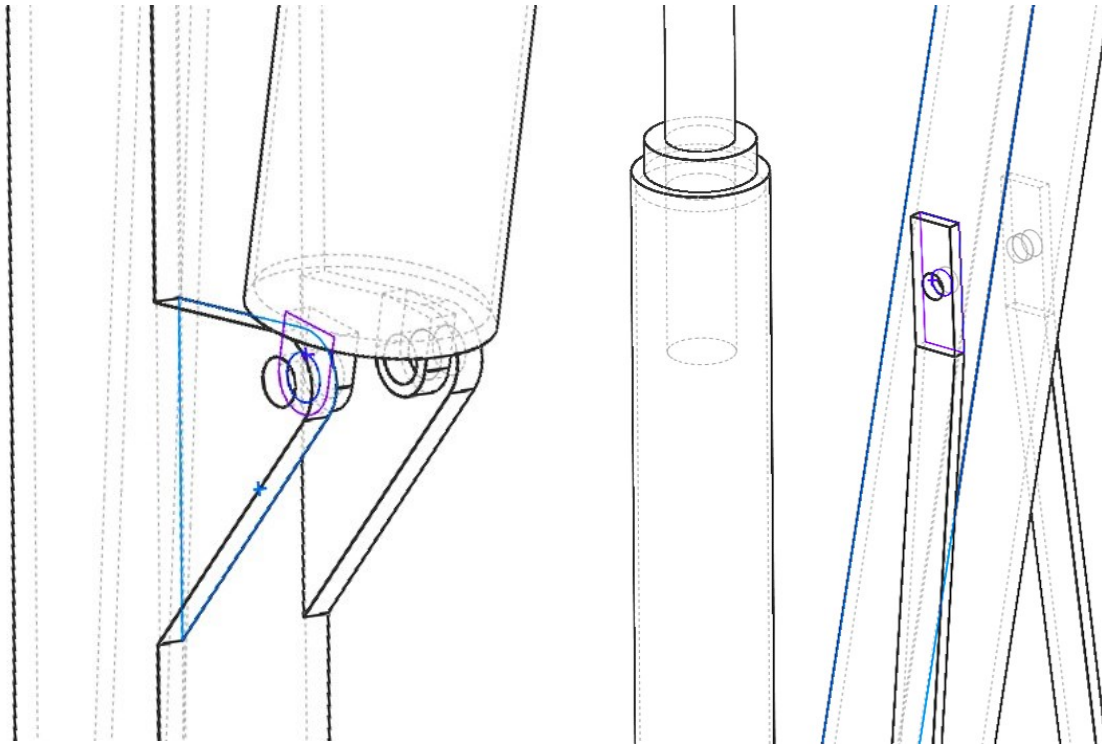




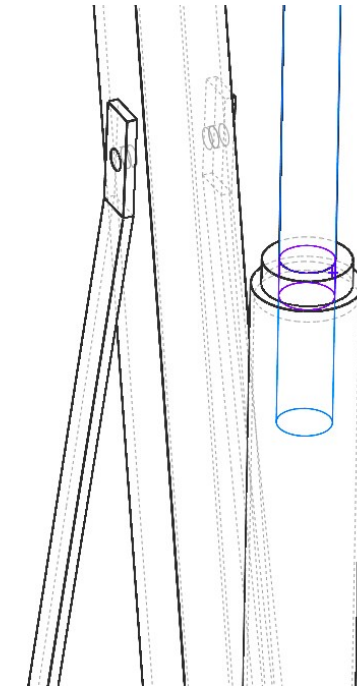
Il carico viene applicato all'estensione  
telescopica come se fosse un **carico  
distribuito**



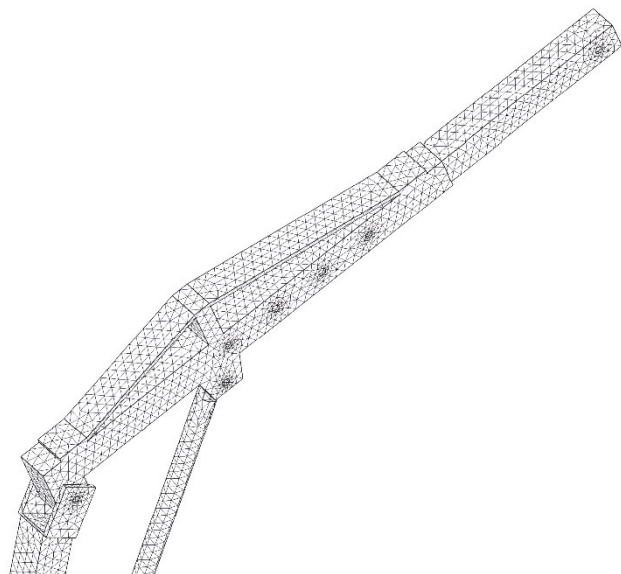




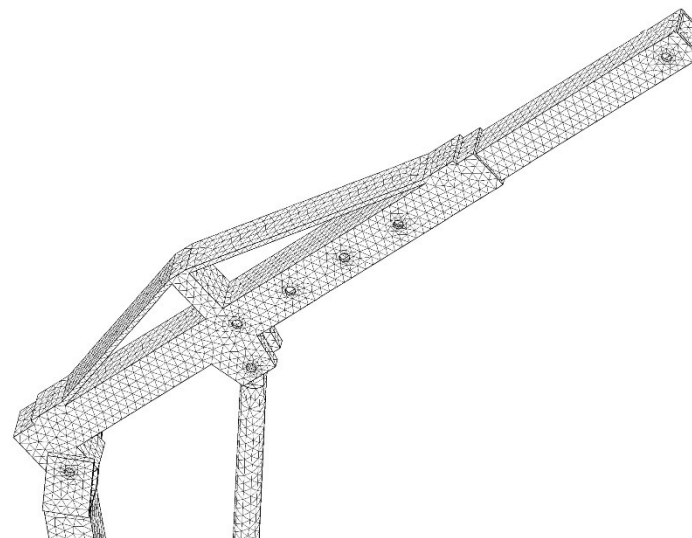
Interazione locale di tipo «**contatto**»:  
impediamo la **compenetrabilità** di  
tutti i membri della struttura



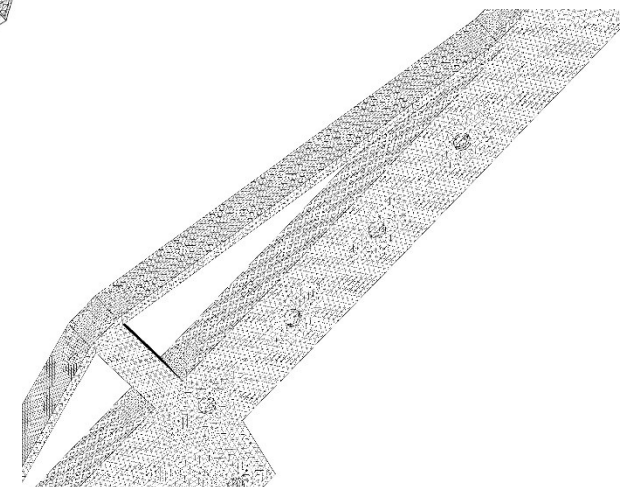
Interazione locale di tipo «**unito**»:  
Supponiamo che stelo e camicia siano  
uniti per emulare la presenza del  
fluido di lavoro.



