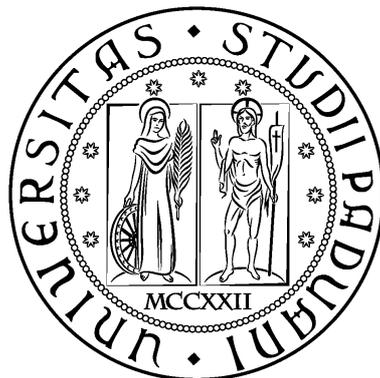


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**



**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE DII**

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA**

**OTTIMIZZAZIONE CINEMATICA DI  
SOSPENSIONI MOTOCICLISTICHE**

**Relatore: Ch.mo Prof. ALBERTO DORIA**

**Laureando: DANIEL PRANDIN, MATR. 620679-IM**

**Anno Accademico 2012 / 2013**







# INDICE

## SOMMARIO

1. INTRODUZIONE.....	1
1.1 Forcellone oscillante classico.....	3
1.2 Forcellone oscillante Cantilever.....	4
1.3 Meccanismi nelle sospensioni posteriori.....	5
1.4 Rigidezza ridotta della sospensione.....	8
1.5 Curva della rigidezza ridotta.....	12
1.6 Analisi cinematica del quadrilatero articolato.....	15
2. STATO DELL'ARTE.....	23
2.1 Analisi dinamica del veicolo.....	24
2.2 Metodi di ottimizzazione dei meccanismi.....	28
3. METODOLOGIA DI SINTESI DEL MECCANISMO.....	33
3.1 Generalità.....	33
3.2 Il solutore.....	36
3.3 Dati in ingresso.....	39
3.4 Struttura fondamentale del programma.....	48
3.5 Analisi di sensibilità.....	60
4. ESEMPI DI OTTIMIZZAZIONE PER I QUATTRO TIPI DI SOSPENSIONE.....	63
4.1 Sospensione di tipo classico.....	65
4.2 Sospensione bilanciata – telaio.....	84
4.3 Sospensione biella – telaio.....	97
4.4 Sospensione bilanciata – forcellone.....	110
4.5 Analisi dei risultati.....	121

CONCLUSIONI.....	125
BIBLIOGRAFIA.....	127
RINGRAZIAMENTI.....	128

## SOMMARIO

Questo lavoro tratta lo sviluppo di un metodo di sintesi dimensionale applicato al meccanismo della sospensione posteriore di motociclette. Tale metodo permette di definire le dimensioni della sospensione in modo da ottenere la forza desiderata alla ruota al variare della posizione del forcellone. Si tratta dunque di un problema di ottimizzazione. La procedura di ottimizzazione avviene numericamente, le dimensioni sono rappresentate da parametri di progetto che possono variare in un ampio campo di valori; all'interno di questo campo è definito il vettore di primo tentativo. Le maggiori difficoltà sono date dalla non-linearità dell'analisi di posizione e dai problemi di assemblabilità del meccanismo. Per quest'ultimi è previsto un sistema che altera i valori della funzione penalità calcolata in modo da spingere il solutore in altre direzioni.

Al termine dell'ottimizzazione è possibile effettuare un'analisi di sensibilità del meccanismo.

Infine vengono presentati degli esempi di ottimizzazione con curve di forza ridotta lineari, progressive e regressive con l'intento di determinare il grado di flessibilità dei meccanismi considerati.



# 1. INTRODUZIONE

Lo sviluppo delle tecnologie informatiche e il continuo progresso delle prestazioni dei calcolatori moderni permette oggi di trasferire un'importante parte dell'attività di progettazione, necessaria allo sviluppo delle più svariate tipologie di prodotti, un tempo necessariamente basata su un approccio sperimentale, realizzando prototipi e modelli reali, in una realtà virtuale con notevoli vantaggi in termini di tempi e costi di sviluppo. Lo studio della cinematica di un meccanismo è sicuramente un problema per il quale un simile approccio risulta estremamente utile. Infatti talvolta non è possibile ottenere una soluzione analitica ed è necessario procedere iterativamente sino a raggiungere risultati soddisfacenti. All'interno di questa tipologia di problema l'analisi, lo studio e lo sviluppo di sistemi di sospensione nelle motociclette ne è sicuramente un caso di grande interesse. Soffermandoci sulla sospensione posteriore del motociclo, la storia della sua evoluzione dalle prime realizzazioni alle ultime motociclette supersportive ha visto il susseguirsi di svariate soluzioni nell'intento di incrementarne le qualità anche per stare al passo con le prestazioni motoristiche sempre maggiori. Lo scopo del sistema di sospensione è assolvere principalmente a tre funzioni:

- consentire alle ruote di seguire il profilo della strada per assicurare l'aderenza al fine di garantire la massima capacità di trasmettere forze longitudinali (trazione e frenata) e laterali (in curva);
- controllare l'assetto del veicolo nelle varie condizioni di utilizzo;

- ridurre la trasmissibilità delle forze verticali e delle vibrazioni dovute alle irregolarità stradali al fine di migliorare il comfort, ottenendo un certo grado di isolamento delle masse sospese;

Non risulta praticamente possibile ottimizzare il comportamento per tutti e tre gli aspetti: ad esempio per soddisfare le condizioni di comfort sarebbe necessario ridurre le rigidità delle molle ma a parità di accelerazioni e irregolarità stradali l'escursione necessaria aumenterebbe proporzionalmente fino a costituire un problema a livello di stabilità e assetto. E' anche possibile che un setup che risponda ai requisiti sopra esposti per una data condizione, ad esempio strada asciutta, non risulti più ottimale al mutare delle condizioni (strada bagnata, ma anche solo a seguito di una netta variazione di temperatura); lo stesso dicasi nel caso, comune ai mezzi stradali, di variazione del carico sulla moto (non tutti i piloti sono uguali, né a livello di corporatura né di statura con conseguente variazione della distribuzione del peso sulle due ruote, inoltre c'è la possibilità di trasportare un passeggero). Quindi è necessario orientare la scelta tenendo conto dell'utilizzo del mezzo (touring, stradale, sportivo, pista, fuoristrada). Per adattarsi a tutte queste necessità sono stati sviluppati diversi schemi di sospensione posteriore.

## 1.1. FORCELLONE OSCILLANTE CLASSICO

Le prime realizzazioni si basavano sul forcellone oscillante a due bracci entrambi provvisti di un gruppo molla ammortizzatore montato con una certa inclinazione, soluzione successivamente denominata classica. Presenta l'evidente vantaggio di una costruzione semplice e una posizione dei gruppi molla ammortizzatore ideale per evitarne surriscaldamenti e conseguente variazione delle caratteristiche di funzionamento in percorsi impegnativi, ma il principale svantaggio è non disporre di un'ampiezza di movimento verticale della ruota sempre sufficiente e non poter ottenere un andamento della forza ridotta (al variare della posizione verticale della ruota) abbastanza progressivo [2].

Rispetto ad un sistema compatto, quale quelli adoperanti dei meccanismi, altre caratteristiche positive sono l'ampiezza di movimento dell'ammortizzatore che rende più agevole il controllo dello smorzamento

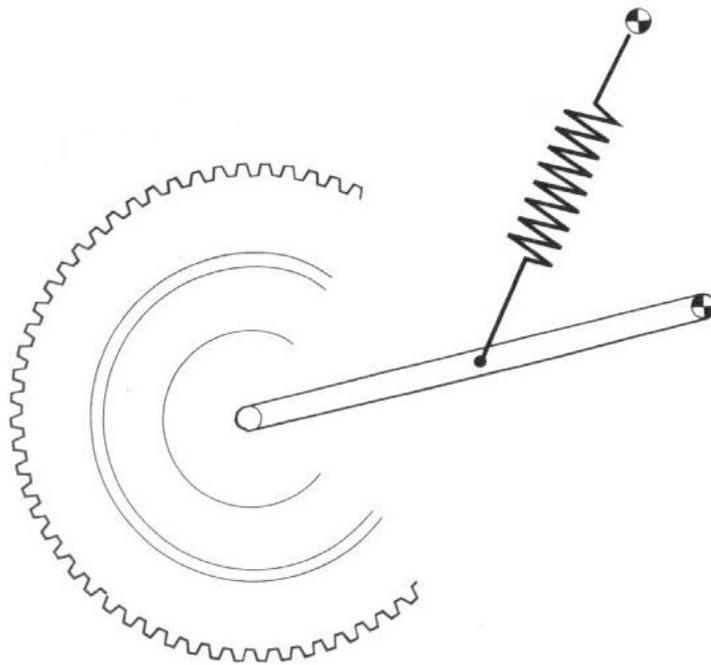


Figura 1.1. Forcellone oscillante classico [2]

comportando a parità di escursione un grande flusso d'olio, la modesta entità delle forze reattive al perno del forcellone, a cui si contrappone però il rischio di generazione di torsioni del forcellone dovute alla presenza di due ammortizzatori e alla loro possibile differente taratura.

## 1.2. FORCELLONE OSCILLANTE CANTILEVER

Per cercare di ridurre i difetti della soluzione classica è stata sviluppata una variante denominata “cantilever”, che presenta un forcellone a bracci uniti in modo da formare un opportuno braccio di leva per un unico sistema molla-smorzatore.

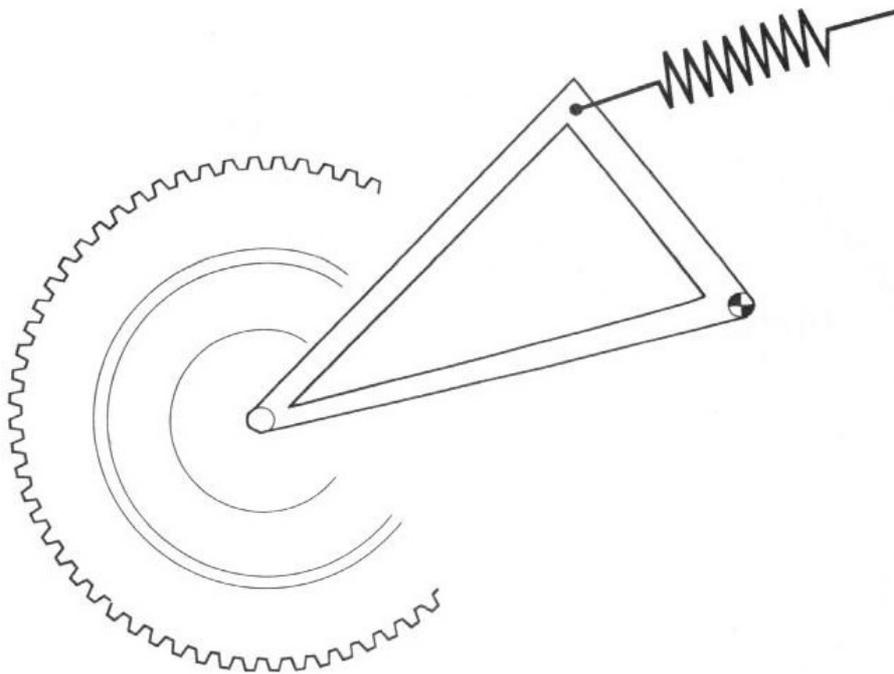
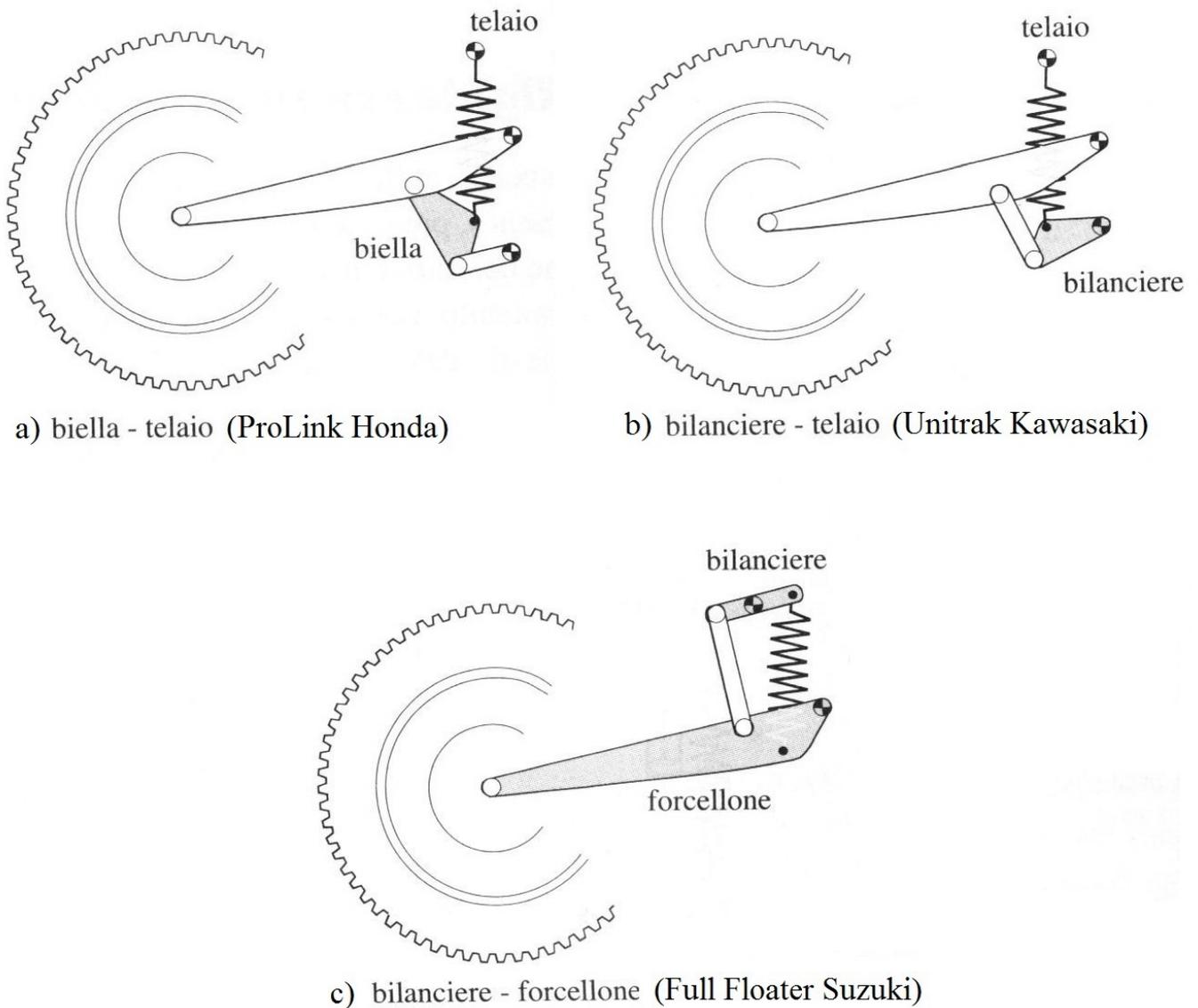


