

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Scienze Statistiche  
Corso di Laurea Magistrale in  
Scienze Statistiche



## **Market Timing e Regressione Quantilica: un'applicazione sui mutual fund americani**

Relatore: Prof. Massimiliano Caporin  
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureanda: Giulia Parenti  
Matricola N. 1128089

Anno Accademico 2017/2018



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Il Market Timing</b>	<b>7</b>
1.1 Definizioni . . . . .	7
1.2 Modelli e metodi esistenti . . . . .	8
1.2.1 Modello di Treynor-Mazuy . . . . .	8
1.2.2 Modello di Henriksson-Merton . . . . .	10
<b>2 Regressione quantilica</b>	<b>23</b>
2.1 Overview e definizioni . . . . .	24
2.2 Regression Quantile . . . . .	26
2.2.1 Proprietà della Quantile Regression . . . . .	27
2.2.2 Inferenza e proprietà asintotiche . . . . .	29
2.3 Regressione quantilica non parametrica . . . . .	30
2.4 Esempio di utilizzo della regressione quantilica . . . . .	33
<b>3 Dati utilizzati</b>	<b>39</b>
3.1 Descrizione . . . . .	39
3.2 Analisi Esplorativa . . . . .	46
<b>4 Analisi e modellazione dei dati</b>	<b>55</b>
4.1 Modelli semplici di Timing . . . . .	55
4.2 Studio della componente di volatilità . . . . .	66
4.3 Modelli di Timing non parametrici . . . . .	76
<b>5 Conclusioni</b>	<b>81</b>

<b>A Appendice</b>	<b>83</b>
A.1 Modello APARCH - Asymmetric Power ARCH . . . . .	83
A.2 Le finestre temporali per le stime rolling . . . . .	86
<b>Bibliografia</b>	<b>87</b>

# Introduzione

E' possibile anticipare il mercato azionario? Con quanta frequenza? Con quanto margine? Chi può farlo? Chi ci è riuscito? Queste sono solo alcune domande che un investitore, un manager potrebbe porsi di fronte a particolari eventi borsistici, alle news relative a crolli di aziende ritenute solide. Le crisi finanziarie degli ultimi anni hanno lasciato diversi strascichi nei paesi in cui hanno colpito: gli Stati Uniti in merito alla cosiddetta "*Crisi dei Subprime*" (2007-2009), l'Eurozona in merito alla "*Crisi del debito sovrano europeo*" (2010-2011). Tuttavia, non sono solo le crisi che influenzano le borse di tutto il mondo: basta una semplice news, un semplice evento, almeno nel breve periodo, a spostare gli equilibri del mercato. E quindi ci si chiede: è possibile prevedere in anticipo che il mercato azionario cambierà? Il *Market Timing* tenta di farlo. E, nel caso che viene presentato nella tesi, i *managers dei mutual fund* ci sono riusciti?

In questa tesi viene, quindi, studiato l'andamento di 20 mutual fund americani di tipo Large Value (secondo la classificazione di Morning Star), nel periodo 01/01/2007 - 31/12/2017. L'effettiva presenza di Market Timing nel periodo viene studiata mediante *Quantile Regression* al fine di valutare l'andamento non sulla media della distribuzione dei rendimenti dei fondi, ma su specifici quantili. Viene fatto ciò al fine di vedere se gli andamenti più estremi dei rendimenti dei vari fondi di investimento sono dovuti all'utilizzo di tecniche di timing. Per ogni fondo, quindi, verranno stimati preliminarmente i modelli di timing più conosciuti, quello di Treynor-Mazuy (1966), e quello di Henriksson-Merton (1981), che verranno poi studiati su determinati quantili al fine di osservare l'andamento dei coefficienti stimati sulla distribuzione dei rendimenti di ciascun fondo. Quindi, gli stessi modelli verranno applicati alle

serie depurate dalla volatilità, con lo scopo di osservare eventuali differenze nelle stime dei coefficienti.

Questo lavoro di tesi viene diviso in più capitoli: nel 1<sup>o</sup> capitolo viene introdotto il concetto di Market Timing e vengono esposti i 2 modelli cardine, ovvero i modelli di Treynor-Mazuy e di Henriksson-Merton. Nel 2<sup>o</sup> capitolo viene invece esposta la metodologia utilizzata per le analisi, ovvero la *Quantile Regression*, la quale viene poi distinta in due differenti metodologie: la regressione quantilica parametrica e non parametrica. Nel 3<sup>o</sup> capitolo vengono quindi descritti i dati utilizzati, ovvero i mutual fund considerati, mediante analisi esplorative e semplici statistiche di base. Nel 4<sup>o</sup> capitolo vengono analizzati e modellati i dati, con l'obiettivo di vedere se effettivamente c'è stato timing nel periodo considerato. Nel 5<sup>o</sup> capitolo vengono quindi stese le conclusioni di questo elaborato di tesi.

# Capitolo 1

## Il Market Timing

### 1.1 Definizioni

Merton, nel suo primo articolo sul Market Timing del 1981, vuole fornire un test relativo all'Ipotesi dei Mercati Efficienti che, nella formulazione di Fama del 1970, afferma che un mercato è efficiente se in ogni istante il prezzo delle attività scambiate riflette pienamente tutte le informazioni disponibili per gli individui, senza alcuna possibilità di arbitraggio. Quindi, se i partecipanti al mercato sono razionali, come afferma Merton, una condizione necessaria al fine di avere performance superiori, è che i previsori abbiano abilità predittive "superiori". Queste abilità superiori possono essere divise in 2 componenti distinte: 1 - *Microforecasting*, ovvero prevedere i movimenti dei prezzi di singoli stocks scelti; 2 - *Macroforecasting/Market Timing*, ovvero prevedere il movimento dei prezzi del mercato azionario in generale.

Mediante il *microforecasting* si tenta di individuare quali titoli presentano un valore atteso che giace significativamente sopra/sotto la "*Security Market Line*".

Mediante il *Market Timing* si tenta, invece, di valutare quando i titoli sono stati sotto/sopra-valutati rispetto ad un "fixed income security". Un *market timer* prova ad individuare quando le azioni sovra-performeranno le obbligazioni, e quando le obbligazioni sovraperformano le azioni.

Uno dei risultati principali dello studio di Merton sul market timing e

le sue proprietà è che l'andamento dei rendimenti dovuto ad un market timing proficuo è assimilabile all'andamento dei rendimenti che seguono una specifica strategia di opzione, dove il prezzo implicito pagato per le azioni è più basso di quello giusto o del valore di mercato. Quindi, i pattern dei rendimenti derivanti da un market timing proficuo sarebbero indistinguibili da quelli di queste strategie option se i managers di quest'ultime riuscissero ad individuare e cogliere le opzioni "sottovalutate". Come afferma Merton, usando questa corrispondenza isomorfica, è possibile determinare il valore di queste abilità di market timing.

Prima di Merton, anche gli studiosi Treynor e Mazuy si sono posti la stessa domanda in relazione ai manager dei fondi comuni di investimento (*mutual fund*): "I manager dei mutual fund stanno anticipando con successo i maggiori cambiamenti nel mercato azionario?". Tuttavia, entrambi sono giunti alla medesima conclusione in merito ai campioni utilizzati nei rispetti studi, ovvero che non ci sono evidenze che supportano la credenza che i manager dei mutual fund possono superare il mercato.

Ma quali sono i modelli cardine su cui si basano tutte le successive declinazioni di test che studiano le abilità relative al market timing? I modelli "cardine" del market timing sono i modelli di Treynor-Mazuy (1966), Henriksson-Merton (1981).

## 1.2 Modelli e metodi esistenti

### 1.2.1 Modello di Treynor-Mazuy

Nella formulazione del proprio modello, Treynor e Mazuy (1966) hanno ragionato sul fatto che, benchè la maggior parte degli stocks tende a muoversi insieme in alto e in basso, esistono alcuni stock più volatili di altri. Quindi, nel momento in cui si parla delle abilità dei manager di anticipare il mercato, essenzialmente si intende che essi riescono ad anticipare quando il mercato generale azionario crescerà o scenderà, aggiustando di conseguenza la composizione dei propri portafogli. Facendo ciò, tuttavia, si va ad impattare anche sulla volatilità del portafoglio stesso, in quanto, se essi prevedono che il mercato sta per cadere, sposteranno la composizione del portafoglio



da stocks più volatili a stocks meno volatili. Al contrario, se prevedono che il mercato salirà, sposteranno la composizione del portafoglio da stocks meno volatili a stocks più volatili in modo da avere più margine di guadagno. Quindi, Treynor e Mazuy, allo scopo di testare l'ipotesi se effettivamente i managers dei mutual fund hanno anticipato o meno il mercato, si sono posti un'ulteriore domanda: "Ci sono evidenze circa il fatto che la volatilità del fondo è maggiore negli anni in cui il mercato ha fatto meglio rispetto agli anni in cui il mercato ha fatto peggio?". Ed è effettivamente su questa ultima domanda che costruiscono il proprio test per le abilità di market timing.

Quindi, il modello di market timing di Treynor-Mazuy può essere così formulato:

$$R_p - R_f = \alpha + \beta(R_b - R_f) + \gamma(R_b - R_f)^2 + \varepsilon_p$$

dove:

$R_p$  = serie dei rendimenti del portafoglio considerato

$R_b$  = serie dei rendimenti del benchmark

$R_f$  = serie dei rendimenti di un titolo privo di rischio

$$\beta = \frac{Cov(R_p, R_b)}{Var(R_b)}$$

$\gamma$  = coefficiente di timing

Come è possibile notare, il modello di T-M non è altro che un'estensione del CAPM (Capital Asset Pricing Model) che risulta essere così formulato:

$$R_p - R_f = \alpha + \beta(R_b - R_f) + \varepsilon_p$$

dove:

$R_p$  = serie dei rendimenti del portafoglio considerato

$R_b$  = serie dei rendimenti del benchmark

$R_f$  = serie dei rendimenti di un titolo privo di rischio

$$\beta = \frac{Cov(R_p, R_b)}{Var(R_b)}$$

il cui è scopo è quello di determinare se esiste una relazione tra il rendimento di un titolo, o di un portafoglio, e la sua rischiosità, la quale viene misurata mediante il coefficiente  $\beta$ .

La componente quadratica aggiuntiva all'interno del modello di T-M è associata al coefficiente  $\gamma$  che, se assume valore positivo, indica che le strategie di investimento dei managers mostrano abilità di market timing.

Perchè è stata scelta la componente quadratica della componente che riflette il mercato azionario come *proxy* delle abilità di timing dei managers? Essa è stata scelta perchè, come detto in precedenza, se i manager riescono ad anticipare correttamente i movimenti del mercato, essi cambieranno continuamente la composizione del proprio portafoglio. Ciò provoca, di conseguenza, anche un cambiamento nella volatilità dello stesso in quanto, a seconda delle previsioni, i cambiamenti della composizione del portafoglio possono portare alla scelta di asset più o meno volatili (e di conseguenza sicuri).

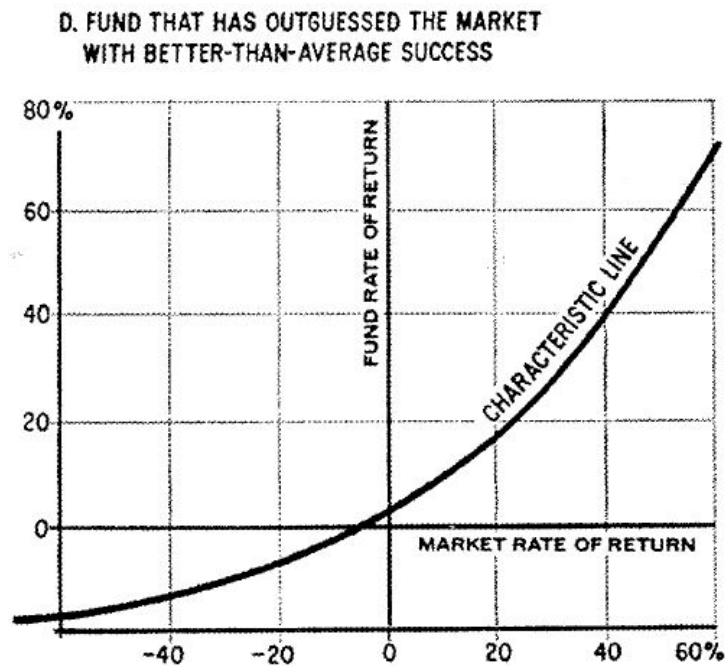
Probabilmente i manager non saranno mai in grado di anticipare il mercato in maniera perfetta, ma possono possedere, tuttavia, dei *poteri predittivi*. Infatti, migliore è il rendimento di mercato, maggiore è la probabilità che i manager abbiano anticipato le buone performance e incrementato, di conseguenza, la volatilità del proprio fondo scegliendo appropriatamente diversi asset. Ciò porta, quindi, ad una graduale transizione della volatilità del fondo da una pendenza schiacciata ad una ripida, con la pendenza che varia fra questi due estremi in maniera più o meno continua, ed ottenendo una curva liscia.

La chiave del modello di Treynor-Mazuy è semplice: l'unico modo che i gestori dei mutual fund hanno per ottenere benefici è quello di variare la volatilità del fondo sistematicamente (la strategia è quella riportata nella figura sottostante e descritta nel proprio articolo da Treynor-Mazuy (1966)) poichè, se essi hanno anticipato correttamente il mercato molto spesso, allora la linea caratteristica del mercato non sarà più dritta.

Il grado di curvatura della linea caratteristica dipende di quanto i manager riescono a *battere* la propria previsione.

## 1.2.2 Modello di Henriksson-Merton

Il modello di H-M si basa sul precedente modello di market timing proposto da Merton nel 1981, in cui si valutava sia lo scenario che le azioni sovra-



**Figura 1.1:** Funzione caratteristica ottimale del market timer - Treynor, J., and Mazuy, F., 1966

performassero le obbligazioni, sia che le obbligazioni sovra-performassero le azioni. Tuttavia tale modello non riusciva a prevedere la magnitudo di queste *capacità superiori*: a tale scopo questo modello è stato utilizzato per costruire 2 procedure, una parametrica e una non parametrica, che testano le abilità previsionali superiori dei manager. Evidenze significative circa l'effettiva presenza di abilità previsionali superiori violerebbero l'Ipotesi dei Mercati Efficienti, in cui si afferma che le info a disposizione per gli investitori sono le stesse e uguali per tutti.

Le abilità superiori dei manager, come detto in precedenza, si basano su abilità predettive che possono essere divise in due componenti: la prima relativa al "microforecasting" (o "security analysis"), la seconda relativa al "macroforecasting" (o "market timing").

Molti studi sono stati fatti sul market timing, ma tutti facevano ipotesi molto più qualitative sulle previsioni relative al market timing. Tuttavia il modello di H-M presenta delle componenti innovative: prima di tutto viene

assunto che i manager possano prevedere sia  $Z_M(t) > R(t)$ , sia  $Z_M(t) \leq R(t)$ .

Sia inoltre

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } Z_M(t) > R(t) \\ 0 & \text{se } Z_M(t) \leq R(t) \end{cases}$$

dove  $\gamma(t)$  è la variabile relativa alla previsione del market timer. Vengono definite, quindi, le probabilità di  $\gamma(t)$  condizionatamente al rendimento realizzato sul mercato:

$$p_1(t) \equiv \text{prob}[\gamma(t) = 0 | Z_M(t) \leq R(t)]$$

$$1 - p_1(t) \equiv \text{prob}[\gamma(t) = 1 | Z_M(t) \leq R(t)]$$

e

$$p_2(t) \equiv \text{prob}[\gamma(t) = 1 | Z_M(t) > R(t)]$$

$$1 - p_2(t) \equiv \text{prob}[\gamma(t) = 0 | Z_M(t) > R(t)]$$

dove  $p_1(t)$  è la probabilità condizionata di una corretta previsione dato  $Z_M(t) \leq R(t)$ , e  $p_2(t)$  è la probabilità condizionata di una corretta previsione dato  $Z_M(t) > R(t)$ . Inoltre viene assunto che nessuna delle 2 probabilità condizionate, ed i rispettivi complementi ad 1, dipende dalla grandezza  $|Z_M(t) - R(t)|$ , ma che dipende solo dal verificarsi o meno che  $Z_M(t) > R(t)$ . Inoltre è stato mostrato che  $p_1(t) + p_2(t)$  è una statistica sufficiente per la valutazione delle abilità previsive dei market timer.

Partendo da questa formulazione del problema di timing, Henriksson e Marton sono riusciti a svincolarsi dall'assunzione di una struttura CAPM. Come anticipato in precedenza, sono stati proposti due test per valutare le abilità previsive dei market timer:

1- *Test non parametrico*: non richiede alcuna assunzione né per la distribuzione dei rendimenti, né per il modo in cui sono stati formati i prezzi dei singoli titoli, purchè le previsioni del market timer siano osservabili.

2- *Test parametrico*: permette di identificare il contributo separato dovuto a micro- e macro-forecasting usando solo come dati gli eccessi di rendimento realizzati sul portafoglio e sul mercato.

### Test non parametrico

Una condizione necessaria affinché le previsioni del market timer abbiano valore è che  $p_1(t) + p_2(t) \neq 1$ , e una condizione sufficiente affinché queste abbiano valore positivo è che  $p_1(t) + p_2(t) > 1$ . Ciò si rende necessario per il fatto che Merton ha dimostrato che una condizione necessaria e sufficiente affinché la previsione del market timer non abbia valore, e quindi nessun investitore modificherà la propria stima iniziale circa la distribuzione dei rendimenti di mercato, è che  $p_1(t) + p_2(t) = 1$ . Previsioni con  $p_1(t) + p_2(t) < 1$  sono sistematicamente errate poiché le previsioni contrarie  $p'_1(t) = 1 - p_1(t)$  e  $p'_2(t) = 1 - p_2(t)$  soddisferanno sempre  $p'_1(t) + p'_2(t) > 1$ .

Le abilità previsive del market timer vengono testate mediante questo sistema d'ipotesi:

$$\begin{cases} H_0 : p_1(t) + p_2(t) = 1 & \text{(abilità previsive non presenti)} \\ H_1 : p_1(t) + p_2(t) \neq 1 & \text{(abilità previsive presenti)} \end{cases}$$

Raramente  $p_1(t), p_2(t)$ , o la loro somma sono osservabili: di solito queste probabilità vengono stimate ed utilizzate per determinare quando è possibile rifiutare o meno l'ipotesi nulla  $H_0$ .

Così costruito, questo test sfrutta il vantaggio derivante dal fatto che le probabilità condizionate di una corretta stima sono statistiche sufficienti per misurare le abilità previsive, e non dipendono dalla distribuzione dei rendimenti sul mercato  $f_z(Z_M(t))$ . Come affermano H-M: "L'essenza di questo test è di determinare la probabilità che un determinato risultato proveniente dal nostro campione provenga da una popolazione che soddisfa l'ipotesi nulla".

Al fine di determinare questa probabilità, si procede come descritto di seguito:

1. Vengono definite le seguenti variabili:

- $N_1 = \#$  osservazioni quando  $Z_M \leq R$ ;
- $N_2 = \#$  osservazioni quando  $Z_M > R$ ;
- $N \equiv N_1 + N_2 = \#$  totale delle osservazioni;
- $n_1 = \#$  previsioni corrette quando  $Z_M \leq R$ ;
- $n_2 = \#$  previsioni non corrette quando  $Z_M > R$ ;
- $n \equiv n_1 + n_2 = \#$  di volte in cui viene predetto  $Z_M \leq R$ ;

2. Per definizione:  $E(\frac{n_1}{N_1}) = p_1$  e  $E(\frac{n_2}{N_2}) = 1 - p_2$ ;

3. Da come è costruita l'ipotesi nulla si ha che:

$$E(\frac{n_1}{N_1}) = p_1 = 1 - p_2 = E(\frac{n_2}{N_2}) \Rightarrow E[\frac{(n_1+n_2)}{(N_1+N_2)}] = E(\frac{n}{N}) \stackrel{H_0}{=} p_1 \equiv p;$$

$\frac{n_1}{N_1}$  e  $\frac{n_2}{N_2}$  possiedono lo stesso valore atteso sotto  $H_0$ , ed entrambe provengono da sotto-campioni indipendenti: di conseguenza, solo una delle due deve essere stimata.

Sia  $n_1$  che  $n_2$  sono somme di variabili casuali IID (Independent Identically Distributed) con distribuzioni binomiali; di conseguenza, la probabilità che  $n_i = x$  da un campione di dimensione  $N_i$  è:

$$p(n_i = x | N_i, p) = \binom{N_i}{x} p^x (1-p)^{N_i-x}; \quad i = 1, 2$$

Data  $H_0$ , è possibile usare il teorema di Bayes per determinare la probabilità  $P(n_1 = x | N_1, N_2, n)$ . Si denoti con **A** l'evento che il market timer prevede  $m$  volte che  $Z_M \leq R$  e l'evento che, delle volte in cui prevede che  $Z_M \leq R$ , è corretto  $x$  volte e incorretto  $m - x$  volte come **B**. Allora  $P(n_1 = x | N_1, N_2, m) = P(B|A)$ , e per il teorema di Bayes si ha:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B+A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{m-x} p^x (1-p)^{N_1-x} p^{m-x} (1-p)^{N_2-m+x}}{\binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}} \\ &= \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{m-x}}{\binom{N}{m}} \end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi nulla, quindi, la distribuzione di probabilità per  $n_1$  non è altro che una *Ipergeometrica*( $N, N_1, m$ ), indipendente da  $p_1$  e  $p_2$ .

Il range di valori ammissibili per  $n_1$  è dato da:  $\underline{n}_1 \equiv \max(0, n - N_2) \leq n_1 \leq \min(N_1, n) \equiv \bar{n}_1$ .

Le 2 equazioni sovra-descritte possono essere utilizzate per costruire gli intervalli di confidenza utili per testare l'ipotesi nulla di assenza di abilità previsive.

Relativamente al test a 2 code, con un livello di confidenza  $\mathbf{c}$ ,  $H_0$  verrà rifiutata se  $n_1 \geq \bar{x}(c)$  o se  $n_1 \leq \underline{x}(c)$ , dove  $\bar{x}(c)$  e  $\underline{x}(c)$  sono il risultato delle seguenti equazioni:

$$\bar{x}(c) : \sum_{x=\bar{x}}^{\bar{n}_1} \binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x} / \binom{N}{n} = (1-c)/2$$

e

$$\underline{x}(c) : \sum_{x=\underline{x}}^x \binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x} / \binom{N}{n} = (1-c)/2$$

Relativamente al test ad 1 coda, con un livello di confidenza  $\mathbf{c}$ ,  $H_0$  verrà rifiutata se  $n_1 \geq x^*(c)$ , dove  $x^*(c)$  è il risultato della seguente equazione:

$$x^*(c) : \sum_{x=x^*}^{\bar{n}_1} \binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x} / \binom{N}{n} = (1-c)$$

Poichè  $x^*(c) \leq \bar{x}(c)$ , con il test unilaterale si è maggiormente portati a rifiutare  $H_0$  rispetto al test bilaterale, per ogni fissato livello di confidenza  $c$ .

Il calcolo degli intervalli di confidenza mediante queste 2 formule risulta semplice per campioni aventi una dimensione ridotta, mentre risulta essere più problematico per campioni grandi. Tuttavia, per grandi campioni, la distribuzione ipergeometrica può essere ben approssimata da una distribuzione Normale, i cui parametri sono la media e la varianza della distribuzione ipergeometrica, ovvero:

$$E(n_1) = \frac{nN_1}{N} \quad \wedge \quad \sigma^2(n_1) = \frac{n_1N_1(N-N_1)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

La procedura così proposta da H-M permette di prendere in esame la possibilità che il market timer non possieda le stesse abilità nel prevedere aumenti/ribassi del mercato.