**MESH 1**

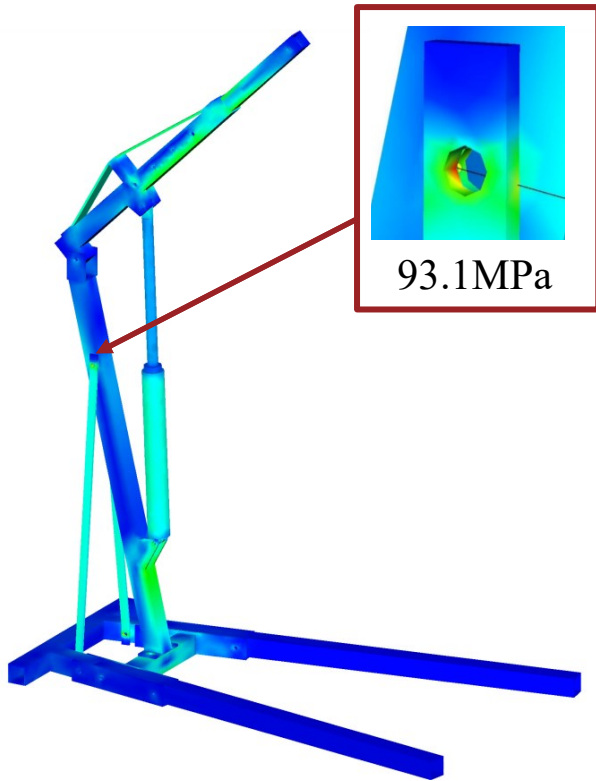


**MESH 2**

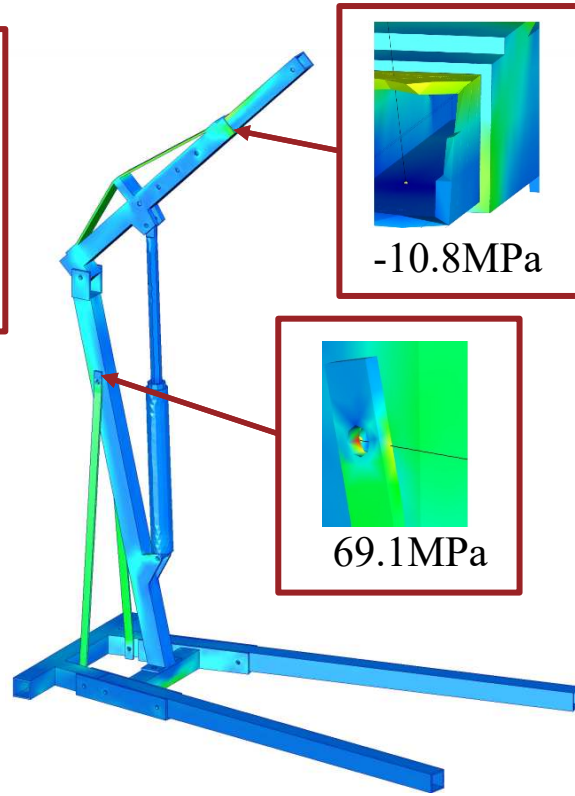


**MESH 3**

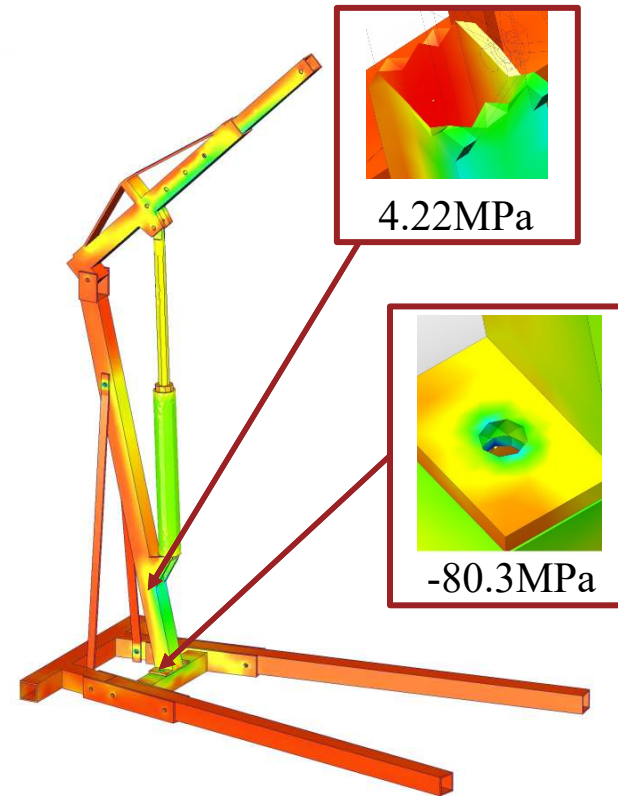
	<b>MESH 1</b>	<b>MESH 2</b>	<b>MESH 3</b>
Elementi totali	56 459	83 354	1 083 983
Dimensione massima elemento	20 mm	15mm	5mm
Dimensione minima elemento	1 mm	1mm	0.2mm
	Elementi tetraedrici <b>lineari</b>	Elementi tetraedrici <b>quadratici</b>	Elementi tetraedrici <b>quadratici</b>



