

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”**

**Corso di Laurea in Fisica**

**NANOLENTI PLASMONICHE  
PER LA GENERAZIONE DI  
MOMENTO ANGOLARE ORBITALE**

*Relatore: Prof. Filippo Romanato*

*Laureando: Dario Cattozzo Mor*

*Matricola: 1074754*

**Anno Accademico 2017/2018**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Basi di Plasmonica</b>	<b>7</b>
1.1 Elettromagnetismo nei Metalli . . . . .	7
1.1.1 Le Equazioni di Maxwell e la Propagazione di Onde Elettromagnetiche . . . . .	7
1.1.2 La Funzione Dielettrica del Gas di Elettroni Liberi . . . . .	11
1.1.3 La Dispersione del Gas di Elettroni Liberi e i Plasmoni di Volume . . . . .	12
1.1.4 Metalli Reali e Transizioni Interbanda . . . . .	12
1.1.5 L'Energia del Campo Elettromagnetico nei Metalli . . . . .	13
1.2 Polaritoni Plasmonici di Superficie nelle interfacce Metallo/Isolante	13
1.2.1 L'Equazione d'Onda . . . . .	14
1.2.2 Interfaccia Singola . . . . .	14
1.2.3 Sistemi Multilayer . . . . .	17
1.2.4 Confinamento dell'Energia . . . . .	19
1.3 Eccitazione degli SPP nelle Interfacce Planari . . . . .	19
1.3.1 Accoppiamento tramite Reticolo . . . . .	19
1.4 Trasmissione di Radiazione attraverso Aperture . . . . .	20
1.4.1 Teoria della Diffrazione . . . . .	20
1.4.2 Trasmissione Straordinaria attraverso Aperture Sub-Wavelength	21
1.4.3 Plasmoni di Superficie Localizzati e Trasmissione attraverso Singole Aperture . . . . .	22
<b>2 Teoria OAM e PVL</b>	<b>23</b>
2.1 Generazione e Propagazione di Fasci Ottici che trasportano Momento Angolare Orbitale della Luce . . . . .	23
2.1.1 L'Approssimazione Parassiale . . . . .	23
2.1.2 Fasci di Laguerre-Gauss . . . . .	24
2.1.3 Fasci di Bessel . . . . .	25
2.1.4 Momento Angolare Orbitale e di Spin dei Fasci di Luce . . . . .	25

2.1.5	Metodi per la Generazione di Vortici Ottici . . . . .	27
2.2	Interazione dei Fasci Vorticosi con gli SPP . . . . .	29
2.2.1	Vortici SPP e Fasci di Bessel Evanescenti (EBB) . . . . .	29
2.2.2	Plasmonic Vortex Lenses (PVL) . . . . .	30
2.2.3	SAM e OAM in Strutture Chirali e Achirali . . . . .	34
2.2.4	Nanoaperture e Generazione di Momento Angolare Orbitale nel Far-Field . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Trapping e Rotazione di Microparticelle Dielettriche</b>	<b>37</b>
3.1	Trapping e Rotazione selettivi di Microparticelle Dielettriche Iso- piche . . . . .	37
	<b>Conclusioni</b>	<b>43</b>
	<b>Appendice</b>	<b>47</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

# Introduzione

Il lavoro di tesi svolto consiste nello studio del funzionamento dei dispositivi PVL a partire dalla teoria di base, di plasmonica e di momento angolare orbitale della luce, alla loro struttura e funzionamento e alla loro applicazione nell'optical tweezing. Per fare ciò sono state raccolte informazioni da libri e articoli inerenti la materia, creando un testo organico che avesse come filo conduttore l'applicazione dei concetti studiati ai dispositivi PVL.

Il primo capitolo pone le basi di plasmonica necessarie a comprendere i fenomeni che hanno luogo nelle PVL. A partire dalle equazioni di Maxwell si studia l'interazione dei metalli con la radiazione elettromagnetica, per un grande range di frequenze. Per fare ciò si introduce la funzione dielettrica del metallo sia reale che ideale, quest'ultimo rappresentato come nel modello di Drude da un gas di elettroni liberi che si muove su un fondo fisso di ioni positivi. Dall'equazione d'onda di Helmholtz, applicata ad un'interfaccia planare tra metallo e dielettrico, si ottiene la relazione di dispersione per gli SPP (Surface Plasmon Polaritons) che si propagano sulla superficie. Da questa si ricavano le proprietà di confinamento perpendicolare alla superficie  $\hat{z}$  e lungo di essa (lunghezza di propagazione  $L$ ). Si studiano inoltre dei sistemi multilayer di interfacce metallo-isolante, per le quali si tiene conto dell'accoppiamento dei modi di superficie, e si approfondisce lo studio del confinamento dell'energia all'interno dei due materiali. Nel caso delle PVL, costituite da spirali di Archimede scavate su una piastra metallica, si studia la generazione di SPP per accoppiamento tramite reticolo. In conclusione al primo capitolo si studia la trasmissione di radiazione attraverso aperture, tenendo presente la teoria della diffrazione. Si evince che per aperture sub-wavelength poste in film metallici strutturati da reticoli o scavature regolari, si ha una trasmissione straordinaria.

Il secondo capitolo, invece, tratta lo studio dei fasci che trasportano momento angolare orbitale (OAM) e la loro interazione con gli SPP.

In particolare, a partire dalle equazioni di Maxwell nel vuoto si può derivare l'approssimazione parassiale dell'equazione d'onda; la risoluzione di questa equazione porta a numerose famiglie di fasci che trasportano momento angolare, tra cui i

## INDICE

fasci di Laguerre-Gauss e i fasci di Bessel. A partire da questa approssimazione, si arriva a individuare le componenti responsabili del momento angolare orbitale di un fascio.

Si mostrano inoltre quattro metodi di generazione di questo tipo di fasci: spiral phase plates, ologrammi, convertitori astigmatici di modo e  $q$ -plates.

Successivamente si studia l'interazione di questi fasci con interfacce metalliche, che possono generare SPP. Si introduce il concetto di vortice SPP, dato da una sovrapposizione di SPP convergenti verso una singolarità di fase al centro. Nel capitolo vengono introdotte e descritte diverse tipologie di PVL e viene mostrato come esse siano strutture in grado di generare questi modi di superficie. Si osserva inoltre che la generazione di tali modi deve soddisfare delle regole di selezione date dalla conservazione del momento angolare totale, che tengono conto anche della carica topologica che è fornita dalla struttura stessa. Si mostra infatti che strutture chirali, come le spirali di Archimede, posseggono una carica topologica ben definita. Come ultima analisi, si considera la trasmissione straordinaria attraverso nanoaperture, con particolare attenzione alla possibilità di trasferire OAM dagli SPP al far-field.

Infine si studia un'importante applicazione delle PVL: la manipolazione ottica di particelle microscopiche.

# Capitolo 1

## Basi di Plasmonica

### 1.1 Elettromagnetismo nei Metalli

L'interazione dei metalli con il campo elettromagnetico può essere studiata con un approccio classico senza ricorrere alla meccanica quantistica poiché, data l'alta densità dei portatori di carica, si ha che i livelli di energia degli elettroni sono molto vicini tra loro in confronto alle eccitazioni termiche di energia  $k_{\beta}T$  presenti alla temperatura del laboratorio.

Si utilizzeranno quindi le equazioni di Maxwell, applicate alle varie interfacce prese in considerazione.

#### 1.1.1 Le Equazioni di Maxwell e la Propagazione di Onde Elettromagnetiche

Come si evince dall'esperienza di tutti i giorni, i metalli sono altamente riflettenti e non permettono la propagazione di onde elettromagnetiche attraverso di essi. Questa caratteristica è valida però solo per onde elettromagnetiche incidenti di frequenza fino al visibile e si è visto empiricamente che il comportamento dei metalli varia di molto a seconda della frequenza dell'onda incidente.

In un regime a bassa frequenza, infatti, si può mantenere l'approssimazione di buono o perfetto conduttore, poiché solo una frazione trascurabile dell'onda incidente penetra nel materiale.

A frequenze maggiori, verso l'infrarosso e lo spettro visibile, c'è maggiore penetrazione e quindi maggiore diffusione dell'onda incidente. Infine, a frequenze ultraviolette, i metalli acquisiscono carattere dielettrico e permettono la propagazione di onde elettromagnetiche, sebbene con vari gradi di attenuazione a seconda della

## 1. BASI DI PLASMONICA

struttura a bande degli elettroni.

Queste proprietà dispersive possono essere descritte dalla funzione dielettrica complessa  $\varepsilon(\omega)$ , che fornisce le basi per lo studio dei fenomeni plasmonici.

Per studiare la risposta elettromagnetica nei metalli si utilizzano le equazioni di Maxwell macroscopiche. Si applica questo approccio fenomenologico poiché le interazioni fondamentali tra particelle cariche e campi elettromagnetici possono essere trascurate, in quanto i campi microscopici, che variano rapidamente, sono mediati sulle distanze delle strutture studiate.

Le equazioni di Maxwell saranno utilizzate nella seguente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}} \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1d)$$

Poiché l'utilizzo della divisione delle densità di carica e di corrente in “libere” o “legate” può causare confusione nell'applicazione della condizione al contorno per il vettore spostamento  $\mathbf{D}$ , in questa analisi esse vengono considerate come “esterne” o “interne”, a seconda che esse facciano parte dello stimolo esterno al sistema o che rispondano ad esso.

Vale inoltre la relazione che lega i campi macroscopici  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$  (e poiché verranno trattati solamente mezzi non-magnetici, non consideriamo gli effetti dovuti alla presenza di magnetizzazione  $\mathbf{M}$ ):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.2)$$

dove  $\varepsilon_0$  è la permittività elettrica.

Per la polarizzazione valgono le seguenti relazioni con la densità di carica interna  $\rho$  e la densità di corrente:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho \quad \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (1.3)$$

Questo fa in modo che il campo elettrico macroscopico includa tutti gli effetti di polarizzazione (cioè sia i campi esterni sia quelli indotti sono inclusi in esso):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\varepsilon_0} \quad (1.4)$$

## 1.1. Elettromagnetismo nei Metalli

Valgono inoltre, nel caso di mezzi lineari, isotropi e non magnetici, le seguenti relazioni *lineari*:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.5b)$$

Come si vedrà successivamente, la conduttività  $\sigma$  e la permittività relativa  $\varepsilon$  hanno una forte relazione, tanto da essere interscambiabili nello studio dei fenomeni elettromagnetici nei metalli.

Poiché le formule (1.5) valgono solo per mezzi lineari che non mostrano dispersione temporale e spaziale e, visto che la risposta ottica dei metalli dipende dalla frequenza, si tiene conto della non località nel tempo e nello spazio generalizzando queste formule a

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int \varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int \sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (1.6b)$$

Queste ultime sono semplificate ulteriormente prendendone la *trasformata di Fourier*. In questo modo si decompongono i campi in componenti individuali di onde piane di vettore d'onda  $\mathbf{K}$  e frequenza angolare  $\omega$ . Questo porta alle formule di  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{J}$  nel dominio di Fourier:

$$\mathbf{D}(\mathbf{K}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{K}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{K}, \omega) \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{K}, \omega) = \sigma(\mathbf{K}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{K}, \omega). \quad (1.7b)$$

Utilizzando le formule ottenute fin'ora e tenendo conto che nel dominio di Fourier vale  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ , si ottiene la relazione fondamentale tra la conduttività e la permittività relativa

$$\varepsilon(\mathbf{K}, \omega) = 1 + \frac{i\sigma(\mathbf{K}, \omega)}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (1.8)$$

Nelle interazioni della luce con i metalli, finché la lunghezza d'onda incidente  $\lambda$  è significativamente più lunga delle dimensioni caratteristiche del mezzo, si può semplificare la forma generale della risposta dielettrica  $\varepsilon(\omega, \mathbf{K})$  nel limite di una risposta *locale spazialmente*  $\varepsilon(\omega, \mathbf{K}=\mathbf{0}) = \varepsilon(\omega)$ .

In generale si ha che  $\varepsilon(\omega)$  e  $\sigma(\omega)$  sono funzioni a valori complessi, in particolare  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega)$ .

## 1. BASI DI PLASMONICA

Per capire l'influenza di  $\varepsilon_1(\omega)$  e  $\varepsilon_2(\omega)$  nella risposta all'interazione elettromagnetica,  $\varepsilon(\omega)$  può essere determinata sperimentalmente attraverso, per esempio, degli studi di riflessione e attraverso la determinazione dell'indice di rifrazione complesso  $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$  del mezzo, definito come  $\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon}$ .

Si ottiene dunque:

$$n^2 = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad (1.9a)$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon_2}{2n} \quad (1.9b)$$

dove  $\kappa$  è il *coefficiente di estinzione* e determina l'assorbimento ottico delle onde elettromagnetiche che si propagano nel mezzo. Si ha quindi che  $\varepsilon_2(\omega) = \text{Im}(\varepsilon(\omega))$  determina il grado di assorbimento nel mezzo.

Inoltre, si vede che per  $|\varepsilon_1| \gg |\varepsilon_2|$  è  $\varepsilon_1(\omega) = \text{Re}(\varepsilon(\omega))$  il maggior contributo alla parte reale dell'indice di rifrazione, la quale quantifica l'abbassamento della velocità di fase dell'onda che si propaga, a causa della polarizzazione del materiale.

Dalle equazioni di Maxwell nel vuoto si ottiene una soluzione che si sposta nello spazio, l'*equazione d'onda*, che verrà studiata nel dominio di Fourier:

$$\mathbf{K}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) - K^2 \mathbf{E} = -\varepsilon(\mathbf{K}, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (1.10)$$

dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto.

Si considerano due casi separati, a seconda della direzione di polarizzazione del vettore campo elettrico:

- Per onde *trasversali*, vale  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0$  e si ottiene la *relazione di dispersione generica*:

$$K^2 = \varepsilon(\mathbf{K}, \omega) \frac{\omega^2}{c^2}; \quad (1.11)$$

- Per onde *longitudinali*, invece, vale  $\mathbf{K} \parallel \mathbf{E}$  e  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = KE$ , quindi si ottiene

$$\varepsilon(\mathbf{K}, \omega) = 0 \quad (1.12)$$

che significa che *oscillazioni collettive* longitudinali possono verificarsi solo per frequenze dell'onda incidente che siano zeri di  $\varepsilon(\omega)$ .