### Test parametrico

Il test non parametrico, per il suo utilizzo, ha come requisito che le previsioni del market timer siano osservabili. Tuttavia, raramente queste sono osservabili nel momento in cui si tenta di valutare le performance di un portafoglio, e quindi vengono stimate. Sotto certe condizioni è possibile fare inferenza sulle previsioni del manager utilizzando la sola serie dei rendimenti, ma spesso queste stime saranno distorte, soprattutto quando le posizioni dei manager sono influenzate dal microforecasting sui singoli titoli.

A tale scopo, il test parametrico verifica le abilità di timing utilizzando i soli dati dei rendimenti. Tuttavia ciò ha un costo, ovvero viene richiesta l'assunzione di uno specifico processo generatore per i rendimenti sui titoli. Viene, quindi, testata l'ipotesi congiunta di non presenza di abilità di market timing e dell'assunto processo generatore dei rendimenti sui titoli.

Negli studi precedenti sulle abilità di market timing, veniva sempre assunto che l'andamento dei rendimenti del titolo in equilibrio fosse consistente con la *Security Market Line* del CAPM, ovvero:

$$Z_p(t) - R(t) = \alpha + \beta x(t) + \varepsilon(t)$$

dove:

$Z_p(t)$  = rendimento realizzato sul portafoglio;

$x(t) = Z_M(t) - R(t)$  = rendimento realizzato in eccesso sul mercato

$\varepsilon(t)$  = variabile casuale residuale che è assunta soddisfare le seguenti condizioni:

- $E[\varepsilon(t)] = 0$
- $E[\varepsilon(t)|x(t)] = 0$
- $E[\varepsilon(t)|\varepsilon(t-i)] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$



Tuttavia tale formulazione non permette di distinguere se l'incremento nelle performance è dovuto alla selezione dei titoli o alle abilità di market timing. Il test parametrico esposto di seguito permette di fare ciò.

Come nei precedenti studi, anche per il test parametrico viene assunto che i titoli sono prezzati secondo il CAPM. Inoltre viene assunto che i differenti livelli di rischio sistematici per il portafoglio vengono scelti dal previsore. Nello specifico caso studiato da H-M, sono stati assunti due livelli di rischio target, a seconda che il rendimento sul portafoglio sia predetto eccedere o meno quello sui titoli meno rischiosi. Ovvero, il manager è assunto avere un  $\beta$  target quando prevede  $Z_M(t) > R(t)$ , e un altro  $\beta$  target quando prevede  $Z_M(t) \leq R(t)$ :

$$\beta(t) = \begin{cases} \eta_1 & \text{se manager prevede } Z_M(t) \leq R(t) \\ \eta_2 & \text{se manager prevede } Z_M(t) > R(t) \end{cases}$$

dove  $\beta(t)$  è il beta del portfoglio al tempo  $t$ . Se il previsore è razionale, allora  $\eta_2 > \eta_1$ . Anche  $\beta(t)$  è una variabile casuale se non è osservabile perchè se lo fosse in ogni istante di tempo si potrebbe, allora, applicare il test non parametrico.

Sotto l'assunzione che  $\beta$  non è osservabile, sia  $\mathbf{b}$  il valore atteso (sulla previsione) non condizionato di  $\beta(t)$ . Allora:

$$b = q[p_1\eta_1 + (1 - p_1)\eta_2] + (1 - q)[p_2\eta_2 + (1 - p_2)\eta_1]$$

dove  $q$  = probabilità non condizionata (sulla previsione) che  $Z_M(t) \leq R(t)$ .

Se si definisce la variabile casuale  $\theta(t)$  come  $\theta(t) = \beta(t) - b$ , allora questa rappresenterà la componente non anticipativa di  $\beta$ , e la sua distribuzione, condizionatamente all'eccesso di rendimento realizzato sul mercato  $x(t) = Z_M(t) - R(t)$ , può essere scritta come:

- condizionatamente a  $x(t) \leq 0$ :

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}_1, \quad \text{dove}$$

$$\underline{\theta}_1 = \begin{cases} (\eta_1 - \eta_2)[1 - qp_1 - (1 - q)(1 - p_2)] & \text{con prob} = p_1 \\ (\eta_2 - \eta_1)[qp_1 + (1 - q)(1 - p_2)] & \text{con prob} = 1 - p_1 \end{cases}$$

e

- condizionatamente a  $x(t) > 0$ :

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}_2, \quad \text{dove}$$

$$\underline{\theta}_2 = \begin{cases} (\eta_2 - \eta_1)[qp_1 + (1 - q)(1 - p_2)] & \text{con prob} = p_2 \\ (\eta_1 - \eta_2)[1 - qp_1 - (1 - q)(1 - p_2)] & \text{con prob} = 1 - p_2 \end{cases}$$

Allora, il valore atteso di  $\theta$  condizionato ad  $x(t)$  è:

$$E[\theta|x] = \begin{cases} \bar{\theta}_1 = (1 - q)(p_1 + p_2 - 1)(\eta_1 - \eta_2), & \text{per } x(t) \leq 0 \\ \bar{\theta}_2 = q(p_1 + p_2 - 1)(\eta_2 - \eta_1), & \text{per } x(t) > 0 \end{cases}$$

Il rendimento per periodo sul portafoglio del previsore può essere scritto come:

$$Z_p(t) = R(t) + [b + \theta(t)]x(t) + \lambda + \varepsilon_p(t)$$

dove  $\lambda$  è l'incremento atteso al rendimento del portafoglio derivante dal microforecasting, e  $\varepsilon_p(t)$  è assunto soddisfare le condizioni standard del CAPM.

Questo modello di regressione può essere utilizzato per identificare i differenti incrementi di performance del portafoglio dovuti al microforecasting ed al market timing. In particolare, il modello di regressione può essere così scritto:

$$Z_p(t) - R(t) = \alpha + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) + \varepsilon_t$$

dove  $y_t \equiv \max[0, R(t) - Z_M(t)] = \max[0, -x(t)]$ .

Tale specificazione è dovuta al fatto che il rendimento/\$ investito in un portafoglio usando la strategia di market timing appena descritta è il medesimo che si otterrebbe perseguendo una strategia di investimento parziale di tipo option "protective put", dove per ogni dollaro investito in questa strategia,  $[p_2\eta_2 + (1 - \eta_2)\eta_1]$  dollari sono investiti nel mercato;  $(p_1 + p_2 - 1)(\eta_2 - \eta_1)$  opzioni vengono comprate con un prezzo di esercizio pari a  $R(t)$ ; il saldo viene, quindi, investito in titoli privi di rischio.

Quindi, il rendimento atteso del portafoglio, condizionatamente a  $x > 0$  può essere scritto come:

$$E(Z_p|x > 0) = R + (b + \bar{\theta}_2)E(x|x > 0) + \lambda$$

e, condizionatamente a  $x \leq 0$  può essere scritto come:

$$E(Z_p|x \leq 0) = R + (b + \bar{\theta}_1)E(x|x \leq 0) + \lambda$$

Le stime OLS di  $\beta_1$  e  $\beta_2$  provenienti da un grande campione possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} plim\hat{\beta}_1 &= \frac{\sigma_{px}\sigma_y^2 - \sigma_{py}\sigma_{xy}}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \\ &= b + \bar{\theta}_2 \\ &= p_2\eta_2 + (1 - \eta_2)\eta_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
plim\hat{\beta}_2 &= \frac{\sigma_{py}\sigma_x^2 - \sigma_{px}\sigma_{xy}}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \\
&= \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1 \\
&= (p_1 + p_2 - 1)(p_2 - \eta_1)
\end{aligned}$$

In riferimento alla formula sovrastante, si ottiene che  $plim\hat{\beta}_1 = \mathbb{E}[\beta(t)|x(t) > 0]$  che è uguale alla frazione nel portafoglio di mercato nella strategia di tipo option;  $\hat{\beta}_2$  rappresenta, invece, le abilità di market timing del manager. Con riferimento alla replicazione della strategia di investimento di tipo option, si ottiene che  $plim\hat{\beta}_2$  è uguale al numero opzioni "put" free sul mercato fornite dalle abilità di market timing dei manager. In Henriksson (1984), il valore delle abilità di market timing per dollaro di attività gestite è pari a  $(p_1 + p_2 - 1)(\eta_2 - \eta_1)g(t)$ , dove  $\mathbf{g}(t)$  è il prezzo di mercato di tale opzione put. Di conseguenza,  $\hat{\beta}_2g(t)$  è una stima del valore delle abilità di market timing del manager. Un valore negativo di  $\beta_2$  implicherebbe un valore negativo per il market timing, anche se, tuttavia, un reale valore negativo di  $\hat{\beta}_2$  violerebbe le assunzioni di razionalità descritte in precedenza ( $p_1(t) + p_2(t) \geq 1$  e  $\eta_2 \geq \eta_1$ ). Come  $\beta_2$  descrive il market timing, mediante l'equazione descritta in precedenza è possibile stimare l'impatto che il microforecasting ha sull'incremento delle performance del portafoglio. In particolare, per grandi campioni, la stima OLS di  $\alpha$  è:

$$plim\hat{\alpha} = \mathbb{E}(Z_p) - R - plim\hat{\beta}_1\bar{x} - plim\hat{\beta}_2\bar{y} = \lambda \quad (1.1)$$

Relativamente al termine d'errore, H-M hanno dimostrato che  $\varepsilon_p$  contiene ogni errore risultante dal microforecasting. In particolare, se un previsore segue il compartamento avente due discreti livelli di rischio  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , allora l'attuale  $\beta(t)$  non sarà mai uguale alla stima  $\hat{\beta}$ , a meno che il manager non sia un perfetto previsore.

Se si definiscono le seguenti variabili:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 & \text{se } x \leq 0 & \text{la stima del market timer è non corretta} \\ \Delta_1 = 0 & & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_1 = 1 & \text{se } x \leq 0 & \text{la stima del market timer è corretta} \\ \nabla_1 = 0 & & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_2 = 1 & \text{se } x > 0 & \text{la stima del market timer è non corretta} \\ \Delta_2 = 0 & & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_2 = 1 & \text{se } x > 0 & \text{la stima del market timer è corretta} \\ \nabla_2 = 0 & & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza, avremo che:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_1) &= p_1 & \mathbb{E}(\nabla_1) &= 1 - p_1 \\ \mathbb{E}(\Delta_2) &= 1 - p_2 & \mathbb{E}(\nabla_2) &= p_2 \end{aligned}$$

Per ogni periodo, la stima del termine d'errore  $\varepsilon$  può essere scritta come:

$$\varepsilon = \Delta_1(1-p_1)(\eta_1-\eta_2)x_1 - \nabla_1 p_1(\eta_1-\eta_2)x_1 + \Delta_2 p_2(\eta_1-\eta_2)x_2 - \nabla_2(1-p_2)(\eta_1-\eta_2)x_2 + \varepsilon_p \quad (1.2)$$

Per definizione il microforecasting è indipendente da  $x$ , quindi anche  $\varepsilon_p$  è indipendente da  $x$ . Per la Legge Dei Grandi Numeri, al crescere di  $N$ , si ha che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sum \varepsilon}{N} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sum \varepsilon_p}{N} \right] = 0 \quad (1.3)$$

Quindi, per grandi campioni, il coefficiente associato alla stima OLS, più l'eccesso di rendimento realizzato sul mercato, producono una stima non distorta dei rendimenti del portafoglio.



## Capitolo 2

# Regressione quantilica

Un passaggio famoso di Galton (Koenker, 2000) sembra preludere l'impiego della regressione quantilica nello studio dei fenomeni:

*"[who] limited their inquiries to Averages, and do not seem to revel in more comprehensive views. Their souls seem as dull to the charm of variety as that of a native of one of our at English counties, whose retrospect of Switzerland was that, if the mountains could be thrown into its lakes, two nuisances would be got rid of at once. [ Natural Inheritance, p. 62]"*

Galton, con queste parole, sta affermando che, benchè la maggior parte degli studiosi, degli statistici studi come la *media* di determinate variabili dipende dai valori di altre variabili condizionate, essi stanno trascurando, ignorando il "*fascino della varietà*" nelle questioni statistiche. Come afferma Koenker, la regressione quantilica offre l'opportunità di dare una vista più completa al panorama statistico e alle relazioni fra le variabili stocastiche.

Anche Mosteller and Tukey (Koenker, 2000) accennano all'utilizzo della regressione quantilica nel loro elaborato del 1977:

*"What the regression curve does is give a grand summary for the avera-*

*ges of the distributions corresponding to the set of  $x$ 's. We could go further and compute several different regression curves corresponding to the various percentage points of the distributions and thus get a more complete picture of the set. Ordinarily this is not done, and so regression often gives a rather incomplete picture. Just as the mean gives an incomplete picture of a single distribution, so the regression curve gives a correspondingly incomplete picture for a set of distributions."*

Ma, allora, perchè il metodo di stima dei minimi quadrati ordinari risulta il metodo più utilizzato in statistica? Cosa lo rende così famoso e di successo? Sicuramente il fatto che gli stimatori lineari sono facilmente computazionalmente trattabili. Ma anche il fatto che gli stimatori OLS godono di proprietà ottimali se gli errori sono normalmente distribuiti. Infine, i metodi che sfruttano i minimi quadrati forniscono un approccio generale alla stima delle funzioni relative alla media condizionata.

Tuttavia, la media non risulta essere sufficiente dal punto di vista statistico. Misure di asimmetria, kurtosi, boxplot, istogrammi possono fornire un aiuto nell'acquisire ulteriori informazioni, evidenze. Tali informazioni possono essere sfruttate nella regressione quantilica.

## 2.1 Overview e definizioni

Nel 1978, Koenker e Basset elaborano un nuovo metodo che cerca di superare i problemi propri dello stimatore dei minimi quadrati classico: la **Regressione Quantile**. Questo metodo permette di fornire un'analisi della relazione che lega la variabile risposta alle variabili esplicative molto più esaustiva di quella che si otterrebbe applicando ai dati un modello di tipo OLS. La regressione quantile, proposta da Koenker e Basset(1978), non è altro che una estensione del modello OLS e permette di fare sui quantili ciò che viene fatto sulla media dal metodo OLS. In particolare, come per la stima OLS, anche nella regressione quantilica i coefficienti stimati vengono utilizzati per stimare i valori dei quantili condizionatamente alle covariate. Ciò permette di considerare il comportamento della variabile risposta sulla sua intera distribuzione e, risulta essere uno stimatore particolarmente utile nello studio



delle serie storiche finanziarie in quanto robusto alle tipiche caratteristiche di queste: asimmetria, Kurtosi, eteroschedasticità.

Si consideri il problema di stimare un vettore di parametri di regressione sconosciuti,  $\beta$ , da un campione di osservazioni indipendenti provenienti dalle variabili casuali  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ , distribuite secondo:

$$P(Y_t < y) = F(y - x_t\beta), \quad t = 1, \dots, T \quad (2.1)$$

dove  $x_t : t = 1, \dots, T$  è la riga di una sconosciuta matrice disegno ( $T \times K$ ), e la forma di  $F$  è sconosciuta. Se  $F$  fosse conosciuta, lo stimatore di massima verosimiglianza risulta essere il più efficiente nel senso di Cramèr-Rao, e quando  $F \sim N(\mu, \sigma^2)$ , lo stimatore OLS di  $\beta$  è lo stimatore a minima varianza nella classe degli stimatori non distorti. Tuttavia, l'estrema sensibilità dello stimatore OLS agli outlier, lo rende uno stimatore scarsamente efficiente nelle situazioni in cui la variabile risposta non segue una distribuzione gaussiana, per esempio quando possiede una distribuzione a code lunghe.

Qualsiasi variabile reale  $X$  può essere caratterizzata dalla sua funzione di distribuzione,

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (2.2)$$

mentre per ogni  $0 < \tau < 1$  avremo

$$F^{-1}(\tau) = \text{inf} x : F(x) \geq \tau \quad (2.3)$$

è il  $\tau$ -esimo quantile di  $X$ .

I quantili derivano da un semplice problema di ottimizzazione. In particolare, considerando un semplice problema decisionale, ovvero che la stima di un punto è richiesta per una variabile casuale con funzione di distribuzione  $F$ , si ha che se la perdita viene descritta dalla funzione

$$\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0)) \quad (2.4)$$

per qualche  $\tau \in (0, 1)$ , è necessario trovare  $\hat{x}$  che minimizza la perdita attesa. Quindi si cerca di minimizzare

$$\mathbb{E}_{\rho_\tau}(X - \hat{x}) = (\tau - 1) \int_{-\infty}^{\hat{x}} (x - \hat{x}) dF(x) + \tau \int_{\hat{x}}^{\infty} (x - \hat{x}) dF(x) \quad (2.5)$$

Differenziando rispetto a  $\hat{x}$  si ottiene:

$$0 = (1 - \tau) \int_{-\infty}^{\hat{x}} dF(x) - \tau \int_{\hat{x}}^{\infty} dF(x) = F(\hat{x}) - \tau \quad (2.6)$$

Poichè  $\mathbb{F}$  è monotona, qualsiasi elemento di  $\{x : F(x) = \tau\}$  minimizza la perdita attesa. Quando la soluzione è unica, avremo  $\hat{x} = F^{-1}(\tau)$ ; altrimenti, avremo un "intervallo di quantili" dai quali verrà scelto l'elemento più piccolo.

Quando, al posto di  $\mathbb{F}$ , viene usata la funzione di distribuzione empirica  $\mathbb{F}_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$ , verrà scelto quell'  $\hat{x}$  che minimizza la perdita attesa

$$\int \rho_\tau(x - \hat{x}) dF_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_\tau(x_i - \hat{x}) = \min! \quad (2.7)$$

che porta al quantile  $\tau$ -esimo del campione. L'innovazione portata da Koenker e Basset è la sostituzione del concetto di **ordinamento** con quello di **ottimizzazione**

## 2.2 Regression Quantile

Sia  $\{y_t : t = 1, \dots, T\}$  un campione casuale semplice da una variabile casuale  $Y$  avente distribuzione  $F$ . Allora, il quantile  $0 < \theta < 1$  del campione potrà essere definito come una qualsiasi soluzione del problema di minimizzazione seguente:

$$\min_{b \in \mathbb{R}} \left[ \sum_{t \in \{t: y_t \geq b\}} \theta |y_t - b| + \sum_{t \in \{t: y_t < b\}} (1 - \theta) |y_t - b| \right] \quad (2.8)$$

Gli outlier, come afferma Huber, sono difficili da identificare, così come risulta ambiguo estendere al modello lineare il concetto di quantile inteso come un ordinamento delle osservazioni di un campione. Tuttavia, generalizzando il modello di minimo descritto nella formula sovrastante (2.8), Koenker e Basset sono riusciti a risolvere tale problematica. Sia  $\{x_t : t = 1, \dots, T\}$  una sequenza di  $K$  vettori provenienti da una matrice disegno, e  $\{y_t : t = 1, \dots, T\}$  un campione casuale sul processo di regressione  $u_t = y_t - x_t \beta$  avente funzione distributiva  $F$ . Allora, il quantile di regressione  $0 < \theta < 1$  del campione

potrà essere definito come una qualsiasi soluzione del seguente problema di minimizzazione:

$$\min_{b \in \mathbb{R}^K} \left[ \sum_{t \in \{t: y_t \geq b\}} \theta |y_t - b| + \sum_{t \in \{t: y_t < b\}} (1 - \theta) |y_t - b| \right] \quad (2.9)$$

### 2.2.1 Proprietà della Quantile Regression

La regressione quantilica gode di proprietà importanti che rendono preferibile questo metodo rispetto al più famoso modello OLS. Sia  $\beta^*(\theta)$ , un elemento del set di soluzioni  $B^*(\theta)$  del problema di minimizzazione della regressione quantilica: se  $\beta^*(\theta, y, X) \in B^*(\theta, y, X)$ , allora

1.  $\beta^*(\theta, \lambda y, X) = \lambda \beta^*(\theta, y, X)$ ,  $\lambda \in [0, \infty)$ ,
2.  $\beta^*(1 - \theta, \lambda y, X) = \lambda \beta^*(\theta, y, X)$ ,  $\lambda \in (-\infty, 0]$ ,
3.  $\beta^*(\theta, y + X\lambda, X) = \beta^*(\theta, y, X) + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^K$ ,
4.  $\beta^*(\theta, y, XA) = A^{-1} \beta^*(\theta, y, X)$ ,  $A_{K \times K}$  matrice non singolare,

Queste proprietà vengono provate dal fatto che: sia

$$\begin{aligned} \psi(b; \theta, y, X) &= \sum_{\{t: y_t > x_t b\}} \theta |y_t - x_t b| + \sum_{\{t: y_t < x_t b\}} (1 - \theta) |y_t - x_t b| \\ &= \sum_{t=1}^T [\theta - 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(y_t - x_t b)] |y_t - x_t b| \end{aligned}$$

dove  $\operatorname{sgn}(u) = -1, 0, 1$  a seconda che  $u \leq 0$ . Allora:

1.  $\lambda \psi(b; \theta, y, X) = \psi(\lambda b; \theta, \lambda y, X)$ ,  $\lambda \in [0, \infty)$ ,
2.  $-\lambda \psi(b; \theta, y, X) = \psi(\lambda b; 1 - \theta, \lambda y, X)$ ,  $\lambda \in (-\infty, 0]$ ,
3.  $\psi(b; \theta, y, X) = \psi(b + \gamma; y + X\gamma, X)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^K$ ,
4.  $\psi(b; y, X) = \psi(A^{-1}b; \theta, y, XA)$ ,  $|A_{K \times K}| \neq 0$ ,

Le proprietà sopra-mostrate mostrano che:

- $\beta^*(1/2)$  è invariante in scala per la 2. e la 3.;
- $\beta^*(\theta)$  è equivariante in locazione (o "in regressione");
- $\beta^*(\theta)$  è equivariante rispetto a riparametrizzazioni della matrice disegno.

Le proprietà relative all'equivarianza di scala e all'equivarianza di regressione sono presenti anche nello stimatore OLS, ma lo stimatore di regressione quantilica gode di un'altra proprietà di equivarianza molto più "forte" di quelle precedentemente discusse, ovvero la cosiddetta proprietà di *equivarianza alle trasformazioni monotone*. Sia  $h(\cdot)$  una funzione non decrescente in  $\mathbb{R}$ , allora per ogni variabile casuale  $Y$ ,

$$Q_{h(Y)}(\tau) = h(Q_Y(\tau)) \quad (2.10)$$

ovvero i quantili della trasformata di una variabile casuale  $h(Y)$  sono i quantili trasformati della variabile originale  $Y$ . Naturalmente, se la funzione  $h$  non è affine, vale la diseguaglianza di Jensen, ovvero che  $E[h(Y)] \neq h[E(Y)]$ .

La regressione del quantile, inoltre, è **robusta** agli outliers al contrario del modello di regressione lineare. Ciò significa che qualsiasi osservazione, anche estrema, dei regressori non può alterare la stima dei quantili condizionati.