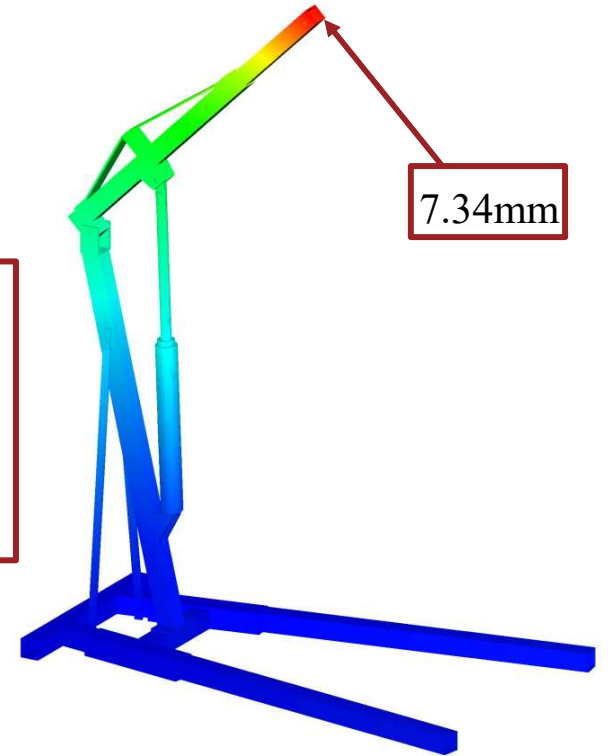
**TENSIONE DI VON  
MISES**



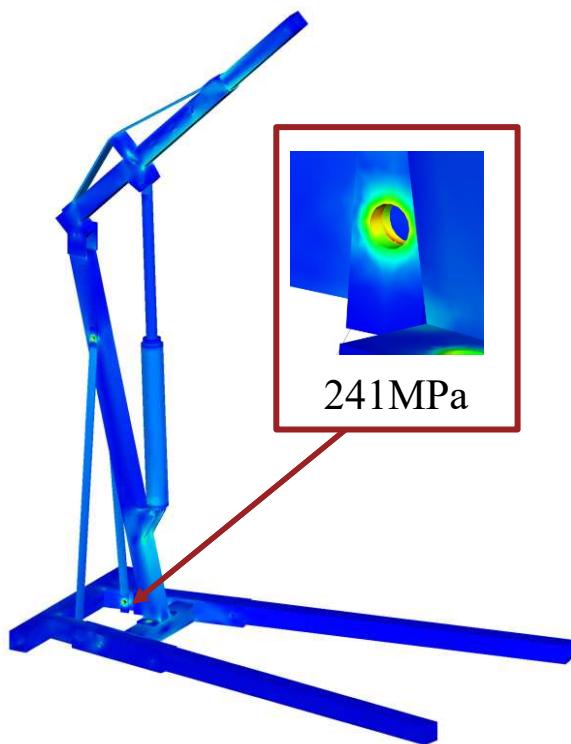
**PRIMA TENSIONE  
PRINCIPALE**



**TERZA TENSIONE  
PRINCIPALE**

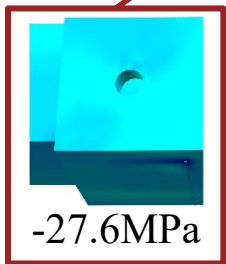


**SPOSTAMENTO**

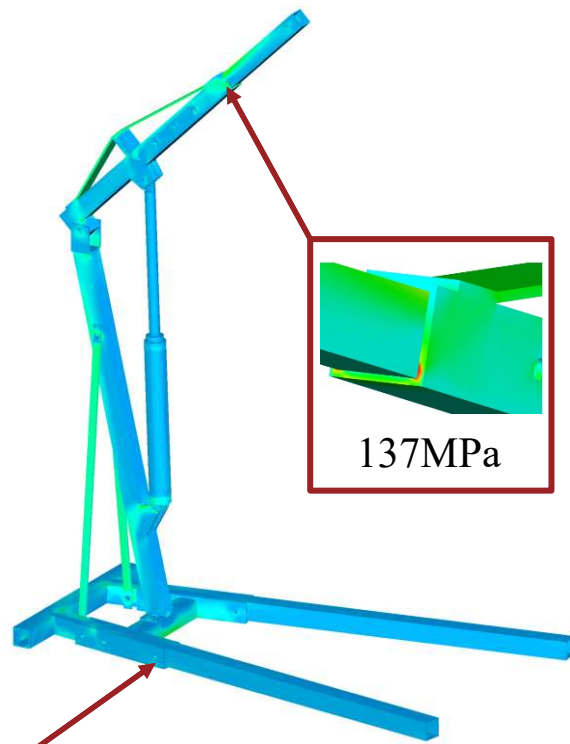


241MPa

**TENSIONE DI VON  
MISES**

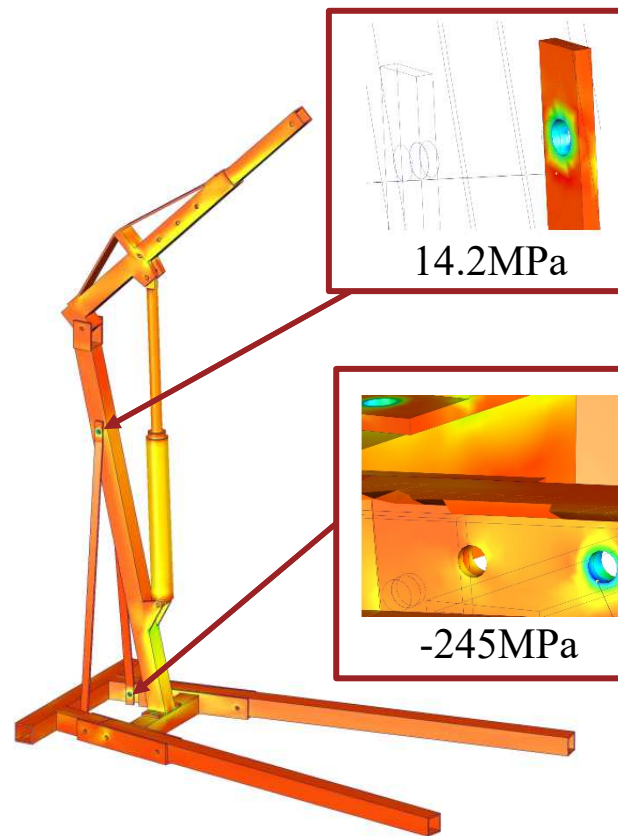


-27.6MPa



137MPa

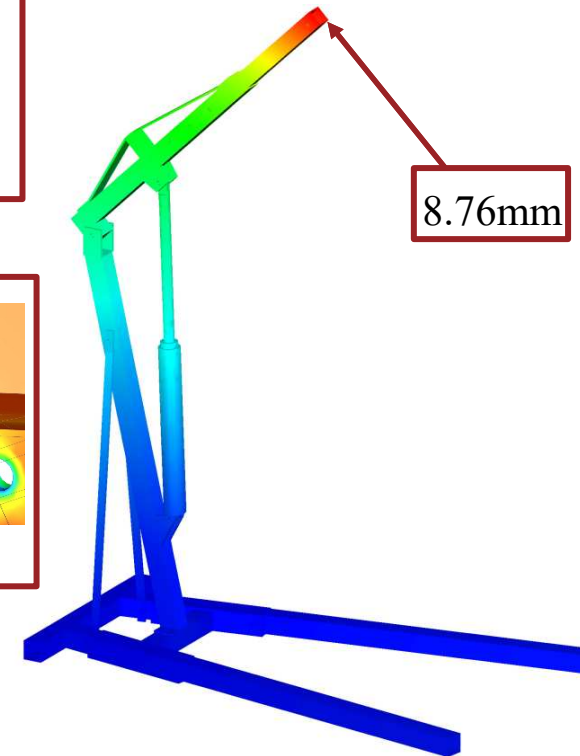
**PRIMA TENSIONE  
PRINCIPALE**