### 1.1.2 La Funzione Dielettrica del Gas di Elettroni Liberi

Le proprietà ottiche dei metalli possono essere spiegate, per un ampio range di frequenze, da un *modello a plasma*, dove un gas di elettroni liberi di densità numerica  $n$  si muove su un fondo fisso di ioni positivi. In questo modello, non si tiene conto del potenziale del reticolo degli ioni nè delle interazioni tra gli elettroni, bensì si assume che alcuni aspetti della struttura a bande siano incorporati nella *massa ottica effettiva*  $m$  di ogni elettrone. Questo non è nient'altro che il modello di Drude.

Si considera che gli elettroni oscillano in risposta al campo elettromagnetico applicato e che il loro moto sia smorzato dalle collisioni, che si verificano ad una frequenza di collisione caratteristica  $\gamma = \frac{1}{\tau}$ , con  $\tau$  il *tempo di rilassamento* del gas di elettroni liberi.

Se si assume un campo elettrico forzante armonico, con frequenza d'oscillazione  $\omega$ , si può studiare il movimento degli elettroni  $e$ , di conseguenza, la polarizzazione macroscopica data dal loro spostamento. Si ottiene  $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ , quindi da  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  e da  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}$  si ottiene la funzione dielettrica del gas di elettroni liberi:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (1.13)$$

dove  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$  è la *frequenza di plasma*. Le sue componenti reale e immaginaria possono essere ricavate e sono:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (1.14a)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)}. \quad (1.14b)$$

È istruttivo studiare come variano le componenti di  $\varepsilon(\omega)$  al variare della frequenza  $\omega$ <sup>1</sup>. Poiché per  $\omega > \omega_p$  i metalli non posseggono più le loro caratteristiche ottiche, ci si limita allo studio di frequenze minori della frequenza di plasma.

Per frequenze alte, vicine a  $\omega_p$ , vale  $\omega\tau \gg 1$ , quindi si ha smorzamento trascurabile, poiché  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  e si ha

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1.15)$$

come funzione dielettrica del gas di elettroni liberi non smorzati.

---

<sup>1</sup>vedere in Appendice per un'analisi approfondita.

## 1. BASI DI PLASMONICA

Per frequenze molto basse vale  $\omega\tau \ll 1$  e quindi  $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ ; in questa regione i metalli sono principalmente assorbenti. Considerando che il valore immaginario  $\kappa$  dell'indice di rifrazione è proporzionale al coefficiente di assorbimento  $\alpha$  della legge di Beer (per la quale l'intensità di un raggio che si propaga in un mezzo lungo l'asse  $x$  segue  $e^{-\alpha x}$ ), da  $\kappa$  posso ricavare la *skin depth*  $\delta$ , data da  $e^{-\frac{x}{\delta}}$ .

### 1.1.3 La Dispersione del Gas di Elettroni Liberi e i Plasmoni di Volume

In questa sezione si cerca di comprendere a cosa corrisponda fisicamente la frequenza di plasma  $\omega_p$  e cosa succeda nei metalli nel *regime di trasparenza*, dove vale  $\omega > \omega_p$ .

Nell'approssimazione di basso smorzamento, dove vale (1.15), si ha quindi che la generica relazione di dispersione (1.11) per onde trasversali diventa

$$\omega^2 = \omega_p^2 + K^2 c^2. \quad (1.16)$$

Da questa formula si evince che onde trasversali sono proibite per  $\omega < \omega_p$ , mentre sono ammesse quelle per cui vale  $\omega > \omega_p$ , e avranno *velocità di gruppo*:  $v_g = d\omega/dK < c$ .

Si nota inoltre che dalla (1.15) si ha che  $\varepsilon(\omega_p) = 0$ , se  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ . Questo sta a significare che questa eccitazione corrisponde ad un *modo collettivo longitudinale* (come visto per lo studio di (1.12)). In queste condizioni, il vettore spostamento  $\mathbf{D}$  è nullo e il campo elettrico è un puro campo di *depolarizzazione*  $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/\varepsilon_0$ . Questo corrisponde ad uno spostamento collettivo del gas di elettroni rispetto al fondo fisso di ioni; questo spostamento di carica genera un campo  $\mathbf{E}$  di richiamo che induce negli elettroni un moto armonico, proprio di frequenza caratteristica  $\omega_p$ .

Si può dunque considerare la frequenza di plasma come la **frequenza naturale della libera oscillazione del mare di elettroni** e i quanti di queste oscillazioni di carica sono chiamati *plasmoni* (o plasmoni di volume).

### 1.1.4 Metalli Reali e Transizioni Interbanda

La funzione dielettrica del modello a gas di Drude descrive adeguatamente la risposta ottica dei metalli, ma solo fino a determinate energie dei fotoni incidenti. Per i metalli reali, infatti, quando l'energia dei fotoni sia avvicina alla soglia delle transizioni tra bande elettroniche, il modello non approssima più i valori sperimentali e gli elettroni della banda sottostante il mare di Fermi sono eccitati a bande energetiche più alte.

## 1.2. Polaritoni Plasmonici di Superficie nelle interfacce Metallo/Isolante

Le conseguenze principali di questo processo sono un aumento dello smorzamento, poiché aumenta la parte immaginaria della funzione dielettrica, e una maggiore competizione tra le due eccitazioni (anche a frequenze nel visibile).

### 1.1.5 L'Energia del Campo Elettromagnetico nei Metalli

Per concludere, si è analizzata l'energia del campo elettromagnetico all'interno di mezzi dispersivi, come ad esempio i metalli.

Nel caso di mezzi lineari senza dispersione, data la densità totale di energia  $u$  e il vettore di Poynting  $\mathbf{S}$  del flusso d'energia, vale la legge di conservazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.17)$$

Poiché i metalli sono mezzi dispersivi, vale la legge di conservazione solo se si fanno delle opportune modifiche a  $u$ . Si utilizza al posto della componente  $u_E$  della densità di energia del campo elettrico, una  $u_{eff}$  efficace.

La  $u_{eff}$  tiene conto della polarizzazione elettrica e si ottiene, per un metallo descritto da un modello a gas di elettroni liberi:

$$u_{eff} = \frac{\varepsilon_0}{4} \left( \varepsilon_1 + \frac{2\omega\varepsilon_2}{\gamma} \right) |\mathbf{E}|^2. \quad (1.18)$$

## 1.2 Polaritoni Plasmonici di Superficie nelle interfacce Metallo/Isolante

I polaritoni plasmonici di superficie (o surface plasmon polaritons, d'ora in poi SPP) sono eccitazioni elettromagnetiche collettive che si propagano nell'interfaccia tra una superficie dielettrica e una metallica, rimanendo confinate in modo evanescente nella direzione perpendicolare alle superfici (cioè l'ampiezza dell'eccitazione decresce esponenzialmente all'interno delle superfici).

L'eccitazione di queste *onde di superficie* si verifica grazie all'accoppiamento di campi elettromagnetici con le oscillazioni del plasma elettronico del conduttore.

## 1. BASI DI PLASMONICA

### 1.2.1 L'Equazione d'Onda

Per studiare le proprietà fisiche degli SPP si applicano le equazioni di Maxwell all'interfaccia piana tra metallo e isolante.

In assenza di densità di carica e di corrente esterne e considerando costante la funzione dielettrica  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon$  costante per distanze dell'ordine di una lunghezza d'onda, si ottiene l'equazione d'onda classica.

Per studiare gli SPP si assume inoltre:

- $\varepsilon$  costante lungo il piano  $(x, y)$  dell'interfaccia, varia solo lungo  $z$  (con  $z = 0$  la quota dell'interfaccia). Si ottiene allora  $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(z)e^{i\beta x}$ , dove  $\beta = k_x$  è la *costante di propagazione* che corrisponde alla componente del vettore d'onda lungo la direzione di propagazione.
- una dipendenza armonica del campo elettrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, y, z)e^{-i\omega t} = \mathbf{E}(z)e^{i\beta x}e^{-i\omega t}$ , che porta all'*equazione di Helmholtz*.

Combinando le due assunzioni si ottiene l'equazione d'onda nella forma desiderata (che ha un'omologa per il campo magnetico  $\mathbf{H}$ ):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z)}{\partial z^2} + (k_0^2 \varepsilon - \beta^2) \mathbf{E} = 0. \quad (1.19)$$

Questa equazione dovrà essere risolta separatamente nelle due regioni a  $\varepsilon$  costante e le soluzioni ottenute saranno fatte combaciare con opportune condizioni al contorno e di continuità.

Dallo studio esplicito delle componenti di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , si ottiene un sistema di sei equazioni che dà luogo a due tipi di soluzioni, che differiscono per le diverse proprietà di polarizzazione dell'onda generata:

- magnetica trasversa (TM), dove solo  $E_x, E_z$  e  $H_y$  sono componenti non nulle
- elettrica trasversa (TE), dove solo  $H_x, H_z$  e  $E_y$  sono componenti non nulle.

Per ognuno di questi modi si ha un'equazione d'onda.

### 1.2.2 Interfaccia Singola

La più semplice geometria che può sostenere gli SPP è una singola interfaccia tra un mezzo dielettrico (in  $z > 0$ , con costante dielettrica  $\varepsilon_2$  reale positiva) e un mezzo conduttore ( $z < 0$ , funzione dielettrica  $\varepsilon_1(\omega)$  complessa). Come si è visto

## 1.2. Polaritoni Plasmonici di Superficie nelle interfacce Metallo/Isolante

precedentemente la condizione di conduttore nei metalli si ha per frequenze incidenti minori della frequenza di plasma  $\omega_p$ .

Si applicano le soluzioni TM in entrambi i semispazi  $z$ , imponendo decadimento esponenziale lungo  $z$ , dove  $k_i \equiv k_{z,i}$  ( $i = 1, 2$ ) sono le componenti del vettore d'onda perpendicolari all'interfaccia. Il loro reciproco  $\hat{z} = 1/|k_z|$  definisce la *lunghezza di decadimento evanescente*, che quantifica il *confinamento* dell'onda.

Dalla continuità di  $H_y$  e  $\varepsilon_i E_z$ , si ottiene  $\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ , da cui si evince che le onde di superficie esistono solo nell'interfaccia tra due materiali con le parti reali delle permittività elettriche di segno opposto (come ad esempio conduttore e isolante). Questo è vero poiché si sono scelti  $k_1$  e  $k_2$  positivi.

Utilizzando anche l'equazione dell'onda si ottiene la *relazione di dispersione* per gli SPP:

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad (1.20)$$

dove  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ .

Applicando, invece, i modi TE ai due semispazi e imponendo la continuità si ottiene che non sono possibili modi di superficie per la polarizzazione TE.

È interessante analizzare<sup>2</sup> come varia  $\beta$  al variare delle frequenze  $\omega$  e in presenza della condizione di smorzamento trascurabile o meno ( $Im(\varepsilon_1) = 0$ ).

Si assume inizialmente  $Im(\varepsilon_1) = 0$ .

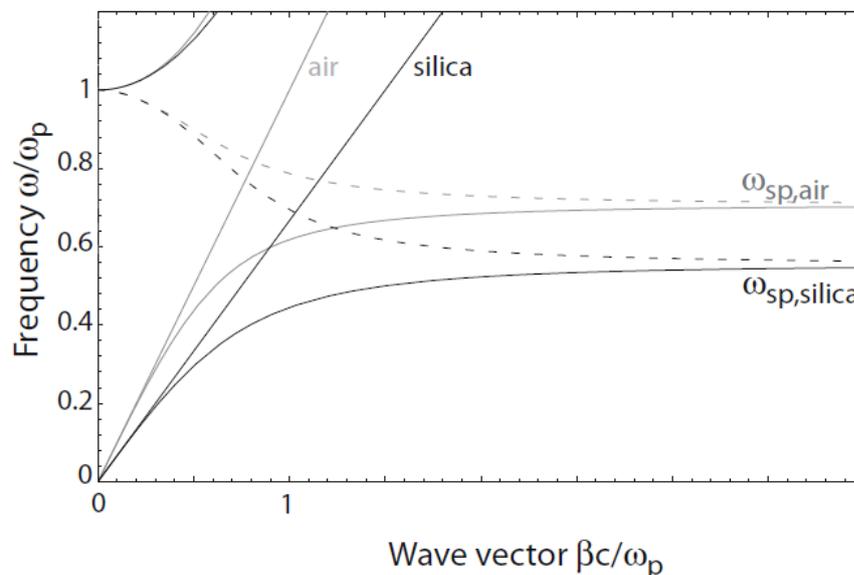
- per basse frequenze (metà infrarossi o inferiori),  $\beta \simeq k_0$  e l'onda si estende per molte lunghezze d'onda nello spazio dielettrico.
- per alte frequenze, la frequenza del SPP si avvicina alla frequenza caratteristica del *plasmone di superficie*:

$$\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \varepsilon_2}}. \quad (1.21)$$

---

<sup>2</sup>vedere in Appendice per un'analisi approfondita.

## 1. BASI DI PLASMONICA

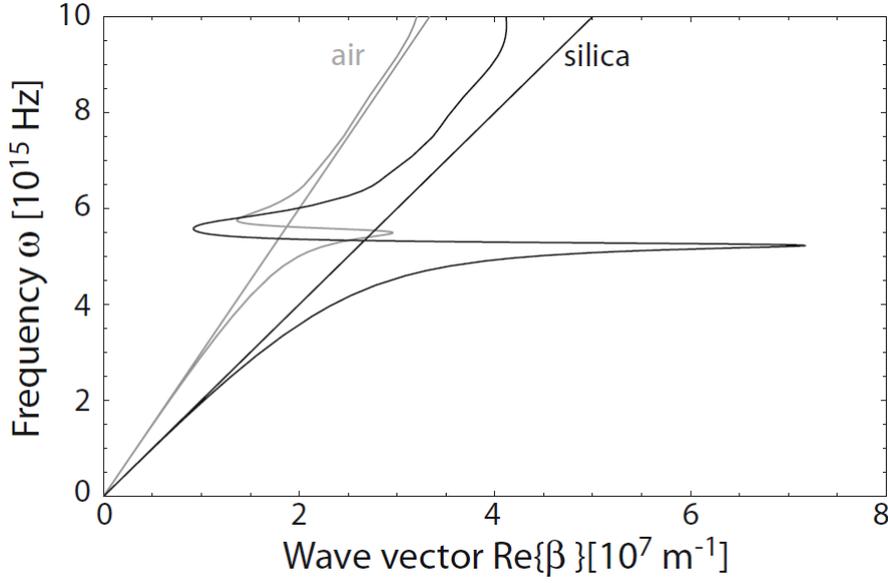


**Figura 1.1:** Relazione di dispersione per gli SPP nell'interfaccia tra un metallo di Drude e aria (linee grigie) oppure silicio fuso (linee nere).