Passando all'interpretazione dei parametri, si osserva che l'interpretazione dei parametri nella regressione del quantile è molto simile a quella osservata per un modello OLS classico. In particolare, nel modello lineare classico, è stato osservato che il coefficiente associato alla  $j$ -esima variabile esplicativa non è altro che la derivata parziale del valore atteso condizionato della variabile risposta  $Y$  dato l'insieme di covariate  $X$ . In simboli ciò si traduce in:

$$\frac{\partial E(Y|X = x)}{\partial x_j} = \frac{\partial x' \beta}{\partial x_j} = \beta_j \quad (2.11)$$

Nel modello di regressione quantilica, dato che  $Q_{h(Y)}(\tau|X = x) = h[Q_Y(\tau|X = x)]$  per ogni trasformazione monotona  $h(\cdot)$ , allora, se

$$Q_{h(Y)}(\tau|X = x) = x'\beta(\tau) \quad (2.12)$$

allora

$$\frac{\partial Q_Y(\tau|X = x)}{\partial x_j} = \frac{\partial h^{-1}(x'\beta)}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

Per esempio, per  $h(\cdot) = \log(\cdot)$ , si ha che:

$$Q_{\log(Y)}(\tau|X = x) = x'\beta(\tau) \Rightarrow \frac{\partial Q_Y(\tau|X = x)}{\partial x_j} = \beta_j e^{x'\beta} \quad (2.14)$$

## 2.2.2 Inferenza e proprietà asintotiche

Relativamente ai risultati asintotici della regressione quantilica, la funzione di "sparsità" (o *sparsity function*) svolge un ruolo fondamentale, poiché fornisce indicazioni circa la densità delle osservazioni intorno al quantile di interesse. Infatti, se i dati risultano molto sparsi, il quantile d'interesse sarà difficile da calcolare; se invece la sparsità risulta bassa, il quantile verrà molto più precisamente stimato. La *sparsity function* può essere così definita:

$$s_Y(\tau) = \frac{\partial Q_Y(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial Q_Y^{-1}(\tau)}{\partial \tau} = [f_Y(Q_Y(\tau))]^{-1} \quad (2.15)$$

quindi, essa non è altro che la derivata prima della funzione quantilica.

Koenker ha dimostrato che in un modello di regressione lineare classico, del tipo  $y_i = x_i'\beta + \varepsilon_i$ , con errori  $\varepsilon_i$  iid, suppone che se gli errori  $\varepsilon_i$  hanno la stessa funzione distributiva  $F$ , con associata la stessa funzione di densità  $f$  tale che  $f(F^{-1}(\tau_i)) > 0$  con  $i = 1, \dots, m$  e  $n^{-1} \sum x_i x_i' \equiv Q_n$  converge a una matrice definita positiva  $Q_0$ , allora la distribuzione asintotica congiunta degli  $m$  stimatori p-variati della regressione quantilica è del tipo:

$$(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n(\tau_j) - \beta(\tau_j)))_{j=1}^m = N(0, \Omega \otimes Q_0^{-1}) \quad (2.16)$$

dove  $\Omega = (\omega_{ij}) = (\tau_i \vee \tau_j - \tau_i \tau_j) / (f(F^{-1}(\tau_i))f(F^{-1}(\tau_j)))$ .

Nel caso in cui i termini di errore  $\approx iid$ , ma solo indipendenti, la stima della matrice di covarianza asintotica è più complicata da calcolare. Limitandosi alla matrice di covarianza di  $\sqrt{n}(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau))$ , è stato osservato che la sua stima prende la forma a sandwich di Huber, ovvero

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau)) \rightsquigarrow \mathbb{N}(0, H_n^{-1} J_n H_n^{-1}) \quad (2.17)$$

dove

$$J_n(\tau) = \tau(1 - \tau)n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i x_i' \quad (2.18)$$

$$H_n(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i x_i' f_i(\xi_i(\tau)) \quad (2.19)$$

Il termine  $f_i(\xi_i(\tau))$  denota la densità condizionata della risposta  $y_i$  valutata in merito al  $\tau$ -esimo quantile condizionato. Nel caso di  $\{\varepsilon_i\} \sim iid$ , le  $f_i$  sono identiche e la matrice di covarianza sandwich collassa nella formula precedentemente esposta.

## 2.3 Regressione quantilica non parametrica

Tradizionalmente, la regressione non parametrica viene utilizzata per la stima delle funzioni della media condizionata. Tuttavia, molti autori, tra gli anni '70 e gli anni '90 avevano iniziato a proporre metodi non parametrici per la stima delle funzioni dei quantili condizionati, tra i quali proprio Koenker & Hendricks (1992), Cole (1988), il quale propone di stimare le spline di lisciamiento dei quantili che minimizzano

$$\sum_{i=1}^n \rho_\tau\{y_i - g(x_i)\} + \lambda \int \{g''(x)\}^2 dx \quad (2.20)$$

dove  $\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0))$  è la check function descritta da Koenker e Basset (1978). Qui il parametro  $\tau \in [0, 1]$  controlla il quantile d'interesse,

mentre il parametro  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  controlla il grado di lisciamiento delle risultanti spline cubiche. Tuttavia, questo metodo proposto da Cole presenta problemi computazionali seri. A tale scopo, Koenker, Ng e Portnoy (1993), hanno pensato di sostituire  $\{g''(x)\}^2$  con  $|g''(x)|$ , trasformando così il precedente problema di minimizzazione nel seguente:

$$R_{\tau,\lambda}(g) = \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}\{y_i - g(x_i)\} + \lambda \int_0^1 |g''(x)| dx \quad (2.21)$$

con  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ , sopra lo spazio di Sobolev  $W_1^2$  delle funzioni continue in  $[0,1]$  con la derivata prima assolutamente continua e la derivata seconda assolutamente integrabile. Per un intero  $k \geq 2$  e  $p \in [1, \infty)$ , sia  $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{1/p}$  e  $W_p^k$  denoti lo spazio di Sobolev delle funzioni reali in  $[0,1]$ , con  $k-1$  derivate assolutamente continue e con la  $k$ -esima derivata che esiste ovunque come funzione in  $L_p[0,1]$ . L'obbiettivo sarebbe quello di trovare il lisciato che interpola i punti  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  che risolve

$$\inf \{ \|g^{(k)}\|_p : g \in W_p^k, g(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n \}. \quad (2.22)$$

Nel caso di  $\mathbf{p}=\mathbf{1}$ , non esiste alcuna soluzione per  $g \in W_1^k$ . Estendendo, però,  $W_1^k$  in modo tale da includere funzioni le cui  $k$ -esime derivate risultano misurabili, il problema esteso ha una soluzione  $s$ , come spline di grado  $k-1$ , dove la variazione totale della sua  $(k-1)$ -esima derivata,  $V(s^{(k-1)})$ , coincide con il valore estremo della (2.22). Tuttavia, è stato osservato che qualsiasi soluzione  $\hat{g}$  deve interpolare se stessa nella  $\{x_i\}$  osservata e quindi minimizzare la penalità relativa all'irregolarità della curva. Ciò permette di determinare la forma della soluzione del problema di lisciamiento considerando il solo problema di interpolazione.

Relativamente al problema di selezione dei nodi, è stato dimostrato che, sotto condizioni non restrittive sulle  $y_i$  e nel caso  $k=2$ , i nodi delle spline ottimali coincidono con le  $x_i$  osservate. Sia  $f$  una qualsiasi funzione interpolante dei punti  $\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$  con derivata prima assolutamente continua: dal teorema del valore atteso, è possibile scegliere un qualsiasi punto  $u_i \in (x_i, x_{i+1})$  tale che

$$f'(u_i) = (y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i), \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Allora,

$$V(f') \geq \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} f''(x) dx \right| \geq \sum_{i=1}^{n-1} |f'(u_{i+1}) - f'(u_i)| = V(\hat{f}'),$$

dove  $\hat{f}$  è la funzione lineare a pezzi interpolante con i nodi nelle  $x_i$ . Inoltre, per ogni funzione lineare continua a pezzi  $g$  esiste una sequenza di funzioni  $\{g_n\}$  con derivata prima assolutamente continua tale che  $\lim V(g'_n) = V(g')$ , e quindi  $\hat{f}$  minimizza  $V(g)$  per tutte queste  $g$ .

Se lo spazio originale  $W_1^2$  viene espanso a

$$U^2 = \left\{ g : g(x) = a_0 + a_1 x + \int_0^1 (x-y)_+ d\mu(y), V(\mu) < \infty, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1 \right\}$$

e sostituendo la penalità  $L_1$  su  $g''$  con la penalità sulla funzione di variazione totale di  $g'$ , è stato ottenuto il seguente risultato:

- La funzione  $g \in U^2$  che minimizza  $\sum \rho_\tau\{y_i - g(x_i)\} + \lambda V(g')$  è una spline lineare con i nodi nei punti  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

Quando il parametro  $\lambda$  è sufficientemente grande, tutte le stime  $\hat{\beta}_i$  saranno uguali e la soluzione sarà, quindi, la stima del quantile di regressione lineare bivariato. Quando, invece,  $\lambda$  è sufficientemente piccolo, tutte le  $n$  osservazioni verranno interpolate quando i punti della matrice disegno saranno unici.

Relativamente alla scelta del *bandwidth*, questa risulta critica. Per le spline di lisciamiento dei quantili, è stato dimostrato che tale problema è un programma parametrico lineare in  $\lambda$ , ovvero

$$V(\hat{g}') = \sum_{i=1}^{n-1} |\beta_{i+1} - \beta_i| = \sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+2} - a_{i+1}/h_{i+1} - |a_{i+1} - a_i|/h_{i+1}|$$

La soluzione  $\hat{g}_{\tau,\lambda}(\cdot)$  è costante a tratti in  $\lambda$ , ovvero esiste un punto compreso tra  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_j$  tale che  $\hat{g}_{\tau,\lambda}$  risolve l'equazione sovrastante per tutti i  $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ . Le  $J$  distinte soluzioni in  $\lambda$  avranno un'ordine di grandezza pari a  $O_p(n \log n)$ .

Inoltre Konker e Portnoy (1993) hanno mostrato come la soluzione del parametro di penalizzazione  $\lambda$  dipenda dal numero di punti interpolati. Se



la matrice disegno non possiede due o più osservazioni nello stesso punto disegno, il numero  $\rho_\lambda$  di punti  $y_i$  interpolati, ovvero il numero di nodi 'attivi' dovrà essere compreso tra 2 e  $n$  compresi, ovvero  $2 \leq \rho_\lambda \leq n$ . Poichè  $\rho_\lambda$  può essere considerato come una misura plausibile della dimensione effettiva del modello stimato, e  $n - \rho_\lambda + 1$  può essere considerato come una misura plausibile dei gradi di libertà della stima, allora, un metodo di scelta data-driven per l'ampiezza di banda può essere il seguente:

$$SIC(\rho_\lambda) = \log[n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_\lambda \{y_i - \hat{g}(x_i)\}] + \frac{1}{2} n^{-1} \rho_\lambda \log n \quad (2.23)$$

Questo criterio può essere interpretato come il criterio di Schwarz per i problemi relativi ai quantili delle spline di lisciamiento.

## 2.4 Esempio di utilizzo della regressione quantilica

Dopo aver esposto nei paragrafi precedenti la regressione quantilica e le sue proprietà, viene mostrato un esempio che illustra perchè tale metodo risulta preferibile rispetto al classico metodo dei minimi quadrati. Nell'esempio esposto vengono presi in considerazione due titoli, quello relativo alla società *American Express*, e quello relativo all'indice azionario *Down Jones*, mentre l'intervallo di tempo considerato è quello che va da 1° Gennaio 2010 al 31 Dicembre 2014. Per entrambi i titoli, così come per tutti i titoli analizzati in questo lavoro di tesi, i prezzi sono giornalieri, e su questi vengono calcolati i rendimenti giornalieri come differenza logaritmica dei prezzi:

$$r_{i,t} = \log(P_{i,t}) - \log(P_{i,t-1}) \quad (2.24)$$

dove  $r_{i,t}$ ,  $p_{i,t}$  e  $p_{i,t-1}$  rappresentano rispettivamente il rendimento e il prezzo al tempo  $t$ , e il prezzo al tempo  $t - 1$ .

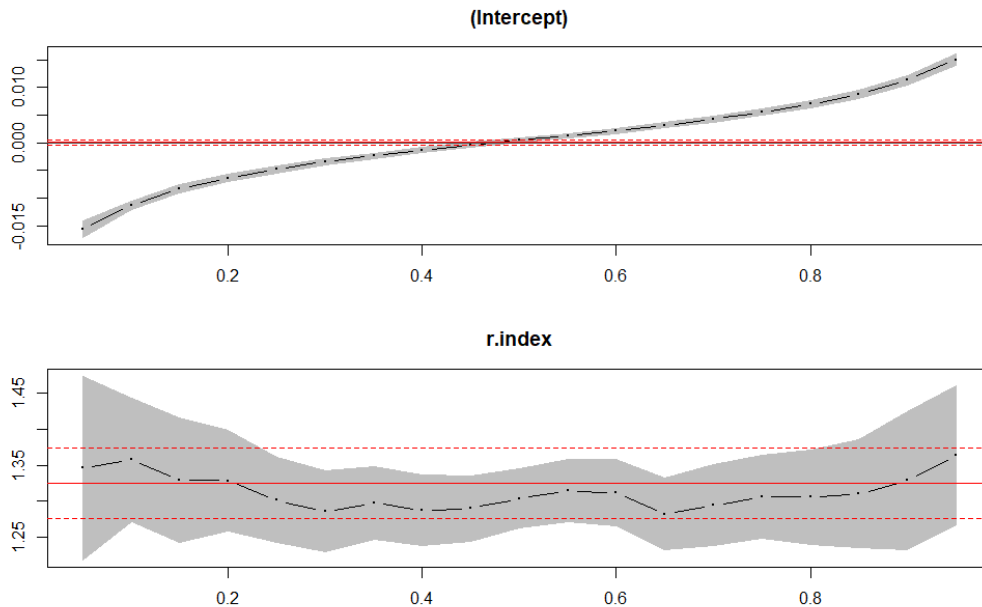
Per prima cosa è stato calcolato un modello OLS semplice, avente come variabile risposta i rendimenti del titolo American Express, e variabile esplicativa i rendimenti dell'indice Down Jones. Sono stati ottenuti i seguenti risultati:

**Tabella 2.1:** Summary Statistics of the portfolio considered (OLS).

Coefficients	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
Intercetta	0.0001060	0.0002747	0.386	0.7
DJ	1.3247251	0.0298716	44.347	$2.2e^{-16}$

Dai risultati ottenuti è possibile vedere come il coefficiente associato all'intercetta risulti non significativo, mentre quello associato all'indice Down Jones risulti altamente significativo. In particolare, in media, all'incremento di 0.1 dell'indice Down Jones è associato un aumento pari a 0.13 dell'indice associato al titolo American Express.

Quindi è stato applicato un modello di regressione quantilica ai quantili dei dati considerati: in particolare sono stati considerati 19 quantili equidistanti, ovvero  $\tau = 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.9, 0.95$ , che hanno prodotto i seguenti risultati (di seguito uno spaccato dei quantili  $\tau = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95$ ):

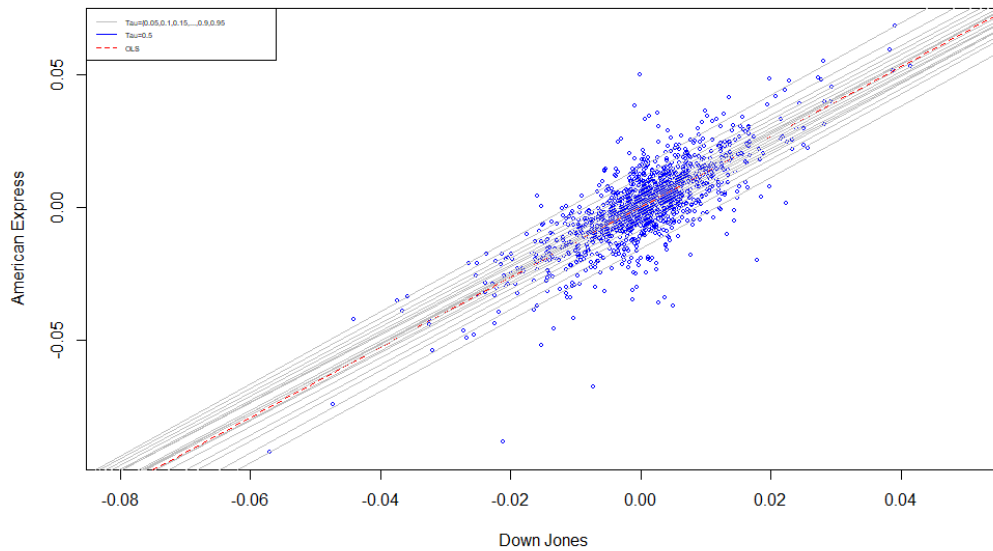
**Figura 2.1:** Variazione della stima dei parametri per i diversi quantili

Come è possibile vedere, al contrario della stima OLS, il coefficiente asso-

**Tabella 2.2:** Summary Statistics of the portfolio considered (QR).

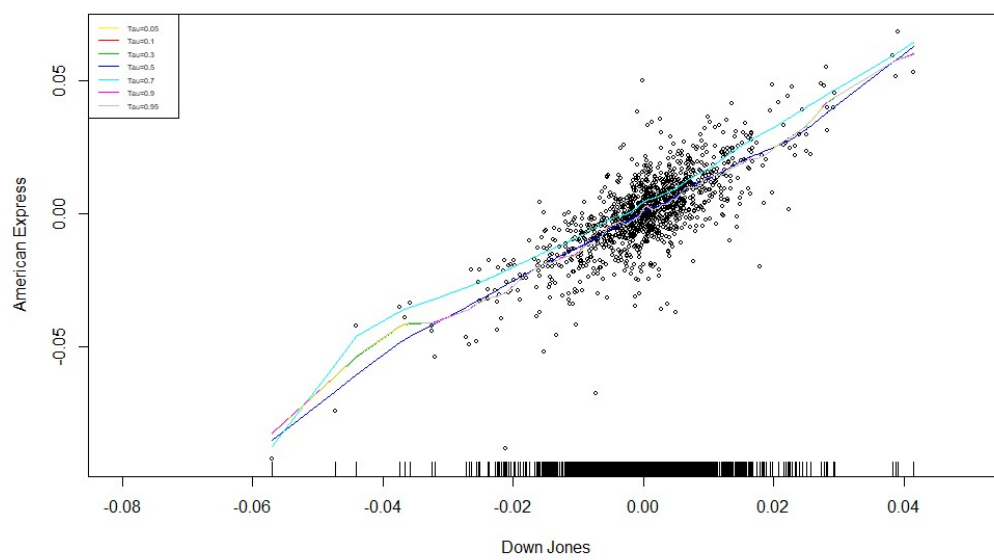
Coefficients	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
$\tau = 0.05$				
Intercetta	-0.01566	0.00093	-16.84442	0.00000
DJ	1.34612	0.07761	17.34457	0.00000
$\tau = 0.1$				
Intercetta	-0.01131	0.00048	-23.60637	0.00000
DJ	1.35759	0.05233	25.94153	0.00000
$\tau = 0.3$				
Intercetta	-0.00340	0.00031	-10.81915	0.00000
DJ	1.28552	0.03430	37.48161	0.00000
$\tau = 0.5$				
Intercetta	0.00050	0.00024	2.08810	0.03699
DJ	1.30388	0.02469	52.81898	0.00000
$\tau = 0.7$				
Intercetta	0.00431	0.00031	13.76849	0.00000
DJ	1.29417	0.03403	38.03049	0.00000
$\tau = 0.9$				
Intercetta	0.01136	0.00054	21.19518	0.00000
DJ	1.32862	0.05853	22.70060	0.00000
$\tau = 0.95$				
Intercetta	0.01504	0.00062	24.17981	0.00000
DJ	1.36337	0.05856	23.28248	0.00000

ciato all'intercetta risulta essere altamente significativo nella maggior parte dei casi considerati, mentre il parametro associato all'indice Down Jones, per i vari quantili, varia entro le bande di confidenza della stima OLS. Di seguito lo Scatterplot (Fig. 2.2) delle stime ottenute mediante regressione lineare e regressione quantilica in cui si nota quasi una sovrapposizione fra la linea associata alle stime della regressione semplice lineare e quella associata alle stime della regressione quantilica sulla mediana.



**Figura 2.2:** Scatterplot e stime della regressione quantilica

Infine, applicando il modello di regressione quantilica non parametrica si ottiene (Fig 2.3) un buon adattamento del modello ai dati. Tuttavia, per tutti i quantili considerati, è presente il fenomeno di crossing fra i quantili che si verifica, soprattutto, quando vengono utilizzati campioni di dimensione ridotta, e vengono stimati modelli per quantili vicini fra di loro (per es.  $\tau = 0.95 \wedge \tau = 0.99$ ). In merito a questo problema, che porta ad una distribuzione della variabile risposta non valida, sono state proposte varie soluzioni, di cui, però, nessuna rappresenta quella generale e definitiva.



**Figura 2.3:** Modello Additivo di regressione quantilica



# Capitolo 3

## Dati utilizzati

### 3.1 Descrizione

Dopo aver esposto nei due capitoli precedenti il fenomeno e le metodologie utilizzate per studiarlo, in questo capitolo vengono presentati i dati e le loro caratteristiche. In particolare, sono stati considerati 20 indici relativi 20 mutual fund americani, e l'indice S&P500 considerato come benchmark. Il periodo di rilevazione è di 11 anni, dall'1 Gennaio 2007 al 31 Dicembre 2017.

I dati utilizzati appartengono tutti alla categoria "*Large Value*" di Morning Star.

Di seguito i titoli utilizzati:

- **BHBFX**: titolo appartenente alla Madison Fund, la cui allocazione fra settori è così definita: 17.6% Financials, 15% IT, 13.9% Industrials, 13.3% Health Care, 9.3% Consumer Discretionary, e così via. In particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *Exxon Mobile Corp*, *Cisco System INC*, *Praxair INC*, *CME Group INC*, *Microsoft Corp*, *US Bancorp*, *Johnson + Johnson*, *United Technologies Corp*, *Fastenal CO*, *Wells Fargo + CO*, i quali rappresentano il 30.8% del Totale del Patrimonio netto.
- **VEIPX**: titolo relativo al fondo Vanguard Equity Income, la cui allocazione fra settori è così definita: 16.7% Financials, 15.1% IT, 14.8% Health Care, 11.7% Consumer Staples, 10.6% Energy e così via. In

particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *Microsoft Corp*, *JPMorgan Chase & Co.*, *Johnson & Johnson*, *Cisco Systems Inc.*, *Verizon Communications Inc.*, *Philip Morris International Inc.*, *Intel Corp.*, *Wells Fargo & Co.*, *Pfizer Inc.*, *Chevron Corp.*, i quali rappresentano il 27% del Totale del Patrimonio netto.