14.2MPa

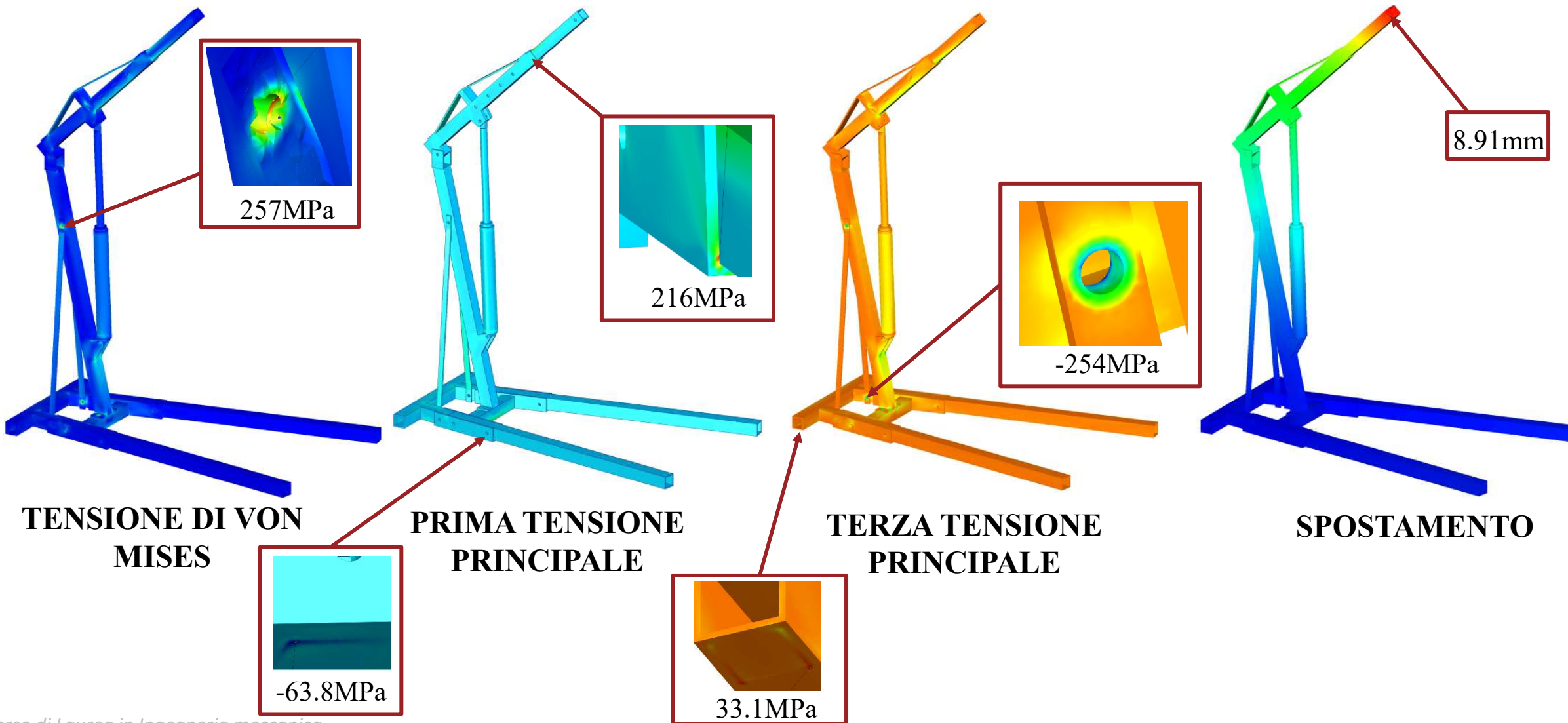
-245MPa

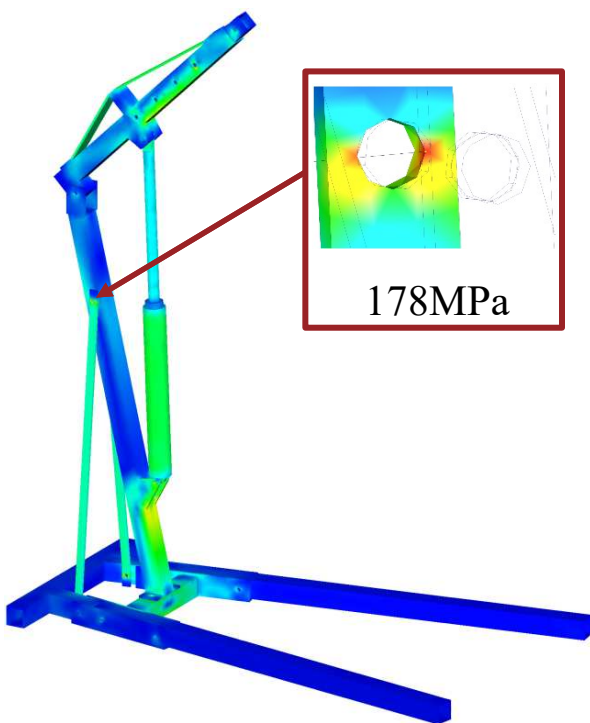
**TERZA TENSIONE  
PRINCIPALE**



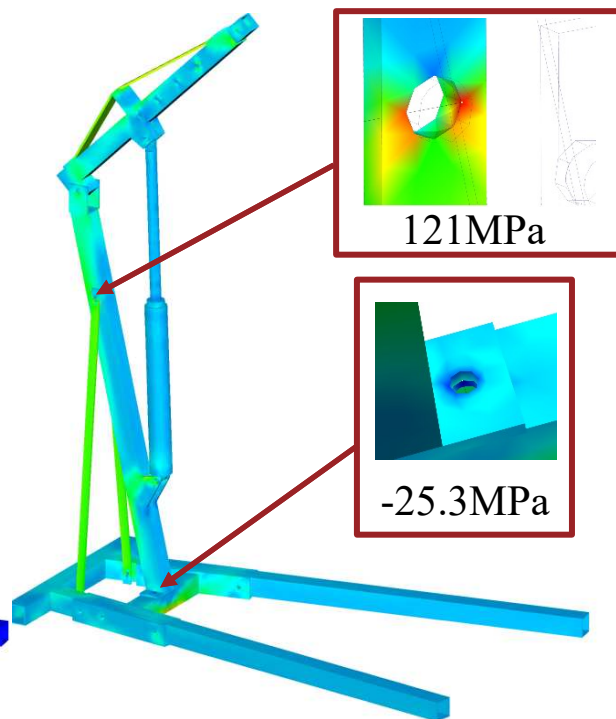
8.76mm

**SPOSTAMENTO**

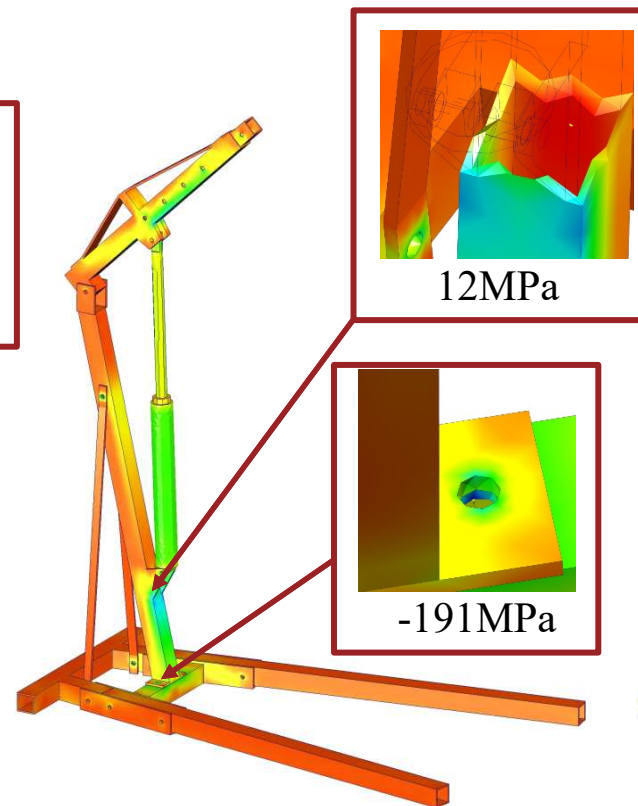




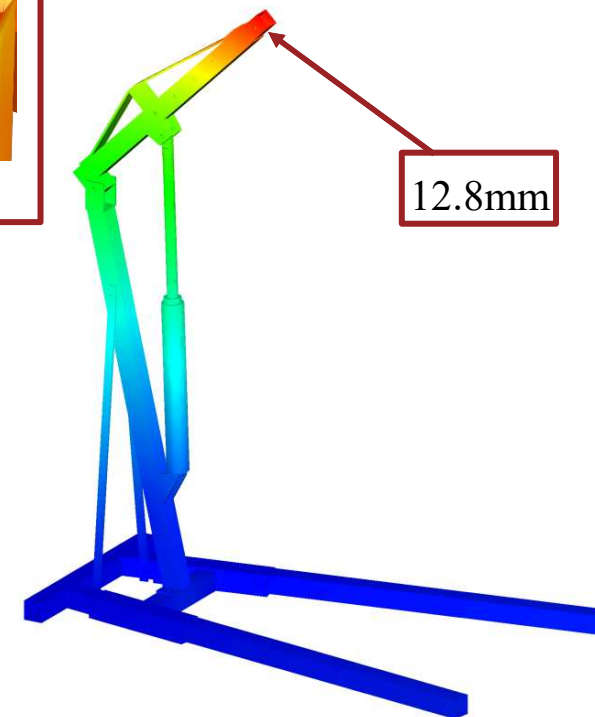
**TENSIONE DI VON  
MISES**



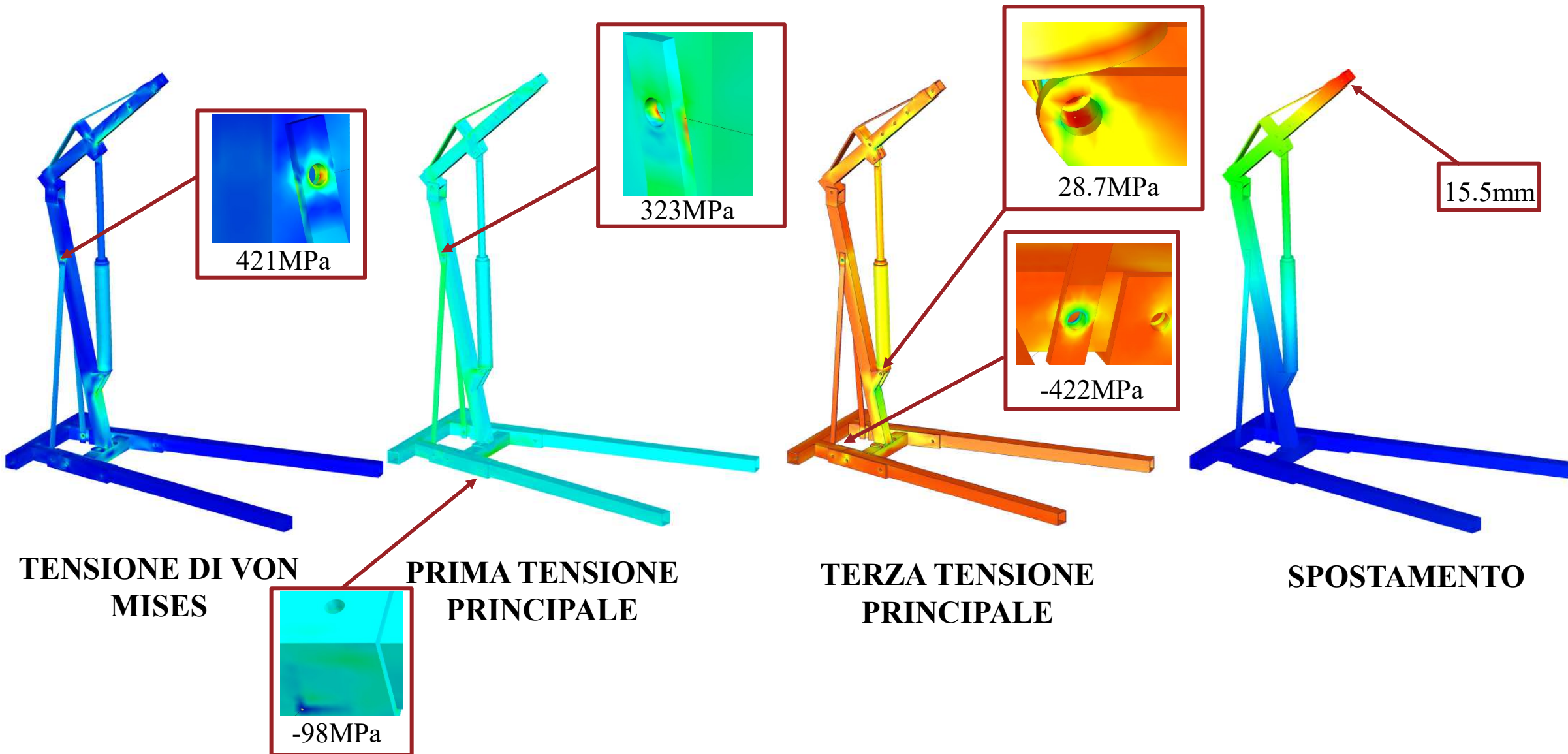
**PRIMA TENSIONE  
PRINCIPALE**

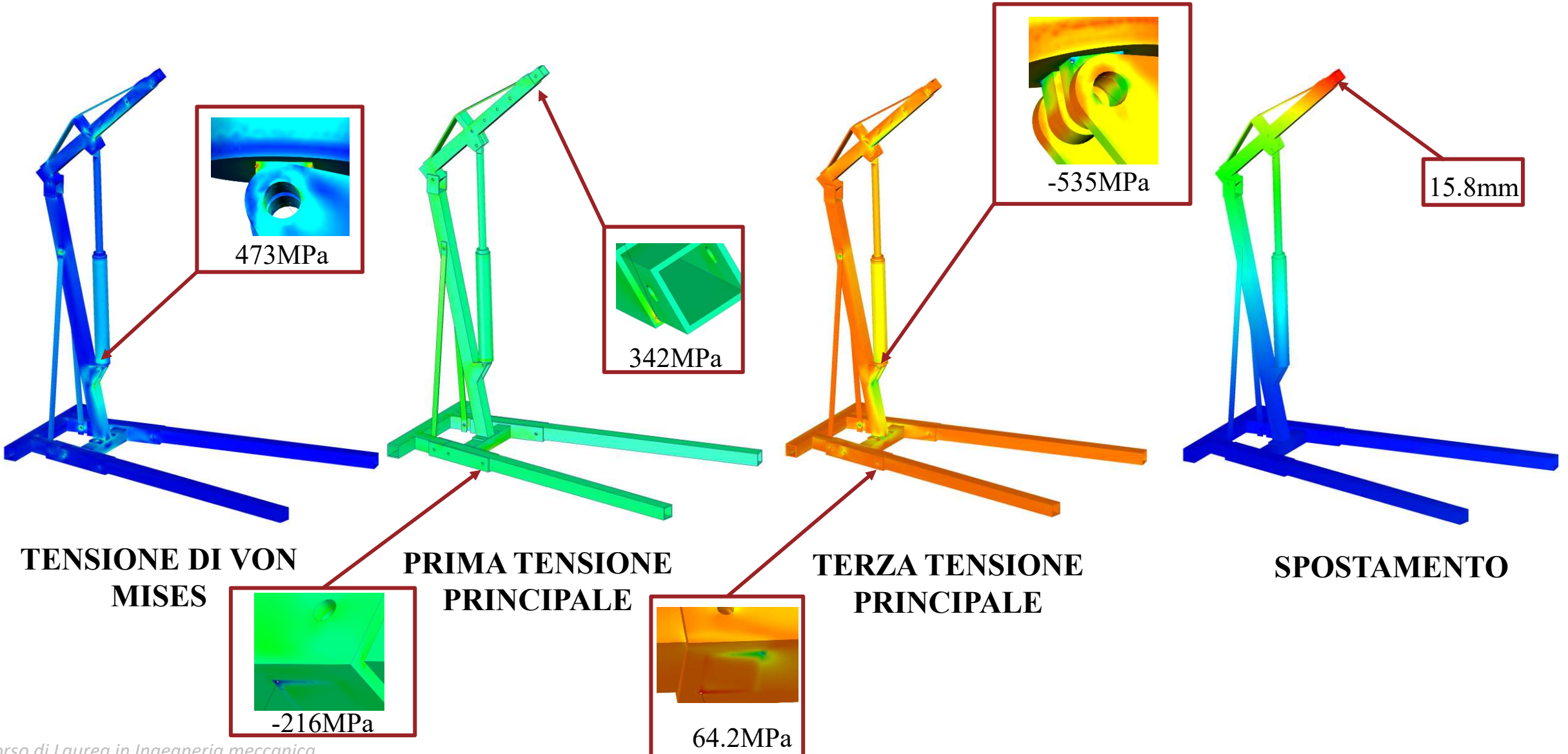