Sempre nel limite di smorzamento trascurabile, quando la frequenza sia avvicina a  $\omega_{sp}$ ,  $\beta$  va a infinito, la velocità di gruppo  $v_g$  tende a zero e il modo assume *carattere elettrostatico*. Questa eccitazione è conosciuta come *plasmone di superficie*. Il plasmone di superficie ha la caratteristica di avere lunghezze di decadimento esponenziale  $|\hat{z}|$  uguali nel dielettrico e nel conduttore.

Se si tiene in considerazione dello smorzamento ( $Im(\varepsilon_1) \neq 0$ ), si avrà che anche la costante di propagazione  $\beta$  degli SPP è complessa. A causa di ciò gli SPP sono smorzati con una *lunghezza di attenuazione dell'energia* (detta anche *lunghezza di propagazione*)  $L = (2Im[\beta])^{-1}$ , che dipende dalla configurazione metallo/isolante in questione.

## 1.2. Polaritoni Plasmonici di Superficie nelle interfacce Metallo/Isolante



**Figura 1.2:** Relazione di dispersione per gli SPP nell'interfaccia argento/aria (linee grigie) oppure argento/silicio fuso (linee nere).

Dalla figura 1.2 si vede che, rispetto al caso senza smorzamento della figura 1.1, vicino a  $\omega_{sp}$  si raggiunge un vettore d'onda  $\beta$  massimo *finito*. Poiché vale  $k_z = \sqrt{\beta^2 - \varepsilon_2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$ , il limite a  $\beta$  comporta un limite inferiore al confinamento perpendicolare all'interfaccia, per  $\hat{z} = \frac{1}{|k_z|}$ . Si evince dunque un'importante dinamica della plasmonica, per la quale gli SPP per frequenze vicine a  $\omega_{sp}$  esibiscono un grande confinamento all'interfaccia e susseguentemente una piccola distanza di propagazione, data dall'aumento di smorzamento.

### 1.2.3 Sistemi Multilayer

Una configurazione interessante per lo studio degli SPP è un sistema multistrato, che consiste in un'alternanza di sottili film conduttori o isolanti, dove ogni interfaccia può sostenere gli SPP. Quando la separazione tra due interfacce è comparabile alla lunghezza di decadimento  $\hat{z}$  del modo di superficie, c'è interazione fra SPP, che dà luogo a *modi accoppiati*.

Saranno studiate due configurazioni multilayer: IMI (isolante, metallo, isolante) o MIM (metallo, isolante, metallo), dove il sottile strato centrale (indicizzato: 1) è compreso tra due rivestimenti spessi indefinitamente (indicizzati 2 e 3). Si ha

## 1. BASI DI PLASMONICA

che le due interfacce sono situate alla quota  $z = -a$  e  $z = a$ , dove  $a$  è lo spessore dello strato centrale.

Come fatto in precedenza nello studio della singola apertura si applicano i modi TM prima ai due rivestimenti esterni e poi al film interno che crea modi accoppiati, imponendo il decadimento esponenziale lungo la direzione  $z$ , la continuità all'interfaccia e la soddisfazione dell'equazione dell'onda. Come risultato di questo processo si ottiene una *forma implicita* della relazione di dispersione, che collega  $\beta$  e  $\omega$  attraverso

$$e^{-4k_1 a} = \frac{k_1/\varepsilon_1 + k_2/\varepsilon_2}{k_1/\varepsilon_1 - k_2/\varepsilon_2} \cdot \frac{k_1/\varepsilon_1 + k_3/\varepsilon_3}{k_1/\varepsilon_1 - k_3/\varepsilon_3}. \quad (1.22)$$

Si può notare che se  $a \rightarrow \infty$ , è possibile riottenere la relazione di dispersione di due SPP disaccoppiati nella rispettiva interfaccia.

D'ora in avanti verrà considerato il caso interessante in cui  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  (cioè  $k_2 = k_3$ ), si dispongono quindi un sub e un superstrato con la stessa risposta dielettrica. In questo caso, è possibile dividere (1.22) in due equazioni, che descrivono modi a *parità vettoriale pari* ( $E_x$  funzione pari e  $E_z$  e  $H_y$  dispari) o *dispari* ( $E_x$  funzione dispari e  $E_z$  e  $H_y$  pari).

- configurazione IMI:

Vale  $\varepsilon_1(\omega)$  (che per semplicità sarà reale) per il metallo e  $\varepsilon_2$  reale positivo per i dielettrici.

In questa configurazione, i modi dispari  $\omega_+$  hanno frequenze più alte rispetto alle rispettive frequenze per un SPP di singola interfaccia, mentre i modi pari  $\omega_-$  hanno frequenze minori. Questo vale anche a grandi vettori d'onda  $\beta$  dove le frequenze limite sono rispettivamente più alte e più basse di  $\omega_{sp}$ .

Un'altra importante caratteristica di questi modi è il fatto che i modi dispari, al decrescere dello spessore  $2a$  dello strato centrale sono meno confinati, incrementando la lunghezza di propagazione  $L$ . Per i modi pari vale l'opposto, sono più confinati e hanno minor  $L$ .

- configurazione MIM:

Vale  $\varepsilon_2(\omega)$  (complessa) per i metalli e  $\varepsilon_1$  reale positivo per il dielettrico.

I casi più interessanti sono i modi dispari, che non mostrano un cut-off al diminuire dello spessore dello strato centrale, infatti  $\beta$  non va a infinito, ma dopo aver superato  $\omega_{sp}$  diminuisce, come nella singola interfaccia. In questa configurazione è possibile raggiungere  $\beta$  molto alti, anche senza arrivare vicini a  $\omega_{sp}$ , *diminuendo* lo spessore dello strato di dielettrico centrale. Di conseguenza a queste frequenze si ottiene un'alta localizzazione degli SPP.

### 1.2.4 Confinamento dell'Energia

In plasmonica è molto importante il processo per cui, se si riesce a localizzare l'energia elettromagnetica in volumi più piccoli del *limite di diffrazione*  $\frac{\lambda_0}{2n}$  con  $n$  l'indice di rifrazione del mezzo, si ottiene un importante aumento del campo. Questo processo è ottenibile anche nei casi di singola interfaccia o configurazioni multilayer, minimizzando  $\hat{z}$ .

Bisogna tener conto però che se si ha confinamento  $\hat{z}$  nel lato del dielettrico, buona parte dell'energia si troverà all'interno del metallo. Questa cosa è stata vista anche sperimentalmente, poiché al diminuire del gap in configurazione MIM sia la parte reale che quella immaginaria di  $\beta$  aumentano, conferendo al modo una caratteristica più elettrostatica.

Per studiare queste dinamiche si introduce la *lunghezza effettiva del modo*  $L_{eff}$ , definita come il rapporto tra l'energia totale del modo SPP e la densità di energia nel punto desiderato. L'inverso di  $L_{eff}$  quantifica la forza del campo per singola eccitazione SPP. Sperimentalmente si può vedere che la lunghezza del modo scende ben al di sotto di  $\frac{\lambda_0}{2}$ , confermando il fatto che le strutture plasmoniche metalliche possono sostenere *fisicamente* lunghezze modali al di sotto del limite di diffrazione.

## 1.3 Eccitazione degli SPP nelle Interfacce Planari

Come si è visto nelle sezioni precedenti, gli SPP sono confinati nell'interfaccia tra due superfici poiché la costante di propagazione  $\beta$  è più grande del vettore d'onda  $k$  nel dielettrico, portando ad un decadimento esponenziale in entrambi i lati dell'interfaccia. A causa di ciò non è possibile eccitare SPP attraverso una raggio di luce tridimensionale a meno che non si utilizzino metodi di *accoppiamento di fase*.

Per far ciò si utilizzano vari metodi: attraverso particelle cariche, raggi molto focalizzati oppure varie tecniche ottiche come l'accoppiamento tramite prisma o reticolo.

### 1.3.1 Accoppiamento tramite Reticolo

Il fatto che  $\beta > k$  implica che anche la componente del momento  $k$  lungo l'interfaccia  $k_x = k \sin \theta$  sia minore di  $\beta$ , con  $\theta$  l'angolo d'incidenza della luce rispetto alla normale  $z$ , anche nel caso di radiazione radente. Questa mancata equivalenza può essere superata incidendo sulla superficie metallica un reticolo poco profondo

## 1. BASI DI PLASMONICA

di scavature o buchi, di costante reticolare  $a$ . La corrispondenza di fase avviene quando è soddisfatta la condizione

$$\beta = k \sin \theta \pm \nu g \quad (1.23)$$

dove  $g = \frac{2\pi}{a}$  è il vettore reciproco del reticolo e  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ .

L'eccitazione degli SPP si manifesta come un *minimo* della luce riflessa.

Non è sempre necessario incidere il reticolo nel metallo, ma esso può consistere in un reticolo di materiale dielettrico.

In presenza di un reticolo può accadere anche il processo inverso: gli SPP che si propagano lungo la superficie possono accoppiarsi alla luce e quindi radiare. Questo, e il contrario, avviene anche in presenza di ruvidità sulla superficie, la quale genera componente di momento  $k_x$  attraverso lo scattering.

### 1.4 Trasmissione di Radiazione attraverso Aperture

Questa sezione studia la trasmissione di energia elettromagnetica attraverso aperture. Si vedrà che se la superficie del film è composta da un array regolare di buchi o da delle corrugazioni attorno ad una singola apertura, possono verificarsi fenomeni di trasmissione straordinaria.

#### 1.4.1 Teoria della Diffrazione

A causa della natura ondulatoria della luce, la trasmissione di radiazione attraverso un'apertura è accompagnata dalla *diffrazione*. Questo fenomeno può essere studiato facendo varie approssimazioni.

Si prende in esame un'apertura circolare di raggio  $r$ , applicata ad uno schermo infinitamente sottile e infinitamente conduttore, e se ne studiano due condizioni a seconda delle dimensioni di  $r$  confrontato con la lunghezza d'onda  $\lambda_0$  della luce incidente:

- Se vale  $r \gg \lambda_0$ :  
per queste condizioni si può utilizzare il principio di Huygens-Fresnel e la teoria della diffrazione di Kirchhoff, dalla quale si ottiene che l'intensità dell'onda  $I(\theta)$ , trasmessa ad un certo angolo  $\theta$  rispetto alla normale allo schermo, è proporzionale all'intensità  $I_0$  dell'onda incidente, moltiplicata per un fattore dipendente da  $\theta$ . Si ha inoltre un *coefficiente di trasmissione*  $T$  dato dal rapporto tra intensità totale trasmessa e  $I_0$ . Per il caso preso in esame vale  $T \approx 1$ .

## 1.4. Trasmissione di Radiazione attraverso Aperture

- Se vale  $r \ll \lambda_0$ :

queste aperture sono dette *sub-wavelength*. Per esse non vale l'approssimazione usata da Kirchhoff di assumere che il campo nell'apertura sia lo stesso che nel caso in cui lo schermo opaco non fosse presente, poichè non soddisferebbe le condizioni di campo elettrico tangenziale nullo sul film conduttore.

Bethe e Bouwkamp assunsero che l'intensità della luce incidente  $I_0$  fosse costante sull'apertura, oltre alle condizioni di sottigliezza e conduttività già viste prima.

Per *incidenza normale*, l'apertura può essere descritta come un piccolo *dipolo magnetico*, per cui il coefficiente di trasmissione è dato da:

$$T = \frac{64}{27\pi^2} (kr)^4 \propto \left(\frac{r}{\lambda_0}\right)^4. \quad (1.24)$$

Come ci si aspettava, il termine  $(r/\lambda_0)^4$  implica una trasmissione molto debole per  $r \ll \lambda_0$ . Per *incidenza con angolo*, invece, bisogna aggiungere il contributo di un *dipolo elettrico* disposto nella direzione normale.

In queste analisi bisogna anche tenere conto del fatto che per spessori  $h$  dello schermo, la trasmissione  $T$  decade circa esponenzialmente con  $h$ . La condizione di perfetta opacità è sufficientemente soddisfatta per metalli reali di spessore  $h$  dell'ordine di alcune skin depth  $\delta$ .

### 1.4.2 Trasmissione Straordinaria attraverso Aperture Sub-Wavelength

La trasmissione della luce attraverso questo tipo di aperture, nel caso in cui non posseggano modi di propagazione, può essere molto migliorata strutturando lo schermo con un reticolo regolare periodico. Così facendo si eccitano SPP, i quali raccolgono energia elettromagnetica da tutto lo schermo, incanalandola nell'apertura. In questo modo è possibile ottenere  $T > 1$ . Negli spettri di trasmissione si possono infatti notare dei picchi relativamente larghi per lunghezze d'onda al di sopra della costante reticolare  $a_0$ .

La struttura di  $T(\lambda)$  può quindi essere spiegata assumendo che ci sia accoppiamento tra reticolo e SPP, con la condizione di corrispondenza di fase

$$\beta = k_x \pm nG_x \pm mG_y = k_0 \sin \theta \pm (n + m) \frac{2\pi}{a_0}. \quad (1.25)$$

nel caso di un reticolo rettangolare di lati  $n$  e  $m$  e per luce incidente normale. Si ha poi massima trasmissione per

## 1. BASI DI PLASMONICA

$$\lambda_{SPP}(n, m) = \frac{n_{SPP} \cdot a_0}{\sqrt{n^2 + m^2}} \quad (1.26)$$

con  $n_{SPP} = \beta c/\omega$  l'indice di rifrazione effettivo del SPP, dato dalla singola interfaccia.