Figura 1.2. Forcellone oscillante del tipo “cantilever” [2]

In questo modo la rigidità torsionale e flessionale del forcellone risultano notevolmente incrementate risolvendo il problema dello schema classico precedentemente menzionato (a maggior ragione vista la presenza di un solo gruppo molla ammortizzatore con la possibilità di montarlo in linea con la ruota annullando eventuali momenti generanti tensioni torsionali). Inoltre si semplificano le operazioni di taratura, l'escursione della ruota risulta maggiore e solitamente si riduce la massa del sistema per l'eliminazione di un gruppo molla-smorzatore. Sfortunatamente gli esempi costruttivi mostrano che questo schema non permette di ottenere una forza ridotta di tipo progressivo e in più l'ammortizzatore si trova ad essere posizionato vicino al motore con difficoltà di smaltimento del calore [2].

### **1.3. MECCANISMI NELLE SOSPENSIONI POSTERIORI**

La volontà di poter adottare andamenti della forza ridotta più progressivi o regressivi ha portato ad introdurre nella sospensione un meccanismo. Il più utilizzato è generalmente il quadrilatero. Le varie case produttrici hanno sviluppato diversi schemi sulla base di questo meccanismo ovviamente con le loro denominazioni commerciali: la Honda nel sistema Pro-Link collega un'estremità del gruppo molla ammortizzatore al telaio e l'altra alla biella del quadrilatero (schema a) in figura 1.3) ed è più generalmente definibile come schema biella-telaio; il sistema Unitrak Kawasaki è simile solo che prevede il collegamento dell'estremità del gruppo molla ammortizzatore al bilanciere (bilanciere- telaio, figura b). Suzuki adotta un sistema particolare con il gruppo molla ammortizzatore montato tra bilanciere e forcellone (quindi non collegato direttamente al telaio) denominato Full Floater (bilanciere-forcellone).



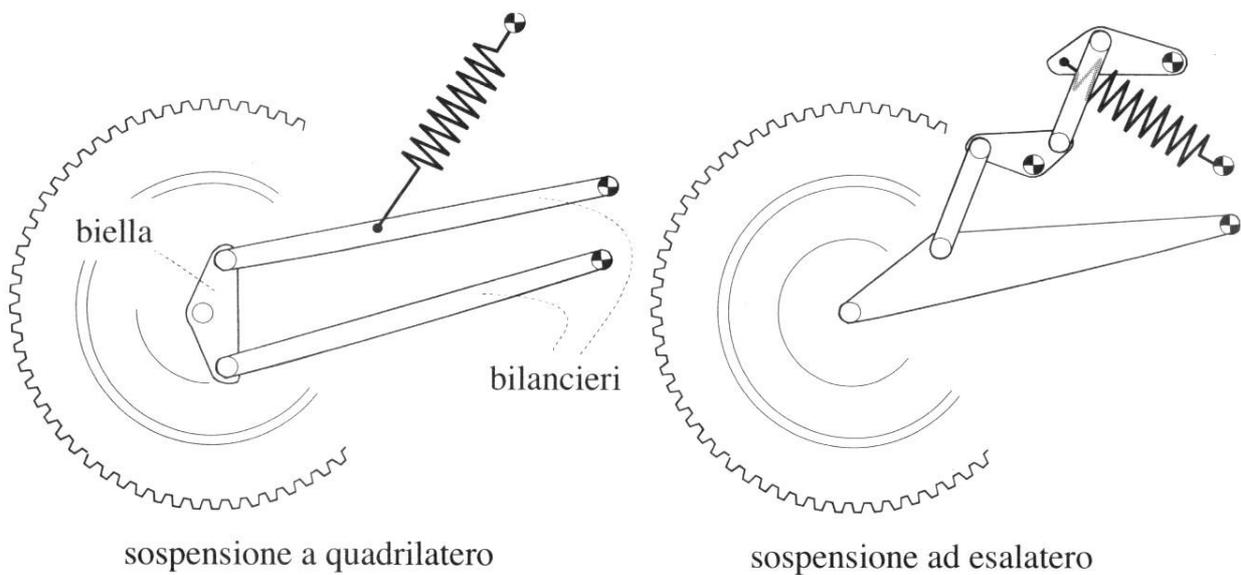
**Figura 1.3. Schemi di sospensione posteriore con forcellone a quadrilatero [2]**

Pur permettendo di ottenere delle forze ridotte variabili con la legge desiderata, di contenere il peso delle masse non sospese e pur consentendo un'ampia escursione della ruota, va sottolineato come per contro aumentino notevolmente le forze reattive al perno del forcellone.

Altre applicazioni del meccanismo del quadrilatero si hanno nel caso di trasmissione ad albero con giunti cardanici (in sostituzione della comune

trasmissione a catena), soluzione adottata nel “Paralever” BMW e in applicazioni Magni su base Moto Guzzi.

Sono state sperimentate anche soluzioni basate sull’esalatero (Morbidelli 500 GP) che però non hanno avuto ulteriori sviluppi principalmente a causa della loro elevata complessità costruttiva [2].



**Figura 1.4. Schemi di sospensione posteriore con forcellone a quadrilatero e ad esalatero**

[2]

## 1.4. LA RIGIDEZZA RIDOTTA DELLA SOSPENSIONE

Per poter confrontare le rigidità dei vari tipi di sospensioni posteriori comprese quelle realizzate con meccanismi articolati è necessario trovare un metodo per riassumerne la caratteristica. Usualmente se ne riconduce il funzionamento ad un modello semplificato che sintetizza il sistema complesso, composto da una molla di rigidità  $K_s$  che trasmette la forza al perno della ruota tramite un certo meccanismo, con una molla agente direttamente sul perno-ruota. Il particolare valore di rigidità che si ottiene è indicato come rigidità ridotta  $K_w$ . La figura successiva intende illustrarne intuitivamente il concetto.

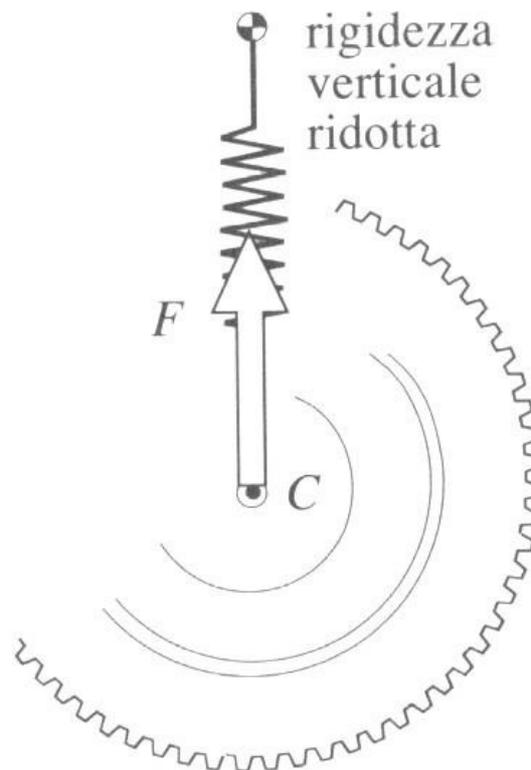


Figura 1.5. Rappresentazione grafica del concetto di rigidità ridotta [2]

La rigidezza  $K_s$  è la taratura della molla (*spring rate* in inglese) e la rigidezza ridotta  $K_w$  è la taratura della sospensione (*wheel rate*). Si definisce *spring rate* la forza necessaria per comprimere la molla di un valore di lunghezza unitario. Il *wheel rate* è invece pari alla forza necessaria ad alzare la ruota di una lunghezza unitaria. Ad esempio se si applica uno spostamento  $\Delta x$  alzando la ruota si avrà una compressione della molla con uno spostamento  $\Delta y$ . L'entità di questi due spostamenti sarà diversa in funzione del cinematismo (o del sistema di leve) della sospensione e delle condizioni al contorno (quindi a seconda del punto della corsa della sospensione a cui si valutano questi spostamenti)

Per chiarire il concetto è opportuno fare riferimento al caso di una semplice sospensione a forcellone oscillante come rappresentata nella figura seguente:

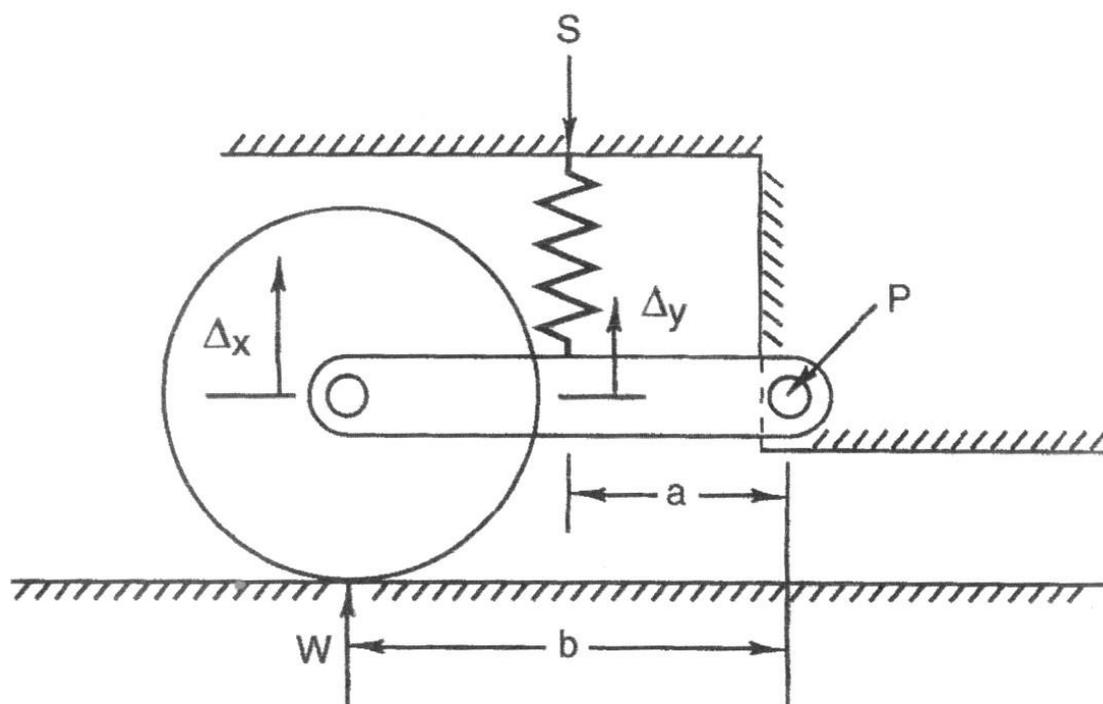


Figura 1.6. Rapporto d'installazione per una semplice sospensione [1]

il braccio oscillante è imperniato al telaio nel punto P, il fulcro, e la molla agisce ad una distanza “a” da quest’ultimo. Il centro ruota si trova invece ad una distanza “b” da P. Queste due distanze caratterizzano il rapporto tra gli spostamenti del perno ruota  $\Delta x$  e del punto d’attacco della molla  $\Delta y$ . Il rapporto di velocità  $\tau = \Delta y / \Delta x$  tra questi due spostamenti è definito rapporto d’installazione o *installaton ratio*. Questo rapporto è il reciproco del vantaggio meccanico e generalmente varia in funzione dello spostamento della ruota. La sua determinazione permette di calcolare la forza ridotta in funzione di  $K_s$  e della geometria al variare della posizione della ruota (o analogamente al variare dell’angolo del forcellone). Ad esempio se la misura di  $b$  è doppia rispetto ad  $a$ ,  $\Delta x$  sarà doppio del  $\Delta y$  e la forza al centro ruota W sarà la metà della forza in S.