- **DTMMX**: titolo relativo al Tax-Managed U.S. Marketwide Value Portfolio che mira all'apprezzamento del capitale a lungo termine minimizzando le imposte sui rendimenti dei redditi federali. L'allocazione fra settori è così definita: Financials 24.08%, Consumer Discretionary 14.37%, IT 13.03%, Energy 12.52%, Health Care 11.98%, Industrials 11.17% e così via. In particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *JPMorgan Chase & Co.*, *Intel Corp.*, *Comcast Corp*, *AT&T Inc*, *Exxon Mobile Corp*, *Cisco System Inc*, *Wells Fargo & Co*, *Bank of America Corp*, *Time Warner Inc*, *Pfizer Inc*, i quali rappresentano il 31% del Totale del Patrimonio Netto.
- **DFCVX**: titolo relativo al Portafoglio U.S. Large Cap che mira all'apprezzamento del capitale a lungo termine. L'allocazione fra settori è così definita: Financials 24.06%, IT 14.71%, Health Care 13.16%, Consumer Discretionary 12.94%, Energy 12.49% e così via. In particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *JPMorgan Chase & Co*, *Intel Corp*, *AT&T Inc*, *Exxon Mobil Corp*, *Wells Fargo & Co*, *Cisco Systems Inc*, *Comcast Corp*, *Pfizer Inc*, *Chevron Corp*, *Bank of America Corp*, i quali rappresentano il 31,28% del totale del patrimonio netto.
- **NOLCX** titolo relativo ad un portafoglio della Northern Trust che mira alla crescita a lungo termine del capitale. L'allocazione fra settori è così definita: IT 25.1%, Financials 14.9%, Health Care 13.4%, Consumer Discretionary 12.5%, Industrials 10.5% e così via. In particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *Microsoft Corporation*, *Apple Inc.*, *Alphabet Inc. Class A*, *Johnson & Johnson*, *Amazon.com, Inc*, *Boeing Company*, *Chevron Corporation*,



*Pfizer Inc.*, *AT&T Inc.* e *Cisco Systems, Inc.*, i quali rappresentano il 20,9% del totale del patrimonio netto.

- **DFUVX**: titolo relativo al portafoglio U.S. Large Cap Value III che mira all'apprezzamento del capitale a lungo termine. L'allocazione fra settori è così definita: Financials 24.06%, IT 14.71%, Health Care 13.16%, Consumer Discretionary 12.94%, Energy 12.49% e così via. In particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *JPMorgan Chase & Co*, *Intel Corp*, *AT&T Inc*, *Exxon Mobil Corp*, *Wells Fargo & Co*, *Cisco Systems Inc*, *Comcast Corp*, *Pfizer Inc*, *Chevron Corp*, *Bank of America Corp*, i quali rappresentano il 31,28% del totale del patrimonio netto.
- **VUVLX**: titolo relativo al Fondo Vanguard U.S. Value che mira a raggiungere l'apprezzamento del capitale e dei guadagni a lungo termine. L'allocazione fra settori è così definita: Financials 27.5, Health Care 13.3, Energy 10.6, IT 9.1%, Industrials 8.4% e così via. In particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *JPMorgan Chase & Co.*, *Exxon Mobil Corp.*, *Berkshire Hathaway Inc.*, *Chevron Corp.*, *Pfizer Inc.*, *AT&T Inc.*, *Bank of America Corp.*, *Johnson & Johnson*, *Wells Fargo & Co.*, *Walmart Inc.*, i quali rappresentano il 21.4% del totale del patrimonio netto.
- **GTMEEX**: titolo relativo alla Glenmede Investment Management LP che mira all'apprezzamento del capitale sopra il benchmark. L'allocazione fra settori è così definita: Financials 26.81%, Health Care 13.25%, Energy 10.67%, IT 9.92%, Industrials 8.56% e così via. In particolare, i primi 10 stock che compongono il fondo per quota di investimento sono: *Chevron Corp.*, *Bank of America Corp.*, *Johnson & Johnson*, *Exxon Mobile Corp.*, *Pfizer Inc.*, *Intel Inc.*, *CitiGroup Inc.*, *Ameriprise Financial, Inc.*, *FedEX Corp*, *AT&T Inc.*, i quali rappresentano il 29.5% del totale del patrimonio netto.
- **PNBAX**: titolo relativo al Fondo Allianz che mira ad una crescita a lungo termine del capitale e dei guadagni. L'allocazione fra settori è così

definita: Financials 22.72%, Energy 18.02%, Healthcare 12.03%, Consumer goods 9.15%, Industrial materials 8.85% e così via. In particolare, i primo 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *JPMorgan Chase & Co.*, *Bank of America Corp.*, *Citigroup Inc.*, *American Express*, *Entergy Corp.*, *Cisco*, *Statoil*, *SunTrust Banks Inc.*, *Intel*, *VF Corp.*, i quali rappresentano il 24.94% del totale del patrimonio netto.

- **AWSHX**: titolo che mira a produrre guadagno e fornire opportunità per la crescita del capitale. L'allocazione fra settori è così definita: IT 17.6%, Financials 16.0%, Industrials 12.4%, Health care 12.1%, Consumer discretionary 9.7% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *Microsoft*, *Home Depot*, *Intel*, *Royal Dutch Shell*, *Boeing*, *Lockheed Martin*, *Verizon Communications*, *JPMorgan Chase*, *Johnson & Johnson*, *UnitedHealth Group*, i quali rappresentano il 26.9% del patrimonio netto totale.
- **TILCX**: titolo appartenente al fondo Vanguard che mira a fornire un apprezzamento del capitale a lungo termine mediante investimenti in azioni comuni di compagnie in crescita. L'allocazione fra settori è così definita: IT 32.8%, Healthcare 21.2%, Consumer Cyclical 21.0%, Financial Services 11.4%, Industrials 8.5% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *Amazon.com Inc*, *Micorosoft Corp*, *Facebook Inc A*, *Alphabet Inc A*, *The Priceline Group Inc*, *Visa Inc Class A*, *Boeing Co*, *Apple Inc*, *UnitedHealth Group Inc*, *Cigna Corp*, i quali rappresentano il 45.7% del patrimonio netto totale.
- **OLVAX**: titolo relativo al fondo d'investimento Large Capitalization Value di JPMorgan che mira ad un apprezzamento del capitale con l'obbiettivo secondario di raggiungere il guadagno corrente investendo principalmente in titoli. L'allocazione fra settori è così definita: Financials 28.0%, Health Care 14.7%, Consumer Discretionary 12.6%, Energy 12.5%, IT 12.0% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *Wells Fargo*

* Co., Citigroup Inc., Cisco Systems Inc, MetLife Inc., UnitedHealth Group Inc., Merck  Co Inc., ConocoPhillips, Comcast Corp., Class A, State Street Corp, Chevron Corp.,* i quali rappresentano il 32.7% del patrimonio netto totale.

- **BBTGX:** titolo relativo alla Sterling Capital Management che mira a raggiungere il massimo rendimento totale a lungo termine, investendo principalmente in titoli azionari di società di grandi dimensioni. L'allocazione fra settori è così definita: Financial Services 25.27%, Healthcare 13.81%, IT 11.03%, Energy 10.91%, Consumer Cyclical 8.31% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *JPMorgan Chase  Co, Pfizer Inc, Bank of America Corp., Exxon Mobile Corp., Verizon Communications Inc., Walmart Inc., Anthem Inc., Amgen Inc., Valero Energy Corp., PNC Financial Services Group Inc,* i quali rappresentano il 26.3% del patrimonio netto totale.
- **DHLAX:** titolo relativo alla Diamond Hill Capital Mangement che mira all'apprezzamento a lungo a termine del capitale. L'allocazione fra settori è così definita: Financial Services 28.78%, Healthcare 14.36%, Consumer Defensive 11.78%, Consumer Cyclical 11.40%, Industrials 11.15% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *Abbott Laboratories, Citigroup Inc., Discover Financial Services, Microsoft Corp., Alphabet Inc. A, United Technologies Corp., Philip Morris International Inc., MetLife Inc., JPMorgan Chase  Co., Berkshire Hathaway Inc. B,* i quali rappresentano il 34.25% del patrimonio netto totale.
- **OIEIX:** titolo relativo all'Equity Income Fund di JPMorgan che mira a fornire una miscela di crescita a lungo termine e reddito corrente attraverso il pagamento coerente dei dividendi. L'allocazione fra settori è così definita: Financials 29.7%, IT 11.5%, Industrials 10.6%, Health Care 10.4%, Energy 8.8% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che copongono il fondo per quota d'investimento sono: *Bank of America Corp., PNC Financial Services Group, Inc., Chevron Corp., Microsoft*

*Corp.*, *CME Group Inc.*, *BlackRock Inc.*, *Apple Inc.*, *Occidental Petroleum Corp.*, *Wells Fargo & Co.*, *Home Depot Inc.*, i quali rappresentano il 23.4% del patrimonio netto totale.

- **PQIAX**: titolo di un fondo che mira a fornire reddito corrente e crescita a lungo termine di reddito e capitale. L'allocazione fra settori è così definita: Financials Services 25.61%, Healthcare 12.30%, Energy 11.20%, Industrials 10.36%, Technology 9.35% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *Apple Inc.*, *Fidelity National Financial Inc.*, *JPMorgan Chase & Co.*, *Chubb Ltd.*, *PNC Financial Services Group Inc.*, *Discover Financial Services*, *BlackRock Inc.*, *Marathon Petroleum Corp.*, *Enterprise Products Partners LP.*, *Hasbro Inc.*, i quali rappresentano il 24.03% del patrimonio netto totale.
- **GCVAX**: titolo relativo al fondo di investimento Large Value della banca d'affari Goldman Sachs che mira ad una crescita a lungo termine del capitale e dei guadagni provenienti da dividendi. L'allocazione fra settori è così definita: Financial Service 26.29%, Energy 13.32%, Healthcare 12.77%, Consumer goods 11.40%, Industrial materials 10.74% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *Chevron*, *Berkshire Hathaway*, *Wal-Mart*, *JPMorgan Chase*, *Exxon Mobil*, *Johnson & Johnson*, *WellPoint*, *Bank of America*, *Walgreen*, i quali rappresentano il 18.0% del patrimonio netto totale.
- **AAUTX**: titolo relativo al fondo d'investimento Thrivent che mira a raggiungere una crescita a lungo termine del capitale. L'allocazione fra settori è così definita: Financial Service 20.82%, Industrials materials 18.23%, Energy 13.51%, Healthcare 11.61%, Consumer goods 7.49% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *Bank of America*, *Cisco*, *Citigroup*, *Microsoft*, *Lowe's*, *Chevron*, *Oracle*, *Comcast*, *Verizon*, *Apple*, i quali rappresentano il 35.29% del patrimonio netto totale.

- **DPDEX:** titolo relativo al fondo d'investimento Macquaire che mira all'apprezzamento a lungo termine del capitale. L'allocazione fra settori è così definita: Healthcare 18.10%, Energy 15.83%, Financial service 12.37%, Consumer goods 11.67%, Consumer service 9.11% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *CA Inc*, *CVS Caremark*, *Equity residential*, *AT&T*, *Lowe's*, *Bank of New York*, *Mondelez International Inc.*, *Marathon Oil*, *Intel*, *Marsh & McLennan Companies Inc.*, i quali rappresentano il 30.46% del patrimonio netto totale.
- **BPAIX:** titolo relativo al fondo d'investimento Boston Partners che mira a fornire una crescita a lungo termine del capitale, primariamente per mezzo di investimenti in titoli. L'allocazione fra settori è così definita: Financial Services 31.43%, IT 23.47%, Healthcare 16.87%, Industrial Activities 9.83%, Energy 7.52% e così via. In particolare, i primi 10 stocks che compongono il fondo per quota d'investimento sono: *JPMorgan Chase & Co*, *Bank of America Corporation*, *Cisco Systems Inc.*, *Citigroup Inc.*, *eBay Inc.*, *Oracle Corp.*, *DXC Technology Co.*, *Johnson & Johnson*, *Merck & Co Inc.*, *Medtronic PLC*, i quali rappresentano il 19.63% del patrimonio netto totale.
- **S&P 500:** indice creato nel 1957 che segue l'andamento di un paniere azionario formato dalle 500 aziende statunitensi a più alta capitalizzazione. Esso rappresenta l'indice più significativo dell'intero mercato americano e, di solito, viene usato come benchmark nelle strategie di portafoglio (come nel caso di questa tesi).

In merito ai titoli appena esposti, è possibile notare che la maggior parte di questi presenta come componente dominante i Financial Services, seguita dalle categorie Healthcare e Consumer Goods. Questa forte relazione fra i titoli considerati fa sì che molti di questi presentino almeno un elemento comune. Per tale motivo è stato evitato l'"*accorpamento*" dei titoli dei singoli fondi, assegnando a ciascuno egual peso, in un unico portafoglio, poiché ciò avrebbe potuto causare problemi di multi-collinearità fra le componenti

utilizzate per costruire il portafoglio. Quindi le analisi sono state eseguite a livello di singolo titolo.

## 3.2 Analisi Esplorativa

Al fine di condurre le analisi che porteranno a stabilire se c'è stato o meno market timing negli anni considerati, sono state condotte delle analisi esplorative sui singoli fondi aventi lo scopo di osservare la *natura* delle componenti considerate. Per prima cosa sono state calcolate delle statistiche di base, tra le quali il coefficiente di asimmetria, la kurtosi, i quartili, ecc... riportate di seguito (Tab. 3.1 ^ 3.2):

Osservando i risultati ottenuti è possibile notare che il range di variazione delle osservazioni dei singoli titoli varia da un minimo di 0.1183716 dell'indice BHBFX, ad un massimo di 0.7816774 del titolo associato all'indice DFCVX, e che la mediana assume valori molto vicini a quelli della media. Inoltre si nota che tutti i titoli presentano asimmetria negativa, particolarmente pronunciata per il titolo DFCVX (-13.618874), e leptocurtosi.

I risultati ottenuti vengono confermati anche dai grafici sottostanti (Figura 3.1):

Osservando invece i grafici dei prezzi (Figura 3.2), è possibile notare come tutti i prezzi presentino un picco al ribasso durante il 2009, anno in cui è scoppiata la *Crisi del Debito Sovrano Europeo* ed è proseguita quella relativa ai *"Subprime"* negli Stati Uniti. Dopo aver raggiunto il minimo durante in quell'anno, si osserva che tutti i prezzi presentano un andamento crescente, intervallato da brevi periodi di picchi al ribasso, più pronunciati intorno all'anno 2016, poichè probabilmente legati al periodo di instabilità politica del Regno Unito, che con il referendum *Brexit* ha deciso la propria uscita dall'Europa, e degli Stati Uniti, che hanno affrontato un nuovo ciclo di elezioni che ha portato all'insediamento di Donald Trump alla Casa Bianca, e picchi al rialzo, con un massimo raggiunto a chiusura del 2017.

**Tabella 3.1:** Summary Statistics of the portfolio considered (1 di 2).

Mutual Fund	Min	Max	1 <sup>^</sup> Quartile	Median	3 <sup>^</sup> Quartile
BHBFX	-0.061779	0.056592	-0.003353	0.000522	0.004082
VEIPX	-0.096538	0.096610	-0.003993	0.000540	0.005330
DTMMX	-0.116604	0.112348	-0.005152	0.000730	0.006777
DFCVX	-0.660571	0.121106	-0.005198	0.000780	0.006551
NOLCX	-0.134938	0.112940	-0.004198	0.000650	0.005535
DFUVX	-0.111075	0.121585	-0.005232	0.000778	0.006653
VULVX	-0.152315	0.111094	-0.004876	0.000678	0.006332
GTMEX	-0.152504	0.127458	-0.005130	0.000858	0.006695
PNBAX	-0.103394	0.124250	-0.004603	0.000685	0.005846
AWSHX	-0.087595	0.1014135	-0.003949	0.000461	0.005283
TILCX	-0.099405	0.108571	-0.004515	0.000713	0.005900
OLVAX	-0.284730	0.126949	-0.005197	0.000671	0.006408
BBTGX	-0.170256	0.086501	-0.004927	0.000551	0.005800
DHLAX	-0.103092	0.112335	-0.004292	0.000674	0.005720
BPAIX	-0.104125	0.101254	-0.004488	0.000679	0.005869
OIEIX	-0.116611	0.107121	-0.004070	0.000679	0.005270
PQIAX	-0.094225	0.096432	-0.004132	0.000612	0.005318
GCVAX	-0.103541	0.108375	-0.004640	0.000792	0.006091
AAUTX	-0.102057	0.106047	-0.004906	0.000503	0.006105
DPDEX	-0.142272	0.102455	-0.004085	0.000525	0.005460
S&P 500	-0.094695	0.109572	-0.004001	0.000596	0.005519

**Tabella 3.2:** Summary Statistics of the portfolio considered (2 di 2).

Mutual Fund	Mean	S.D.	Skeweness	Kurtosis
BHBFX	0.000134	0.008406	-0.591065	7.214066
VEIPX	0.000139	0.012110	-0.462917	10.905493
DTMMX	0.000198	0.015395	-0.490994	9.519441
DFCVX	-0.000084	0.019805	-13.618874	448.403620
NOLCX	0.000192	0.012879	-0.647535	14.025703
DFUVX	0.000121	0.015356	-0.521517	9.575751
VULVX	0.000094	0.013917	-0.943812	14.314749
GTMEX	-0.000011	0.015104	-1.510434	17.313182
PNBAX	0.000123	0.013231	-0.354024	11.181917
AWSHX	0.000098	0.011923	-0.401924	10.422729
TILCX	0.000161	0.013408	-0.507558	10.222769
OLVAX	-0.000033	0.016220	-3.037097	48.527984
BBTGX	0.000058	0.012677	-1.162852	16.576917
DHLAX	0.000176	0.012599	-0.493484	10.733581
BPAIX	0.000182	0.012989	-0.738320	10.187585
OIEIX	0.000134	0.012002	-0.743682	14.324646
PQIAX	0.000129	0.012318	-0.501695	10.547319
GCVAX	0.000149	0.013725	-0.478944	10.400856
AAUTX	0.000119	0.013568	-0.411257	8.985290
DPDEX	0.000073	0.012498	-1.623253	22.37897
S&P 500	0.000229	0.012651	-0.348651	10.919020



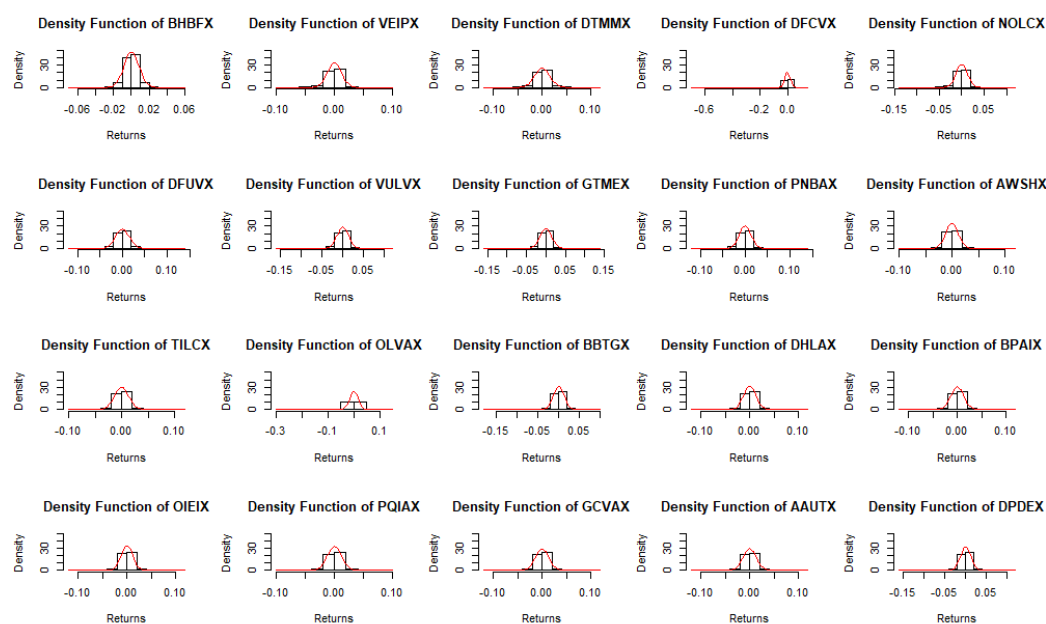
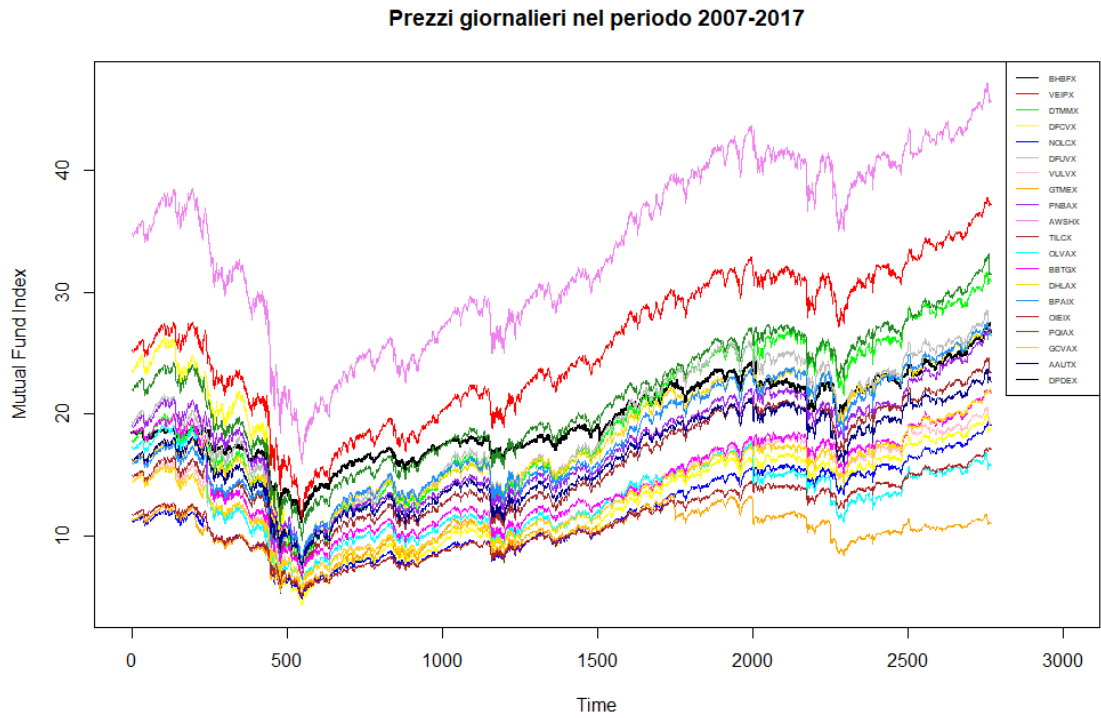


Figura 3.1: Istogrammi dei rendimenti dei titoli considerati

Quindi è stata valutata anche la funzione di Autocorrelazione Parziale (PACF) con lo scopo di vedere se i prezzi dei singoli titoli potessero presentare una correlazione, e quindi una dipendenza, rispetto ai valori assunti dagli stessi negli istanti precedenti. Nelle figure sottostanti (PACF - Figure 3.3  $\wedge$  3.4) notiamo che tutti i titoli presentano solo il 1<sup>o</sup> ritardo significativo, facendo pensare che l'utilizzo di un modello AR (*AutoRegressive*) potrebbe risultare utile nella valutazione complessiva del fenomeno.

Analogamente, è stata calcolata la PACF anche per i rendimenti dei singoli titoli, e i relativi *rendimenti*<sup>2</sup> (possono essere considerati come una *proxy* della varianza dei rendimenti), al fine di valutare la possibilità di utilizzo, nelle analisi successive, di modelli per la varianza condizionata del portafoglio. Le figure sottostanti (Figure 3.5-3.6  $\wedge$  3.7-3.8), che mostrano la significatività del 1<sup>o</sup> ritardo per tutti i rendimenti semplici, e la significatività fino al 7<sup>o</sup> ritardo per la maggior parte dei *rendimenti*<sup>2</sup>, suggeriscono, congiuntamente alle statistiche di base e gli istogrammi sovrapposti, che potrebbe risultare sensato l'utilizzo di modelli per la varianza condizionata. A tale scopo potreb-



**Figura 3.2:** Andamento dei prezzi nel periodo 2007-2017

be risultare utile l'utilizzo di modelli GARCH asimmetrici, ovvero modelli che valutino l'impatto delle buone/cattive notizie (*good/bad news*) sui prezzi in maniera differente, in quanto, anche l'istogramma dei prezzi, suggerisce una forte asimmetria negativa.