Lo stesso processo si può ottenere con un buco singolo, circondato da un array regolare di corrugazioni della superficie. Questo è il caso del *bull's eye* (occhio di bue) dove un buco è attorniato da scavature circolari concentriche. In questa configurazione è possibile raggiungere la condizione di corrispondenza di fase. In questa configurazione si vede sperimentalmente che l'efficienza dell'accoppiamento degli SPP (e quindi la trasmissione) dipende dalla profondità  $h$  delle scavature. Inoltre si è visto che strutturare la superficie sul lato d'uscita non aumenta la trasmissione, bensì permette di controllare la *direzione* della radiazione trasferita.

### 1.4.3 Plasmoni di Superficie Localizzati e Trasmissione attraverso Singole Aperture

La penetrazione del campo incidente all'interno dello schermo (ora considerato *finitamente* sottile), permette l'eccitazione di plasmoni di superficie localizzati (in inglese localized surface plasmons, detti LSP) sul bordo dell'apertura. Questo fenomeno ha due effetti principali sulla trasmissione  $T(\lambda)$ :

- l'*effettivo diametro* dell'apertura aumenta, a causa della finita penetrazione dei campi nel suo bordo. Questo porta ad un aumento della lunghezza d'onda di *cut-off*  $\lambda_{max}$  del modo fondamentale.
- ci si aspetta un aumento del campo al bordo dell'apertura, portando ad una maggiore trasmissione per la lunghezza d'onda relativa all'eccitazione del LSP. La posizione spettrale del modo LSP dipende dalle dimensioni e dalla forma dell'apertura.

# Capitolo 2

## Teoria OAM e PVL

### 2.1 Generazione e Propagazione di Fasci Ottici che trasportano Momento Angolare Orbitale della Luce

#### 2.1.1 L'Approssimazione Parassiale

Poiché si è interessati alla propagazione di onde nel vuoto, si prende in considerazione l'equazione d'onda nel vuoto:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Se si considerano fasci monocromatici di frequenza  $\omega$ , il campo  $\mathbf{E}$  può essere separato in parte spaziale  $\xi$  e un fattore dipendente dal tempo  $\exp(i\omega t)$ . Inoltre è possibile trasformare la forma vettoriale dell'equazione d'onda in forma scalare scegliendo un vettore polarizzazione  $\mathbf{t}$  costante e di modulo unitario. In questo modo, prendendo una polarizzazione trasversa all'asse ottico (l'asse  $z$ ), si ottiene  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{t}\xi(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ . Sostituendo questo campo all'equazione d'onda si ottiene l'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 \xi + k^2 \xi = 0. \quad (2.2)$$

Un fascio si definisce *parassiale* se la sua inclinazione rispetto all'asse ottico è piccola. Un fascio parassiale ha, nel caso qui studiato, come maggior componente del vettore d'onda  $\mathbf{k}$  la componente lungo l'asse  $z$ :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_\perp^2} \simeq k - \frac{k_\perp^2}{2k} \quad (2.3)$$

## 2. TEORIA OAM E PVL

dove  $k_{\perp}$  è la componente trasversale del vettore d'onda.

Come soluzione per l'equazione di Helmholtz si può utilizzare  $\xi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) \exp(ikz)$  dove  $u(\mathbf{r})$  è una distribuzione di ampiezza, che cambia poco con la distanza  $z$  rispetto alla variazione più importante  $\exp(ikz)$ . Da questa sostituzione si ottiene un'equazione differenziale parziale per  $u(\mathbf{r})$ :

$$\nabla_{\perp}^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Se il profilo dell'onda varia poco con  $z$ , si vede che l'addendo centrale del primo membro della (2.4) è trascurabile rispetto agli altri due. L'**approssimazione parassiale** consiste nel trascurare questo termine, che dà luogo all'*equazione d'onda parassiale*:

$$\nabla_{\perp}^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Come si vedrà successivamente, la risoluzione della (2.5) in coordinate cilindriche produrrà fasci parassiali che trasportano un nuovo grado di libertà, il *momento angolare orbitale* della luce (detto OAM, dall'inglese “orbital angular momentum”).

### 2.1.2 Fasci di Laguerre-Gauss

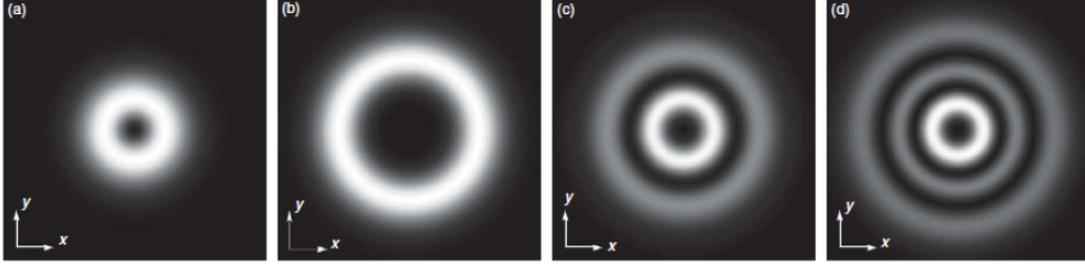
I fasci di Laguerre-Gauss sono fasci che soddisfano l'equazione d'onda parassiale in coordinate cilindriche e che presentano simmetria rotazionale.

Sono definite con  $u_{pl}^{LG}$  e hanno dipendenza gaussiana e da vari altri fattori, tra cui i polinomi generalizzati di Laguerre  $L_p^{|l|}$  e la fase azimutale  $\varphi$ .

La struttura del particolare modo di Laguerre-Gauss è data dall'indice radiale  $p$  e da quello azimutale  $\varphi$ . Vale infatti che il profilo dell'intensità su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione mostra  $p + 1$  anelli concentrici (per  $l > 0$ ) e vale che la fase azimutale  $\exp(il\varphi)$  produce  $|l|$  fronti d'onda *elicoidali* intrecciati. Il verso di rotazione di queste eliche è determinato dal *segno* di  $l$ .

È proprio questa struttura della fase azimutale che dà origine all'OAM trasportato dai fasci di Laguerre-Gauss.

## 2.1. Generazione e Propagazione di Fasci Ottici che trasportano Momento Angolare Orbitale della Luce



**Figura 2.1:** Profili d'intensità dei fasci di Laguerre-Gauss. (a)  $l = 1, p = 0$ . (b)  $l = 5, p = 0$ . (c)  $l = 2, p = 1$ . (d)  $l = 2, p = 2$ .

### 2.1.3 Fasci di Bessel

L'equazione d'onda totale di Helmholtz (2.2) produce una classe di soluzioni esatte che trasportano OAM e che hanno profilo invariante durante la propagazione, dette perciò *diffraction free*.

Per queste soluzioni si ha che le parti radiale, azimutale e assiale sono separate:

$$\xi_{k_{\perp}, l} = J_l(k_{\perp} \rho) e^{il\varphi} e^{ik_z z} \quad (2.6)$$

dove  $J_l$  sono le funzioni di Bessel del primo tipo di ordine  $l$ .

Attraverso i fasci di Bessel è possibile espandere i modi di Laguerre-Gauss ottenendone una forma *non parassiale*:

$$\xi_{pl}^{LG}(\rho, \varphi, z) = \int_0^k dk_{\perp} d_{pl}(k_{\perp}) J_l(k_{\perp} \rho) e^{il\varphi} e^{i\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2} z} \quad (2.7)$$

dove  $d_{pl}(k_{\perp})$  è una funzione di peso che può essere determinata utilizzando l'espressione del fascio parassiale di Laguerre-Gauss.

### 2.1.4 Momento Angolare Orbitale e di Spin dei Fasci di Luce

In questa sottosezione verrà studiata l'origine del momento angolare orbitale e di spin e i loro contributi nella generazione di momento angolare totale  $J$ .

Per le equazioni di Maxwell nel vuoto valgono le equazioni di continuità

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}^F = q^F \quad (2.8)$$

## 2. TEORIA OAM E PVL

dove  $F$  può stare per l'energia  $E$ , il momento lineare  $P$  e il momento angolare  $J$  e  $\rho^F$ ,  $\mathbf{j}^F$  e  $q^F$  sono le rispettive densità di volume, densità di flusso e densità di carica.

Queste quantità relative al momento totale angolare  $J$  sono legate linearmente alle stesse quantità relative al momento lineare  $P$ ; in particolare, valgono

$$\rho_i^J = \epsilon_{ijk} x_j \rho_k^P, \quad (2.9a)$$

$$j_{ij}^P = \epsilon_0 \left( \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} - E_i E_j \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right). \quad (2.9b)$$

Poichè i campi hanno ampiezze complesse, integrando sul periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  si elimina la dipendenza dai fattori  $\exp(i\omega t)$ ; inoltre le componenti  $z$  possono essere eliminate utilizzando le equazioni di Maxwell. Per un fascio di luce con asse ottico lungo  $z$ , il flusso di momento angolare  $M_{zz}$  attraverso un piano a  $z$  costante può essere messo nella forma

$$M_{zz} = S_{zz} + L_{zz} \quad (2.10)$$

dove il contributo  $S_{zz}$  dipende dalla polarizzazione del fascio di luce, mentre la componente  $L_{zz}$  dipende dai cambi nella variabile azimutale  $\varphi$ .

Utilizzando le componenti dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , lungo le coordinate spaziali, per un fascio non parassiale (come quello di Laguerre-Gauss (2.7)) è possibile calcolare le parti di spin e orbita del flusso del momento angolare totale per questo fascio. Si ottengono:

$$S_{zz} = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \left( \frac{\pi\epsilon_0 c^2}{2\omega^2} \right) I_k \quad (2.11a)$$

$$L_{zz} = l \left( \frac{\pi\epsilon_0 c^2}{2\omega^2} \right)^2 I_k \quad (2.11b)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  determinano rispettivamente la componente  $x$  e  $y$  di  $\mathbf{E}$  e  $I_k$  è un fattore comune alle due equazioni.

Il flusso di energia attraverso il piano trasversale, mediato sul periodo, vale:

$$J_z^E = \frac{\pi}{2\mu_0\omega} I_k. \quad (2.12)$$

Il rapporto tra le rispettive quantità è dato da:

$$\frac{S_{zz}}{J_z^E} = \frac{\sigma_z}{\omega} \quad \frac{L_{zz}}{J_z^E} = \frac{l}{\omega} \quad \frac{M_{zz}}{J_z^E} = \frac{\sigma_z + l}{\omega} \quad (2.13)$$

## 2.1. Generazione e Propagazione di Fasci Ottici che trasportano Momento Angolare Orbitale della Luce

dove  $\sigma_z = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)$  descrive la polarizzazione e vale  $\pm 1$  per luce polarizzata circolarmente.

Da questa analisi si capisce chiaramente che è la fase azimutale  $\exp(il\varphi)$  la responsabile della definizione del momento angolare orbitale.

### 2.1.5 Metodi per la Generazione di Vortici Ottici

Ci sono vari metodi per la generazione di fasci ottici che trasportano OAM: spiral phase plates (piastre a fase spirale), ologrammi, convertitori astigmatici di modo e  $q$ -plates. Ogni metodo è basato su differenti principi fisici e presenta benefici e svantaggi in termini di costi di fabbricazione, allineamento, efficienza e range di lunghezza d'onda.

Gli stessi metodi possono essere utilizzati anche per modificare o addirittura cancellare l'OAM di un fascio vorticoso.

- *Spiral Phase Plate*

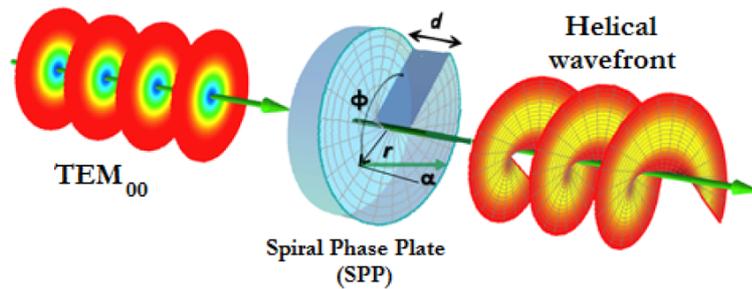
Gli Spiral Phase Plate sono elementi ottici di trasmissione elicoidali la cui struttura è simile a quella di una *scala a chiocciola*.

Lo spessore di ogni spirale  $d$  dipende dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'onda incidente, dall'indice di rifrazione  $n(\lambda)$  del materiale della piastra e dal momento angolare orbitale  $l$  trasferito per ogni fotone, secondo la formula:

$$d(\lambda, l) = l \cdot \frac{\lambda}{n(\lambda) - n_0(\lambda)} \quad (2.14)$$

dove  $n_0$  è l'indice di rifrazione del mezzo in cui è immersa la spirale.

Poiché queste piastre sono elementi di trasmissione di fase, non alterano la direzione di propagazione del fascio e mostrano una alta efficienza.



**Figura 2.2:** Schema della generazione di un fascio che trasporta OAM, attraverso una spiral phase plate.

## 2. TEORIA OAM E PVL

In approssimazione parassiale, se si illumina una fessura si ha che il far-field è descritto dalla trasformata di Fourier della funzione di trasmissione dell'apertura moltiplicata per il fascio incidente. Per gli Spiral Phase Plates che creano vortici con carica topologica  $l$ , la funzione di trasmissione  $t_{S.P.P.}$  vale:

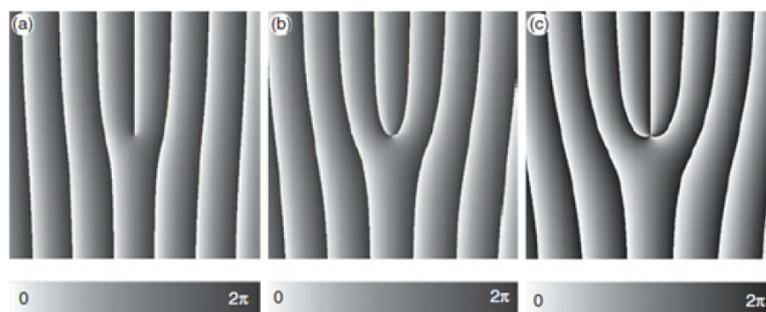
$$t_{S.P.P.} = \exp(il\varphi). \quad (2.15)$$

Questo fattore, nel calcolo del far-field, dona OAM  $l$  al fascio uscente.