Con il calcolo della rigidezza ridotta si determina di conseguenza la forza ridotta che è il parametro che si vuole controllare.

La rigidezza ridotta  $K_w$  può essere esplicitata partendo dalla forza elastica  $F_s$ , che è proporzionale alla deformazione della molla:

$$F_s = K_s \Delta y \quad (1)$$

La forza ridotta vale:

$$F_{ridotta} = F_s \tau \quad (2)$$

In realtà il rapporto di velocità  $\tau$  è il troncamento dell’espansione in serie:

$$\tau = \tau_0 + \frac{d\tau}{dx} \Delta x \quad (3)$$

Quindi la forza ridotta diventa:

$$F_{ridotta} = F_s * \tau_0 + F_s * \left( \frac{d\tau}{dx} \Delta x \right) \quad (4)$$

Dividendo a destra e sinistra per  $\Delta x$  si ottiene la rigidità ridotta:

$$K_w = K_s * \tau_0^2 + F_s * \left( \frac{d\tau}{dx} \right) \quad (5)$$

Dai precedenti passaggi matematici si ottengono dei risultati interessanti: la (2) mostra che la forza ridotta dipende dal rapporto di velocità, mentre la (5) indica che la rigidità ridotta dipende dal quadrato del rapporto di velocità. Quest'ultimo fatto era intuibile se si pensa che l'effetto legato al rapporto di velocità variando il braccio di leva è sia quello di variare il momento generato a parità di forza sia quello di variare lo spostamento del punto di applicazione e quindi la corsa del gruppo molla ammortizzatore.

Lo stesso ragionamento può essere applicato anche considerando un modello semplificato analogo alla sospensione di tipo classico ma con l'elemento molla di tipo torsionale. La sua rigidità ridotta sarà la rigidità torsionale ridotta  $K_\vartheta$ . Il momento torsionale  $M_e$  esercitato sul forcellone è dato dal prodotto della forza elastica  $F_S$  della molla per il rapporto di velocità  $\tau_\vartheta$ :

$$M_e = F_S \tau_\vartheta$$

Dove  $\tau_\vartheta$  è il rapporto tra la deformazione della molla e dello spostamento angolare del forcellone:

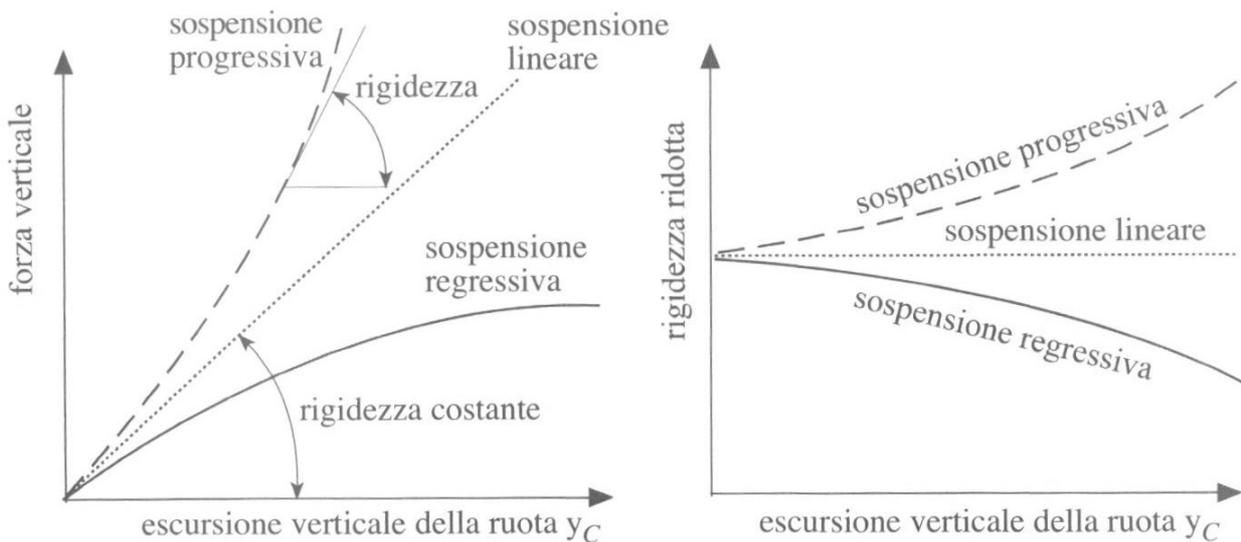
$$\tau_\vartheta = \Delta y / \Delta \vartheta$$

e con gli stessi passaggi precedenti si ottiene:

$$K_\vartheta = K_s * \tau_\vartheta^2 + F_s * \left( \frac{d\tau_\vartheta}{d\vartheta} \right)$$

## 1.5. CURVA DELLA RIGIDEZZA RIDOTTA

Andando a rappresentare sul piano cartesiano l'andamento della forza e della rigidità ridotte si evidenziano tre tipi di comportamento: se la rigidità ridotta si mantiene costante la forza verticale sarà linearmente crescente all'aumentare dell'escursione, se invece la rigidità presenta un progressivo aumento o diminuzione della pendenza ciò si ripercuoterà sulla forza che crescerà in maniera progressiva o regressiva.



**Figura 1.7. Forza elastica e rigidità della sospensione rispetto l'escursione verticale della ruota [2]**

Questi tre tipi di funzionamento descrivono le caratteristiche delle sospensioni lineari, progressive e regressive. È bene ricordare quindi che i termini lineare, progressivo e regressivo si riferiscono alla rigidità ridotta come illustrato nella figura a destra mentre la forza è sempre crescente in compressione con la pendenza decisa dall'andamento del valore di  $K_w$ , che

è il coefficiente angolare della forza ridotta come si può facilmente constatare dalle formule precedenti.

La scelta di queste caratteristiche per un motociclo dipende da vari fattori: peso del pilota e della motocicletta, posizione del baricentro e distribuzione dei carichi sulle ruote, condizioni d'uso, caratteristiche della superficie stradale, tecnica di guida e non ultimo costo del sistema di sospensione [2]. I fattori che determinano la scelta sono dunque molteplici e per certi versi anche contrastanti, e richiedono perciò di accettare dei compromessi; quindi risulta estremamente difficile definire le condizioni ottime per ogni particolare esigenza, ma è comunque possibile descrivere in maniera generale le tendenze che si sono affermate in questo campo nel corso del tempo grazie al continuo sviluppo alimentato dalla sperimentazione diretta su strada o nel mondo delle competizioni e nei suoi vari rami. L'andamento lineare della forza è quello più semplice ed intuitivo e storicamente il primo ad essere utilizzato per la semplicità costruttiva della sospensione classica che ben lo realizza. Per comprendere i possibili vantaggi dell'adottare un certo grado di progressività conviene riprendere in considerazione le condizioni che un sistema di sospensione dovrebbe soddisfare, che potrebbero essere riassunte con i termini tenuta, assetto, comfort. Per quest'ultimo si desiderano delle molle con rigidità molto basse così da minimizzare le frequenze naturali dei modi di vibrare della motocicletta rispetto alle frequenze di eccitazione del moto imposto alla ruota dalle asperità del piano stradale. Tuttavia molle molto morbide causano ampie variazioni nell'altezza del veicolo al variare del carico, ma anche variazioni d'assetto importanti nel passaggio da moto rettilineo a moto in curva e nelle fasi di accelerazione e frenata. Per contro molle rigide oltre a compromettere il comfort non riuscendo a filtrare le asperità stradali possono causare anche problemi di aderenza del pneumatico posteriore in

fase di accelerazione e dell'anteriore in frenata. Sulla base di queste osservazioni risulta comprensibile l'interesse in un sistema progressivo. I vantaggi ottenibili più importanti [2] sono:

- la sospensione essendo più morbida assorbe meglio i piccoli disturbi della superficie stradale ma aumentando il coefficiente di rigidità ridotta all'aumentare della corsa impedisce di raggiungere escursioni eccessive; ciò a beneficio di comfort e aderenza;
- un aumento della rigidità all'aumentare della deformazione permette di avere frequenze dei modi di vibrare circa costanti al variare della massa totale del veicolo (bagagli, passeggero).

L'utilizzo di sospensioni di tipo regressivo è invece poco diffuso ma comunque valido in casi particolari e prevalentemente nell'ambito di veicoli per il fuoristrada dove può garantire in quelle particolari situazioni di fondi cedevoli e con poca aderenza doti di controllo e presa a terra degne di nota.

## 1.6. ANALISI CINEMATICA DEL QUADRILATERO ARTICOLATO

Per effettuare l'ottimizzazione della curva di forza ridotta della sospensione è necessario svolgere l'analisi di posizione e velocità del sistema; poiché tre dei quattro casi presi in considerazione sono basati sul quadrilatero articolato quest'ultimo verrà analizzato in questo paragrafo con particolare attenzione alle condizioni di assemblabilità.

### Analisi di posizione

Si consideri  $q$  come coordinata libera e si vogliono determinare le rotazioni della biella 2 e della manovella condotta 3. Utilizzando il metodo del poligono di chiusura si scrive un'equazione vettoriale dove i vettori sono associati ai membri del meccanismo. Questi possono avere verso arbitrario. Scelto un verso di percorrenza a piacere si scrive l'equazione di chiusura del poligono:

$$z_1 + z_2 - z_3 - z_4 = 0$$

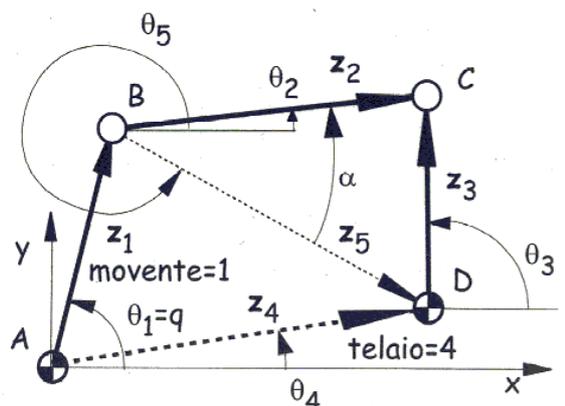


Figura 1.8. Poligono di chiusura per il quadrilatero articolato [5]

La stessa può essere riscritta in forma scalare:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{Bmatrix} - a_3 \begin{Bmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{Bmatrix} - a_4 \begin{Bmatrix} \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Dove  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sono le lunghezze dei membri  $\mathcal{U}_4$  è l'inclinazione costante e fissata del telaio e  $\mathcal{U}_4=q$  è la coordinata generalizzata. Le due equazioni scalari possono essere scritte in modo da isolare le due incognite  $\mathcal{U}_2$  e  $\mathcal{U}_4$ :

$$\begin{bmatrix} a_2 & -a_3 \\ a_2 \operatorname{tg} \theta_2 - a_3 \operatorname{tg} \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \cos \theta_3 \end{Bmatrix} = -a_1 \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} - a_4 \begin{Bmatrix} \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Per il quadrilatero si può giungere ad una soluzione in forma chiusa utilizzando il teorema di Carnot sul triangolo BCD: calcolata la distanza tra i punti B e D e  $\mathcal{U}_5$ , inclinazione del vettore  $z_5$  rispetto l'asse delle x:

$$a_5 = \sqrt{(a_4 \cos \theta_4 - a_1 \cos q)^2 + (a_4 \sin \theta_4 - a_1 \sin q)^2}$$