**TERZA TENSIONE  
PRINCIPALE**



**SPOSTAMENTO**





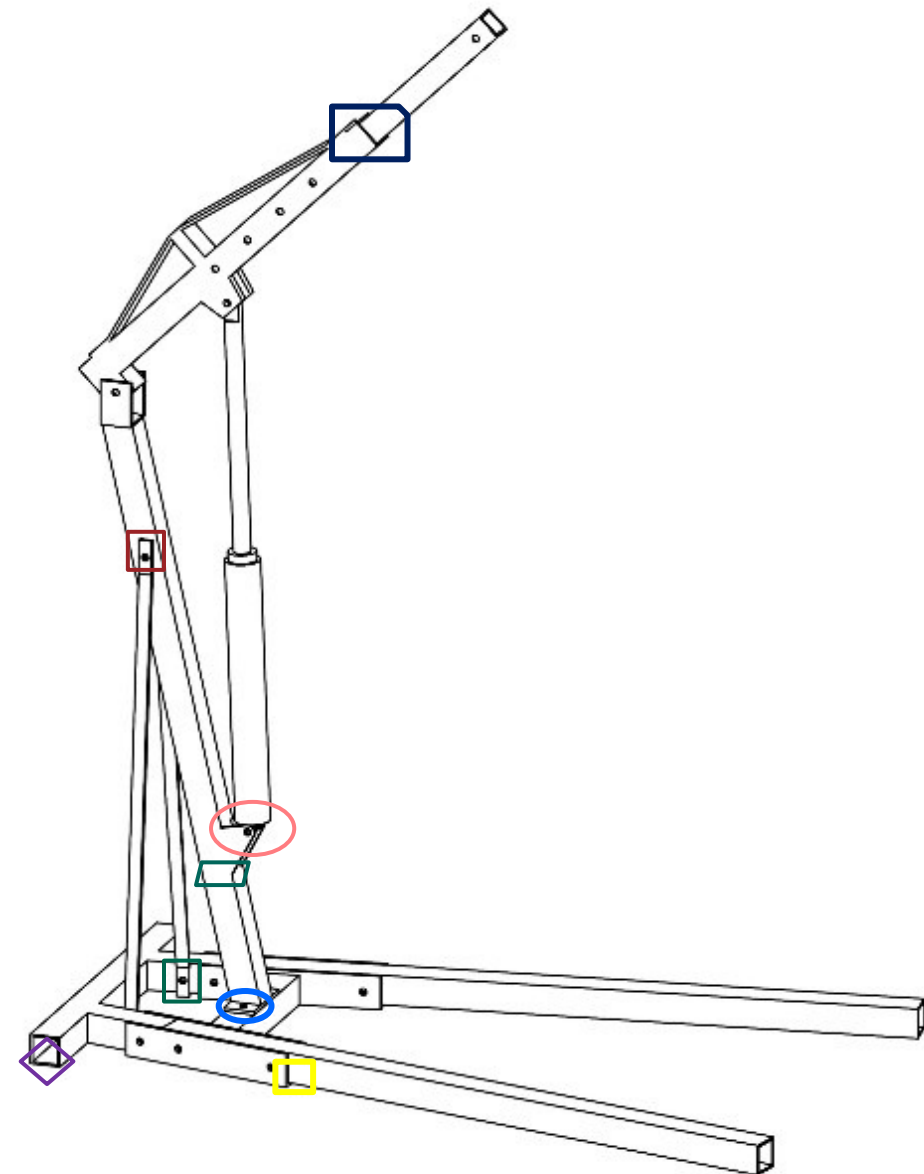


• **Carico da mezza tonnellata**

Mesh	$\sigma_{V.M.,max}$ [MPa]	$\sigma_{P1,max}$ [MPa]	$\sigma_{P1,min}$ [MPa]	$\sigma_{P3,max}$ [MPa]	$\sigma_{P3,min}$ [MPa]	Spostamento massimo [mm]
1	93.1	69.1	-10.8	4.22	-80.3	7.34
2	241	137	-27.6	14.2	-245	8.76
3	257	216	-63.8	33.1	-254	8.91

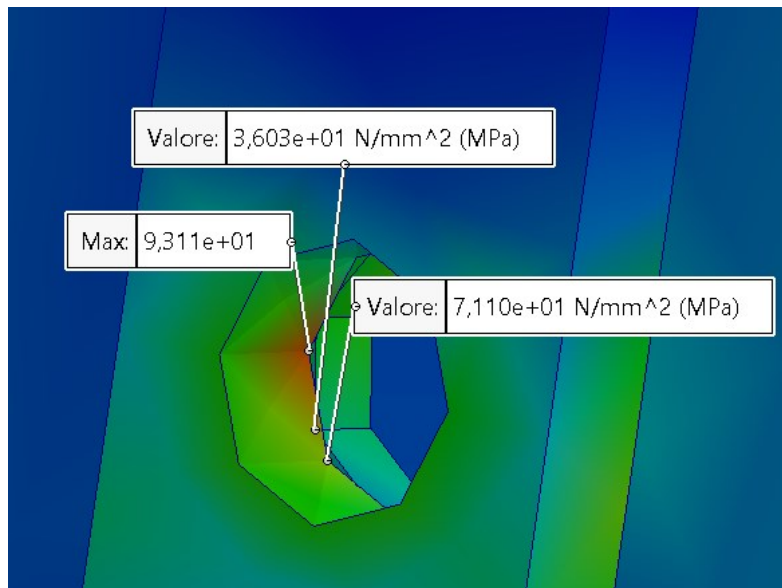
• **Carico da due tonnellate**

Mesh	$\sigma_{V.M.,max}$ [MPa]	$\sigma_{P1,max}$ [MPa]	$\sigma_{P1,min}$ [MPa]	$\sigma_{P3,max}$ [MPa]	$\sigma_{P3,min}$ [MPa]	Spostamento massimo [mm]
1	178	121	-25.3	12	-191	12.8
2	421	323	-98	28.7	-422	15.5
3	473	342	-216	64.2	-535	15.8



Ponendo la tensione di von Mises ad un valore massimo di 100MPa, possiamo analizzare il campo di tensione nell'intorno del foro, valutando la sua dipendenza dal tipo di mesh utilizzato:

www.dii.unipd.it

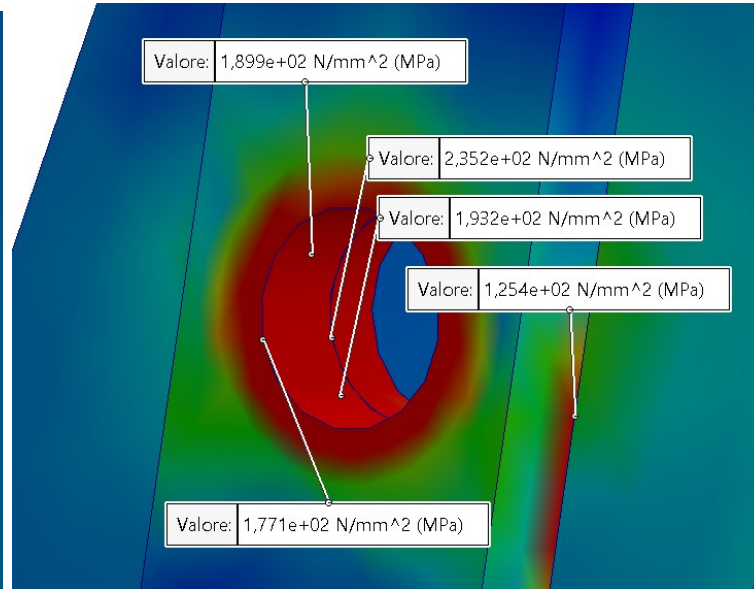


MESH 1

Approssimazione dei risultati troppo elevata



Errata interpretazione del campo tensionale nell'intorno del foro

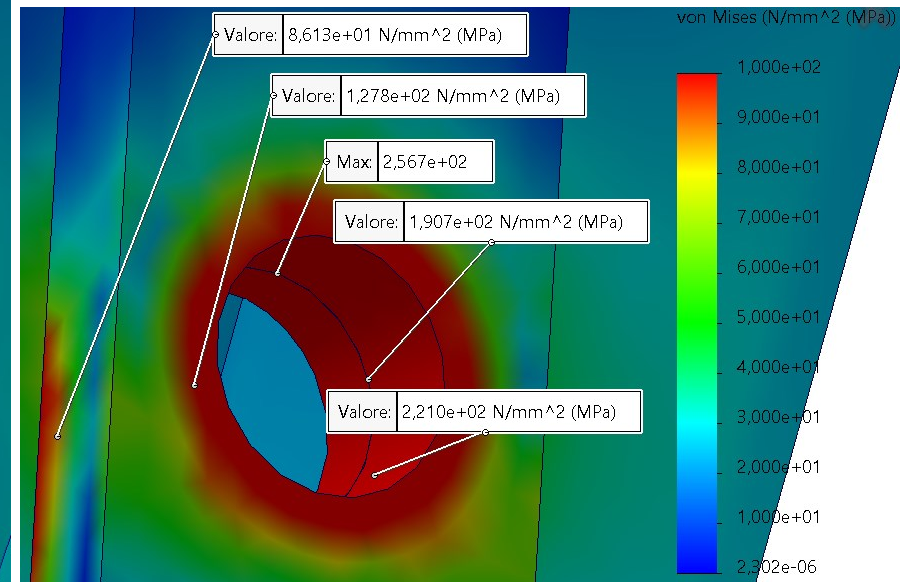


MESH 2

Minore sensibilità del risultato dal tipo di mesh utilizzato



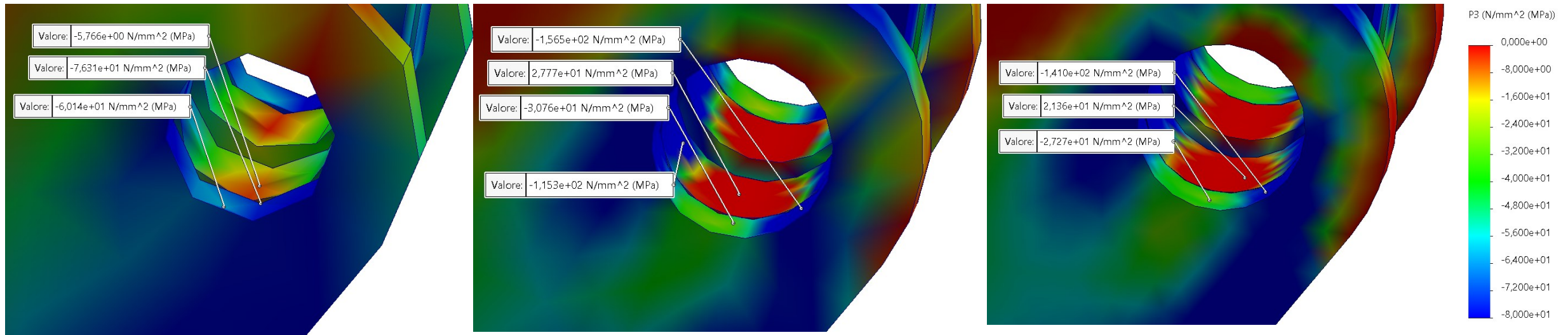
Stabilità della soluzione



MESH 3

Variando la terza tensione principale nell'intervallo (5,-20) osserviamo che le zone in compressione sono in accordo con quanto indicherebbe la nostra esperienza:

www.dii.unipd.it



MESH 1

MESH 2

MESH 3

Approssimazione dei risultati troppo elevata per una misura delle tensioni

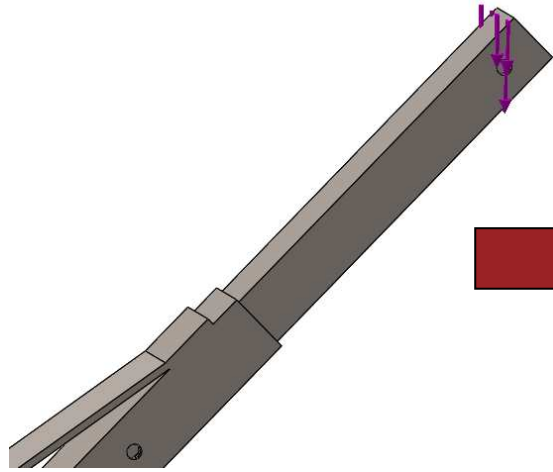


Mesh adatta per l'interpretazione fisica qualitativa del risultato

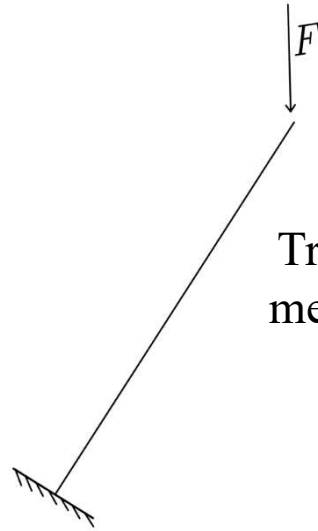
Minore sensibilità del risultato dal tipo di mesh utilizzato



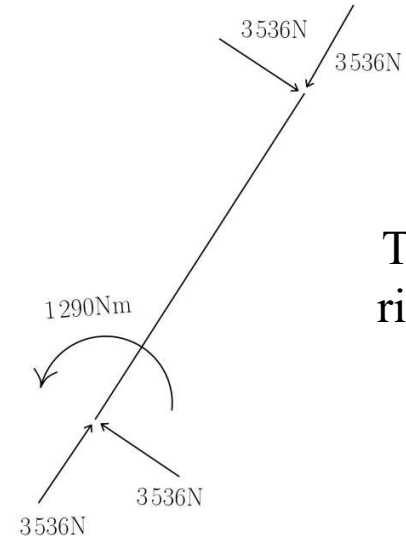
Stabilità della soluzione



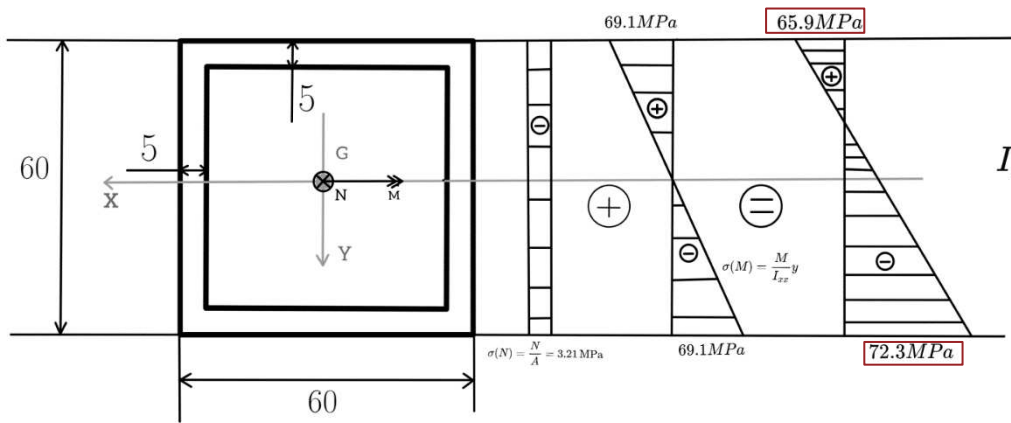
Schema  
di  
calcolo



Trave a  
mensola



Trave  
risolta



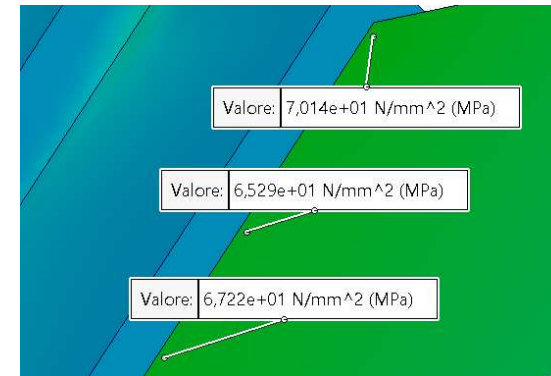
$$A = 1100 \text{ mm}^2$$

$$I_{xx} = 0.56 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

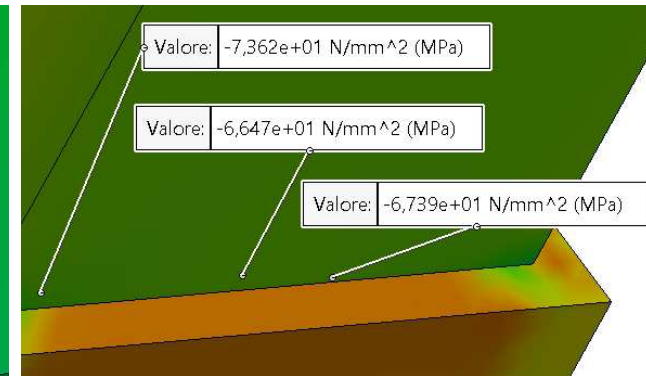
$$M = 1290 \text{ Nm}$$

$$N = 3536 \text{ N}$$

Stato tensionale alla sezione di incastro  
applicando la teoria di de Saint Venant