- *Fork-holograms (Ologrammi a Forca)*

L'idea di fondo è quella di simulare l'interferenza tra un piano inclinato e un vortice ottico aventi stessa ampiezza al piano  $z = 0$ .

Rispetto ad un reticolo di diffrazione normale, in questo caso si ha una divisione delle linee del reticolo dove è situata la singolarità di fase, come si vede in Figura 2.3. Il valore  $l$  può essere ottenuto dalla differenza tra il numero di linee oltre la singolarità e il numero prima di essa.



**Figura 2.3:** Plot del profilo di fase dei fork-holograms. I pattern sono studiati affinché producano fasci con fattore di fase  $\exp(il\varphi)$ , con (a)  $l = 2 - 1 = 1$ , (b)  $l = 3 - 1 = 2$ , (c)  $l = 4 - 1 = 3$  nel primo ordine di diffrazione.

Nello studio dell'interazione di un'onda piana con un tale ologramma si può notare che, oltre ad una parte del fascio che passa invariata, al primo ordine di diffrazione l'onda ha acquisito un profilo di fase elicoidale di ordine  $|l|$ . Gli ologrammi di fase non assorbono la luce e la modulazione è indotta nella fase del raggio.

- *Cylindrical mode Converters (convertitori di modo cilindrici)*

Questo metodo consiste nell'usare una coppia di lenti per convertire un fascio di Hermite-Gauss (HG) di ordine alto in un fascio di Laguerre-Gauss (LG)

## 2.2. Interazione dei Fasci Vorticosi con gli SPP

dello stesso ordine.

I fasci di Hermite-Guass sono anch'essi soluzione dell'equazione d'onda parassiale, ma non trasportano OAM. Essi sono definiti  $u_n^{HG}$  e sono composti dal prodotto di una Gaussiana, un polinomio di Hermite  $H_n$  di ordine  $n$  e una fase  $\chi(z)$ , detta fase di Gouy.

Poiché un qualsiasi fascio LG può essere espresso in termini dei modi HG, per passare dall'uno all'altro modo bisogna reimpostare la fase dei vari termini HG. Per fare questo si sfrutta la fase di Gouy; ad esempio si utilizza il salto di fase che subisce un fascio passando attraverso diverse configurazioni di lenti.

Il passaggio di un fascio di luce attraverso i convertitori, dunque, porta un cambiamento nella fase azimutale e quindi ad una variazione del momento angolare orbitale del fascio stesso.

- *q-plates*

la *q-plate* è essenzialmente una piastra birifrangente il cui asse ottico varia punto per punto nel piano trasversale. Questa non omogeneità dell'orientazione dell'asse ottico induce una fase addizionale al fascio incidente.

Nel caso di sola dipendenza azimutale, l'orientazione locale dell'asse ottico vale

$$\alpha(\varphi) = q\varphi + \alpha_0 \quad (2.16)$$

dove  $\varphi$  è la coordinata azimutale,  $q$  è la carica topologica della *q-plate* e  $\alpha_0$  è un valore reale.

Si può dimostrare inoltre, che a seconda del ritardo di fase  $\delta$ , una porzione del fascio incidente passa inalterata, mentre un'altra ribalta la propria polarizzazione e ottiene un fattore di fase elicoidale addizionale  $\exp(\pm 2iq\varphi)$ , che corrisponde ad un cambio di  $2q$  nell'OAM del fascio.

## 2.2 Interazione dei Fasci Vorticosi con gli SPP

### 2.2.1 Vortici SPP e Fasci di Bessel Evanescenti (EBB)

Data una superficie d'interfaccia capace di produrre SPP, è possibile generare vortici plasmonici di superficie con momento angolare orbitale ben definito, il quale risiede nella fase azimutale. Il loro campo è evanescente e ha una dipendenza dalla

## 2. TEORIA OAM E PVL

fase azimutale.

Come si è visto precedentemente i fasci di Bessel sono soluzioni delle equazioni di Maxwell che non presentano *diffusione*. Nel caso più semplice non presentano dipendenza azimutale, ma sono utili per comprendere il concetto di vortice plasmonico.

I fasci di Bessel evanescenti (EBB) sono soluzioni dell'equazione di Helmholtz che decadono rapidamente nella propagazione ma mantengono la loro forma trasversale. Questi fasci descrivono in modo soddisfacente i vortici ottici.

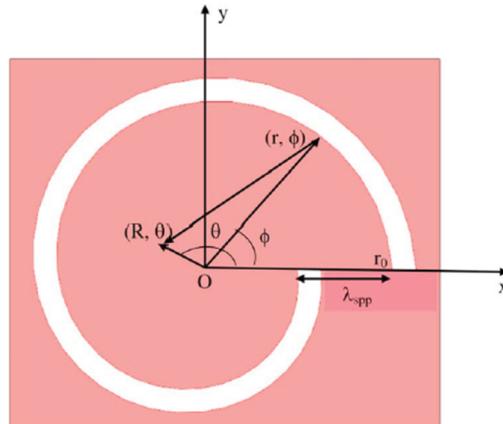
### 2.2.2 Plasmonic Vortex Lenses (PVL)

Le PVL sono dispositivi capaci di produrre vortici plasmonici che trasportano OAM del tipo

$$U(r, \varphi, z) = e^{ik_z z} e^{il\varphi} J_l(k_r r), \quad (2.17)$$

dove in questo caso l'ordine  $l$  delle funzioni di Bessel rappresenta la *carica topologica* del vortice.

Per generare questi vortici si utilizza una struttura chirale (cioè che non è sovrapponibile alla propria immagine speculare) che nel caso più semplice è un singolo giro di una spirale di Archimede sinistrorsa. Questa spirale avrà come periodo delle scanalature la lunghezza d'onda dell'SPP  $\lambda_{SPP}$ , come si vede in figura 2.4.



**Figura 2.4:** Diagramma di un singolo giro di una spirale di Archimede sinistrorsa, il fascio incidente si propaga lungo l'asse  $z$ , uscente dal piano. In questa notazione l'angolo azimutale  $\varphi$  è chiamato  $\theta$ .

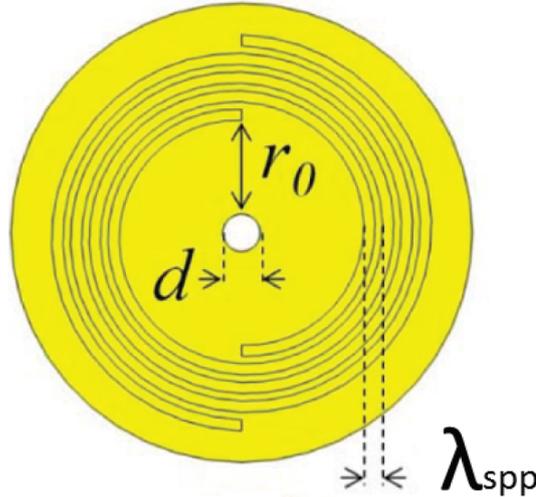
## 2.2. Interazione dei Fasci Vorticosi con gli SPP

In questo caso è facile studiare analiticamente il campo plasmonico, assumendo che  $\lambda_{SPP}$  sia molto minore delle dimensioni medie del dispositivo e che ci siano perdite di SPP trascurabili.

Nel caso di luce polarizzata circolarmente in *sensu orario* si ha che il campo plasmonico nei pressi del centro della struttura è  $\mathbf{E}_{SPP} \propto J_0$ , che produce quindi un fascio di Bessel evanescente dell'ordine 0, con un picco nel centro. Al contrario, una luce sinistrorsa produce un EBB del secondo ordine a forma di ciambella nel centro, poichè risulta  $\mathbf{E}_{SPP} \propto J_2$ .

Questi processi saranno spiegati successivamente dalla presenza di una *regola di selezione* data dalla conservazione del momento angolare totale (TAM).

Più in generale, una PVL può essere composto di  $m$  spirali concentriche, ognuna rotata di  $\frac{360}{m}$  gradi rispetto alla adiacente, come si vede in figura 2.5.



**Figura 2.5:** Schema di un 2-PVL, cioè una doppia spirale di Archimede, con un'apertura nel centro e periodo pari a una lunghezza d'onda SPP.

Queste strutture sono chiamate m-PVL. La loro forma è data da:

$$r = r_0 + m\lambda_{SPP} \cdot \phi. \quad (2.18)$$

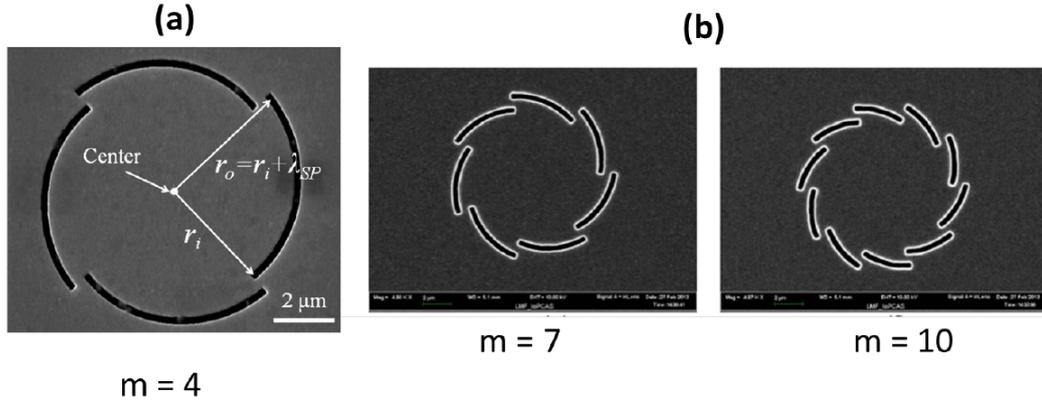
dove  $r_0$  è la distanza minima delle scanalature dal centro e dove il periodo è  $\lambda_{SPP}$  per assicurare l'accoppiamento della luce con gli SPP.

Se si considera un fascio di luce incidente di spin  $\sigma_i$ , le scanalature si comportano come un reticolo che eccita gli SPP e, nell'interferenza tra i plasmoni di superficie, la luce polarizzata circolarmente si converte in un EBB di  $l$ -esimo ordine. Si può calcolare il campo elettrico del modo SPP e si vede che è quello di

## 2. TEORIA OAM E PVL

un vortice SPP con il profilo di un EBB e una *chiralità*  $l_v = \sigma_i + m$ . L'ordine  $l_v$  del EBB rappresenta la chiralità del plasmon di superficie. Si vede dunque che la struttura a spirale  $m$  fornisce un contributo alla chiralità.

Per comprendere meglio come le differenze di fase tra un set di onde SPP infinitesimali convergenti al centro generano un vortice SPP, si utilizza un'ulteriore tipologia di PVL. Essa presenta un insieme di  $m$  fenditure curve, come in figura 2.6.



**Figura 2.6:** Immagine SEM di PVL con diversi  $m$ . (a)  $m = 4$ ; (b)  $m = 7$  e  $m = 10$ .

In questa configurazione il vortice SPP prende la forma di un EBB di ordine  $l$ :

$$E_{z,l}(r, \varphi, z) = AJ_l(k_{spp}r)e^{il(\varphi+\frac{\pi}{2})}e^{-k_z z}. \quad (2.19)$$

Dallo spettro angolare si ricava la sua origine fisica:

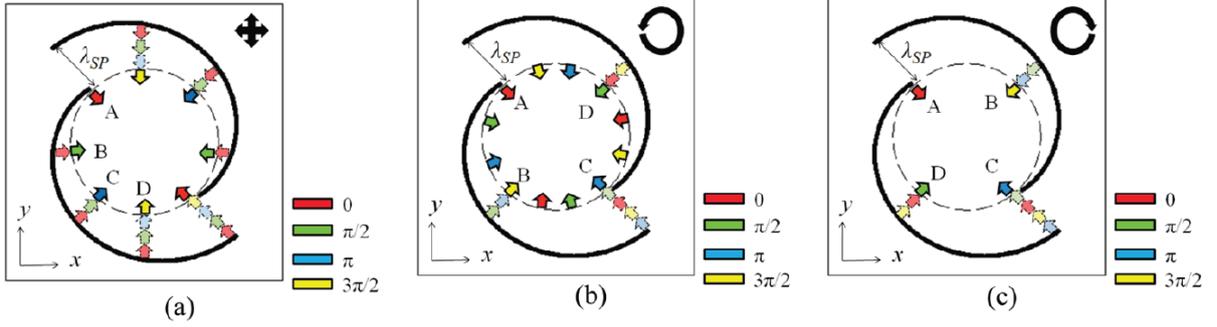
$$J_l(k_{spp}r)e^{il(\varphi+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{[ik_{spp}(x \cos \phi + y \sin \phi)]} d\phi. \quad (2.20)$$

Da questa equazione si capisce che la sovrapposizione di un insieme di onde piane SPP infinitesimali (che convergono verso il centro con fase spirale  $\exp im\phi$ ) produce un vortice SPP che ha la forma della funzione di Bessel di ordine  $l$ , con il profilo di fase spirale  $e^{il(\varphi+\frac{\pi}{2})}$ .

L'obiettivo delle PVL è di sintetizzare un vortice SPP, a partire da questo spettro angolare di profilo di fase  $e^{im\phi}$ , nel loro centro di convergenza.

La figura 2.7 mostra le differenze di fase relative tra gli spettri angolari convergenti degli SPP, che sono generati da ogni spezzone infinitesimale della fenditura curva. Si vede inoltre che nella trasmissione dalla fenditura al centro, le onde SPP subiscono un *ritardo di fase* proporzionale alla distanza percorsa, come si vede dalle frecce colorate in figura 2.7.