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \frac{a_4 \sin \theta_4 - a_1 \sin q}{a_4 \cos \theta_4 - a_1 \cos q}$$

l'angolo  $\alpha = \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_5$  compreso tra  $z_2$  e  $z_5$  risulta:

$$\alpha = \pm \operatorname{ar} \cos \left( \frac{a_2^2 + a_5^2 - a_3^2}{2a_2 a_5} \right)$$

Per un dato valore di q vi sono due possibili valori di  $\alpha$  e di conseguenza due valori di  $\mathcal{U}_2$  corrispondenti ai due modi di assemblaggio:

$$\theta_2 = \pm \alpha + \theta_5$$

Si possono avere due soluzioni reali distinte che corrispondono alle due configurazioni, due soluzioni reali coincidenti (per  $\alpha = 0$ ) che corrispondono ad un'unica configurazione o nessuna soluzione che significa che il meccanismo non è assemblabile. Calcolato  $\theta_2$  si può determinare la posizione del punto C e l'angolo  $\theta_3$ :

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_3 = \arctg \frac{y_c - y_D}{x_c - x_D}$$

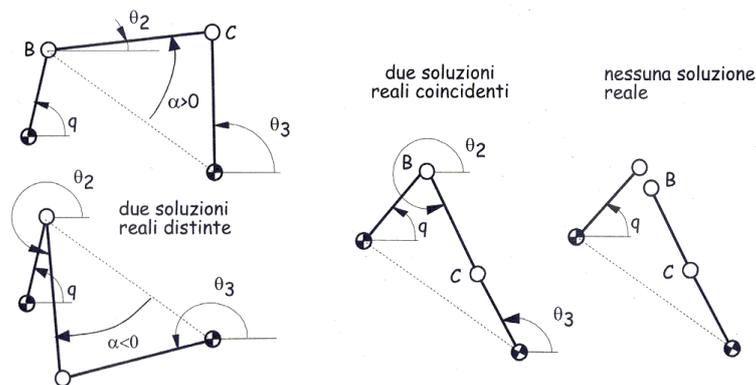


Figura 1.9. Rappresentazione grafica delle soluzioni [5]

### Analisi di velocità

Nota  $\dot{q}$  si vogliono calcolare  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_3$ . Si comincia derivando l'equazione di chiusura:

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 - \dot{z}_3 = 0$$

e in forma scalare:

$$a_1 \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} + a_2 \begin{Bmatrix} -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_2 - a_3 \begin{Bmatrix} -\sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_3 = 0$$

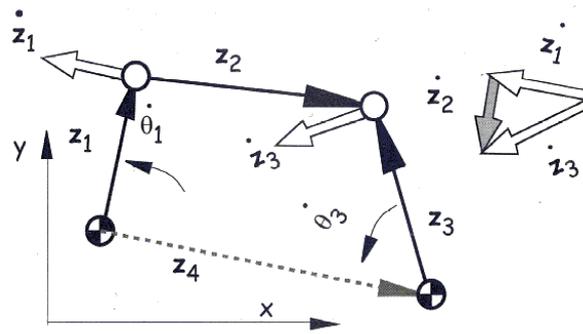


Figura 1.10. Vettori velocità dei punti B e C [5]

Riscritta in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 \\ a_2 \cos \theta_2 - a_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} \sin q \\ -\cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

dove la matrice  $[J]$  è lo jacobiano dell'equazione di chiusura. Moltiplicando entrambi i membri per  $[J]^{-1}$  si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \frac{a_1 \dot{q}}{a_2 a_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \begin{bmatrix} -a_3 \cos \theta_3 - a_3 \sin \theta_3 \\ -a_2 \cos \theta_2 - a_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin q \\ -\cos q \end{Bmatrix}$$

i rapporti di velocità sono :

$$\tau_{\theta_2, q} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{q}} = \frac{a_1 \sin(\theta_3 - q)}{a_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \quad \tau_{\theta_3, q} = \frac{\dot{\theta}_3}{\dot{q}} = \frac{a_1 \sin(\theta_2 - q)}{a_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)}$$

### Configurazioni singolari

Per  $\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) = 0$  il determinante della matrice Jacobiana  $[J]$  si annulla ossia il rango di  $[J]$  è minore della sua dimensione e quindi il numero di incognite è maggiore di quello delle equazioni e il sistema è indeterminato. Sono due i casi per i quali quest'equazione è verificata:

- $\vartheta_2 - \vartheta_3 = 0$                        $\vartheta_2 = \vartheta_3$
- $\vartheta_2 - \vartheta_3 = \pi$                      $\vartheta_2 = \vartheta_3 + \pi$

Per entrambi i casi avviene l'allineamento dei due vettori  $z_2$  e  $z_3$  ma nel primo sono equiversi mentre nel secondo controversi.

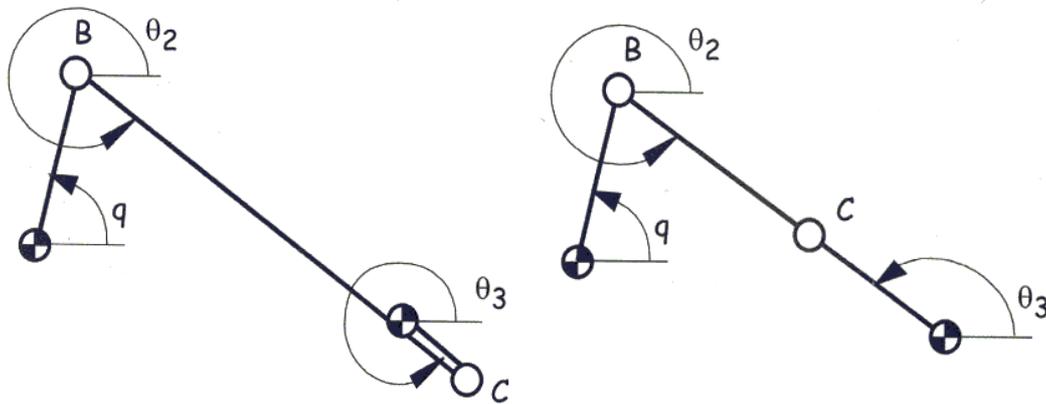


Figura 1.11. 1° configurazione singolare (sinistra) e 2° configurazione singolare (destra) [5]

In queste configurazioni una velocità  $\dot{q} \neq 0$  porta alla disarticolazione del meccanismo a prescindere dal verso di  $\dot{q}$  (i rapporti di velocità tendono ad infinito). Infatti l'equazione che mette in relazione le velocità mostra che se  $\dot{q} \neq 0$  e il determinante di  $[J]$  tende a zero le due velocità  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_3$  tendono ad infinito. Quindi il movimento del meccanismo in queste condizioni genera problemi di assemblabilità.

### Angoli di pressione e di trasmissione

Per valutare in maniera quantitativa la vicinanza del meccanismo ad una condizione di singolarità non compatibile con il suo funzionamento è possibile fare riferimento al valore dell'angolo di trasmissione, definito come l'angolo formato dalla direzione della velocità assoluta del punto P del cedente e la direzione della velocità relativa di P rispetto al movente (ossa un moto rotatorio rispetto al centro A).

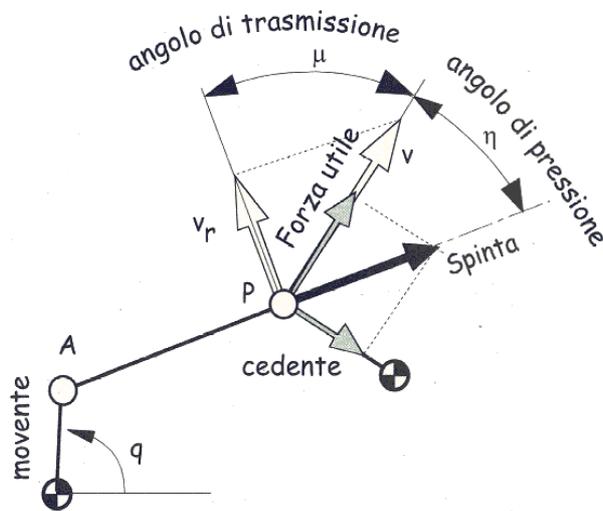


Figura 1.8. Poligono di chiusura per il quadrilatero articolato [5]

La trasmissibilità sarà massima per un angolo di  $90^\circ$  e nulla a  $0^\circ$  ove si avrà la condizione di singolarità del meccanismo. Se lo scopo del meccanismo è la trasmissione di forze si preferisce usare l'angolo di pressione che è definito tra la direzione della spinta della biella e la velocità assoluta del punto P come appartenente al cedente. I due angoli così definiti sono complementari.





## 2. STATO DELL'ARTE

La progettazione di sistemi di sospensione in ambito veicolistico mira a soddisfare un insieme di vari requisiti che spesso è difficile soddisfare simultaneamente e quindi è necessario ottenere dei buoni compromessi. I requisiti tipicamente richiesti alle sospensioni sono: la tenuta di strada e la stabilità, il controllo dell'assetto ed il comfort. A tal riguardo il lavoro svolto in questa tesi è maggiormente rivolto al controllo delle prime due proprietà, ossia ad applicazioni dove sono preponderanti le prestazioni velocistiche e di conseguenza le doti di manovrabilità, di controllo dell'assetto in condizioni di forti accelerazioni, frenate e in curva. Sarebbe tuttavia erroneo utilizzare questo tipo di approccio indipendentemente dagli altri metodi, bensì deve essere considerato uno strumento complementare che fornirà dei risultati che andranno mediati con le altre esigenze in un equilibrio che prediligerà alcuni aspetti su altri a seconda dell'utilizzo previsto.

Nella prima parte di questo capitolo si esporranno in un excursus quelle tematiche riguardanti il controllo delle vibrazioni ed il comfort che non vengono affrontate nel presente lavoro ma che sono parte fondamentale dello stato dell'arte dei sistemi di sospensione.

In una seconda parte invece si prenderanno in considerazione esempi di ottimizzazioni di meccanismi che pur non essendo applicati direttamente alle sospensioni presentano dei metodi che possono essere applicati o adattati per la soluzione del problema affrontato in questa tesi. Infine si citeranno alcuni articoli che hanno fornito altre informazioni utili alla realizzazione di questo lavoro.

## 2.1 ANALISI DINAMICA DEL VEICOLO

### Studio delle vibrazioni applicato ai veicoli

I disturbi che maggiormente rappresentano fonti di vibrazioni nei veicoli derivano dall'interazione con il manto stradale. Questi possono essere distinti in:

- Casi discreti, quali il superamento di un gradino o di una buca, usualmente trattati nel dominio temporale;
- Eventi casuali (*random*) legati alle irregolarità della superficie stradale e non meglio definibili. Questi vengono descritti nel dominio delle frequenze.

La caratteristica *random* del profilo stradale può essere espressa tramite uno spettro di potenza [10] come quello rappresentato in figura 2.1.

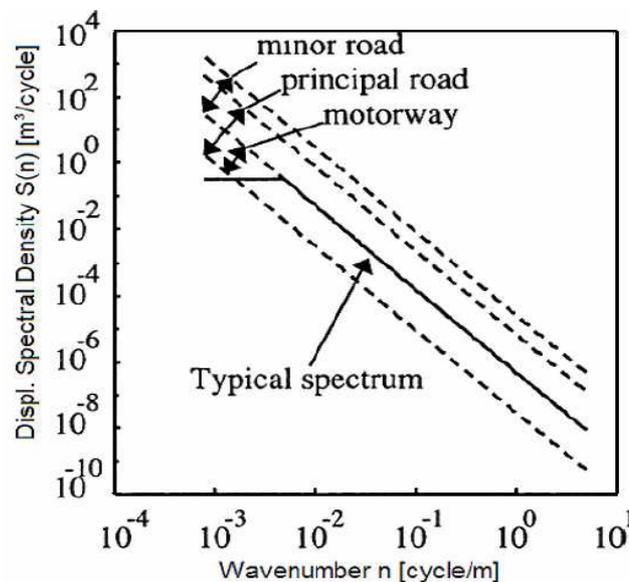


Figura 2.1. Densità spettrale rappresentata per diversi profili stradali [10]

Data la varietà delle caratteristiche dei disturbi è utile suddividere i campi di frequenze in tre intervalli [8, 9]:

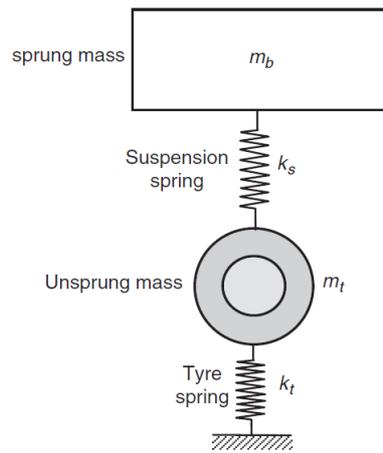
- Quasistatico:  $f < 0,25$  Hz
- Ride:  $0,25 < f < 20$  Hz
- Noise:  $f > 20$  Hz

Nel campo quasistatico le ondulazioni sono molto ridotte in ampiezza o estese su lunghezze elevate, quindi la dinamica del veicolo è poco sollecitata ed il comfort non è influenzato in maniera importante.