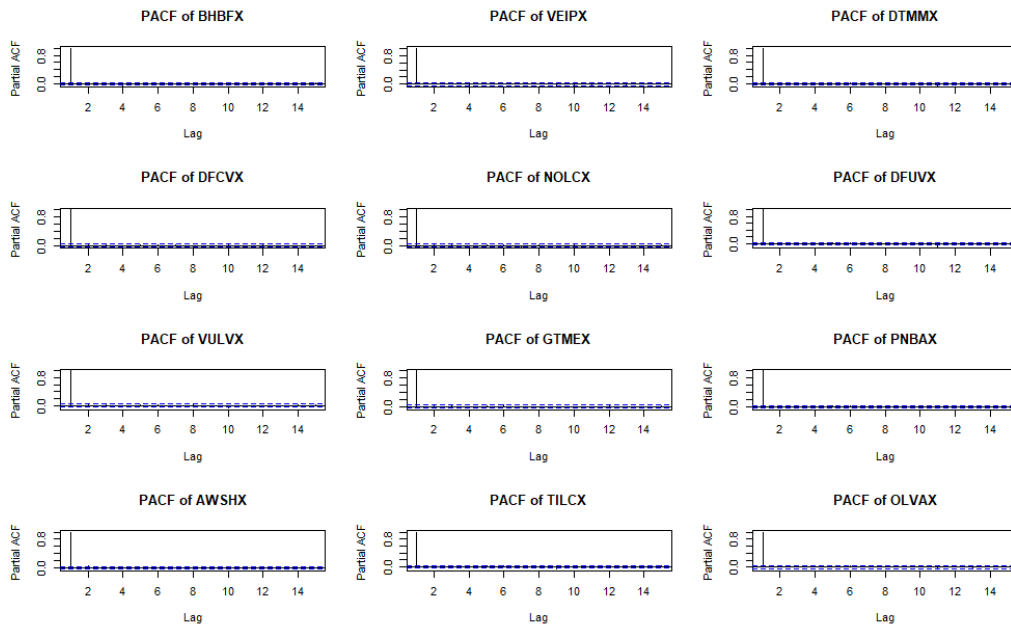


Figura 3.3: Partial Autocorrelation Function dei titoli considerati (1 di 2)

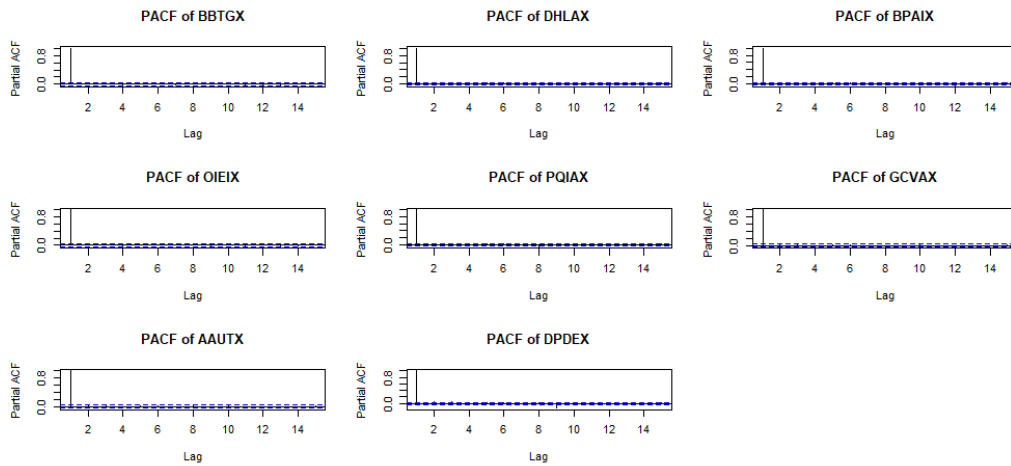


Figura 3.4: Partial Autocorrelation Function dei titoli considerati (2 di 2)

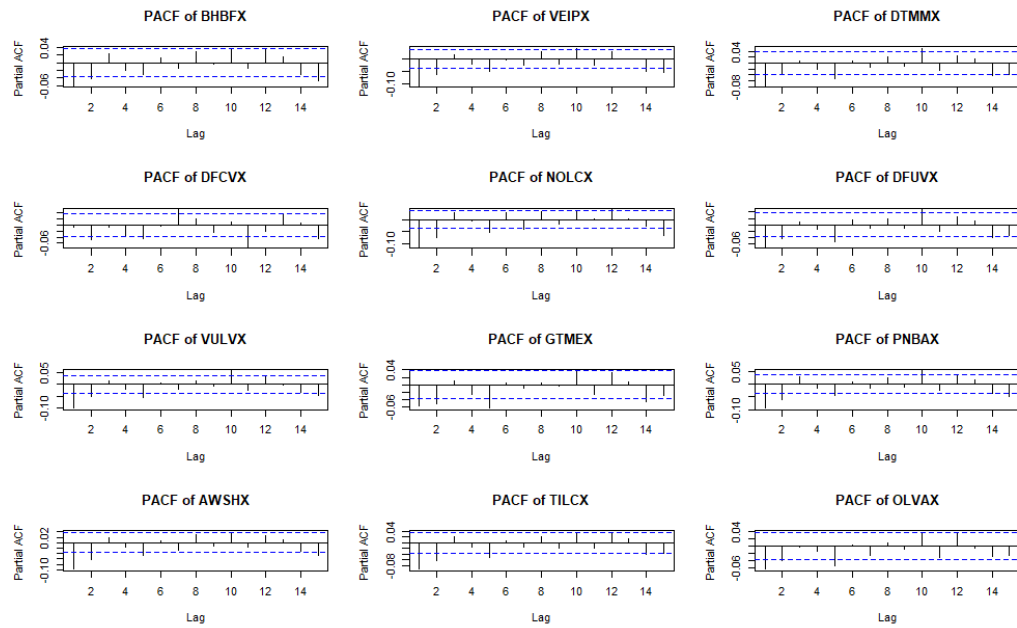


Figura 3.5: PACF dei rendimenti dei titoli considerati (1 di 2)

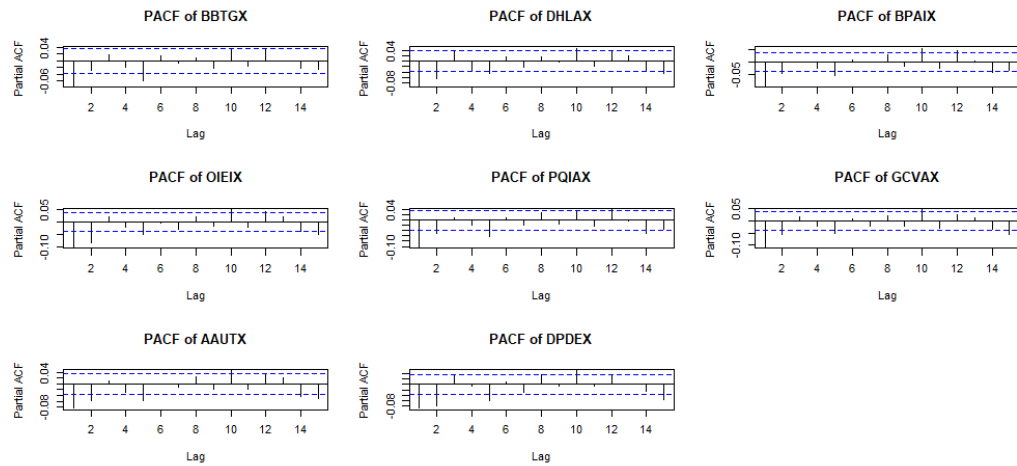


Figura 3.6: PACF dei rendimenti dei titoli considerati (2 di 2)

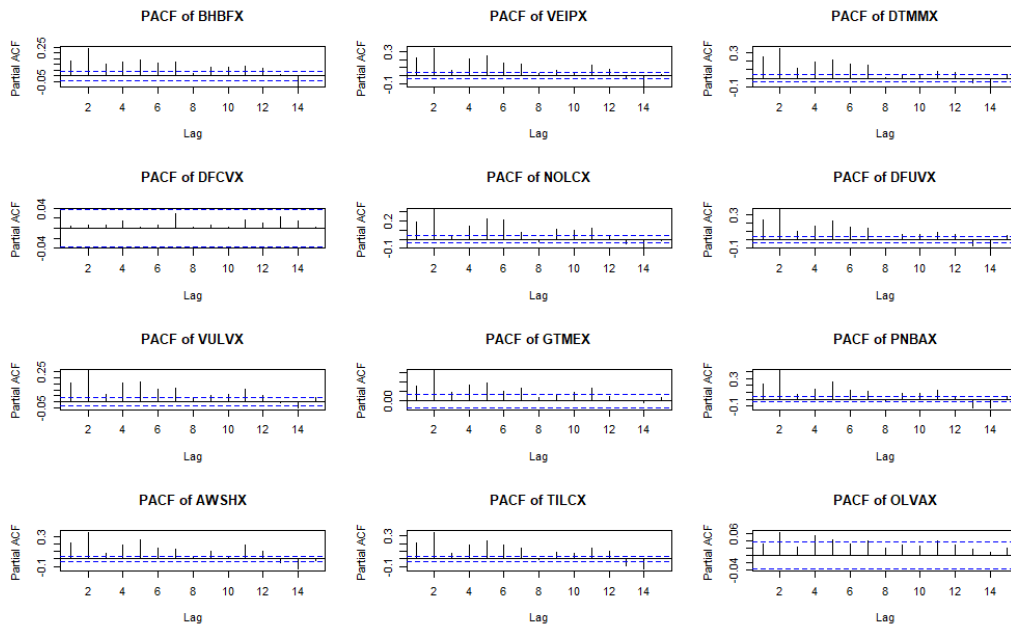


Figura 3.7: PACF dei *rendimenti*<sup>2</sup> dei titoli considerati (1 di 2)

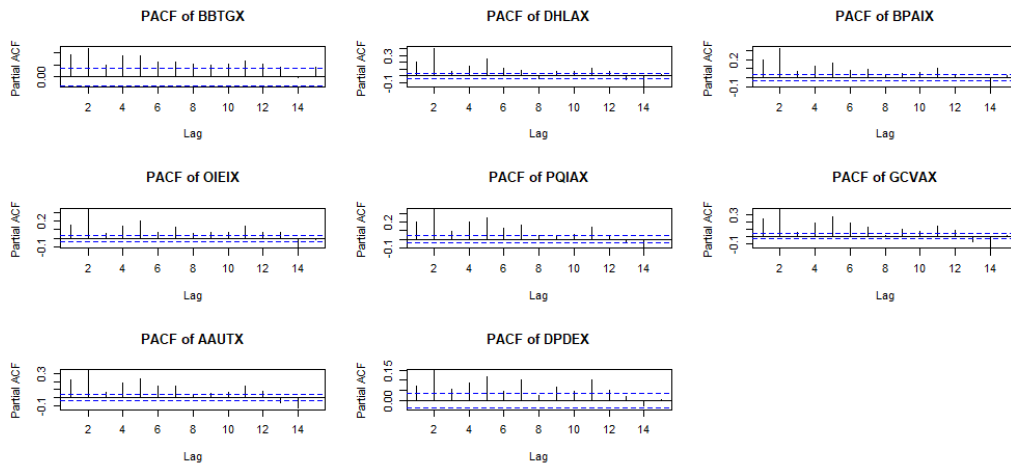


Figura 3.8: PACF dei *rendimenti*<sup>2</sup> dei titoli considerati (2 di 2)



# Capitolo 4

## Analisi e modellazione dei dati

### 4.1 Modelli semplici di Timing

Dopo aver condotto delle semplici analisi esplorative sulle serie dei prezzi e dei rendimenti dei titoli considerati in questo lavoro di tesi, i dati sono stati modellati al fine di valutare la presenza di market timing nelle rispettive serie. A tale scopo, sono stati costruiti, in primo luogo, dei semplici modelli di Timing in modo da avere una prima indicazione sul comportamento del coefficiente associato per i vari titoli.

Per prima cosa, vengono stimati i modelli cardine del market timing esposti nel 1° capitolo, ovvero il modello di Henriksson-Merton e quello di Treynor-Mazuy. Tali modelli vengono applicati alle serie semplici dei rendimenti dei singoli titoli, così da ottenere un modello di regressione, semplice nel 1° caso, quadratico nel 2°. Quindi tali risultati sono stati confrontati con i risultati ottenuti dall'applicazione di tali modelli su determinati quantili delle serie considerate. In formule:

- Modello di Henriksson-Merton

$$R_i(t) - R_f(t) = \alpha + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) + \varepsilon_t, \quad i = 1, \dots, 20$$

- Modello di Treynor-Mazuy

$$R_i(t) - R_f(t) = \alpha + \beta(R_M(t) - R_f(t)) + \gamma(R_M(t) - R_f(t))^2 + \varepsilon_p, \quad i = 1, \dots, 20$$

dove:

$R_i(t)$  = serie dei rendimenti dell'*i*-esimo titolo considerato;

$R_M(t)$  = serie dei rendimenti dell'indice di mercato considerato (S&P 500);

$R_f(t)$  = serie dei rendimenti di un titolo privo di rischio (componente non considerata nei modelli analizzati)

$x(t) = R_M(t) - R_f(t)$  = rendimento realizzato in eccesso sul mercato;

$y_t \equiv \max[0, R(t) - Z_M(t)] = \max[0, -x(t)]$

Nelle quattro tabelle sottostanti è possibile notare i risultati derivanti da tali modelli (Tabelle 4.1, 4.2, 4.3, 4.4) per determinati quantili (in tutto il lavoro di tesi sono stati considerati 19 quantili equidistanti, ovvero  $\tau = 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.9, 0.95$ ):

#### H-M model

Osservando tali risultati si nota che, relativamente al modello OLS, il coefficiente associato all'intercetta risulta pressochè sempre statisticamente non significativo; il coefficiente associato al rendimento di mercato, ovvero ai rendimenti dell' indice S&P 500, risulta essere altamente significativo per ogni componente, con un valore che varia dal minimo 0.589 del titolo BHBFX, al massimo 1.201 del titolo DTMMX. Quindi, il coefficiente associato alla componente di timing non risulta essere significativo per tutti i mutual fund considerati, ma solo per 8 di questi, di cui solo uno assume valore positivo (è associato al titolo avente la componente di mercato con valore minimo). I restanti coefficienti di timing significativi presentano valori negativi.

Osservando invece i quantili, è possibile notare come i coefficienti associati all'intercetta risultino spesso significativi per i quantili non centrali, benchè l'impatto della stessa risulti marginale rispetto alle altre componenti. Relativamente ai coefficienti associati all'indice di mercato è possibile notare come questi risultano sempre altamente significativi e decrescenti al crescere dell'ordine del quantile. Di particolare interesse è il comportamento del coefficiente associato alla componente di timing: si nota che quasi tutti i mutual fund hanno un coefficiente di timing non significativo in mediana, e ciò risulta ragionevole in quanto è stato mostrato nelle statistiche di base espo-



ste nel capitolo 3 che la mediana e la media assumono valori molto vicini fra loro. I coefficienti di timing, invece, dei restanti quantili risultano quasi sempre significativi/altamente significativi e con un andamento crescente all'aumentare dell'ordine del quantile. Questa relazione inversa fra indice di mercato e indice di timing denota due evidenze:

- nei quantili inferiori (0.1 - 0.3), le previsioni dei manager non sono sempre state accurate, e queste hanno portato ad ottenere risultati inferiori rispetto a quelli che si sarebbero potuti ottenere seguendo solo le indicazioni dell'indice di mercato;
- nei quantili superiori (0.7 - 0.9), le previsioni dei manager hanno avuto un impatto molto positivo sui rendimenti poi ottenuti dal fondo, in quanto hanno determinato, sempre, un aumento del rendimento ottenuto rispetto a quello che si sarebbe potuto ottenere seguendo il solo andamento dell'indice di mercato.

#### T-M model

Osservando, invece, i risultati associati al modello di T-M si nota che, relativamente alla modellazione OLS, il coefficiente associato all'intercetta risulta quasi sempre (tranne per 6 titoli) statisticamente non significativo; il coefficiente associato all'indice di mercato, ovvero ai rendimenti del indice S&P 500, risulta essere altamente significativo per ogni componente, con un valore che varia dal minimo 0.606 del titolo BHBFX (analogamente al modello di H-M), al massimo 1.184 del titolo DTMMX (analogamente al modello di H-M). Quindi, il coefficiente associato alla componente di timing non risulta essere significativo per tutti i mutual fund considerati, ma solo per 5 di questi, anche se tali valori risultano tutti negativi. Ciò sta a significare che per i mutual fund associati a tali coefficienti, la variazione degli elementi che compongono il fondo, e la conseguente variazione della volatilità dello stesso, non ha prodotto i risultati sperati, ma ha portato ad una diminuzione dei rendimenti che si sarebbero potuti ottenere utilizzando come riferimento il solo benchmark.

Osservando invece i quantili, è possibile notare come i coefficienti associati all'intercetta risultino spesso significativi per i quantili non centrali, benchè

**Tabella 4.1:** H-M model estimates of the portfolio considered (1 di 2)

Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>BHBFX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001	-0.0001	0.001***	0.0002
S&P 500	0.589***	0.786***	0.658***	0.595***	0.563***	0.499***
HM Coeff	0.033**	-0.253***	-0.056**	0.059***	0.164***	0.300***
<b>VEIPX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.0001	0.001***	0.002***
S&P 500	0.934***	1.005***	0.957***	0.919***	0.891***	0.860***
HM Coeff	-0.006	-0.128***	-0.055***	0.013	0.071***	0.0147***
<b>DTMMX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.0004	0.001***	0.002***
S&P 500	1.201***	1.335***	1.238***	1.168***	1.130***	1.080***
HM Coeff	-0.032**	-0.289***	-0.136***	-0.021	0.076***	0.286***
<b>DFCVX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.003***	-0.001***	-0.0000	0.001***	0.003***
S&P 500	1.179***	1.328***	1.208***	1.160***	1.130***	1.080***
HM Coeff	-0.053	-0.279***	-0.109***	-0.012	0.064**	0.226***
<b>NOLCX</b>						
Intercetta	-0.00004	-0.001***	-0.0005***	-0.0003	0.001***	0.001***
S&P 500	0.993***	1.018***	1.005***	0.992***	0.987***	0.979***
HM Coeff	0.001	-0.033*	-0.014**	0.03	0.014**	0.037***
<b>DFUVX</b>						
Intercetta	-0.00001	-0.002***	-0.001***	-0.00001	0.001***	0.003***
S&P 500	1.187***	1.319***	1.221***	1.163***	1.133***	1.083***
HM Coeff	-0.034**	-0.273***	-0.126***	-0.018	0.063**	0.210***
<b>VULVX</b>						
Intercetta	-0.0002	-0.002***	-0.001***	-0.00001	0.001***	0.002***
S&P 500	1.068***	1.114***	1.074***	1.049***	1.041***	1.016***
HM Coeff	-0.031**	-0.117***	-0.054***	0.006	0.024*	0.058**
<b>GTMEVX</b>						
Intercetta	-0.0003	-0.003***	-0.001***	-0.00003	0.001***	0.003***
S&P 500	1.080***	1.239***	1.129***	1.084***	1.037***	0.966***
HM Coeff	-0.001	-0.255***	-0.091***	0.015	0.092***	0.263***
<b>PNBAX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.00005	0.001***	0.002***
S&P 500	1.033***	1.124***	1.045***	1.012***	0.998***	0.958***
HM Coeff	-0.0133***	-0.176***	-0.063***	0.002	0.032**	0.148***
<b>AWSHX</b>						
Intercetta	-0.0001**	-0.002***	-0.001***	-0.00002	0.001***	0.002***
S&P 500	0.910***	0.939***	0.927***	0.917***	0.901***	0.885***
HM Coeff	-0.0001**	-0.002***	-0.001***	-0.00002	0.001***	0.002***

\*p&lt;0.1;\*\*p&lt;0.05;\*\*\*p&lt;0.001

**Tabella 4.2:** H-M model estimates of the portfolio considered (2 di 2)

Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>TILCX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.00004	0.001***	0.002***
S&P 500	1.042***	1.086***	1.040***	1.025***	1.015***	0.991***
HM Coeff	-0.016	-0.111***	-0.031**	0.001	0.030**	0.103***
<b>OLVAX</b>						
Intercetta	-0.0002	-0.003***	-0.001***	-0.0001	0.001***	0.003***
S&P 500	1.162***	1.198***	1.132***	1.113***	1.085***	1.068***
HM Coeff	-0.036	-0.151***	-0.020	0.005	0.051***	0.108***
<b>BBTGX</b>						
Intercetta	-0.0002*	-0.002***	-0.001***	-0.0002***	0.001***	0.002***
S&P 500	0.932***	1.076***	1.010***	0.977***	0.921***	0.829***
HM Coeff	0.013	-0.192***	-0.052***	0.017	0.095***	0.268***
<b>DHLAX</b>						
Intercetta	0.00002	-0.002***	-0.001***	-0.00005	0.001***	0.002***
S&P 500	0.969***	1.067***	0.987***	0.964***	0.935***	0.875***
HM Coeff	-0.253***	-0.056**	0.059***	0.164***	0.300***	
<b>BPAIX</b>						
Intercetta	-0.00001	-0.002***	-0.001***	-0.0001	0.001***	0.002***
S&P 500	0.977***	1.074***	1.022***	0.992***	0.936***	0.867***
HM Coeff	-0.008	-0.169***	-0.069**	-0.007	0.164***	0.300***
<b>OIEIX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.0001**	0.001***	0.002***
S&P 500	0.915***	0.936***	0.910***	0.897***	0.875***	0.851***
HM Coeff	0.003	-0.079***	-0.005	0.027**	0.067***	0.108***
<b>PQIAX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.00003	0.001***	0.002***
S&P 500	0.931***	1.013***	0.974***	0.940***	0.910***	0.864***
HM Coeff	0.005	-0.144***	-0.063***	0.0004	0.062***	0.157
<b>GCVAX</b>						
Intercetta	0.00000	-0.002***	-0.001***	0.0001	0.001***	0.002***
S&P 500	1.082***	1.147***	1.099***	1.086***	1.050***	1.025***
HM Coeff	-0.025***	-0.129***	-0.068***	-0.036**	0.028**	0.081***
<b>AAUTX</b>						
Intercetta	-0.0002**	-0.002***	-0.001***	-0.0001**	0.001***	0.002***
S&P 500	1.041***	1.078***	1.057***	1.037***	1.022***	1.002***
HM Coeff	0.010	-0.068***	-0.014	0.028*	0.058***	0.114***
<b>DPDEX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.00001	0.001***	0.003***
S&P 500	0.884***	0.989***	0.913***	0.882***	0.847***	0.784***
HM Coeff	-0.018	-0.228***	-0.043**	0.025	0.080***	0.198***

\*p&lt;0.1;\*\*p&lt;0.05;\*\*\*p&lt;0.001

l'impatto dell'intercetta risulti marginale rispetto alle altre componenti. Relativamente ai coefficienti associati all'indice di mercato è possibile notare come questi risultano sempre altamente significativi e decrescenti dal 1° al 5° quantile, e crescenti per il 7° e 9° quantile. Analogamente a quanto osservato per i quantili del modello di H-M, quasi tutti i mutual fund hanno un coefficiente di timing non significativo in mediana, mentre i coefficienti di timing degli restanti quantili risultano quasi sempre significativi/altamente significativi e con un andamento marcatamente crescente all'aumentare dell'ordine del quantile.