## 2.2. Interazione dei Fasci Vorticosi con gli SPP



**Figura 2.7:** Diagramma schematico dello spettro angolare delle onde SPP che converge verso il centro della 2-PVL, sotto polarizzazione (a) radiale, (b) circolare destrorsa, (c) circolare sinistrorsa. Le frecce rosse, verdi, blu e gialle corrispondono al campo elettrico uscente  $E_z$  con le relative differenze di fase di  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$  rispettivamente.

A seconda della polarizzazione della luce incidente, la fase dell'SPP indotto sulla fenditura cambia:

- *polarizzazione radiale* - figura 2.7(a).  
 Nel caso di una luce incidente polarizzata radialmente, la fase dell'SPP indotto è sempre uguale nei vari punti della fenditura.  
 Poichè la curva è una spirale e la fase varia nel trasferimento verso il centro, si ha che le varie fasi sulla circonferenza tratteggiata saranno diverse l'una dall'altra.  
 Si nota che i punti A, B, C e D hanno differenza di fase di  $\frac{\pi}{2}$ , quindi il profilo di fase del vortice SPP risultante sarà  $\exp(2i\varphi)$ , corrispondente a una carica topologica  $l = 2$ . Poichè la luce incidente non trasporta OAM, questa carica topologica è fornita dalla struttura, che dunque ha carica topologica  $m = 2$ .
- *polarizzazione circolare* - figura 2.7 (b) e (c).  
 Nel caso di una luce incidente polarizzata circolarmente, invece, la fase dell'SPP indotto è dipende dall'angolo azimutale  $\varphi$ .
  - *polarizzazione destrorsa* - figura 2.7(b).  
 poichè la fase iniziale nei punti A, B, C e D varia di  $\frac{\pi}{2}$ , si ha che questa polarizzazione induce onde SPP di fase  $\exp(i\phi)$ ; alla circonferenza si avrà uno spettro angolare SPP con  $\exp(3i\varphi)$  che corrisponde ad un vortice plasmonico di carica topologica  $l = 3$ .
  - *polarizzazione sinistrorsa* - figura 2.7(c).  
 poichè la fase iniziale nei punti A, B, C e D varia di  $-\frac{\pi}{2}$ , si ha che questa polarizzazione induce onde SPP di fase  $\exp(-i\phi)$ ;

## 2. TEORIA OAM E PVL

si avrà uno spettro angolare SPP con  $\exp(i\varphi)$  che corrisponde ad un vortice plasmonico di carica topologica  $l = 1$ .

Si ha quindi che quando la direzione rotazionale della polarizzazione del fascio è la stessa della (risp. opposta alla) direzione rotazionale del PVL, la carica topologica del vortice SPP ottenuto viene incrementato (diminuito) di 1.

Questa espressione rappresenta la conservazione del momento angolare totale nel processo di conversione, operato dalla PVL, da momento angolare di spin (SAM) del fascio a momento angolare orbitale (OAM) del SPP.

### 2.2.3 SAM e OAM in Strutture Chirali e Achirali

È possibile ricavare molte informazioni studiando l'interazione di luce che trasporta OAM con una semplice struttura *achirale*: il *nano-anello*.

Lo studio di queste interazioni è stato fatto utilizzando fotoni con diverse combinazioni di SAM e OAM e si è dimostrato che entrambi influenzano la distribuzione di energia di campo.

Si è visto che nel caso sia presente solo il SAM, di valori  $\sigma_i = \pm 1$ , le distribuzioni spaziali dell'energia relative ai vari  $\sigma_i$  sono *indistinguibili*. Questo fatto rappresenta una *degenerazione* per lo spin. Vale invece che i due casi sono distinguibili se si introduce l'OAM (cioè  $l \neq 0$ ).

Nel caso di una struttura chirale, come quelle in figura 2.6, invece, illuminando le PVL con un fascio che trasporta OAM si ottiene un vortice plasmonico. L'OAM di quest'ultimo sarà dato dalla somma di quello del fascio incidente e da quello fornito dalla PVL.

### 2.2.4 Nanoaperture e Generazione di Momento Angolare Orbitale nel Far-Field

È interessante inserire un'ulteriore elemento nella struttura: una nanoapertura nel centro della PVL. Per questa configurazione si è visto che si presenta una regola di selezione aggiuntiva, data da  $l_v = l_g$ , dove  $l_v$  è il momento angolare orbitale del vortice di superficie e  $l_g$  è l'OAM del "guided mode" all'interno della struttura coassiale.

Sperimentalmente questa regola di selezione è stata confermata.

Infatti, dato il valore di  $l_g$ , utilizzando un'onda incidente dotata di solo spin  $\sigma$ , vale che  $l_v = m + \sigma$  e si vede come lo spin venga convertito in OAM dalla PVL, conservando il momento angolare totale del sistema. Nel caso si utilizzi un'onda incidente dotata anche di OAM  $l_i$ , ma la struttura è achirale, vale  $l_v = l_i + \sigma$  e

## 2.2. Interazione dei Fasci Vorticosi con gli SPP

ancora è soddisfatta la regola di selezione.

Si è verificata inoltre la conservazione del momento angolare anche per la luce scatterata dalla nanoapertura. Questo fatto suggerisce la possibilità di ricreare un fascio uscente che trasporta OAM.

Si è studiato il caso di un fascio di Laguerre-Gauss incidente su una PVL bucata. Questo fascio trasporta OAM  $l_i$  e SAM  $\sigma_i$  e l'OAM del vortice plasmonico sarà

$$l_v = m + l_i + \sigma_i. \quad (2.21)$$

Questa proprietà del vortice plasmonico è preservata nella trasmissione del campo attraverso l'apertura e per questo viene indotto sulla superficie inferiore dell'interfaccia un vortice con stessa vorticità.

La distribuzione di campo sul piano della PVL è simile a quella generata da un multipolo elettrico rotante. La rotazione delle cariche sul bordo inferiore della fessura danno origine a un'onda sferica che si propaga e che possiede OAM  $l_f$  e SAM  $\sigma_f$  parallelo al momento angolare totale  $j$ :

$$j = l_f + \sigma_f = l_f + \text{sgn}(j). \quad (2.22)$$

Poichè il TAM trasmesso attraverso la fessura è  $j = l_v$ , vale la seguente relazione:

$$l_f = j - \text{sgn}(j) = l_v - \text{sgn}(l_v) = m + l_i + \sigma_i - \text{sgn}(m + l_i + \sigma_i). \quad (2.23)$$

In questo modo è possibile generare vortici uscenti nel far-field con OAM modificabile grazie a nanostrutture plasmoniche chirali.



## Capitolo 3

# Trapping e Rotazione di Microparticelle Dielettriche

### 3.1 Trapping e Rotazione selettivi di Microparticelle Dielettriche Isotopiche

Un'applicazione importante delle PVL è quella che sfrutta il forte campo generato dall'eccitazione degli SPP per intrappolare o far ruotare ciò che si pone nel loro centro. L'utilizzo delle strutture plasmoniche è una alternativa ai convenzionali *optical tweezers* (pinzette ottiche) che colma alcune mancanze di quest'ultimi. Ad esempio, con le PVL si ottiene un campo molto localizzato, tanto da rendere possibile la manipolazione ottica di oggetti di dimensioni inferiori alla lunghezza d'onda incidente.

Per l'analisi di questi processi ci si è basati su un'articolo, inserito nella bibliografia al numero [4].

Per ottenere trapping o rotazione delle particelle è stata utilizzata una singola spirale plasmonica di Archimede, realizzata in oro e illuminata in modo concorde all'asse  $z$  da un fascio polarizzato circolarmente, e una sfera di polistirene di diametro  $1\mu m$ . Si nota che a seconda del senso della polarizzazione si ottiene un caso o l'altro.

La singola spirale è destrorsa (per cui vale  $m = 1$ ) e consiste di tre giri. Una volta illuminata, essa produce SPP che si propagano sul piano  $(x, y)$  e la componente  $z$  del campo  $E$  risultante è proporzionale alle funzioni di Bessel del primo tipo di ordine  $l$ .  $l$  è la carica topologica del vortice SPP e vale la relazione con la carica geometrica  $m = 1$  e il momento angolare di spin ( $s = 1$  e  $s = -1$  rispettivamente per polarizzazioni destrorse e sinistrorse del fascio incidente):  $l = m + s$ .

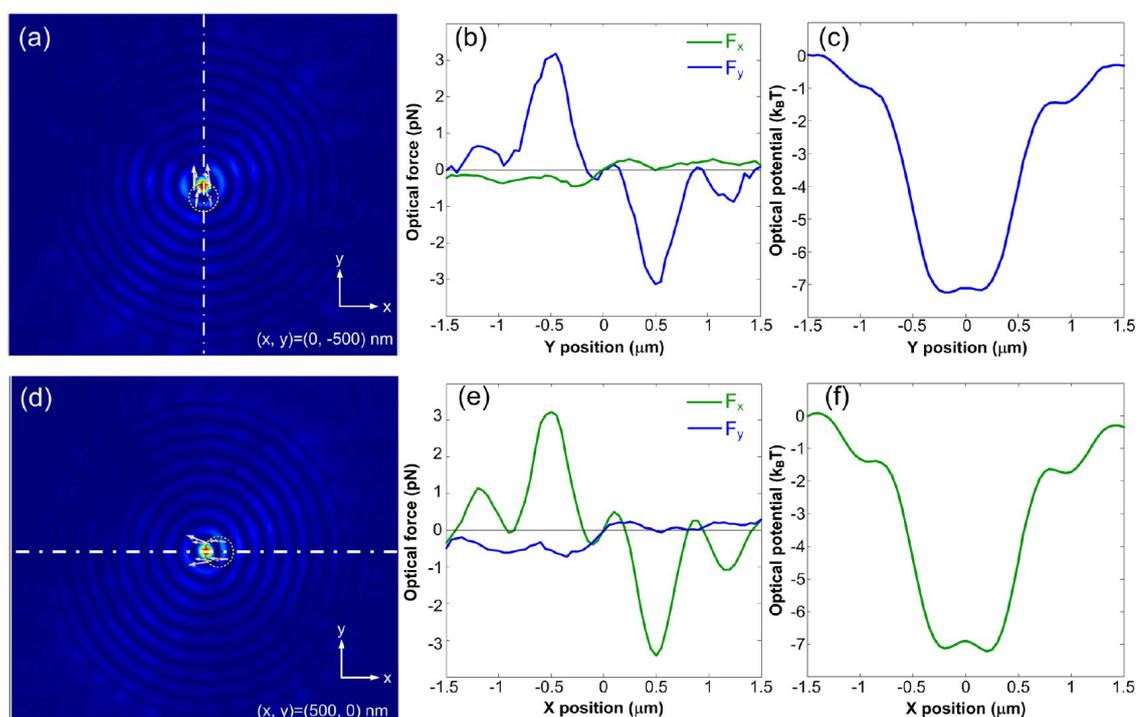
### 3. TRAPPING E ROTAZIONE DI MICROPARTICELLE DIELETTRICHE

Si ha dunque per la polarizzazione circolare sinistrorsa  $l = 0$ , cioè il campo plasmonico non esercita un momento angolare sulla particella e il suo profilo d'intensità ha un massimo nel centro della spirale (come la funzione di Bessel di ordine zero); per quella destrorsa, invece, vale  $l = 2$  e quindi il campo ha come profilo d'intensità una ciambella e può trasferire momento angolare orbitale alla particella, imponendo la rotazione.

- *polarizzazione circolare sinistrorsa*

Per studiare le forze agenti sulla particella, essa è stata spostata leggermente ( $500\text{nm}$ ) dalla posizione centrale della spirale.

Come si vede dalla Figura 3.1 la particella subisce una forza di richiamo verso il centro, sia che si sia spostata la particella lungo l'asse  $y$  (Figura 3.1(a,b,c)), che lungo l'asse  $x$  (Figura 3.1(d,e,f)), come dimostra il profilo del potenziale delle forze  $\mathbf{F}_y$  e  $\mathbf{F}_x$ .



**Figura 3.1:** Analisi della forza ottica di intrappolamento per il campo SP. (a) La sfera (rappresentata da linee gialle tratteggiate) viene spostata di  $-500\text{nm}$  lungo l'asse  $y$ . Le forze esercitate sulla sfera sono rappresentate dalle frecce bianche. (b) Le forze ottiche  $\mathbf{F}_x$  e  $\mathbf{F}_y$  calcolate in vari punti lungo l'asse  $y$ . (c) Il potenziale della forza lungo l'asse  $y$ . (d) La sfera spostata di  $500\text{nm}$  lungo l'asse  $x$ . (e) Le forze ottiche  $\mathbf{F}_x$  e  $\mathbf{F}_y$  calcolate in vari punti lungo l'asse  $x$ . (f) Il potenziale della forza lungo l'asse  $x$ .

### 3.1. Trapping e Rotazione selettivi di Microparticelle Dielettriche Isotropiche

È importante notare che in entrambi i casi, la forza lungo l'asse opposto alla direzione dello spostamento della particella risulta trascurabile (ad esempio, spostata la particella lungo l'asse  $y$ , si vede che le forze lungo l'asse  $x$  sono trascurabili).