Nel campo ride le sollecitazioni derivano da buche o cunette e in generale dallo stato della sede stradale. Non è più possibile trascurare la dinamica. Per lo studio di questa condizione si può utilizzare un modello multibody [11] realizzando la scocca con elementi rigidi e le molle con elementi deformabili; gli pneumatici possono essere considerati rigidi al di sotto di 3 Hz. Questo campo di vibrazioni è molto importante per il comfort e dunque per l'interazione con l'uomo. Le vibrazioni verticali più importanti in questo ambito vanno da 1 a 8 Hz con un massimo di percezione a 6 Hz. Per le mani il campo critico è tra 6 e 12 Hz [8, 9].

Il campo noise dipende dalla rugosità stradale: non è più possibile un approccio con modelli multibody con complicazione notevole dei modelli. In questo campo permane l'interesse per l'interazione con l'uomo e in particolare le mani che sono più sensibili (caso classico: il manubrio delle moto). Ma fondamentalmente si studia per i fenomeni sonori [8, 9].

Soffermandosi sulle frequenze del campo ride i modelli sviluppati per lo studio sono numerosi. Uno di questi, sicuramente molto diffuso e versatile è il modello di mono-sospensione a 2 gradi di libertà utilizzato sia in campo automobilistico (modello di un quarto di veicolo) [8, 11] che motociclistico (modello dell'avantreno o del retrotreno) [2].



**Figura 2.2. Modello mono-sospensione a 2 g. d. l. [11]**

È caratterizzato da una massa sospesa  $m_b$  che rappresenta la parte di veicolo che grava su una sospensione, una massa “non sospesa”  $m_t$  che è vincolata al suolo da una molla di rigidità elevata  $k_t$  che rappresenta la rigidità dello pneumatico; la massa sospesa è sostenuta dalla molla di rigidità ridotta  $k_s$ .

Il modello viene utilizzato per la determinazione dei modi di vibrare, imponendo una sollecitazione periodica per studiarne la risposta o più in generale una forzante *random* per la determinazione della risposta in frequenza.

Si vuole ora esporre un esempio di come questo approccio dinamico allo studio delle sospensioni vada considerato come complementare ad uno studio cinematico che considera quindi gli effetti delle dimensioni dei bracci e delle posizioni dei punti di attacco.

In [12] viene presentato un progetto di motociclo elettrico per il quale il sistema di sospensioni è studiato con l'intento di ottimizzare la sicurezza di guida ed il comfort. A questi due requisiti viene associato un indice di prestazione, entrambi vengono considerati di eguale importanza e quindi stesso peso. L'ottimizzazione si basa sull'analisi dinamica del modello a 2



di spostamenti dei punti di attacco dei bracci delle sospensioni. Un'utilità simile è stata sviluppata nell'ambito di questa tesi.

## **2.2 METODI DI OTTIMIZZAZIONE DI MECCANISMI**

La sintesi dimensionale della sospensione posteriore può essere vista come una forma particolare di sintesi del meccanismo. Difatti tre delle quattro tipologie di sospensione trattate sono basate sul quadrilatero articolato e quindi i metodi sviluppati per l'ottimizzazione dei meccanismi possono essere adattati allo scopo particolare di questa tesi, fornendo importanti indicazioni sulle procedure utilizzabili e sulle problematiche da affrontare. La sintesi dimensionale del meccanismo basata sull'ottimizzazione si è notevolmente sviluppata dagli anni '60. Le maggiori difficoltà riscontrate riguardano la non-linearità dell'analisi di posizione e la necessità di gestire l'assemblabilità del meccanismo durante la procedura iterativa di ottimizzazione. Inizialmente veniva utilizzato il metodo dei minimi quadrati, seguito da molti altri come gli approcci con funzioni di penalità per i quali l'assemblabilità veniva quasi sempre gestita considerando le equazioni di congruenza del meccanismo delle equazioni di vincolo che le variabili di progetto dovevano soddisfare. Successivamente si propose di incorporare il criterio di assemblabilità nella funzione penalità. Più recentemente si sono sviluppati metodi basati sull'analisi di sensibilità per i quali la funzione penalità viene minimizzata tenendo conto delle equazioni di stato del meccanismo e dei vincoli posti ai parametri di progetto; il movimento del movente viene discretizzato e tecniche speciali permettono di calcolare le derivate delle equazioni di vincolo. Infine vanno citate le formulazioni stocastiche, che minimizzano anche l'errore meccanico oltre a

quello strutturale, per tener conto dei gli errori di produzione e assemblaggio che sono importanti nella realizzazione dei meccanismi [13]. Il metodo descritto in [13] è un metodo di sintesi ottima per meccanismi piani, con lo scopo di definire le dimensioni dei membri e le posizioni dei punti in modo da ottenere la relazione desiderata tra il moto del movente e quello del cedente oppure di creare un generatore di funzione. E' molto interessante perché per ottenere i suoi risultati effettua l'analisi di posizione che è un passo intermedio necessario a determinare la forza ridotta alla ruota scopo del presente lavoro. Inoltre propone un'efficace soluzione del problema di assemblabilità tramite l'utilizzo di una funzione penalità. Quest'ultima è realizzata in modo da tenere conto sia della funzione penalità strutturale, cioè legata al residuo dato dalla differenza tra la funzione del movimento desiderato e quella ottenuta ad una data iterazione, sia della funzione penalità di non assemblabilità, che dipende dal numero di posizioni per le quali il meccanismo non è assemblabile ed è amplificata moltiplicandola per un opportuno coefficiente. La funzione totale è data dalla somma delle due cosicché nel caso si pongano problemi di assemblabilità la funzione associata a questa condizione cresce aumentando la funzione totale. Poiché questa rappresenta l'errore il metodo così applicato spinge il solutore a riconoscere la condizione di non assemblabilità come errata e lo porta ad allontanarsi da essa. Questa procedura è stata presa in seria considerazione per il progetto perché si adatta perfettamente al solutore Matlab "fmincon", utilizzato fino alla definitiva scelta di passare a "lsqcurvefit". Quest'ultimo è realizzato per permettere il fitting di una curva ma opera chiedendo la funzione desiderata in input e fornendo la curva ottimizzata in uscita assieme ai parametri ottimi. Quindi calcola internamente l'errore e non permette di applicare la procedura descritta in [13]. Invece "fmincon" è un "tool" per la stima del

minimo di una funzione e quindi si sarebbe perfettamente adattato all'utilizzo di una funzione penalità che si sarebbe dovuto minimizzare e che si sarebbe potuta integrare con un controllo sull'assemblabilità così come descritto sopra. Purtroppo problemi di convergenza e di accuratezza della soluzione ne hanno impedito l'utilizzo in favore di "lsqcurvefit". Per controllare i problemi di assemblabilità ci si è comunque ispirati allo stesso principio: infatti al raggiungimento di condizioni di singolarità il valore di forza ridotta calcolato nella corrente iterazione viene alterato in modo da aumentarne la distanza dalla curva desiderata spingendo il solutore verso altre direzioni.

Riguardo alla funzione penalità in [15] è descritto un suo utilizzo interessante per meccanismi spaziali; infatti la funzione è definita come:

$$F_p = \sum_{i=1}^n c_1 (y_i - y_{di}) + \sum_{i=1}^n \frac{c_2}{c_3 (\cos^2 \tau_i + 0,0001)} + c_4 (n - n_A + 1)$$

dove il primo termine è la somma dei quadrati degli errori strutturali ( $y_i$  è il valore ottenuto  $y_{di}$  è quello desiderato) mentre il secondo tiene conto dell'angolo di pressione. Il terzo termine intende incrementare la funzione penalità nel caso in cui il meccanismo non sia assemblabile. I coefficienti  $c$  sono opportuni pesi. Il metodo utilizzato in questa tesi è simile poiché il controllo sull'assemblabilità usa lo stesso principio ma si basa direttamente sul coseno dell'angolo tra biella e bilanciere, facilmente riconducibile all'angolo di pressione.

Alcune utili indicazioni sulla tempistica di attivazione e sulla forma delle funzioni penalità realizzate per impedire al solutore di superare una condizione limite sono illustrate in [16]. Vengono definite funzioni penalità quadratiche (che impongono un costo quadratico alla variabile) e funzioni

di penalità bilaterali e unilaterali (che intervengono a partire da una certa “distanza” dal limite, distanza detta propriamente tolleranza) e vengono mostrate graficamente le forme delle funzioni al variare della tolleranza scelta. Nel presente lavoro si sono utilizzati controlli per l'assemblabilità e per altre caratteristiche minori (lunghezza minima del gruppo molla - ammortizzatore ecc) assimilabili a funzioni penalità di tipo unilaterale e bilaterale. La determinazione dei valori delle tolleranze è stata svolta per via empirica nel periodo di sperimentazione seguente alla realizzazione del programma.

Infine si vuole presentare l'articolo [17] che tratta l'ottimizzazione di una sospensione che, pur riguardando un'autovettura, è molto simile a quella sviluppata in questa tesi. Si tratta di un modello tridimensionale di sospensione a doppio trapezio, per la quale si mira a determinare i parametri di progetto, dati dalle lunghezze e dalle posizioni dei punti di attacco, in modo da soddisfare l'andamento di una serie di parametri caratteristici (quali il camber, la convergenza, il caster ecc), al variare della posizione della ruota. Dalle premesse si potrebbe pensare che il metodo implementato in [17] possa essere applicato addirittura in maniera più semplice al problema oggetto di questa tesi visto che in quest'ultimo vi è una sola funzione da soddisfare e per di più il modello è piano. In realtà la sospensione per autovetture di tipo a doppio trapezio nel suo campo di movimento realistico non incorre mai in problemi di assemblabilità e quindi la trattazione in [17] non considera in alcun modo questo argomento che invece nell'ambito di questa tesi è risultato uno dei punti più critici.



## **3. METODOLOGIA DI SINTESI DEL MECCANISMO**

### **3.1. GENERALITÀ**

Lo scopo del metodo sviluppato in questa tesi è determinare le dimensioni della sospensione in modo tale da approssimare al meglio la funzione forza ridotta alla ruota desiderata al variare della posizione della ruota. E' quindi un caso di sintesi del meccanismo. La geometria è rappresentata da parametri di progetto (rappresentanti lunghezze, angoli e coordinate di punti) in numero massimo di 10. La soluzione viene determinata tramite un procedimento iterativo ai minimi quadrati. L'arco di movimento della sospensione viene discretizzato in un numero finito di posizioni e le analisi di posizione e velocità necessarie a determinare la forza ridotta vengono effettuate per ognuna di esse.

I dati richiesti in ingresso sono:

- La tipologia di meccanismo: le configurazioni di sospensione attualmente implementabili sono il modello classico (denominato suspension classic), il modello con meccanismo bilanciere – telaio (frame rocker), il modello biella – telaio (frame connecting rod) e lo schema bilanciere – forcellone (rocker swingarm);
- La funzione forza ridotta alla ruota desiderata al variare della posizione della ruota ed il valore della forza di precarico ridotto;
- Il valore della rigidità della molla;
- I valori di primo tentativo dei parametri di progetto ed i loro limiti superiori ed inferiori ammessi; questi saranno salvati in tre vettori;

Il processo di ottimizzazione è preceduto da una pre-analisi necessaria perché le sintesi di meccanismi possono presentare problemi di assemblabilità. Se ciò avviene con i parametri di primo tentativo la pre-analisi cerca di cambiarli entro i limiti imposti dall'utente fino ad arrivare ad un meccanismo di primo tentativo assemblabile. Se ciò non risulta possibile il programma termina con un messaggio di errore.

Superata la fase di pre-analisi i parametri di progetto e gli altri valori di input vengono inviati al solutore che esegue l'ottimizzazione. Durante questa fase variando i parametri il sistema può presentare nuovamente problemi di assemblabilità. Per risolverli si interviene sulla funzione forza ridotta alterandola di modo da aumentare l'errore e spingere il solutore in altre direzioni. Con lo stesso principio vengono affrontati dei problemi secondari come verrà descritto in seguito.

Al termine della procedura i risultati vengono rappresentati in forma grafica, sia la geometria della sospensione che la forza ridotta ottimizzata confrontata con quella desiderata.