I grafici risultanti (relativi al titolo BHBFX) mostrano che:

- modello di H-M (Fig 4.1): la relazione inversa fra i vettori dei coefficienti, associati alle 2 variabili esplicative del fenomeno, viene confermata: all'aumentare dell'ordine del quantile diminuisce l'impatto dell'indice di mercato ed aumenta quello della componente di timing sul mutual fund oggetto di studio;
- modello di T-M (Fig 4.2): l'andamento del coefficiente associato all'indice di mercato risulta avere una forma convessa, come osservato dalle tabelle dei coefficienti sovrastanti, mentre il coefficiente associato alla componente di timing conferma l'andamento marcatamente crescente.

Inoltre, è stato deciso di valutare se i coefficienti associati alle varie stime sui quantili fossero uguali: a tale scopo è stato eseguito un test F che ha prodotto una statistica test pari a 23.295, che è risultata altamente significativa, stando a significare che i coefficienti associati ai vari parametri non sono uguali fra loro. Tale risultato viene confermato anche nel modello di T-M, il quale presenta una statistica test pari a 6.3444 altamente significativa. Lo scatterplot sottostante (Fig 4.3), relativo al modello di H-M sul fondo BHBFX, conferma le evidenze scaturite dal test F associato all'uguaglianza dei coefficienti:

**Tabella 4.3:** T-M model estimates of the portfolio considered (1 di 2)

Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>BHBFX</b>						
Intercetta	-0.00003	-0.002***	-0.001***	0.00001	0.001***	0.002***
S&P 500	0.606***	0.665***	0.629***	0.628***	0.645***	0.660***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.168	-3.304***	-0.955**	0.710**	1.501***	3.576***
<b>VEIPX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.00003	0.001***	0.002***
S&P 500	0.931***	0.928***	0.933***	0.925***	0.925***	0.930***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.102	-1.259***	-0.646*	0.116	0.504	1.835***
<b>DTMMX</b>						
Intercetta	0.00001	-0.003***	-0.001***	0.00002	0.001***	0.003***
S&P 500	1.184***	1.204***	1.168***	1.156***	1.166***	1.2'3***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.542**	-2.984***	-1.579***	-0.545	0.771***	3.371***
<b>DFCVX</b>						
Intercetta	-0.0003	-0.003***	-0.001***	-0.00002	0.001***	0.003***
S&P 500	1.153***	1.177***	1.159***	1.150***	1.161***	1.179***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.441	-2.783***	-1.398***	-0.185	0.237	2.620***
<b>NOLCX</b>						
Intercetta	-0.00005	-0.001***	-0.0005***	-0.00003	0.001***	0.001***
S&P 500	0.994***	1.000***	0.997***	0.994***	0.994***	0.994***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.062	-0.210	-0.141**	0.082	0.188**	0.590**
<b>DFUVX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.003***	-0.001***	-0.00004	0.001***	0.003***
S&P 500	1.170***	1.178***	1.159***	1.151***	1.160***	1.176***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.433**	-2.566***	-1.339***	-0.291	0.231	2.543***
<b>VULVX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	0.00000	0.001***	0.002***
S&P 500	1.052***	1.054***	1.051***	1.052***	1.052***	1.044***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.293**	-1.201***	-0.609*	0.023	0.171	0.658*
<b>GTME X</b>						
Intercetta	-0.0003**	-0.003***	-0.001***	0.00000	0.001***	0.003***
S&P 500	1.080***	1.113***	1.082***	1.077***	1.079***	1.099***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.058	-2.517***	-1.011*	-0.117	0.842**	2.828***
<b>PNBAX</b>						
Intercetta	-0.0001**	-0.003***	-0.001***	-0.00005	0.001***	0.002***
S&P 500	1.026***	1.033***	1.006***	1.014***	1.014***	1.016***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.053	-1.819***	-0.953***	0.091	0.471**	1.118***
<b>AWSHX</b>						
Intercetta	-0.0001**	-0.002***	-0.001***	0.00000	0.001***	0.002***
S&P 500	0.915***	0.911***	0.913***	0.919***	0.918***	0.912***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.109	-0.489***	-0.202***	-0.026	0.244	0.673***

\*p&lt;0.1;\*\*p&lt;0.05;\*\*\*p&lt;0.001

Tabella 4.4: T-M model estimates of the portfolio considered (2 di 2)

Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>TILCX</b>						
Intercetta	-0.00005	-0.002***	-0.001***	-0.00001	0.001***	0.002***
S&P 500	1.033***	1.028***	1.026***	1.027***	1.028***	1.041***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.184*	-1.188***	-0.317***	-0.264	0.136	0.816
<b>OLVAX</b>						
Intercetta	-0.0003*	-0.003***	-0.001***	-0.0001	0.001***	0.003***
S&P 500	1.144***	1.120***	1.119***	1.116***	1.110***	1.121***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.168	-1.093	-0.449	-0.119	0.333**	1.327
<b>BBTGX</b>						
Intercetta	-0.0001*	-0.003***	-0.001***	-0.0002***	0.001***	0.002***
S&P 500	0.938***	0.998***	0.985***	0.983***	0.982***	0.990***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.061	-3.039***	-0.732*	0.304	1.500***	4.244***
<b>DHLAX</b>						
Intercetta	-0.00002	-0.002***	-0.001***	-0.00005	0.001***	0.003***
S&P 500	0.961***	0.955***	0.964***	0.967***	0.965***	0.954***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.178	-2.494***	-0.842***	0.272	0.470***	1.399**
<b>BPAIX</b>						
Intercetta	-0.00001	-0.002***	-0.001***	0.0001	0.001***	0.003***
S&P 500	0.973***	0.993***	0.992***	0.991***	0.986***	0.977***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.200	-1.634***	-0.892**	-0.306	1.139***	2.661***
<b>OIEIX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.0001	0.001***	0.002***
S&P 500	0.917***	0.897***	0.909***	0.912***	0.909***	0.904***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.063	-0.840***	-0.038	0.307	0.565***	1.119***
<b>PQIAX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.002***	-0.001***	-0.00002	0.001***	0.002***
S&P 500	0.933***	0.938***	0.941***	0.939***	0.943***	0.943***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.035	-1.812	-0.617***	0.020	0.480**	1.832**
<b>GCVAX</b>						
Intercetta	-0.00005	-0.002***	-0.001***	-0.0001	0.001***	0.002***
S&P 500	1.069***	1.078***	1.066***	1.065***	1.064***	1.067***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.299***	-1.271***	-0.496**	-0.450***	0.106	1.055***
<b>AAUTX</b>						
Intercetta	-0.0001*	-0.002***	-0.001***	-0.0001	0.001***	0.002***
S&P 500	1.046***	1.053***	1.049***	1.048***	1.049***	1.055***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.097	-0.793***	-0.342*	0.166	0.410	0.776**
<b>DPDEX</b>						
Intercetta	-0.0001	-0.003***	-0.001***	0.00004	0.001***	0.003***
S&P 500	0.876***	0.885***	0.892***	0.895***	0.885***	0.887***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.053	-3.221***	-0.457	0.364*	1.012*	2.013***

\*p&lt;0.1;\*\*p&lt;0.05;\*\*\*p&lt;0.001

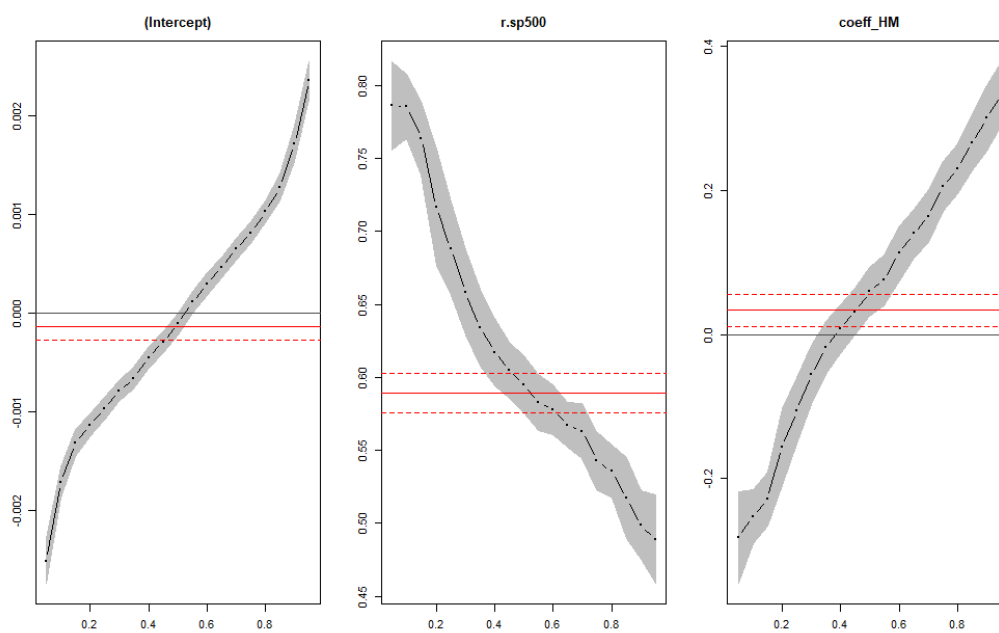


Figura 4.1: Coefficients' estimates of H-M model

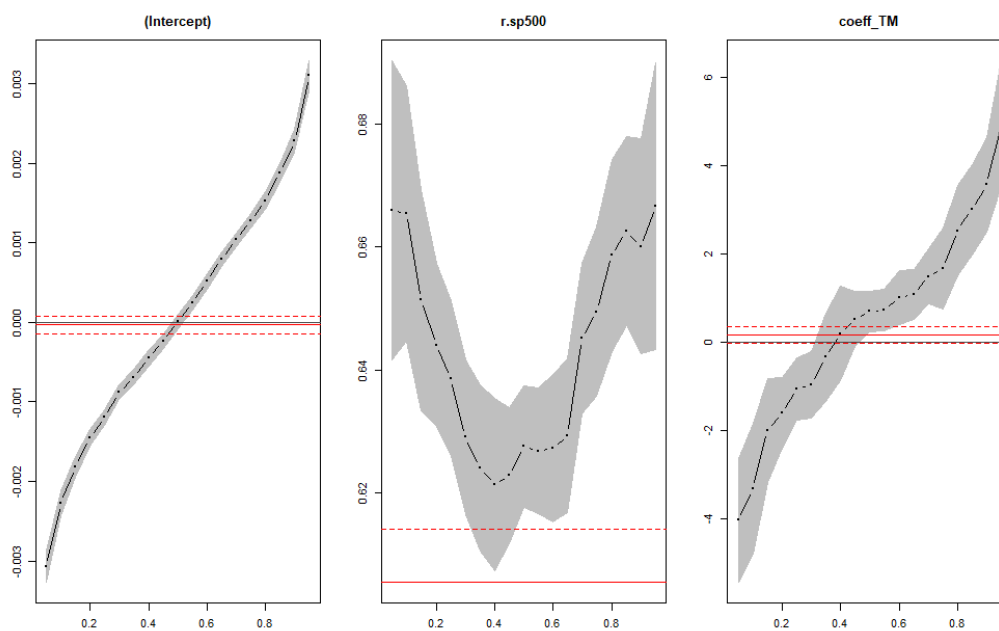
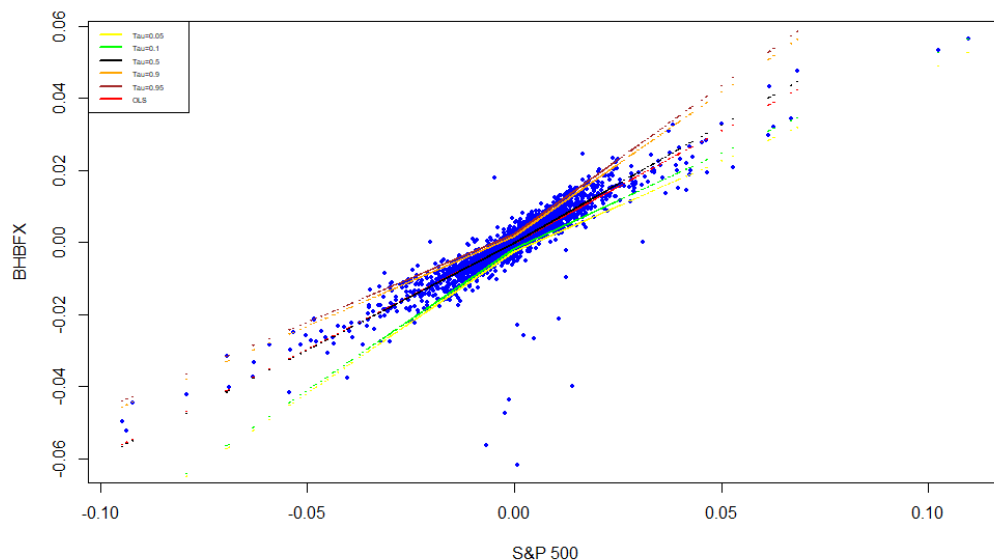


Figura 4.2: Coefficients' estimates of T-M model



**Figura 4.3:** Scatterplot and Quantile-OLS regression Fit on H-M model of BHBFX

I risultati ottenuti dalla modellazione delle serie utilizzando questi semplici modelli risultano soddisfacenti, e in linea con quanto ci saremmo potuti aspettare in merito alla finestra temporale e ai tipi di mutual fund considerati.

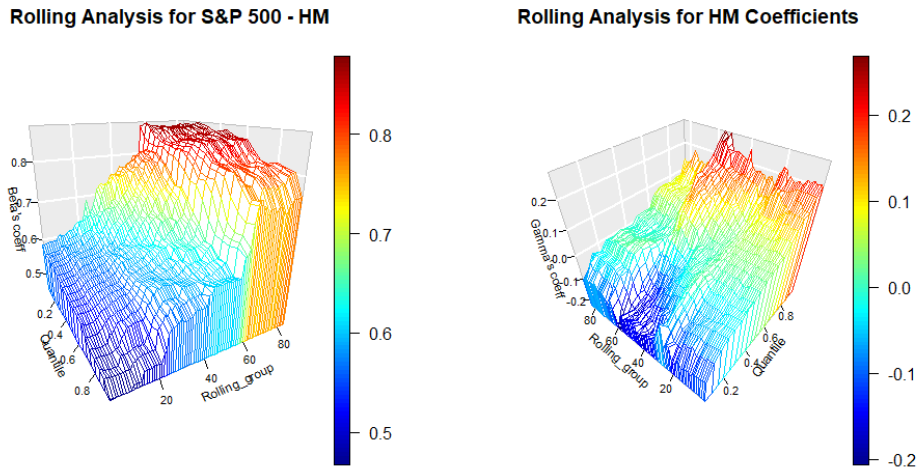
Al fine di svolgere un'analisi più precisa sulla componenti di timing, è stato deciso di eseguire delle stime rolling con step di un mese ed una finestra di stima di 4 anni. Per i dettagli di ciascuna finestra di dati considerata, si rimanda all'Appendice A.

Di seguito si mostrano i grafici delle stime rolling, relative al modello di H-M (Fig. 4.4) e al modello di T-M (Fig. 4.5), del titolo BHBFX, ovvero di quel mutual fund che che presenta l'unico coefficiente di timing positivo nel modello di H-M.

Come è possibile vedere dai grafici risultanti, analogamente a quanto osservato nelle tabelle precedenti, si nota che:

- Modello di H-M: i coefficienti associati all'indice di mercato, e quelli as-

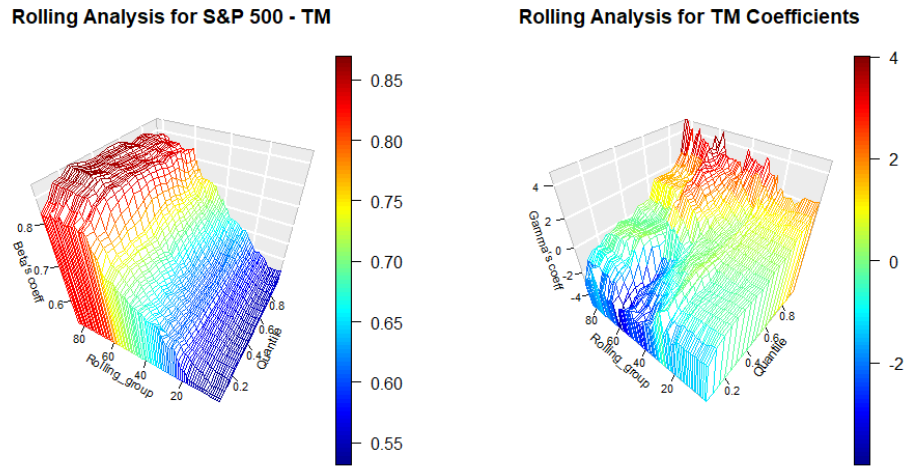




**Figura 4.4:** Rolling analysis for S&P 500 and Timing component in the H-M model

sociati all'indice di timing, sono rispettivamente decrescenti e crescenti all'aumentare dell'ordine del quantile. Inoltre, con lo scalare della finestra rolling, e quindi andando a considerare via via dati più recenti, l'impatto della componente di timing diminuisce e, contemporaneamente va ad aumentare l'impatto dell'indice di mercato. In particolare sono presenti *2 gradini*, che ci mostrano il cambio di livello di queste componenti: intorno alla 22-esima finestra rolling (10/2008 - 09/2012), ovvero nel pieno della *Crisi dei Subprime* e la 56-esima finestra rolling (08/2011 - 07/2015), ovvero nel pieno della *Crisi del Debito Sovrano Europeo*;

- Modello di T-M: i coefficienti associati all'indice di mercato e all'indice di timing, presentano un andamento crescente, sia all'aumentare dell'ordine del quantile, sia allo scalare della finestra temporale. Di particolare interesse è il comportamento del coefficiente associato alla componente di timing: tra la 40-esima (04/2010 - 03/2014) e la 60-esima (12/2011 -



**Figura 4.5:** Rolling analysis for S&P 500 and Timing component in the T-M model

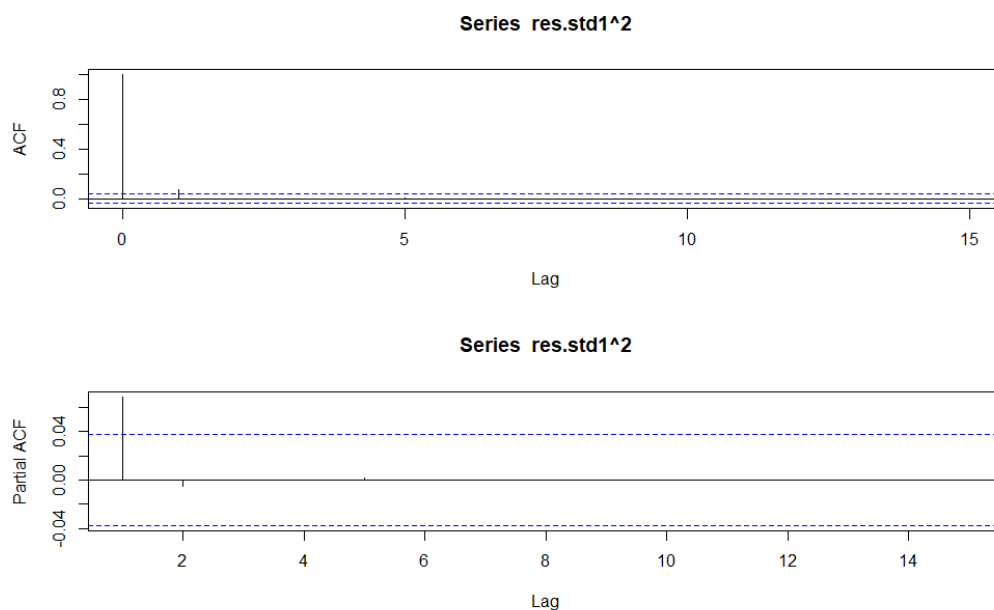
11/2015) finestra rolling, i coefficienti assumono valori molto diversi fra di loro, stando ad indicare che i rendimenti che si trovano nei quantili inferiori sono il frutto di una cattiva selezione di portafoglio, mentre quelli che si trovano nei quantili superiori sono il frutto di una buona selezione del portafoglio, soprattutto tenendo conto che queste finestre mobili risentono tutte della Crisi del Debito Sovrano Europeo, e delle conseguenze "ex-post" della Crisi dei Subprime.

## 4.2 Studio della componente di volatilità

I risultati fin qui ottenuti risultano soddisfacenti. Tuttavia, come visto nel capitolo 3, esiste una componente di volatilità che non può essere trascurata. A tale scopo, è stato deciso di modellare la volatilità mediante un modello APARCH (Ding, Granger, Engle R - 1993), che tiene conto del differente im-

patto che possono avere le bad-good news sui rendimenti del portafoglio considerato. Per una spiegazione più specifica del modello APARCH, si rimanda all'Appendice A.

Nel capitolo 3 era stato osservato che la componente quadratica dei rendimenti presentava significatività fino al 7° ritardo. Tuttavia, poichè in molti casi l'ordine di grandezza di queste correlazioni non è elevato, e raramente in finanza viene modellata la volatilità andando a considerare fino al 7° ritardo, è stato deciso di far variare l'ordine dell'indice associato alla componente della varianza al fine di scegliere il modello APARCH ottimale. In tutti i modelli considerati, il modello ottimale che raggiungeva il miglior compromesso tra  $AIC$ ,  $R^2$ ,  $PACF$  dei residui era il modello APARCH(1,1). Di seguito alcune evidenze circa quanto appena affermato:



**Figura 4.6:** ACF  $\wedge$  PACF of APARCH *residuals*<sup>2</sup>

Come è possibile notare, il residuo quadratico standardizzato sembra ancora correlato con il proprio ritardo al tempo 1; tuttavia, l'ordine di grandezza risulta trascurabile, e quindi è possibile affermare che il modello APARCH(1,1) riesce a modellare la volatilità delle serie considerate.

Analogamente a quanto fatto per i mutual fund, anche l'indice di mercato S&P 500 è stato modellato, mediante un GARCH(1,1, ) per depurarlo dalla volatilità: i risultati ottenuti sono analoghi a quelli descritti per i mutual fund.

Quindi i modelli di Timing di H-M e T-M sono stati ri-applicati alle serie depurate al fine di osservare eventuali cambiamenti nelle stime dei coefficienti di timing. Di seguito i risultati ottenuti (Tabelle 4.5-4.6 e 4.7-4.8):

#### Modello H-M sui residui standardizzati del modello APARCH

Osservando i risultati ottenuti (Tabelle 4.5 e 4.6) si nota che, relativamente alle stime OLS, il coefficiente associato all'intercetta risulta, in 14 casi su 20, significativo/altamente significativo, contrariamente a quanto osservato in precedenza. Bisogna comunque sottolineare che, dato l'ordine di grandezza di tale coefficiente, è lecito aspettarsi che l'impatto dello stesso non sia molto rilevante. Il coefficiente associato al rendimento di mercato risulta essere altamente significativo per ogni componente, e il range di variazione dello stesso risulta essere ridotto rispetto a quello osservato nel modello standard, dove il range di variazione era pari a 0.612, mentre ora è pari a 0.168. Quindi, il coefficiente associato alla componente di timing non risulta essere significativo per tutti i mutual fund considerati, ma solo per 6 di questi, di cui nessuno assume valore positivo (il mutual fund che nel modello precedente presentava l'unica coefficiente di timing positivo ora mostra una non significatività dello stesso).