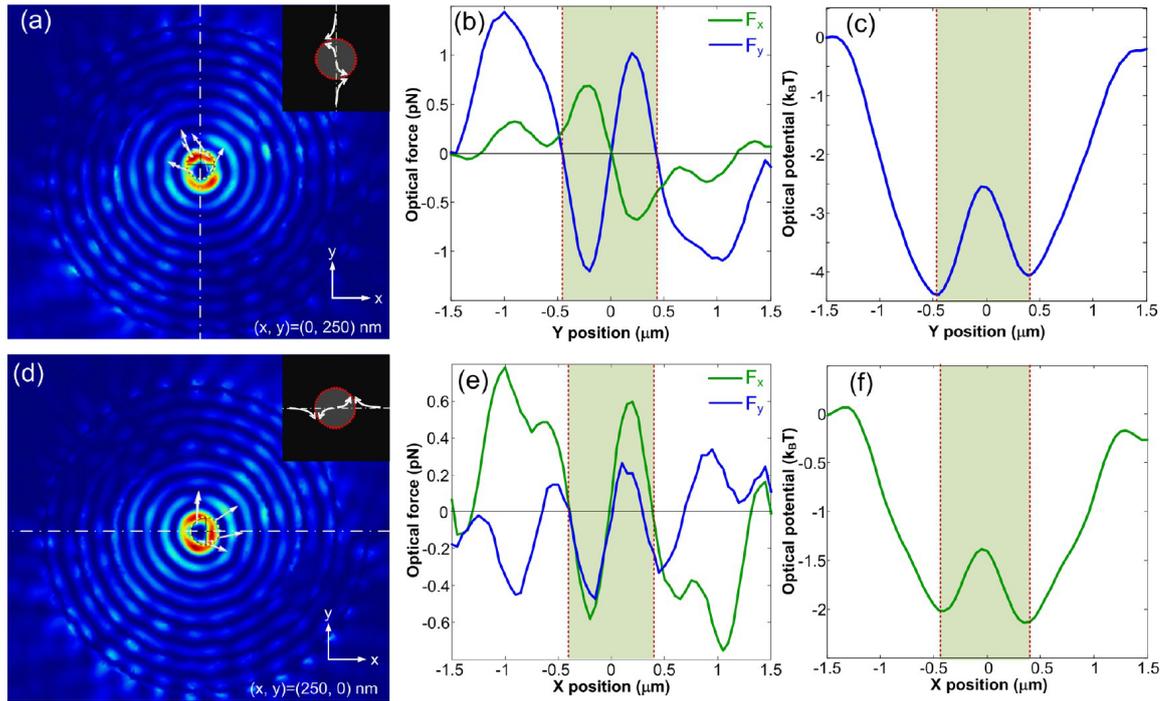
- *polarizzazione circolare destrorsa*

In questo caso si è posizionata la particella a una distanza di  $250nm$  dal centro, lungo uno degli assi.

Come si vede dalla Figura 3.2, in questo caso, i potenziali delle forze lungo  $x$  e lungo  $y$  mostrano la presenza di una buca di potenziale lungo l'anello primario del profilo del campo (indicato nei grafici con una linea tratteggiata verticale).

La differenza col caso precedente sta nel fatto che in questo caso la forza lungo l'asse opposto alla direzione dello spostamento della particella non è più trascurabile. Studiata più precisamente, infatti, si è notato che è proprio questa componente che impone alla particella una rotazione in senso antiorario.

### 3. TRAPPING E ROTAZIONE DI MICROPARTICELLE DIELETTRICHE

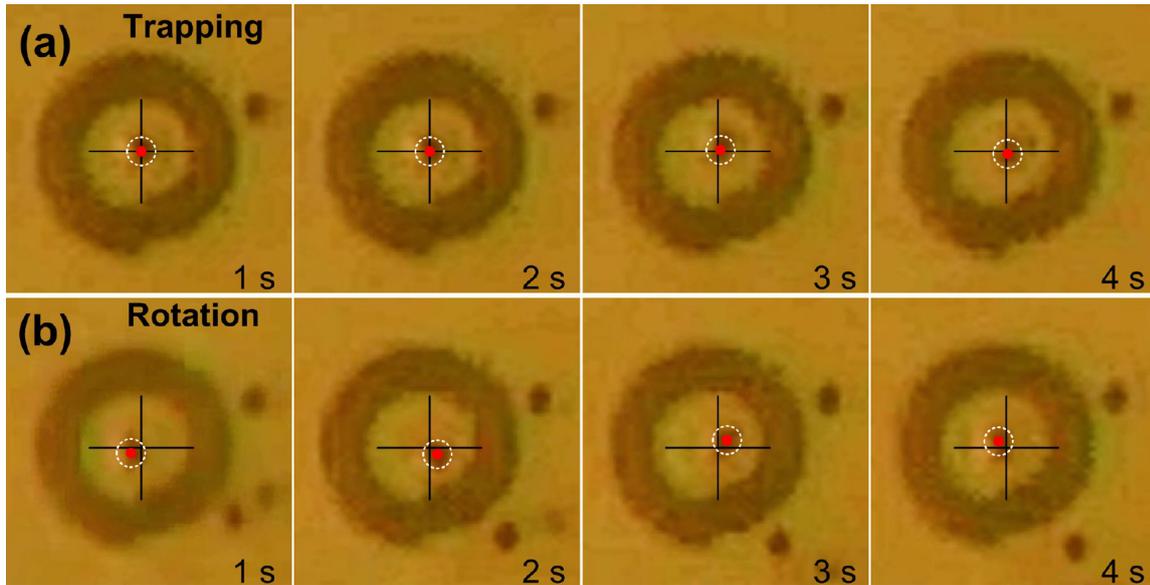


**Figura 3.2:** Analisi della forza ottica di rotazione per il campo SP. (a) La sfera viene spostata di  $250\text{nm}$  lungo l'asse  $y$ . Le forze esercitate sulla sfera sono rappresentate dalle frecce bianche. (b) Le forze ottiche  $F_x$  e  $F_y$  calcolate in vari punti lungo l'asse  $y$ . I confini dell'anello primario sono indicati da delle linee verticali rosse tratteggiate. (c) Il potenziale della forza lungo l'asse  $y$ . (d) La sfera spostata di  $250\text{nm}$  lungo l'asse  $x$ . (e) Le forze ottiche  $F_x$  e  $F_y$  calcolate in vari punti lungo l'asse  $x$ . (f) Il potenziale della forza lungo l'asse  $x$ .

Gli inserti in (a) e (d) mostrano la forza ottica totale esercitata sulla sfera, dentro e fuori dall'anello primario.

Questo processo è stato osservato sperimentalmente, come mostra la Figura 3.3.

### 3.1. Trapping e Rotazione selettivi di Microparticelle Dielettriche Isotopiche



**Figura 3.3:** Trapping o rotazione selettivi di una singola microsfera. I cerchi bianchi tratteggiati mostrano il confine della sfera, mentre il punto rosso ne indica il centro geometrico. (a) Quattro immagini acquisite ai tempi  $t = 1s$ ,  $t = 2s$ ,  $t = 3s$ , e  $t = 4s$  quando il campo SP è eccitato da un fascio sinistrorso. La sfera è intrappolata al centro della spirale. (b) Quando si cambia la polarizzazione del fascio incidente, la sfera ruota in senso antiorario a distanza costante dal centro.

Concludendo, si vede infatti che nel primo caso, Figura 3.3(a), la particella rimane intrappolata nel centro della struttura plasmonica; nel secondo caso, invece, Figura 3.3(b), essa si muove, ad una certa distanza dal centro (lungo l'anello primario), percorrendo in senso antiorario i quattro quadranti allo scorrere del tempo.



# Conclusioni

Nel lavoro di tesi svolto, si è data una spiegazione organica del funzionamento delle Plasmonic Vortex Lenses (PVL), partendo dalle teorie di base di plasmonica e di momento angolare orbitale della luce per arrivare agli effettivi processi che avvengono sulla loro superficie. Si è anche analizzata un'applicazione importante di questi dispositivi: la manipolazione ottica dei microparticelle.

Si sono studiate nel primo capitolo le risposte dei metalli, intesi come gas di elettroni liberi su un fondo fisso di ioni positivi, alla radiazione elettromagnetica introducendo la funzione dielettrica complessa. Si è visto come le sue parti reale e complessa regolino rispettivamente l'indice di rifrazione (che controlla la diminuzione della velocità di fase dell'onda) e l'assorbimento della luce che si propaga nel mezzo.

Si sono poi investigate le proprietà fisiche dei Surface Plasmon Polaritons (SPP); si è dapprima applicate le equazioni di Maxwell ad un'interfaccia metallo-isolante, trovando due soluzioni indipendenti dell'equazione dell'onda (le magnetiche trasverse e le elettriche trasverse), poi si è visto come esse portano alla relazione di dispersione degli SPP, fondamentale per comprendere il comportamento degli SPP alle varie frequenze. Si è osservato che per una determinata frequenza  $\omega_{sp}$  si ha massima dispersione del modo e quindi velocità di gruppo nulla; questo gli conferisce caratteristiche elettromagnetiche: diventa un SPP.

Si è inoltre vista l'utilità dei sistemi multilayer di interfacce metallo-isolante che presentano una grande varietà di casistiche interessanti (come la possibilità di ottenere ottime localizzazioni degli SPP anche a frequenze diverse da  $\omega_{sp}$ , aggiustando la geometria del sistema).

Un'importante conclusione studiata è il raggiungimento di localizzazione, per l'energia elettromagnetica, al di sotto del limite di diffrazione; questo porta ad un grande aumento del campo.

Per l'eccitazione di SPP si è analizzato l'accoppiamento tramite reticolo; si è visto come il momento sul piano dell'interfaccia del fascio incidente possa eccitare gli SPP se, una volta sommato ad un multiplo del vettore reciproco del reticolo, coincide con la costante di propagazione del modo SPP.

### 3. TRAPPING E ROTAZIONE DI MICROPARTICELLE DIELETTRICHE

Come ultimo argomento relativo alla teoria plasmonica, si è studiata la trasmissione della radiazione attraverso aperture sub-wavelength. Per il modello di Bethe-Bouwkamp per una apertura con raggio minore della lunghezza d'onda incidente, si è visto che la trasmissione dovrebbe essere molto piccola; nel caso in cui lo schermo che ospita la fenditura sia strutturato con corrugazioni regolari attorno ad essa, si ha che la trasmissione aumenta di molto. Questo è stato spiegato tenendo conto dell'eccitazione di SPP che incanalano nell'apertura l'energia elettromagnetica raccolta su tutto lo schermo.

Nel secondo capitolo sono stati studiati i fasci di luce che trasportano momento angolare orbitale (OAM) e la loro interazione con gli SPP.

Risolvendo l'equazione d'onda parassiale si sono ottenute alcune famiglie di fasci che trasportano OAM e si è messa in luce la loro componente di fase azimutale  $\exp(il\varphi)$ ; sono stati studiati i fasci di Laguerre-Gauss (LG), che presentano simmetria rotazionale, e i fasci di Bessel, che hanno il profilo trasversale invariante durante la propagazione (sono definiti *diffraction-free*) e dai quali si è ottenuta una forma non parassiale dei fasci LG.

A partire dall'approssimazione parassiale, si è arrivati a separare le componenti di polarizzazione  $\sigma$  e di fase azimutale  $l$  del momento angolare totale e si è identificato nella seconda la responsabile del trasporto di momento angolare orbitale.

Successivamente si è introdotto il concetto di vortice SPP, dato da una sovrapposizione di SPP convergenti verso una singolarità di fase al centro; è stato osservato che questo vortice trasporta OAM e possiede il profilo trasversale di un fascio di Bessel, ma confinato in modo evanescente alla superficie.

Nello studio delle PVL, si è cercato di capire come un fascio che trasporta OAM possa essere trasformato in un vortice SPP; si è visto che le scanalature delle PVL si comportano come un reticolo che, una volta illuminato, eccita gli SPP. L'obiettivo di questi dispositivi è quello di sintetizzare un vortice plasmonico, partendo da una sovrapposizione di SPP che convergono verso il centro. L'OAM del vortice così generato è dato dall'OAM e dallo spin del fascio incidente sommati ad una componente  $m$ , detta carica topologica spirale, fornita dalla struttura della PVL. Si è mostrato infatti che strutture chirali, come le spirali di Archimede, posseggono una carica topologica ben definita.

È stato inoltre confermato il fatto sperimentale che, se si impone alla PVL una nanoapertura centrale, il momento angolare orbitale posseduto dal vortice plasmonico viene trasmesso sulla superficie inferiore della PVL e quindi al far-field. Questo fa sì che si possa controllare l'OAM di un fascio attraverso l'interazione con un'adeguata nanostruttura plasmonica.

Infine si è studiata l'applicazione delle PVL alla manipolazione ottica di mi-

### 3.1. Trapping e Rotazione selettivi di Microparticelle Dielettriche Isotopiche

microparticelle dielettriche.

Si è visto come il campo del vortice SPP, generato dall'interazione tra un fascio polarizzato circolarmente con una struttura plasmonica, possa intrappolare o mettere in rotazione una microparticella, a seconda che il fascio incidente abbia senso di rotazione discorde o concorde a quello della struttura.



# Appendice

In questa Appendice si analizzano le informazioni che possono essere ottenute dai grafici di alcune importanti formule di Plasmonica. Da essi infatti si può comprendere, ad esempio, il comportamento dei metalli sottoposti a varie frequenze di luce incidente oppure la dispersione degli SPP lungo un'interfaccia tra due superfici.

Partendo dalla formula della funzione dielettrica per un gas di elettroni liberi 1.13:

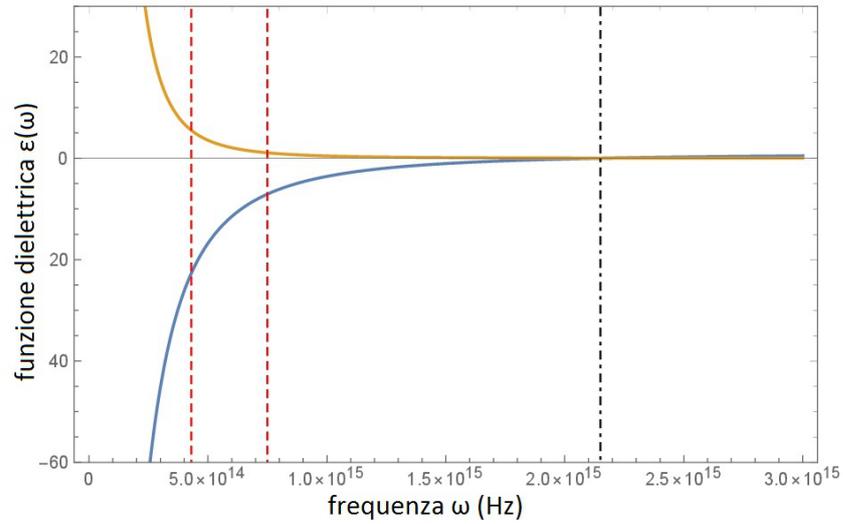
$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

e dopo averne ricavato la parte reale  $\varepsilon_1$  e immaginaria  $\varepsilon_2$ , si sono graficate queste ultime in funzione della frequenza  $\omega$ , entrambe in figura 3.4 e 3.5.