Infine si svolge un'analisi di sensibilità variando di una certa percentuale ognuno dei parametri di progetto, effettuando l'analisi di posizione e velocità e determinando una serie di nuove funzioni forza ridotta da confrontare con quella ottimizzata per valutare quanto la soluzione ottenuta sia stabile.

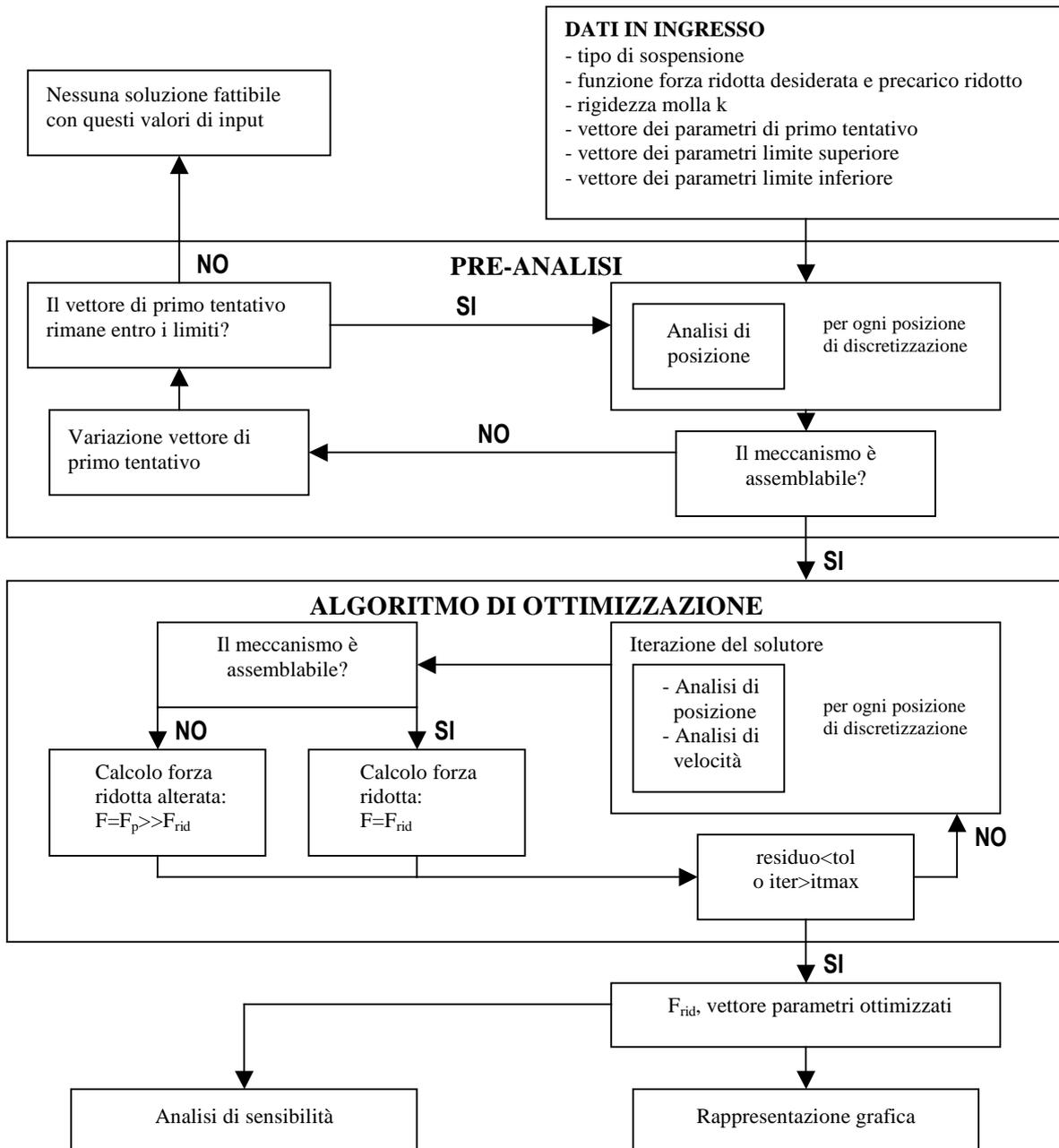


Figura 3.1. Schema a blocchi per il metodo di ottimizzazione

Il modello della sospensione si basa su un approccio di tipo multibody quindi i corpi vengono considerati indeformabili eccetto ovviamente la molla. Si sviluppa in due dimensioni spaziali nel piano longitudinale x-z. Il sistema di riferimento ha origine in corrispondenza del perno del forcellone. L'orientamento degli assi segue la convenzione SAE con l'asse z rivolto verso il basso e l'asse x in direzione di avanzamento del veicolo; la rotazione è definita positiva in senso antiorario.

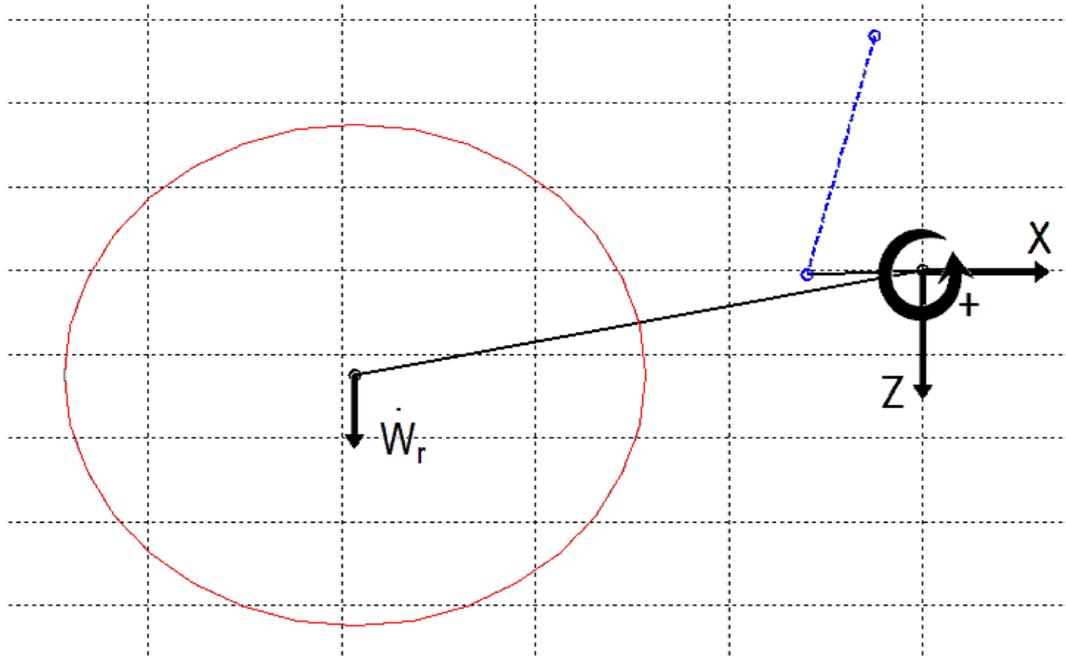


Figura 3.2. Sistema di riferimento utilizzato nel programma

### 3.2. IL SOLUTORE

Per la creazione del software si è fatto uso di Matlab, noto prodotto della Mathworks, che permette lo sviluppo di algoritmi, l'analisi e la rappresentazione grafica dei dati e il calcolo numerico. Matlab è un linguaggio di calcolo tecnico avanzato che dispone in ausilio di un ambiente interattivo, caratteristiche che consentono di risolvere problemi di calcolo tecnico più rapidamente rispetto ai linguaggi di programmazione tradizionali come C, C++ e Fortran. Estremamente utili in questo senso risultano i toolbox (raccolte di specifiche funzioni in MATLAB) che permettono di risolvere particolari classi di problemi.

Nel caso specifico dopo alcuni tentativi con le funzioni “fmincon”, “fminunc” e “lsqnonlin” si è optato per la funzione “lsqcurvefit”. E’ un solutore per il *curve fitting*, in particolare per il caso di funzioni non lineari, con un approccio ai minimi quadrati:

$$\min_x \frac{1}{2} \|F(x, xdata) - ydata\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (F(x, xdata_i) - ydata_i)^2$$

“xdata” è il vettore di ingressi che rappresenta lo spostamento angolare del forcellone e “ydata” rappresenta per punti la curva della forza ridotta desiderata. Rappresentandola in un piano cartesiano “xdata” rappresenterà le coordinate delle ascisse e “ydata” quelle delle ordinate, da ciò si deduce anche che i due vettori devono avere la stessa dimensione. Il solutore deve determinare i coefficienti “x” per i quali la funzione  $F(x, xdata)$  sia più possibile aderente ai valori forniti.

La funzione “fmincon” stima il minimo di una funzione non lineare a più variabili partendo da variabili di primo tentativo. Per renderla adatta al problema in questione è sufficiente considerare come funzione da minimizzare la funzione errore data dalla differenza tra la curva ottenuta ad una data iterazione e la curva desiderata, determinandola ad esempio implementando manualmente il metodo dei minimi quadrati. La peculiarità di questo “tool” è quella di permettere numerose regolazioni della tolleranza tra un’iterazione e la successiva, il massimo numero di iterazioni, controllo sul tipo di valore della funzione (reale o complesso, problema che sorge nel caso di singolarità del meccanismo), possibilità di scelta di preconditionatori, ma soprattutto possibilità di scelta dell’algoritmo di soluzione. Tuttavia pur presentando questi vantaggi il suo utilizzo almeno nella prima parte di sviluppo del programma è stato

difficoltoso e soprattutto i primi tentativi non sono stati soddisfacenti in quanto a convergenza alla soluzione e accuratezza della stessa.

Per cercare di capire la causa di questo comportamento si è fatto uso della funzione “fminunc”, analoga alla precedente ma che non prevede valori limite inferiore e superiore delle variabili: in questo modo si amplia il dominio delle soluzioni e aumenta la probabilità di convergenza ma si rischia di ottenere dei risultati non realizzabili praticamente. Questo solutore effettivamente dava risultati nettamente migliori ma la necessità di imporre dei limiti ai valori ha portato a cercare altre soluzioni.

Si è così passati ad utilizzare “lsqnonlin”, che consente di risolvere problemi di data fitting ai minimi quadrati. Pur non disponendo di tutte le opzioni dei precedenti solutori, si è mostrato più adatto all’applicazione del problema in questione fornendo subito riscontri positivi già con le impostazioni di default. Il “tool” in questione opera calcolando il minimo della somma dei quadrati degli singoli elementi del vettore soluzione. Per implementare il nostro problema questo vettore è costituito dalla differenza tra la funzione della forza ridotta desiderata e quella calcolata al variare della posizione angolare del forcellone.

Il programma così realizzato era funzionante ma si è deciso di utilizzare “lsqcurvefit”, che è poi una semplice variante di “lsqnonlin” perché il problema da affrontare era più facilmente assimilabile al fitting di una curva, mentre nel primo caso l’adattamento era più complicato.

### 3.3. DATI IN INGRESSO

Scelta la tipologia di sospensione e deciso l'andamento della forza ridotta desiderato, si procede fissando vari parametri. Per rendere pratico e veloce l'inserimento dei dati di input si è fatto uso di un foglio excel che presenta già dei valori preimpostati per i casi più comuni.