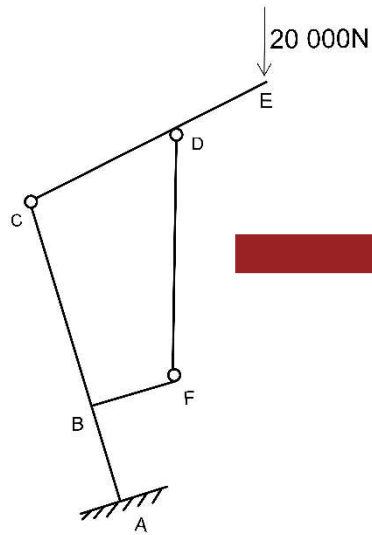
Prima tensione  
principale



Terza tensione  
principale

Accordo dei risultati

Caso più critico si ha al massimo carico:



Troviamo le  
reazioni  
interne sul  
martinetto

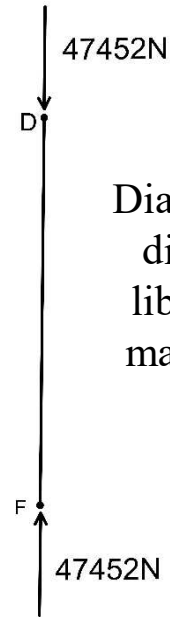


Diagramma  
di corpo  
libero del  
martinetto

Schema di calcolo modello gru

- **Lunghezza stelo + lunghezza camicia**  $l = l_0 = 1250\text{mm}$

-La snellezza diventa  $\lambda^* = \frac{l_0}{\rho} = 125 > \lambda_{\min}$

-Verifica  $\sigma = 37.8\text{ MPa} \leq \frac{\sigma_{\text{cr}}}{g} = \frac{\pi^2 E}{g \lambda^{*2}} = 53.1\text{ MPa}$

**VERIFICATO**

-Area trasversale martinetto:  $A = \frac{\pi \phi^2}{4} = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} = 1256\text{ mm}^2$

-Sforzo normale di compressione:  $\sigma(N) = \frac{N}{A} = \frac{47452}{1257} = 37.8\text{ MPa}$

-Momento d'inerzia minimo:  $I_{\min} = \frac{\pi \phi^4}{64} = \frac{\pi(40)^4}{64} = 1.26 \times 10^5\text{ mm}^4$

-Raggio d'inerzia:  $\rho = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 10\text{ mm}$

- **Lunghezza stelo**  $l = l_0 = 597\text{mm}$

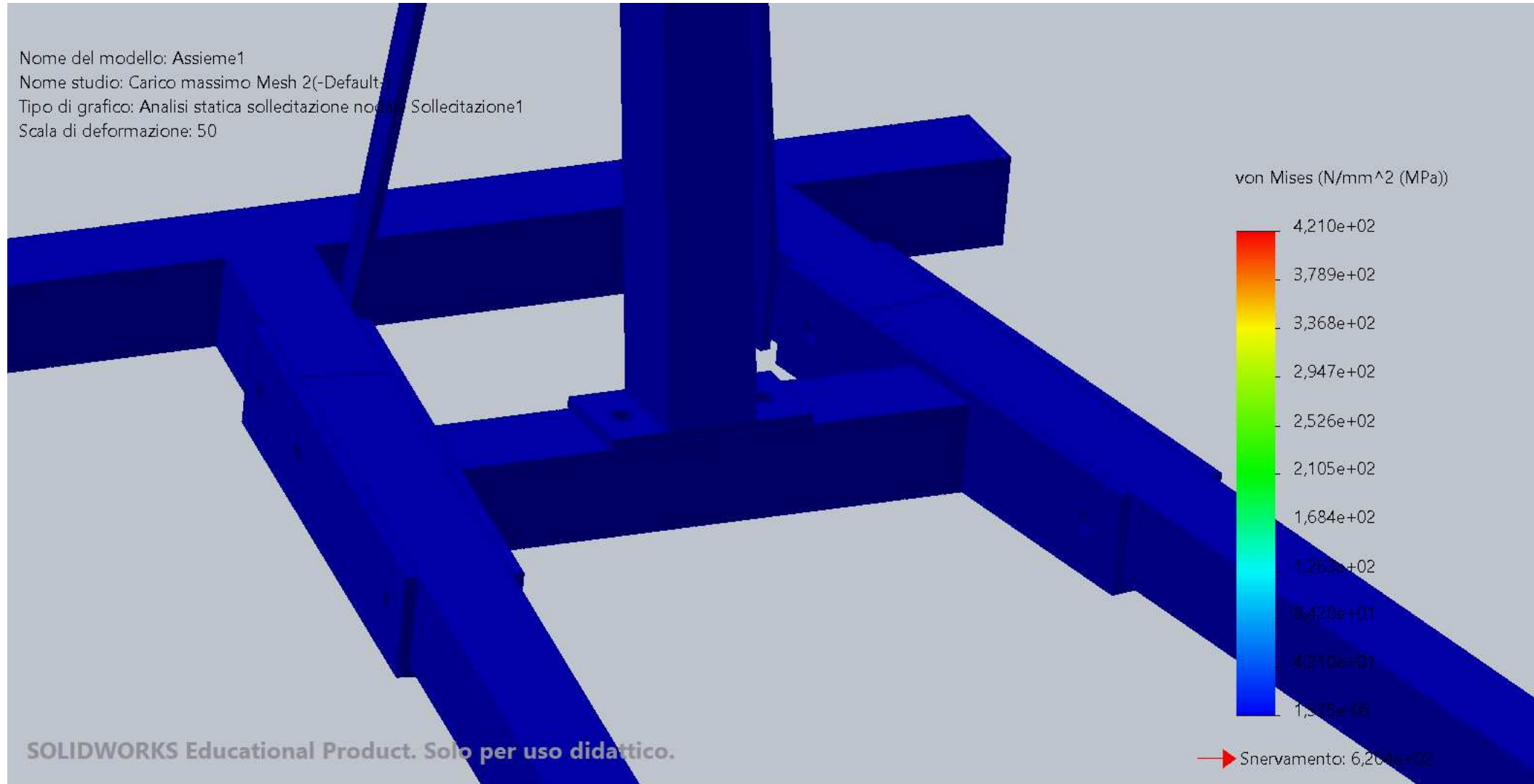
-Snellezza:  $\lambda = \frac{l_0}{\rho} = \frac{597}{10} = 59.7$

-Snellezza limite  $\lambda_{\min} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_s}} = 57.8$

-Verifica:  $\sigma(N) = 37.8\text{ MPa} \leq \frac{\sigma_{\text{cr}}}{g} = \frac{\pi^2 E}{g \lambda^2} = 233\text{ MPa}$

**VERIFICATO**

Nome del modello: Assieme1  
Nome studio: Carico massimo Mesh 2(-Default-  
Tipo di grafico: Analisi statica sollecitazione nodi Sollecitazione1  
Scala di deformazione: 50



- **Obiettivi e approccio di analisi**

- Realizzazione del modello agli elementi finiti di una gru meccanica con dati geometrici, capacità di carico e tipi di connessioni forniti da cataloghi di aziende del settore;
- Esecuzione dell'analisi statica in regime di lineare elasticità per due configurazioni di carico.

- **Sensitività della mesh**

- Mesh 1 (lineare) riduce il tempo di calcolo ma presenta picchi di tensione molto inferiori rispetto a quelli registrati con le mesh 2 e 3;
- Mesh con elementi tetraedrici quadratici forniscono risultati più precisi grazie al loro adattamento geometrico in prossimità dei fori (zone in cui è stato registrato più volte un picco di tensione).

- **Risultati e implicazioni**

- In tutti i punti, la tensione di von Mises si è dimostrata inferiore alla tensione di snervamento del materiale (620MPa), è quindi garantito il comportamento lineare elastico in tutte le parti della struttura.
- Lo stelo si è dimostrato sicuro sia in termini tensionali sia in termini di instabilità elastica.