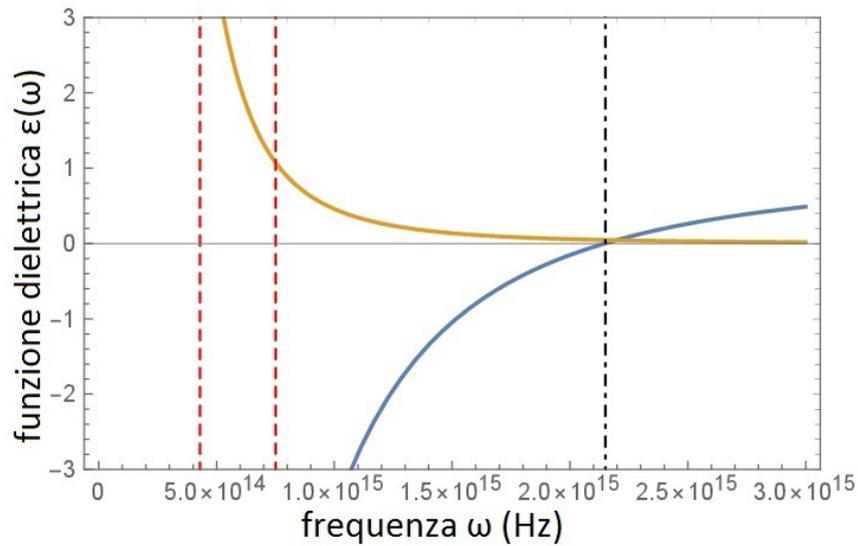
La seconda figura è un'ingrandimento della prima, a cui è stata cambiata la scala sull'asse  $y$ .

Nelle formule,  $\tau$  è il tempo di rilassamento del gas di elettroni e si ha che  $\gamma = \frac{1}{\tau}$  è la frequenza di collisione caratteristica degli elettroni, termine che smorza il loro moto esponenzialmente. Si è utilizzato  $\tau = 10^{-14}s$  e la frequenza di plasma  $\omega_p = 2.15 * 10^{15}Hz$ , che è il valore tipico per metalli quali Ag, Au e Cu.

### 3. TRAPPING E ROTAZIONE DI MICROPARTICELLE DIELETTRICHE



**Figura 3.4:** Parte reale (in blu) e parte immaginaria (in arancione) della funzione dielettrica per un gas di elettroni liberi. La zona racchiusa dalle linee rosse tratteggiate è il range della luce visibile, mentre la linea tratto-punto nera è la frequenza di plasma  $\omega_p$ .



**Figura 3.5:** Ingrandimento della funzione dielettrica per un gas di elettroni liberi. La zona racchiusa dalle linee rosse tratteggiate è il range della luce visibile, mentre la linea tratto-punto nera è la frequenza di plasma  $\omega_p$ .

In figura 3.4 e 3.5 si hanno in blu la curva che rappresenta la parte reale della funzione dielettrica, mentre in arancione quella per la parte immaginaria.

### 3.1. Trapping e Rotazione selettivi di Microparticelle Dielettriche Isotropiche

Innanzitutto si osserva che la parte immaginaria è sempre positiva, mentre la parte reale diventa positiva quando la frequenza supera la frequenza di plasma  $\omega_p$ ; questo fatto sarà analizzato più avanti.

Per la parte reale, si osserva che per luce incidente a frequenze basse essa ha un valore molto alto in modulo, questo è il caso dei perfetti conduttori che si comportano come un dielettrico con permittività elettrica molto alta rispetto alla permittività del vuoto.

Al crescere della frequenza e avvicinandosi alla frequenza di plasma, rappresentata da una linea tratto-punto nera, la costante dielettrica assume valori finiti e negativi. I metalli in questa zona, che comprende anche il visibile (compreso tra le linee tratteggiate rosse), hanno infatti permittività negativa.

Per frequenze superiori a  $\omega_p$ , come si vede in figura 3.5 la permittività del materiale diventa positiva ed esso si comporta come un dielettrico ordinario.

La parte immaginaria, invece, regola lo smorzamento dell'onda incidente che si propaga nel mezzo. Si osserva che si ha smorzamento forte per frequenze basse, mentre risulta trascurabile per frequenze vicine e superiori alla frequenza di plasma.

Bisogna tenere presente che queste formule, ottenute dall'approssimazione del modello di Drude, non tengono conto degli effetti quantistici e di transizione tra bande di energia; quando l'energia dei fotoni sia avvicina alla soglia delle transizioni tra bande elettroniche, il modello non approssima più i valori sperimentali. Come conseguenza si ha un aumento dello smorzamento, poiché aumenta la parte immaginaria della funzione dielettrica.

Nella formula 1.20 della relazione di dispersione degli SPP che si propagano in un'interfaccia tra un materiale conduttore e uno dielettrico

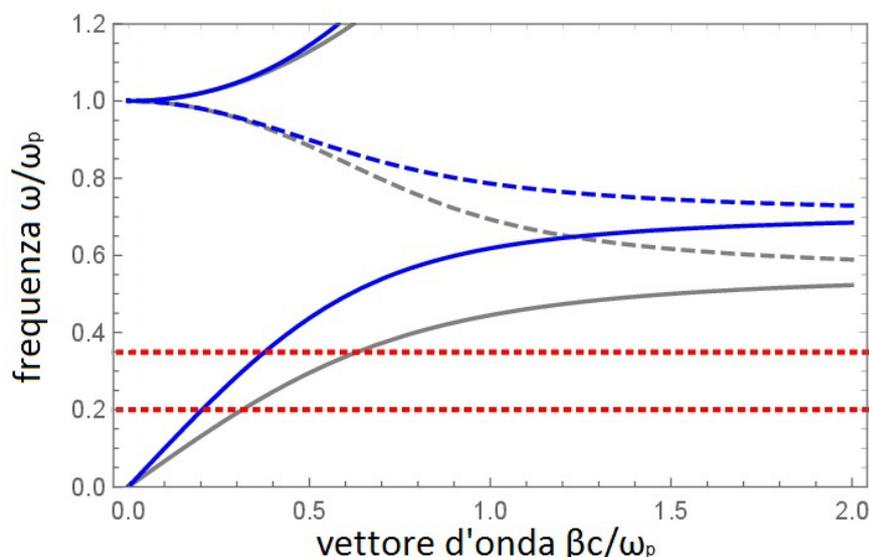
$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

si ha che  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  sono le permittività dei due materiali, rispettivamente.

Il materiale 2 è dielettrico e quindi ha permittività costante, mentre quello conduttore ha una funzione dielettrica complessa che dipende dall' $\omega$  incidente. Si è quindi esplicitata questa dipendenza per costruire le figure 3.6 e 3.7.

### 3. TRAPPING E ROTAZIONE DI MICROPARTICELLE DIELETTRICHE

Inizialmente si è trascurato lo smorzamento  $\gamma$ , che rende  $\beta$  a valori complessi.



**Figura 3.6:** Relazione di dispersione per gli SPP nell'interfaccia tra un metallo di Drude e aria (linee blu) oppure silicio fuso (linee grigie). Le linee tratteggiate rappresentano la parte immaginaria, mentre quelle piene la parte reale. La zona racchiusa dalle linee rosse tratteggiate è il range della luce visibile.

Nella figura 3.6 si sono considerati due casi: in blu si ha la funzione di dispersione per un'interfaccia metallo/aria ( $\varepsilon_2 = 1$ ), mentre in grigio quella per metallo/silicio fuso ( $\varepsilon_2 = 2.25$ ) e le linee tratteggiate nei due colori sono la sua parte immaginaria; sempre in rosso tratteggiato si ha la regione delle frequenze del visibile.

A basse frequenze (metà infrarossi o inferiori),  $\beta \simeq k_0 = \omega/c$ , dove  $\beta = k_0$  è il vettore d'onda dell'onda se si propaga nel vuoto, e si ha che il modo si estende per molte lunghezze d'onda nello spazio dielettrico.

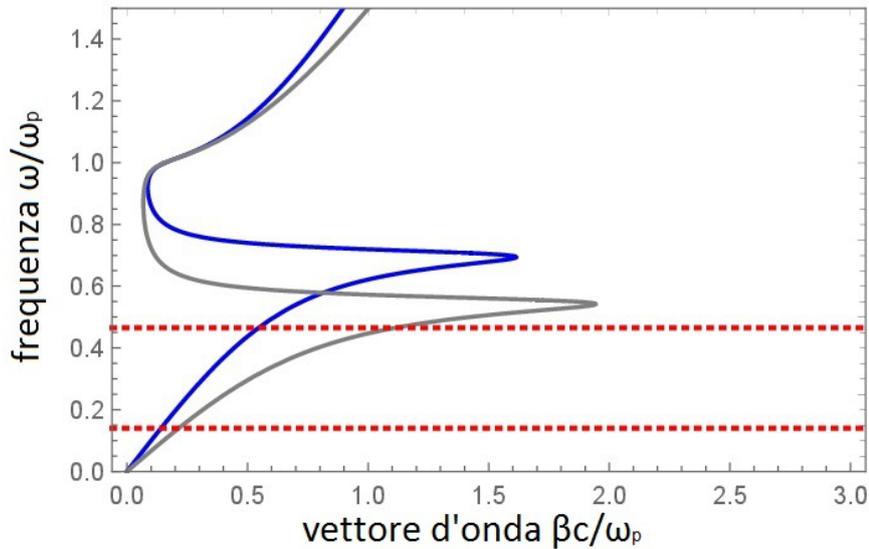
Quando la frequenza sia avvicina a  $\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1+\varepsilon_2}}$ ,  $\beta$  va a infinito e la velocità di gruppo  $v_g$  tende a zero e il modo assume carattere elettrostatico. Questa eccitazione è conosciuta come plasmoni di superficie.

Si ha inoltre un range tra  $\omega_{sp}$  e  $\omega_p$  in cui la funzione di dispersione è solo immaginaria; successivamente proprio per  $\omega = \omega_p$  si ha che la funzione dielettrica del conduttore è nulla e quindi  $\beta$  nullo. Infine, come si è visto nella sottosezione 1.1.3, si ha che per frequenze al di sotto della frequenza di plasma sono proibite

### 3.1. Trapping e Rotazione selettivi di Microparticelle Dielettriche Isotopiche

onde trasversali, mentre sono permesse al di sopra.

Se si tiene in considerazione dello smorzamento ( $Im(\varepsilon_1) \neq 0$ ), si ha un grafico leggermente diverso, in cui si tiene conto solo della parte reale di  $\beta$ .

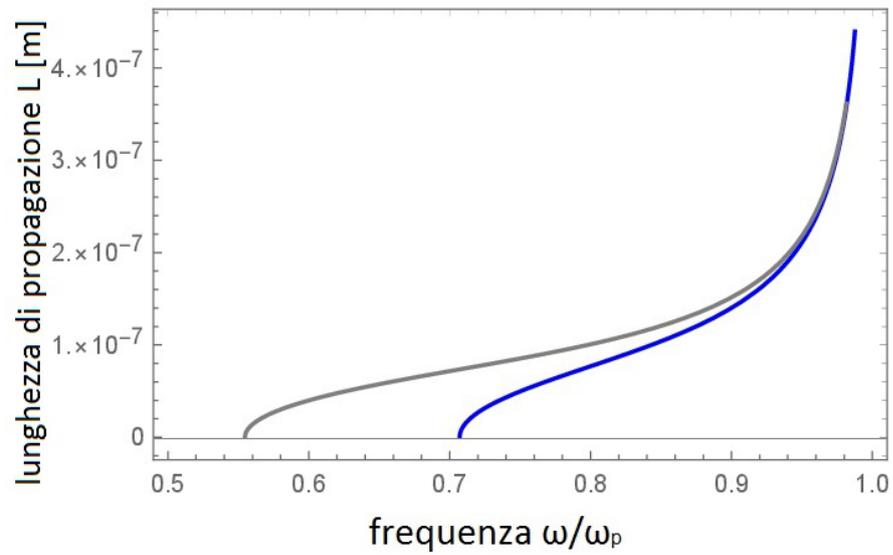


**Figura 3.7:** Relazione di dispersione per gli SPP nell'interfaccia tra un metallo per cui non è trascurato lo smorzamento e aria (linee blu) oppure silicio fuso (linee grigie). La zona racchiusa dalle linee rosse tratteggiate è il range della luce visibile.

Dalla figura 3.7 si vede che, per frequenze vicine a  $\omega_{sp}$  si raggiunge un vettore d'onda  $\beta$  massimo finito.

Un'ulteriore importante grandezza da analizzare è la lunghezza di propagazione  $L$  del modo SPP:  $L = (2Im[\beta])^{-1}$ . Essa tiene conto dell'attenuazione dell'energia de SPP a causa dello smorzamento  $\gamma$ . Come si è osservato precedentemente, per  $\omega_{sp}$  si ha  $\beta \rightarrow \infty$  e quindi  $L = 0$ .

### 3. TRAPPING E ROTAZIONE DI MICROPARTICELLE DIELETTRICHE



**Figura 3.8:** Lunghezza di propagazione di un modo SPP al variare della frequenza dell'onda incidente su un'interfaccia metallo/acqua (in blu) o metallo/silicio fuso (in grigio).

# Bibliografia

- [1] S. A. Maier, *Plasmonics: Fundamentals and Applications*, Springer Science+Business Media LLC, New York, 2007.
- [2] G. Ruffato, *WP1 - REPORT DI RATA. Generation and propagation of optical beams carrying orbital angular momentum of light*, Piano Nazionale di Ricerca Militare - Progetto Vortex, Padova, 2014.
- [3] E. Gazzola, *WP2 - REPORT DI RATA. Interaction of vortex beams with matter*, Piano Nazionale di Ricerca Militare - Progetto Vortex, Padova, 2014.
- [4] W.Y. Tsai, J.S. Huang, C.B. Huang, *Selective Trapping or Rotation of Isotropic Dielectric Microparticles by Optical Near Field in a Plasmonic Archimedes Spiral*, in *(Nano Lett)*, 14 (2), 2014, pp 547-552.