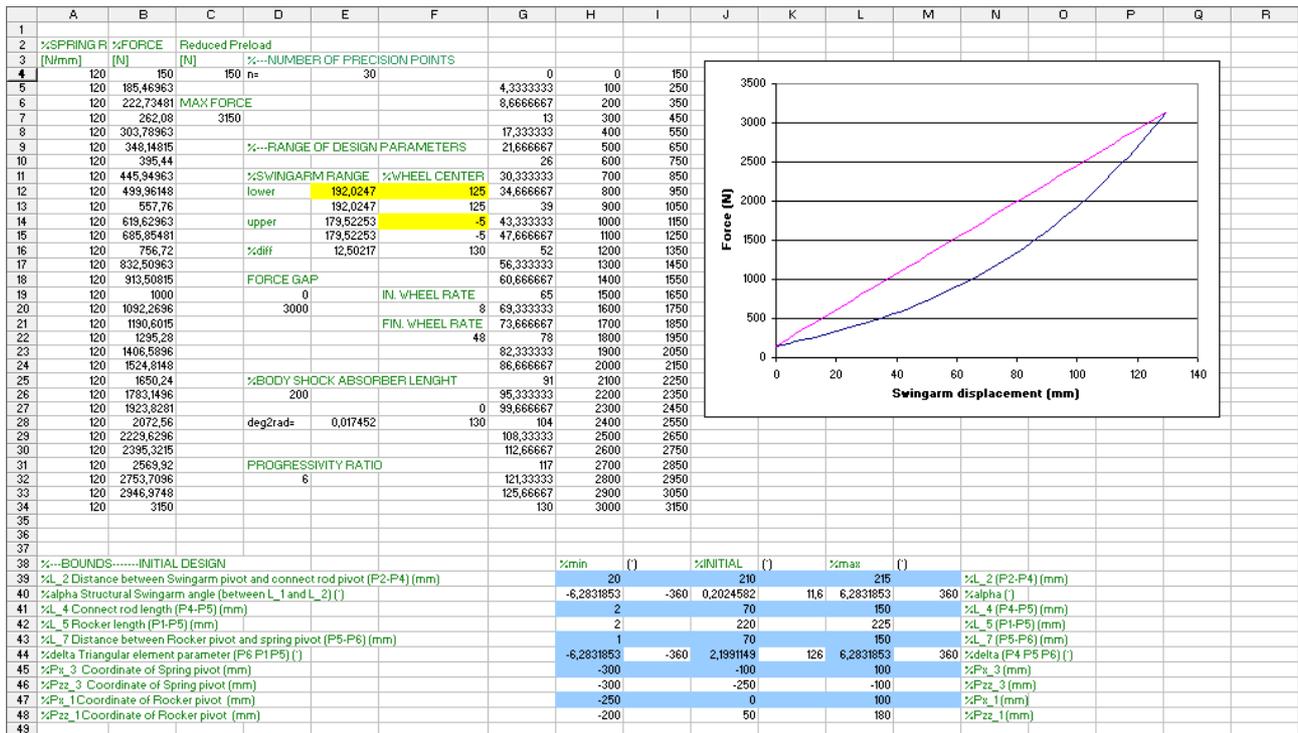


Figura 3.3. Foglio di controllo in excel

Il sistema di riferimento ha origine in corrispondenza del perno del forcellone, di conseguenza le varie distanze necessarie a definire la geometria del modello vanno considerate rispetto a questo punto. L'andamento della forza ridotta alla ruota al variare della posizione del forcellone viene discretizzato con un certo numero di valori delle ordinate: si avrà un incremento dell'accuratezza all'aumentare del numero di punti considerati con però un maggior costo computazionale (maggiore tempo di

elaborazione del calcolatore). Il valore di intervalli preimpostato di default è pari a 30. Allo stesso modo va inserito il coefficiente di rigidezza  $k$  della molla: usualmente esso mantiene un valore costante al variare della corsa ma l'utente può decidere di variarlo con la stessa discretizzazione della forza (ossia viene aggiornato nei calcoli ad ogni spostamento del forcellone). L'andamento della forza ridotta rispetto la compressione del gruppo molla-ammortizzatore viene rappresentato in un diagramma sempre nello stesso foglio excel in modo da mostrare graficamente l'andamento della curva e rendere la scelta più intuitiva ed immediata. Questa curva viene realizzata tramite una funzione spline cubica. E' uno strumento dell'analisi numerica utilizzato in molti campi applicativi per l'interpolazione e ha la caratteristica di essere di forma regolare grazie alla continuità delle prime due derivate. E' stata inserita come funzione macro nel foglio excel e nella versione presentata in [4] ha la peculiarità di accettare in input le condizioni al contorno (non è dunque una spline naturale) così da poter imporre le pendenze agli estremi che corrispondono alle rigidzze ridotte alla ruota nelle posizioni iniziale e finale del forcellone. L'utente dovrà impostare questi due valori potendo così realizzare curve lineari, progressive e regressive (o potenzialmente anche altri tipi di curva che però non sono significativi nella pratica). Definita la spline e il valore massimo della forza ridotta che si vuole ottenere questa viene discretizzata nel numero di intervalli definito in precedenza. Nel foglio excel viene calcolato il rapporto tra la rigidzza ridotta finale e quella iniziale che è preso come indicatore del grado di progressività (*progressivity ratio* o indice di progressività):

$$\text{Indice\_di\_progressività} = \frac{(K_w)_{finale}}{(K_w)_{iniziale}}$$

se questo è maggiore di uno si avrà un comportamento progressivo, se invece è minore di uno il comportamento sarà regressivo (si potrebbe definire parimenti un rapporto di regressività come il reciproco del rapporto di progressività). Per concludere la definizione della funzione desiderata di forza ridotta è necessario inserire il valore di precarico ridotto. Quest'ultimo è definibile come quella componente della forza ridotta dovuta al precarico della molla. Il valore di precarico ridotto viene chiesto come dato di input perché da esso dipende l'assetto statico della motocicletta e va dunque calcolato in funzione di questo aspetto. Nel quarto capitolo si esporrà un procedimento per la sua determinazione in un esempio pratico.

Si stabiliscono successivamente le posizioni angolari iniziale e finale del forcellone o in alternativa le posizioni iniziale e finale del perno ruota (facilmente intercorrelabili nota la lunghezza del forcellone; nel foglio excel i due dati sono collegati in modo che determinato l'uno si ottiene immediatamente anche l'altro). Si fissa il numero di punti di precisione (*precision points*) che determina in quanti tratti viene suddiviso lo spostamento del forcellone dalla posizione iniziale a quella finale: questo parametro dovrà essere uguale al numero di punti che definiscono la forza ridotta desiderata. Successivamente si stabilisce la lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore, parametro dal quale si ricava immediatamente anche la corsa massima essendo lo stelo al più della stessa lunghezza del corpo dell'ammortizzatore (la corsa massima viene calcolata moltiplicando la lunghezza minima per 0,8). La definizione di quest'ultimi valori non è indispensabile alla convergenza ma serve per guidare il solutore verso una soluzione fisicamente fattibile come verrà spiegato in seguito.

L'ultima operazione consiste nel compilare la tabella, in basso a destra del foglio di controllo excel, che contiene tutti i valori che caratterizzano geometricamente la sospensione, quindi le lunghezze dei vari componenti, gli angoli e le posizioni dei punti di attacco; la lunghezza del forcellone è fissata di default in 600 mm così come è bene ricordare che il suo perno d'attacco al telaio è preso come riferimento e pertanto in coordinate cartesiane è posizionato in (0;0). La tabella ha tre colonne: una per i valori minimi desiderati, una per i valori di primo tentativo e l'ultima per i valori massimi. Condizione necessaria per il corretto funzionamento, dato che la prima e l'ultima colonna fissano il campo di dimensioni entro il quale il programma può scegliere le misure di lunghezze, angoli e posizioni, è che i valori della colonna centrale siano maggiori di quelli della prima e minori dei valori della terza colonna.

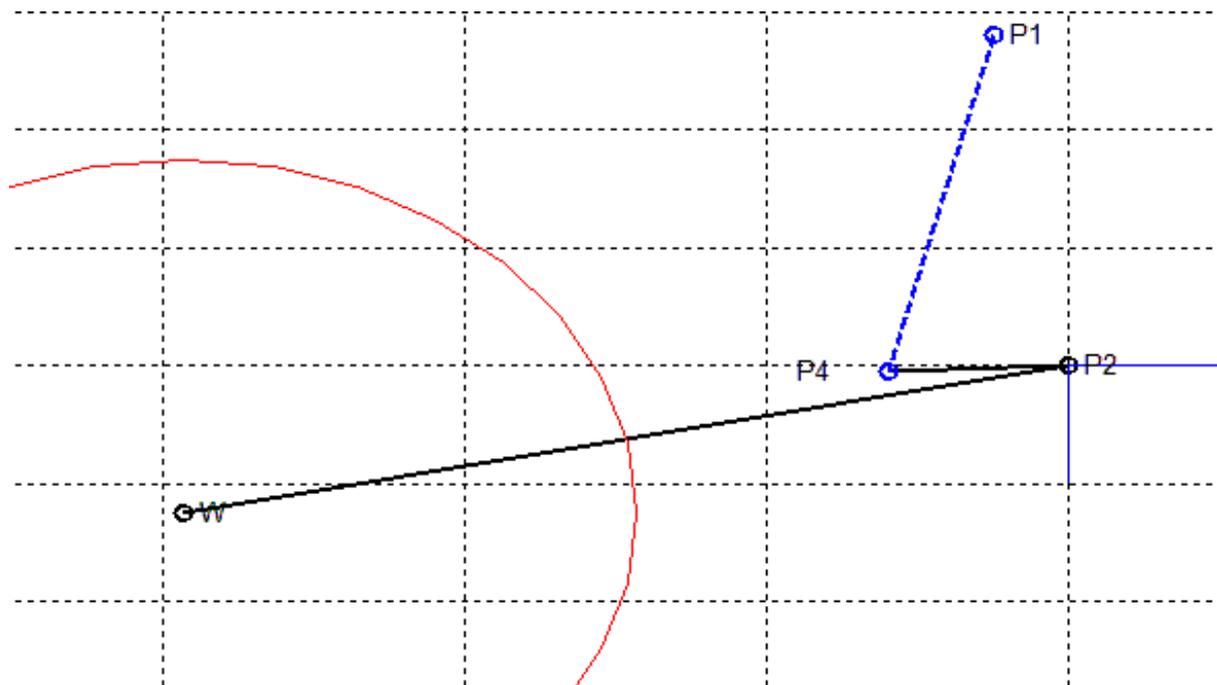


Figura 3.4. Sospensione di tipo classico come modellata nel programma

La tabella delle lunghezze degli elementi e dei punti di riferimento sarà diversa a seconda del meccanismo scelto: per la sospensione classica vi saranno 4 parametri di progetto:

- La distanza tra perno forcellone e attacco del gruppo molla-ammortizzatore al forcellone stesso ( $\overline{P2P4}$ , denominata  $L_2$ );
- L'angolo compreso tra il forcellone e  $L_2$  (W P2 P4, denominato  $\alpha$ ); secondo la convenzione definita di angolo positivo in senso antiorario per  $\alpha > 0$  l'angolo d'inclinazione di  $L_2$  sarà maggiore di quello del forcellone;
- La coordinata verticale dell'attacco del gruppo molla-ammortizzatore al telaio ( $P_{zz\_1}$ );
- La coordinata orizzontale dell'attacco del gruppo molla-ammortizzatore al telaio ( $P_{x\_1}$ ).

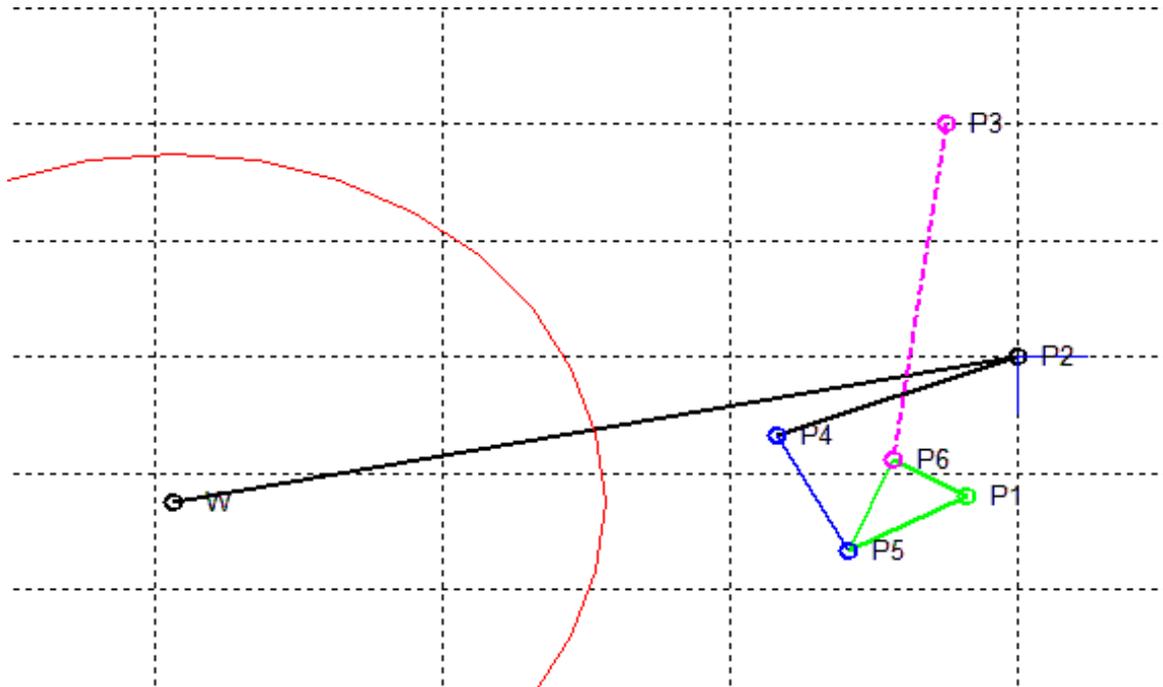


Figura 3.5. Sospensione tipo bilanciere – telaio come modellata nel programma

Per quanto riguarda il meccanismo bilanciere – telaio (Frame Rocker) i parametri di progetto da fissare sono 10:

- La distanza tra perno forcellone e biella ( $\overline{P2P4}$ , denominata  $L_2$ );
- L'angolo compreso tra il forcellone e  $L_2$  ( $W P2 P4$ , denominato  $\alpha$ );
- La lunghezza della biella ( $\overline{P4P5}$ , denominata  $L_4$ );
- La lunghezza del bilanciere ( $\overline{P1P5}$ , denominata  $L_5$ );
- La distanza tra perno bilanciere e attacco del gruppo molla-ammortizzatore al bilanciere stesso ( $\overline{P1P6}$ , denominata  $L_7$ );
- L'angolo compreso tra  $L_7$  e il bilanciere ( $P6 P1 P5$ , denominato  $\delta$ );
- La coordinata verticale dell'attacco del bilanciere al telaio ( $P_{zz\_1}$ );
- La coordinata orizzontale dell'attacco del bilanciere al telaio ( $P_{x\_1}$ );

- La coordinata verticale dell'attacco del gruppo molla-ammortizzatore al telaio (Pzz\_3);
- La coordinata orizzontale dell'attacco del gruppo molla-ammortizzatore al telaio (Px\_3).