Osservando invece i quantili, è possibile notare come i coefficienti associati all'intercetta risultino, nella maggior parte dei titoli considerati, significativi per tutti i quantili, e crescenti al crescere dell'ordine del quantile considerato. Relativamente ai coefficienti associati all'indice di mercato è possibile notare come questi risultano sempre altamente significativi e decrescenti al crescere dell'ordine del quantile. Relativamente al coefficiente associato alla componente di timing, si nota che il comportamento è pressochè analogo a quello osservato nel modello precedentemente stimato: non significatività in mediana per la maggior parte dei mutual fund; significatività dei restanti

**Tabella 4.5:** H-M model estimates on residuals of the portfolio considered (1 di 2)

Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>BHBFX</b>						
Intercetta	0.093	-0.250***	-0.074***	0.042***	0.143***	0.337***
S&P 500	0.917***	1.000***	0.908***	0.876***	0.831***	0.781***
HM Coeff	-0.045	-0.169***	-0.025	0.040*	0.134***	0.245***
<b>VEIPX</b>						
Intercetta	0.059***	-0.158***	-0.012	0.075***	0.159***	0.311***
S&P 500	0.963***	1.089***	1.020***	0.959***	0.912***	0.841***
HM Coeff	-0.031	-0.249***	-0.135***	-0.030	0.069***	0.206***
<b>DTMMX</b>						
Intercetta	0.074***	-0.196***	-0.027***	-0.066***	0.174***	0.365***
S&P 500	0.974***	1.063***	1.007***	0.954***	0.939***	0.927***
HM Coeff	-0.041**	-0.191***	-0.098***	-0.021	0.021***	0.069***
<b>DFCVX</b>						
Intercetta	0.061***	-0.188***	-0.030***	0.070***	0.159***	0.381***
S&P 500	0.915***	1.022***	0.948***	0.919***	0.867***	0.864***
HM Coeff	-0.043	-0.225***	-0.099***	-0.047**	0.049**	0.083***
<b>NOLCX</b>						
Intercetta	0.084***	-0.057***	0.025***	0.073***	0.131***	0.254***
S&P 500	0.991***	1.157***	1.054***	0.977***	0.924***	0.890***
HM Coeff	-0.064***	-0.331***	-0.167***	-0.023	0.070***	0.163***
<b>DFUVX</b>						
Intercetta	0.069	-0.194***	-0.022***	0.067***	0.168***	0.370***
S&P 500	0.949***	1.078***	0.996***	0.948***	0.890***	0.863***
HM Coeff	-0.052**	-0.268***	-0.144***	-0.038	0.066***	0.146***
<b>VULVX</b>						
Intercetta	0.063	-0.144***	-0.014*	0.074***	0.151***	0.299***
S&P 500	0.941***	1.077***	0.981***	0.935***	0.888***	0.855***
HM Coeff	-0.054*	-0.263***	-0.120***	-0.049**	0.052**	0.150***
<b>GTMEX</b>						
Intercetta	0.023	-0.185***	-0.047***	0.050***	0.146***	0.293***
S&P 500	0.823***	0.973***	0.873***	0.803***	0.746***	0.673***
HM Coeff	0.003	-0.278***	-0.127***	-0.017	0.098***	0.299***
<b>PNBAX</b>						
Intercetta	0.044	-0.194***	-0.020**	0.074***	0.175***	0.338***
S&P 500	0.963***	1.094***	1.034***	0.975***	0.929***	0.886***
HM Coeff	-0.009	-0.230***	-0.153***	-0.066***	0.021	0.137***

\*p&lt;0.1,\*\*p&lt;0.05,\*\*\*p&lt;0.001

Tabella 4.6: H-M model estimates on residuals of the portfolio considered (2 di 2)

Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>AWSHX</b>						
Intercetta	0.043***	-0.126***	-0.016**	0.063***	0.143***	0.274***
S&P 500	0.923***	1.060***	0.976***	0.924***	0.886***	0.840***
HM Coeff	0.008	-0.219***	-0.089***	-0.002	0.083***	0.199***
<b>TILCX</b>						
Intercetta	0.054***	-0.126***	-0.017**	0.060***	0.154***	0.310***
S&P 500	0.958***	1.080***	0.998***	0.942***	0.911***	0.851***
HM Coeff	-0.025	-0.229***	-0.112***	-0.024	0.042*	0.167***
<b>OLVAX</b>						
Intercetta	0.062***	-0.182***	-0.036***	0.047***	0.147***	0.321***
S&P 500	0.880***	0.998***	0.883***	0.812***	0.774***	0.732***
HM Coeff	-0.094***	-0.316***	-0.159***	-0.032	0.072**	0.204***
<b>BTGX</b>						
Intercetta	0.046**	-0.243***	-0.051***	0.036***	0.135***	0.314***
S&P 500	0.958***	1.035***	0.999***	0.935***	0.914***	0.844***
HM Coeff	-0.026	-0.164***	-0.114***	-0.015	0.072***	0.212***
<b>DHLAX</b>						
Intercetta	0.044**	-0.180***	-0.031***	0.066***	0.171***	0.355***
S&P 500	0.930***	1.080***	0.982***	0.925***	0.896***	0.859***
HM Coeff	-0.005***	-0.249**	-0.122***	-0.023	0.045*	0.162***
<b>BPAIX</b>						
Intercetta	0.023	-0.150***	-0.021***	0.080***	0.160***	0.348***
S&P 500	0.933***	1.092***	0.972***	0.934***	0.862***	0.830***
HM Coeff	0.001	-0.294***	-0.117***	-0.044**	0.079***	0.174***
<b>OIEIX</b>						
Intercetta	0.060***	-0.165***	-0.027***	0.060***	0.152***	0.330***
S&P 500	0.956***	1.069***	0.997***	0.939***	0.901***	0.890***
HM Coeff	-0.019	-0.217***	-0.099***	-0.017	0.060***	0.121***
<b>PQIAX</b>						
Intercetta	0.059***	-0.186***	-0.017***	0.076***	0.168***	0.350***
S&P 500	0.945***	1.074***	1.006***	0.951***	0.910***	0.867***
HM Coeff	-0.033	-0.234***	-0.131***	-0.041*	0.034	0.110***
<b>GCVAX</b>						
Intercetta	0.072***	-0.159***	-0.009***	0.072	0.152***	0.309***
S&P 500	0.990***	1.118***	1.028***	0.977***	0.932***	0.921***
HM Coeff	-0.048***	-0.237***	-0.132***	-0.052***	0.055***	0.119***
<b>AAUTX</b>						
Intercetta	0.040***	-0.176***	-0.036***	0.045***	0.137***	0.293***
S&P 500	0.934***	1.085***	0.985***	0.923***	0.881***	0.848***
HM Coeff	0.021	-0.224***	-0.086***	0.024	0.099***	0.204***
<b>DPDEX</b>						
Intercetta	0.046**	-0.237***	-0.044***	0.064***	0.163***	0.369***
S&P 500	0.859***	0.901***	0.889***	0.851***	0.811***	0.760***
HM Coeff	-0.013	-0.104***	-0.065**	-0.007	0.070***	0.128***

\*p&lt;0.1;\*\*p&lt;0.05;\*\*\*p&lt;0.001

quantili; andamento crescente dei coefficienti stimati all'aumentare dell'ordine del quantile. Come in precedenza, anche in questa nuova modellazione, si osserva una relazione inversa fra indice di mercato e indice di timing.

#### Modello T-M sui residui standardizzati del modello APARCH

Osservando i risultati associati al modello di T-M si nota che, relativamente alla modellazione OLS, il coefficiente associato all'intercetta risulta quasi sempre (tranne per 3 titoli) significativo; analogamente al modello di H-M, anche in questo caso l'ordine di grandezza di tali coefficienti è comunque ridotto, stando ad indicare che l'impatto di tale componente sui rendimenti dei singoli mutual fund sarà comunque marginale. Il coefficiente associato al rendimento di mercato risulta essere altamente significativo per ogni componente, così come osservato nei modelli precedentemente stimati. Infine, il coefficiente associato alla componente di timing non risulta essere significativo per tutti i mutual fund considerati, ma solo per 3 di questi, anche se tali valori risultano tutti negativi. Di particolare interesse è l'ordine di grandezza di tali coefficienti di timing: tutti presentano valori che variano tra -0.011 e 0.010, ovvero molto piccoli. La non significatività pressoché totale, e l'ordine di grandezza ridotto di questi coefficienti, confermano la bontà del modello APARCH utilizzato per depurare le serie dalle proprie componenti di volatilità: infatti, in letteratura, viene spesso usato il *rendimento*<sup>2</sup> come proxy della varianza.

Osservando invece i quantili, è possibile notare come i coefficienti associati all'intercetta risultino significativi per tutti i quantili e per quasi tutti i titoli. Relativamente ai coefficienti associati all'indice di mercato è possibile notare come questi risultano sempre altamente significativi e con andamenti prima decrecenti e poi crescenti a seconda dei quantili e dei titoli considerati. Relativamente ai coefficienti di timing, quasi tutti i mutual fund hanno un coefficiente di timing non significativo in mediana, mentre per i restanti quantili risultano quasi sempre significativi/altamente significativi e con un andamento marcatamente crescente all'aumentare dell'ordine del quantile. Valgono, anche in questo caso, le considerazioni fatte sui coefficienti di timing relative alle stime OLS.

**Tabella 4.7:** T-M model estimates on residuals of the portfolio considered (1 di 2)

Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>BHBFX</b>						
Intercetta	0.067	-0.288***	-0.076***	0.050***	0.163***	0.371***
S&P 500	0.906***	0.915***	0.893***	0.897***	0.908***	0.927***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.010	-0.029***	-0.007	0.007	0.031***	0.062***
<b>VEIPX</b>						
Intercetta	0.053***	-0.199***	-0.033***	0.072***	0.171***	0.346***
S&P 500	0.946***	0.968***	0.947***	0.943***	0.948***	0.957***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.005	-0.049***	-0.024***	-0.009	0.013*	0.042***
<b>DTMMX</b>						
Intercetta	0.062***	-0.232***	-0.046***	0.059***	0.176***	0.374***
S&P 500	0.955***	0.969***	0.957***	0.944***	0.952***	0.962***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.003**	-0.035***	-0.017***	0.0002	0.006	0.016***
<b>DFCVX</b>						
Intercetta	0.051***	-0.223***	-0.043***	0.061	0.165***	0.394***
S&P 500	0.893***	0.906***	0.893***	0.893***	0.897***	0.913***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.005	-0.044***	-0.025***	-0.007	0.011**	0.015**
<b>NOLCX</b>						
Intercetta	0.069***	-0.109***	-0.002	0.068***	0.143***	0.279***
S&P 500	0.959***	0.988***	0.958***	0.966***	0.962***	0.985***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.007**	-0.077***	-0.031***	-0.003	0.015***	0.034***
<b>DFUVX</b>						
Intercetta	0.052***	-0.233***	-0.050***	0.057***	0.176***	0.398***
S&P 500	0.926***	0.938***	0.924***	0.930***	0.933***	0.940***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.002	-0.048***	-0.029***	-0.002	0.016***	0.023***
<b>VULVX</b>						
Intercetta	-0.045***	-0.189***	-0.034***	0.063***	0.157***	0.321***
S&P 500	0.918***	0.940***	0.918***	0.911***	0.916***	0.945***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.001	-0.056***	-0.022***	-0.005	0.014**	0.035***
<b>GTMEX</b>						
Intercetta	0.015	-0.239***	-0.069***	0.044***	0.158***	0.348***
S&P 500	0.831***	0.824***	0.806***	0.795***	0.800***	0.833***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.010	-0.054***	-0.022***	0.001	0.025***	0.054***
<b>PNBAX</b>						
Intercetta	0.043**	-0.237***	-0.046***	0.060***	0.177***	0.356***
S&P 500	0.957***	0.966***	0.955***	0.943***	0.942***	0.953***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.003	-0.045***	-0.030***	-0.013*	0.006	0.026***
<b>AWSHX</b>						
Intercetta	0.042***	-0.165***	-0.032***	0.061***	0.156***	0.314***
S&P 500	0.929***	0.958***	0.927***	0.924***	0.931***	0.948***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.003	-0.045***	-0.015**	0.0003	0.017***	0.040***

\*p&lt;0.1;\*\*p&lt;0.05;\*\*\*p&lt;0.001



**Tabella 4.8:** T-M model estimates on residuals of the portfolio considered (2 di 2)

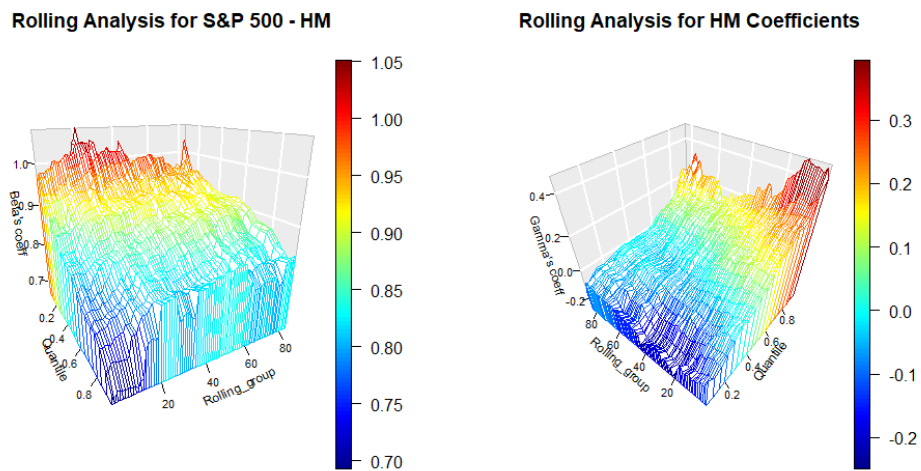
Coefficients	OLS	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
<b>TILCX</b>						
Intercetta	0.046***	-0.167***	-0.035***	0.057***	0.159***	0.339***
S&P 500	0.946***	0.963***	0.939***	0.929***	0.934***	0.941***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.001	-0.044***	-0.025***	-0.005	0.013**	0.035***
<b>OLVAX</b>						
Intercetta	0.039***	-0.237***	-0.062***	0.040***	0.156***	0.353***
S&P 500	0.833***	0.834***	0.799***	0.796***	0.816***	0.844***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.011**	-0.063***	-0.030***	-0.003	0.017**	0.044***
<b>BBTGX</b>						
Intercetta	0.038**	-0.265***	-0.070***	0.035***	0.147***	0.345***
S&P 500	0.946***	0.950***	0.939***	0.928***	0.952***	0.962***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.001	-0.039***	-0.020***	-0.004	0.017***	0.044***
<b>DHLAX</b>						
Intercetta	0.044***	-0.223***	-0.051***	0.058***	0.176***	0.383***
S&P 500	0.927***	0.958***	0.921***	0.916***	0.920***	0.949***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.001	-0.051***	-0.025***	-0.001	0.015**	0.034***
<b>BPAIX</b>						
Intercetta	0.017	-0.192***	-0.039***	0.068***	0.168***	0.373***
S&P 500	0.938***	0.942***	0.910***	0.913***	0.913***	0.932***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.007	-0.066***	-0.027***	-0.006	0.022***	0.037***
<b>OIEIX</b>						
Intercetta	0.052***	-0.205***	-0.044***	0.056***	0.161***	0.343***
S&P 500	0.948***	0.964***	0.946***	0.929***	0.932***	0.966***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.001	-0.039***	-0.022***	-0.001	0.014**	0.033***
<b>PQIAX</b>						
Intercetta	0.048***	-0.225***	-0.040***	0.066***	0.171***	0.362***
S&P 500	0.930***	0.953***	0.940***	0.930***	0.932***	0.932***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.001	-0.041***	-0.027***	-0.004	0.007	0.024***
<b>GCVAX</b>						
Intercetta	0.060***	-0.204***	-0.030***	0.061***	0.014***	0.019**
S&P 500	0.966***	0.996***	0.957***	0.949***	0.962***	0.975***
S&P 500 <sup>2</sup>	-0.005	-0.043***	-0.028***	-0.006	0.014***	0.019**
<b>AAUTX</b>						
Intercetta	0.042***	-0.220***	-0.052***	0.047***	0.154***	0.333***
S&P 500	0.947***	0.960***	0.940***	0.938***	0.934***	0.953***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.006	-0.034***	-0.018**	0.008	0.018***	0.034***
<b>DPDEX</b>						
Intercetta	0.040**	-0.257***	-0.056***	0.064***	0.174***	0.383***
S&P 500	0.854***	0.851***	0.854***	0.846***	0.847***	0.827***
S&P 500 <sup>2</sup>	0.001	-0.018***	-0.012**	-0.003	0.014**	0.030***

\*p&lt;0.1;\*\*p&lt;0.05;\*\*\*p&lt;0.001

Inoltre, come in precedenza, è stato deciso di valutare se i coefficienti associati alle varie stime sui quantili fossero uguali: a tale scopo è stato eseguito un test F che ha prodotto una statistica test altamente significativa, stando a significare che i coefficienti associati ai vari parametri non sono uguali fra loro, così come osservato nei modelli semplici di timing. Tali risultati vengono confermati anche nel modello di T-M.

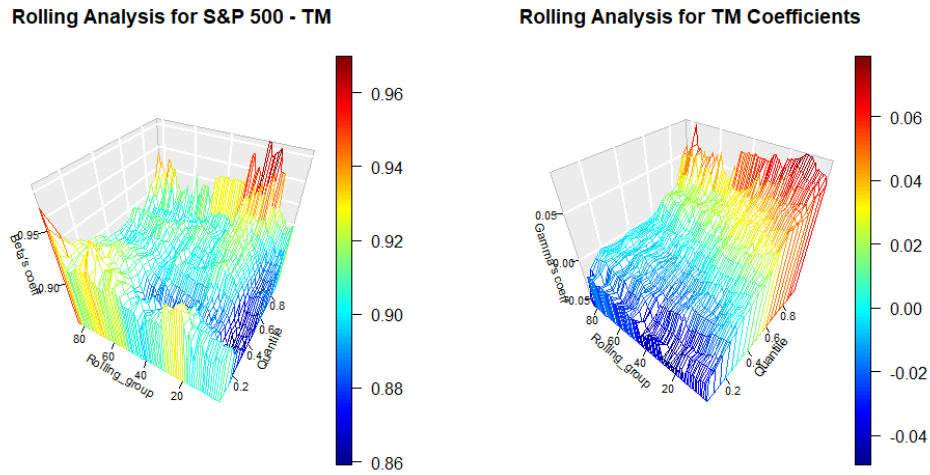
Analogamente a quanto fatto in precedenza, sono state eseguite delle stime rolling, con step di un mese ed una finestra di stima di 4 anni, anche sulle componenti depurate della volatilità e su i 19 quantili equidistanti precedentemente valutati

Di seguito si mostrano i grafici delle stime rolling, relative al modello di H-M (Fig. 4.7) e al modello di T-M (Fig. 4.8), del titolo BHBFX, in analogia a quanto fatto in precedenza.



**Figura 4.7:** Rolling analysis for S&P 500 and Timing component, depured from volatility, in the H-M model

Come è possibile vedere dai grafici risultanti, si nota che:



**Figura 4.8:** Rolling analysis for S&P 500 and Timing component, depured from volatility, in the T-M model

- Modello di H-M: i coefficienti associati all'indice di mercato, e quelli associati all'indice di timing sono, rispettivamente, decrescenti e crescenti all'aumentare dell'ordine del quantile, così come osservato nelle precedenti stime rolling. Contrariamente a quanto osservato in precedenza, le stime relative al coefficiente associato all'indice di mercato presentano un andamento molto più regolare a partire dalla 20esima finestra rolling, e più elevato rispetto a quello osservato sui rendimenti non depurati della componente di volatilità. Le stime del coefficiente associato alla componente di timing, invece, presentano un andamento molto simile a quello osservato nelle precedenti stime rolling. In questo caso, tuttavia, non si osserva il gradino fra la 40esima e la 60esima finestra rolling.
- Modello di T-M: il coefficiente associato all'indice di mercato presenta un comportamento molto differente rispetto a quello osservato nei grafici presenti nella Figura 4.5: più irregolare e frastagliato, con la

raggiunta dei propri valori massimi fra la 15esima e la 25esima finestra rolling, ovvero fra il 1<sup>o</sup> Marzo 2012 e il 31 Marzo 2012. Il comportamento della componente di timing risulta, invece, essere vicino a quello osservato per la componente di timing nel modello di H-M, benchè, in questo caso, l'impatto di tale componente sia ridotto rispetto a quello nel modello di H-M. Inoltre, si osserva che, anche in questo caso, il gradino fra la 40esima e la 60esima finestra rolling non è presente, ma è traslato fra la 20esima e la 40esima finestra rolling, avente, però un andamento più dolce.

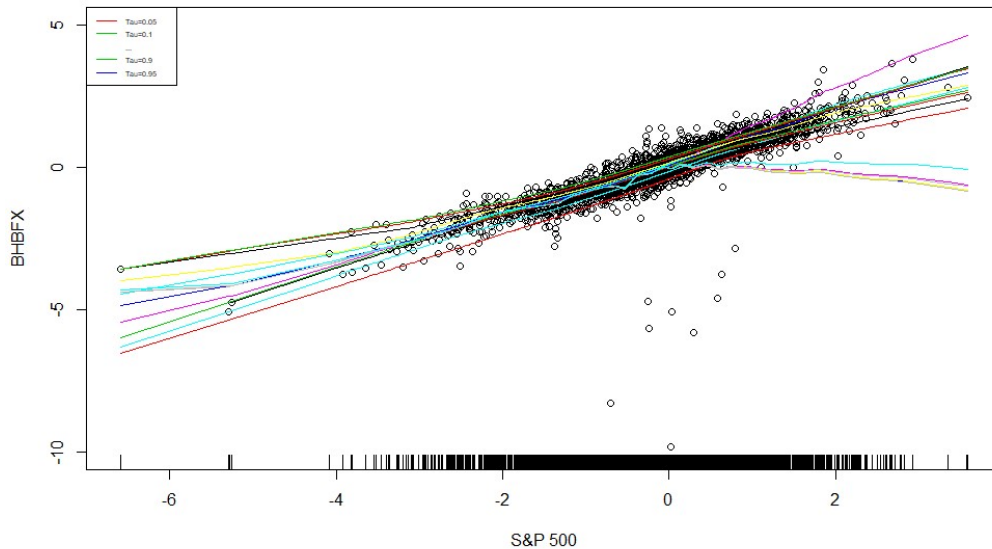
### 4.3 Modelli di Timing non parametrici

Tutti i modelli fin qui elaborati appartengono alla categoria dei modelli parametrici, ovvero modelli che si basano su ipotesi molto restrittive, talvolta non giustificabili, e assunzioni (normalità, omoschedasticità, indipendenza e identica distribuzione della componente erratica), di norma, raramente soddisfatte. A tale scopo, giungono *in aiuto* i metodi statistici non parametrici, che permettono di rilassare le ipotesi distributive sottostanti i dati, ottenendo quindi un modello più flessibile rispetto a quello basato su metodi parametrici. In questo studio, sono state portate avanti 2 strade:

- 1<sup>o</sup> : relativa al metodo di Koenker, Ng e Portnoy (1994) esposto nel capitolo 2 e relativo alle spline di lisciamiento;
- 2<sup>o</sup> : relativa all'utilizzo di spline cubiche naturali sulla variabile relativa all'indice di mercato

In merito al 1<sup>o</sup> metodo non parametrico utilizzato, risulta critica la scelta del parametro  $\lambda$ , detto *bandwidth/ampiezza di banda*, ovvero del parametro che penalizza l'irregolarità della funzione di regressione. A tale scopo il parametro  $\lambda$  è stato scelto in modo tale da minimizzare il criterio di Akaike (AIC) per i quantili. Per tutti i mutual fund considerati, il valore risultato ottimale è stato  $\lambda = 1.9947$ . Quindi il modello precedentemente esposto è stato applicato considerando come elemento non parametrico il benchmark, ovvero

l'indice S&P 500. Per semplicità, e al fine di snellire la trattazione, come in precedenza vengono riportate le sole evidenze circa il titolo BHBFX:



**Figura 4.9:** H-M Model with Quantile Smoothing Splines

Come è possibile vedere dal grafico sottostante (Fig.4.9 ), le stime ottenute per i quantili inferiori, ovvero  $\tau \in \{0.1, 0.15, 0.3, 0.65, 0.75, 0.95\}$ , risultano possedere una precisione inferiore rispetto a quella della mediana e dai quantili superiori; l'andamento, invece, degli altri quantili risulta essere soddisfacente. Da sottolineare il fatto che, per tutti i quantili e titoli considerati, la componente parametrica è risultata sempre altamente significativa.

In merito al 2° metodo non parametrico utilizzato, è stato deciso di porre i nodi delle Spline Cubiche Naturali sui quantili  $\tau \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$  dell'indice di mercato. I risultati ottenuti sono i seguenti:

Osservando la tabella sottostante si nota che:

- circa tutti i coefficienti, ad esclusione di quelli associati alla componente di timing, risultano significativi/altamente significativi, e con un andamento decrescente all'aumentare dell'ordine del quantile. Tale risultato risulta analogo a quello osservato nel modello di H-M classico, dove il

**Tabella 4.9:** H-M model estimates in Quantile Regression with knots on quantile

Coefficients	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.9$
Intercept	-6.16592***	-5.94239***	-5.26792***	-4.79746***	-3.47899***
Natural Spline_1	5.30649***	5.29813***	4.76717***	4.40646***	3.31166***
Natural Spline_2	5.86785***	5.88343***	5.31907***	4.96504***	3.85583***
Natural Spline_3	6.55372***	6.28016***	5.75905***	5.42742***	4.24570***
Natural Spline_4	6.38365***	5.59464***	5.45856***	5.29813***	4.34424**
Natural Spline_5	11.49062***	10.52267***	9.85885***	9.45448***	7.31271**
Natural Spline_6	7.64107**	6.00513***	6.19939**	6.15734***	5.86041
HM Coeff_7	-0.18720	0.23915	0.14958	0.12150	0.28770

\*p<0.1;\*\*p<0.05;\*\*\*p<0.001

coefficiente associato all'indice di mercato presentava lo stesso tipo di andamento in relazione ai quantili;

- la componente di timing non risulta essere mai significativa;

La bontà di tale modello viene confermata anche dai grafici (Figura 4.10) sottostanti per i quantili considerati:

Analogamente, tale modellazioni sono state ri-eseuite considerando il modello di T-M, e hanno condotto a risultati leggermente diversi da quelli ottenuti per il modello di H-M, ed il fenomeno del crossing tra i quantili risulta più attenuato (Figure 4.11  $\wedge$  4.12):

In merito ai modelli di timing semiparametrici e non parametrici è stato deciso di non sviluppare la sezione sulle stime rolling in quanto l'elaborazione e la lettura delle stesse avrebbe richiesto un approfondimento tale da risultare fuorviante per il contenuto di questo lavoro di tesi.

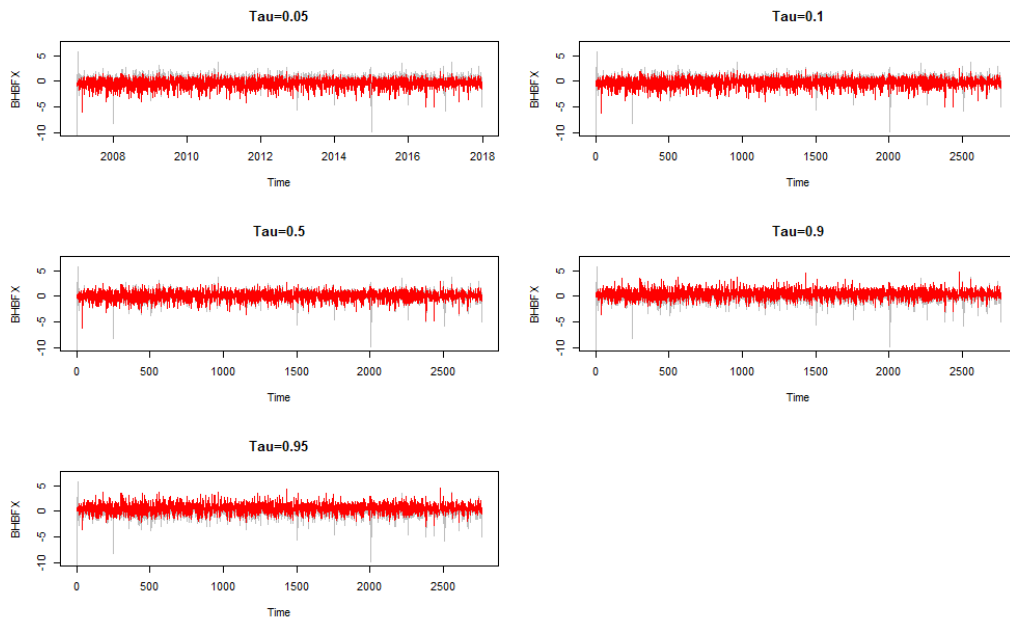


Figura 4.10: Osservati vs Predetti - HM

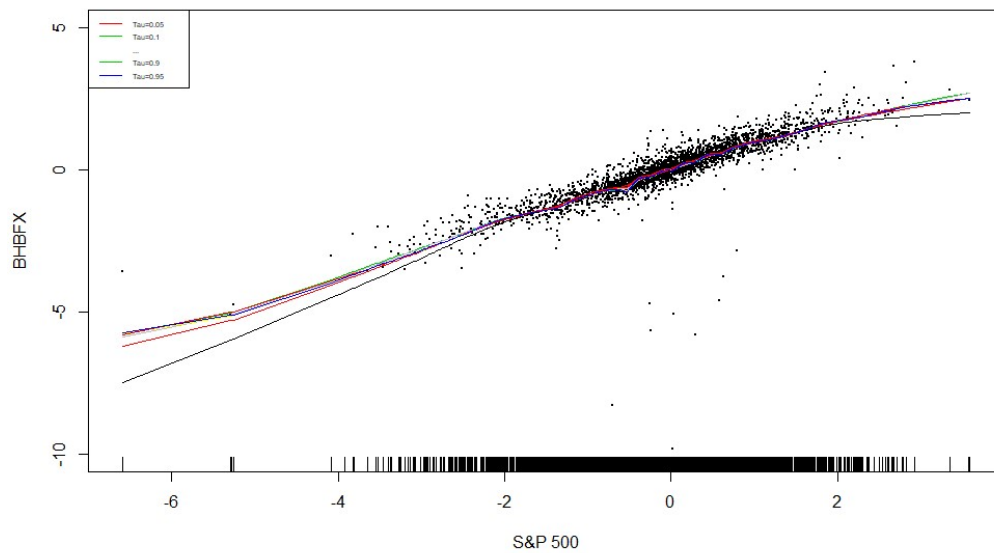


Figura 4.11: T-M Model with Quantile Smoothing Splines

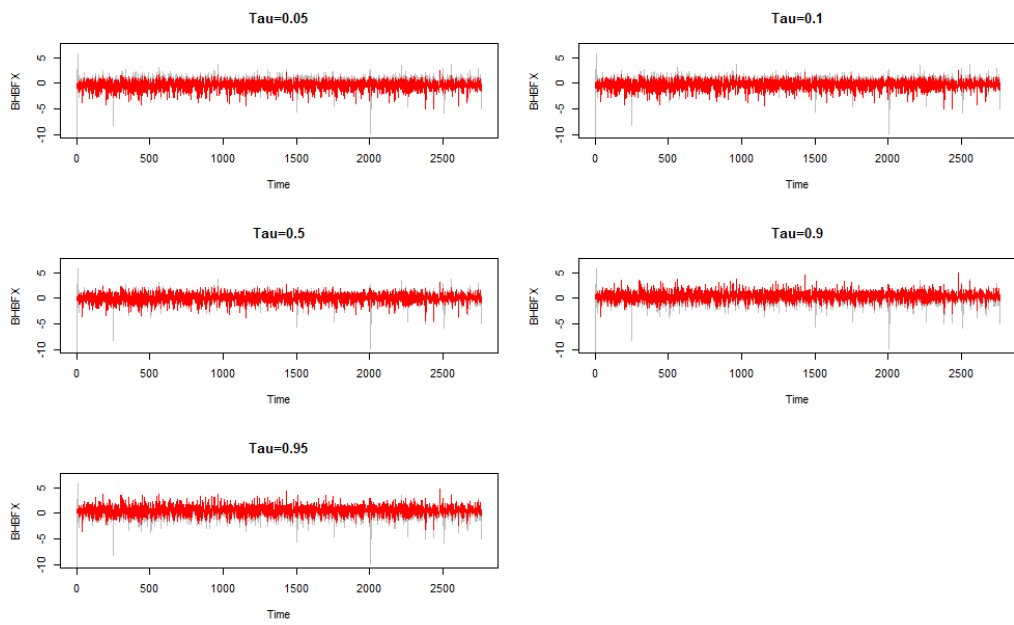


Figura 4.12: Osservati vs Predetti - TM



# Capitolo 5

## Conclusioni

L'obiettivo principale di questo lavoro di tesi era quello di valutare la presenza di fenomeni di timing su un campione di mutual funds americani di tipo "Large Value". Tale fenomeno è stato modellato mediante l'applicazione della regressione quantilica in quattro diverse declinazioni sequenziali, al fine valutare l'impatto del medesimo sulla distribuzione dei vari mutual funds. E' stato deciso di utilizzare metodi afferenti la regressione quantilica in quanto permettono di fornire un'analisi più esaustiva sulla relazione che lega la variabile risposta alle variabili esplicative. In aggiunta, sono state eseguite delle stime rolling al fine di valutare il fenomeno su finestre mobili di 4 anni e con step di 1 mese. I risultati ottenuti sui primi modelli semplici di timing hanno confermato un aspetto tipico della regressione quantilica, ovvero che la non significatività o significatività di un determinato coefficiente in un modello OLS, non implica la significatività/non significatività del medesimo coefficiente sui quantili considerati. Infatti, molti titoli che presentavano un  $\hat{\gamma}_{OLS}$  non significativo, possedevano un  $\hat{\gamma}_{\tau}, \tau \in \{0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.9, 0.95\}$  significativo. Successivamente, le serie considerate nello studio sono state depurate dalla componente di volatilità mediante un modello APARCH, e ciò ha permesso di valutare l'impatto delle varie componenti in maniera più precisa e puntuale. In merito al modello di H-M, è stata trovata una relazione inversa fra i coefficienti dell'indice di mercato e i coefficienti della componente di timing: all'aumentare dell'ordine del quantile, il coefficiente associato all'indice di mercato diminuiva, mentre quello associato all'indice di timing

aumentava. Inoltre, sia nel modello di H-M che in quello di T-M, è stata spesso osservata la non significatività della componente di timing per il quantile  $\tau = 0.5$ . Dopo aver depurato le serie dalla componente di volatilità, queste sono state ri-modellate in maniera non parametrica, ottenendo risultati molto soddisfacenti. Le stime rolling ottenute su finestre di 4 anni con shift mensili hanno mostrato che l'impatto del coefficiente associato all'indice di mercato aumenta via via che vengono considerati dati più recenti; l'impatto del coefficiente associato alla componente di timing presenta un andamento crescente all'aumentare della finestra temporale e dell'ordine del quantile considerato. Tuttavia, in molti dei modelli analizzati è presente il fenomeno di Crossing dei quantili che necessita di essere preso in considerazione, al fine di ottenere delle stime non decrescenti con l'aumentare dell'ordine del quantile

In futuro, potrebbe risultare utile considerare modelli di timing estesi che, invece di basarsi sul CAPM, si basano su sue estensioni, come il modello di Fama & French, che contiene 2 elementi aggiuntivi rispetto al CAPM, relativi al rischio di capitalizzazione ("SMB" = Small Minus Big), e al rischio legato al *book to market ratio* ("HML" = High Minus Low), e il modello di Carhart, un'estensione del modello di F&F, che considera anche la componente relativa al "Momentum" ("WML" = Winner Minus Loser), ovvero all'inerzia del mercato in cui si sta operando. Inoltre potrebbe risultare utile l'utilizzo di modelli vincolati, come quello di Bondell, Reich & Wang (2010), i quali propongono di stimare i quantili di interesse simultaneamente e trasformano un problema di ottimizzazione in un semplice problema di programmazione lineare.

# Appendice A

## Appendice

### A.1 Modello APARCH - Asymmetric Power ARCH

Sia  $r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$  il rendimento di un indice azionario al tempo  $t$ , e siano  $p_t$  e  $p_{t-1}$  i prezzi, rispettivamente, al tempo  $t$  e al tempo  $t - 1$  di tale indice azionario. La struttura generale di un modello APARCH è così definita:

- $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$ ,  $\nu_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$ ,
- $\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-i}^\delta$ , dove
- $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,
- $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,
- $-1 < \gamma_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,
- $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, q$

Questo modello permette di tenere conto del diverso impatto che possono avere le *bad news* e le *good news* sulla volatilità. Infatti, in letteratura, è noto che i rendimenti azionari sono negativamente correlati con i cambiamenti nei volatilità dei rendimenti: infatti, la volatilità tende a crescere in risposta a "*bad news*" (rendimenti in eccesso minori di quanto atteso), a diminuire

in risposta a *good news* (rendimenti in accesso maggiori di quanto atteso). Questa versione generalizzata del modello ARCH include al suo interno altri 7 modelli come casi speciali, tra i quali quelli più noti sono:

- Modello ARCH(p) : siano  $\delta = 2$ , e  $\gamma_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\beta_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$ , allora:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2;$$

- Modello GARCH(p,q) : siano  $\delta = 2$ , e  $\gamma_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , allora:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-i}^2;$$

- Modello GARCH(p,q) di Taylor/Schwert per la deviazione standard : siano  $\delta = 1$ , e  $\gamma_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , allora:

$$\sigma_t^- \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-i}^-;$$

- Modello GJR-GARCH(p,q): sia  $\delta = 2$ :

– quando  $0 \leq \gamma_i < 1$ , allora:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (1 - \gamma_i)^2 \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \alpha_i \{(1 + \gamma_i)^2 - (1 - \gamma_i)^2\} S_i^- \varepsilon_{t-i}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (1 - \gamma_i)^2 \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^p 4\alpha_i \gamma_i S_i^- \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned}$$

dove  $S_i^- = 1$  se  $\varepsilon_{t-i} < 0$ , 0 altrimenti

(A.1)

– se si definisce  $\alpha_i^* = \alpha_i(1 - \gamma_i)^2 \quad \wedge \quad \gamma_i^* = 4\alpha_i\gamma_i$  allora si ottiene:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i^* \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i^* S_i^- \varepsilon_{t-i}^2;$$

– quando  $-1 \leq \gamma_i < 0$ , allora:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (1 + \gamma_i)^2 \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 - \sum_{i=1}^p 4\alpha_i \gamma_i S_i^+ \varepsilon_{t-i}^2$$

dove  $S_i^+ = 1$  se  $\varepsilon_{t-i} > 0$ , 0 altrimenti

– se si definisce  $\alpha_i^* = \alpha_i(1 + \gamma_i)^2 \quad \wedge \quad \gamma_i^* = -4\alpha_i\gamma_i$  allora si ottiene:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i^* \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i^* S_i^+ \varepsilon_{t-i}^2;$$

e ciò permette agli shocks positivi di avere un effetto maggiore sulla volatilità.

## A.2 Le finestre temporali per le stime rolling

**Tabella A.1:** Finestre temporali

ID	Inizio finestra Rolling	Fine finestra rolling	ID	Inizio finestra Rolling	Fine finestra rolling
1	2007-01	2010-12	43	2010-07	2014-06
2	2007-02	2011-01	44	2010-08	2014-07
3	2007-03	2011-02	45	2010-09	2014-08
4	2007-04	2011-03	46	2010-10	2014-09
5	2007-05	2011-04	47	2010-11	2014-10
6	2007-06	2011-05	48	2010-12	2014-11
7	2007-07	2011-06	49	2011-01	2014-12
8	2007-08	2011-07	50	2011-02	2015-01
9	2007-09	2011-08	51	2011-03	2015-02
10	2007-10	2011-09	52	2011-04	2015-03
11	2007-11	2011-10	53	2011-05	2015-04
12	2007-12	2011-11	54	2011-06	2015-05
13	2008-01	2011-12	55	2011-07	2015-06
14	2008-02	2012-01	56	2011-08	2015-07
15	2008-03	2012-02	57	2011-09	2015-08
16	2008-04	2012-03	58	2011-10	2015-09
17	2008-05	2012-04	59	2011-11	2015-10
18	2008-06	2012-05	60	2011-12	2015-11
19	2008-07	2012-06	61	2012-01	2015-12
20	2008-08	2012-07	62	2012-02	2016-01
21	2008-09	2012-08	63	2012-03	2016-02
22	2008-10	2012-09	64	2012-04	2016-03
23	2008-11	2012-10	65	2012-05	2016-04
24	2008-12	2012-11	66	2012-06	2016-05
25	2009-01	2012-12	67	2012-07	2016-06
26	2009-02	2013-01	68	2012-08	2016-07
27	2009-03	2013-02	69	2012-09	2016-08
28	2009-04	2013-03	70	2012-10	2016-09
29	2009-05	2013-04	71	2012-11	2016-10
30	2009-06	2013-05	72	2012-12	2016-11
31	2009-07	2013-06	73	2013-01	2016-12
32	2009-08	2013-07	74	2013-02	2017-01
33	2009-09	2013-08	75	2013-03	2017-02
34	2009-10	2013-09	76	2013-04	2017-03
35	2009-11	2013-10	77	2013-05	2017-04
36	2009-12	2013-11	78	2013-06	2017-05
37	2010-01	2013-12	79	2013-07	2017-06
38	2010-02	2014-01	80	2013-08	2017-07
39	2010-03	2014-02	81	2013-09	2017-08
40	2010-04	2014-03	82	2013-10	2017-09
41	2010-05	2014-04	83	2013-11	2017-10
42	2010-06	2014-05	84	2013-12	2017-11

# Bibliografia

- [1] Bonaccolto G. Caporin M., (2016), *The Determinants of Equity Risk and Their Forecasting Implications: A Quantile Regression Perspective*. Journal of Risk and Financial Management.
- [2] Bondell H., Reich B., Wang H., (2010), *Noncrossing quantile regression curve estimation*. Biometrika, Vol. 97, No. 4, pp.825-838.
- [3] Chen Y., Liang B., (2007), *Do Market Timing Hedge Funds Time the Market?*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 42, No.4, pp.827-856.
- [4] Ding Z., Granger C., Engle R., (1993), *A long memory property of stock market returns and a new model\**. Journal of Empirical Finance, No.1, pp.83-86.
- [5] Henriksson R., (1984), *Market Timing and Mutual Fund Performance: An Empirical Investigation*. The Journal of Business, Vol. 57, No. 1, pp.73-96.
- [6] Henriksson R., Merton R. (1981), *On Market Timing and Investment Performance. II. Statistical Procedures for Evaluating Forecasting Skills*. The Journal of Business, Vol. 54, No. 4, pp.513-533.
- [7] Jensen M., (1967), *The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964*. Journal of Finance, Vol. 23, No. 2, pp.389-416.
- [8] Konker R., (2017), *QUANTILE REGRESSION IN R: A VIGNETTE*. Version of April 17,2017.

- [9] Konker R., Basset G. and JR, (1978), *Regression Quantiles*. *Econometrica*, Vol. 46, No.1 pp.33-50.
- [10] Konker R., (2000), *Quantile Regression*. University of Illinois, Urbana-Champaign.
- [11] Konker R., Hallock K., (2000), *QUANTILE REGRESSION: AN INTRODUCTION*. *Journal of Economic Perspectives "Symposium on Econometric Tools"*.
- [12] Konker R., Ng P., Portnoy S., (1994), *Quantile Smoothing Splines*. *Biometrika*, Vol. 81, No. 4, pp. 673-680.
- [13] Liao L., Zhang X., Zhang Y., (2017), *Mutual fund managers' timing abilities*. *Pacific-Basin Finance Journal*, Vol. 42, pp.80-96.
- [14] Merton R., (1981), *On Market Timing and Investment Performance. I. An Equilibrium Theory of Value for Market Forecasts*. *The Journal of Business*, Vol. 54, No. 3, pp.363-406.
- [15] Tchamyoua V.,Asongua S., (2017), *Conditional market timing in the mutual fund industry*. *Research in International Business and Finance*, Vol. 42, pp.1355-1366.
- [16] Treynor J., Mazuy K. (1966), *Can Mutual Funds Outguess the Market?*. *Harvard Business Review*, Vol. 44, pp.131-136.
- [17] n.a., *BHBFX* **URL:** <https://it.finance.yahoo.com/quote/BHBFX/holdings?p=BHBFX>.
- [18] n.a., *VEIPX* **URL:** <https://it.finance.yahoo.com/quote/VEIPX/holdings?p=VEIPX>.
- [19] n.a., *DTMMX* **URL:** <https://it.finance.yahoo.com/quote/DTMMX/holdings?p=DTMMX>.
- [20] n.a., *DFCVX* **URL:** <https://it.finance.yahoo.com/quote/DFCVX/holdings?p=DFCVX>.



- [21] n.a., *NOLCX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/NOLCX/holdings?p=NOLCX>.
- [22] n.a., *DFUVX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/DFUVX/holdings?p=DFUVX>.
- [23] n.a., *VULVX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/VULVX/holdings?p=VULVX>.
- [24] n.a., *GTMEX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/GTMEX/holdings?p=GTMEX>.
- [25] n.a., *PNBAX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/PNBAX/holdings?p=PNBAX>.
- [26] n.a., *AWSHX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/AWSHX/holdings?p=AWSHX>.
- [27] n.a., *TILCX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/TILCX/holdings?p=TILCX>.
- [28] n.a., *OLVAX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/OLVAX/holdings?p=OLVAX>.
- [29] n.a., *BBTGX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/BBTGX/holdings?p=BBTGX>.
- [30] n.a., *DHLAX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/DHLAX/holdings?p=DHLAX>.
- [31] n.a., *BPAIX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/BPAIX/holdings?p=BPAIX>.
- [32] n.a., *OIEIX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/OIEIX/holdings?p=OIEIX>.
- [33] n.a., *PQIAX* URL: <https://it.finance.yahoo.com/quote/PQIAX/holdings?p=PQIAX>.

- [34] n.a., *GCVAX* **URL:** <https://it.finance.yahoo.com/quote/GCVAX/holdings?p=GCVAX>.
- [35] n.a., *AAUTX* **URL:** <https://it.finance.yahoo.com/quote/AAUTX/holdings?p=AAUTX>.
- [36] n.a., *DPDEX* **URL:** <https://it.finance.yahoo.com/quote/DPDEX/holdings?p=DPDEX>.