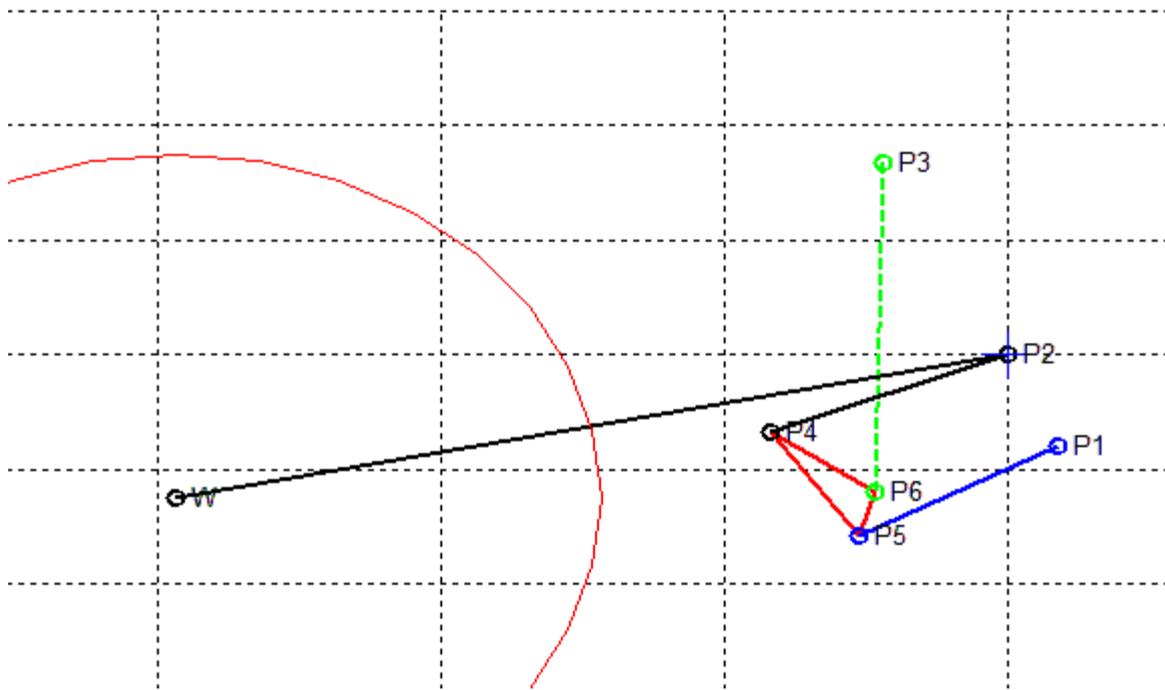


Figura 3.6. Sospensione tipo biella – telaio come modellata nel programma

La sospensione a biella – telaio (Frame Connecting Rod) richiede 10 parametri di progetto:

- La distanza tra perno forcellone e biella ( $\overline{P2P4}$ , denominata L\_2);
- L'angolo compreso tra il forcellone e L\_2 (W P2 P4, denominato alpha);
- La lunghezza della biella ( $\overline{P4P5}$ , denominata L\_4);
- La lunghezza del bilanciante ( $\overline{P1P5}$ , denominata L\_5);

- La distanza tra perno bilanciante – biella e attacco del gruppo molla-ammortizzatore alla biella ( $\overline{P5P6}$ , denominata  $L_7$ );
- L'angolo compreso tra  $L_7$  e il bilanciante ( $P4 P5 P6$ , denominato delta);
- La coordinata verticale dell'attacco del bilanciante al telaio ( $P_{zz\_1}$ );
- La coordinata orizzontale dell'attacco del bilanciante al telaio ( $P_{x\_1}$ ),
- La coordinata verticale dell'attacco del gruppo molla-ammortizzatore al telaio ( $P_{zz\_3}$ );
- La coordinata orizzontale dell'attacco del gruppo molla-ammortizzatore al telaio ( $P_{x\_3}$ ).

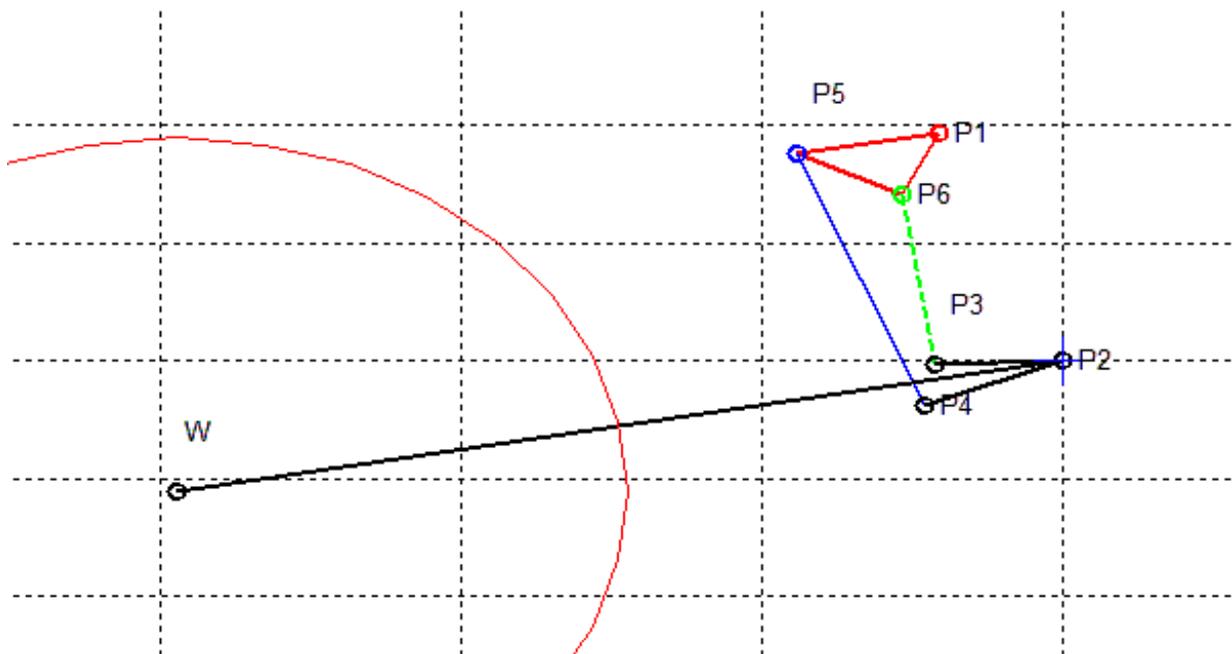


Figura 3.7. Sospensione tipo bilanciante – forcellone come modellata nel programma

Infine anche per il meccanismo bilanciante – forcellone (Rocker Swingarm) vi sono 10 parametri:

- La distanza tra perno forcellone e biella ( $\overline{P2P4}$ , denominata  $L_2$ );

- L'angolo compreso tra il forcellone e  $L_2$  (W P2 P4, denominato alpha);
- La lunghezza della biella ( $\overline{P4P5}$ , denominata  $L_4$ );
- La lunghezza del bilanciante ( $\overline{P1P5}$ , denominata  $L_5$ );
- La distanza tra perno bilanciante e attacco del gruppo molla-ammortizzatore al bilanciante stesso ( $\overline{P1P6}$ , denominata  $L_7$ );
- L'angolo compreso tra  $L_7$  e il bilanciante (P5 P1 P6, denominato delta);
- La distanza tra perno forcellone e attacco del gruppo molla-ammortizzatore al forcellone stesso ( $\overline{P2P3}$ , denominata  $L_9$ );
- L'angolo compreso tra  $L_9$  e il forcellone (W P2 P3, denominato epsilon);
- La coordinata verticale dell'attacco del bilanciante al telaio (Pzz\_1);
- La coordinata orizzontale dell'attacco del bilanciante al telaio (Px\_1),

### 3.4. STRUTTURA FONDAMENTALE DEL PROGRAMMA

Il file principale del programma è chiamato “Synthesis” e provvede a raccogliere i dati di input forniti tramite il foglio excel, richiamare i file necessari al processo di ottimizzazione e a visualizzare i valori in uscita dei parametri assegnati in ingresso con la tabella, il residuo che quantifica la distanza tra l’andamento della forza ridotta richiesta e quella ottenuta e altri dati inerenti il calcolo di ottimizzazione. Il file è diverso per ogni meccanismo preso in considerazione (così come tutti i file che vengono richiamati) dato che come si è potuto vedere ognuno ha un diverso tipo o numero di parametri. Il suo compito fondamentale è avviare il solutore, che esegue effettivamente l’ottimizzazione, tramite il comando:

$$[x, \text{resnorm}, \text{residual}, \text{exitflag}, \text{output}] = \text{lsqcurvefit}(\text{fun}, x0, \text{xdata}, \text{ydata}, \text{lb}, \text{ub}, \text{options})$$

- “x” è il vettore che raccoglie i parametri ottimizzati ottenuti al termine del processo iterativo;
- “resnorm” permette di visualizzare la radice quadrata della somma delle differenze elevate al quadrato tra funzione desiderata e ottenuta con i parametri “x” per ogni punto interpolante, così da poter verificare quantitativamente il risultato; “residual” è invece il solo residuo  $\text{fun}(x, \text{xdata}) - \text{ydata}$ ;
- “exitflag” è un indicatore sintetico della causa del termine del programma che utilizza indice numerico (ad es. un valore 1 per convergenza ad una soluzione finita, 2 per raggiunta tolleranza della soluzione “x” o 3 del residuo);

- “output” contiene svariate informazioni sull’andamento dell’ottimizzazione (numero di iterazioni, algoritmo utilizzato, parametri di efficienza dell’ottimizzazione);
- “fun” rappresenta la funzione da “fittare” che viene definita tramite un file esterno richiamato dal solutore. Ha una forma del tipo  $y = \text{fun}(x_0, x_{\text{data}})$  dove “y” rappresenta l’output di questa funzione che per “lsqcurvefit”, come già ricordato, è il valore dell’ordinata per una data posizione del forcellone e quindi è la discretizzazione della funzione forza ridotta (i vari valori vengono raccolti in un vettore “ydata”).
- “x0” è il vettore dei parametri di primo tentativo che il solutore fornisce in input alla prima iterazione. Quindi in realtà la definizione di “fun” così come esposta, tratta dal manuale Matlab, è imprecisa perché la funzione dipende da “x0” solo alla prima iterazione mentre successivamente dipende dal vettore “xn” dove n indica l’iterazione, ma dato che questo vettore viene gestito dal solutore senza che l’utente possa modificarlo non viene indicato nella definizione; al termine dell’ottimizzazione il vettore “xn” dell’ultima iterazione viene fornito in uscita da “lsqcurvefit” come vettore “x”)
- “xdata” è il vettore che stabilisce il passo dello spostamento del forcellone dalla posizione iniziale a quella finale: viene fissato all’inizio e non subisce variazioni durante l’elaborazione, inoltre si ricorda che deve avere la stessa dimensione di “ydata”, che è il vettore dei punti interpolanti la curva della forza ridotta desiderata come già descritto in precedenza.

- “lb” e “ub” sono rispettivamente i vettori dei limiti inferiori (lower bounds) e superiori (upper bounds); anche questi non subiscono modifiche e hanno la stessa dimensione dei vettori “x0” e “x”.
- La voce “options” raccoglie alcuni parametri aggiuntivi, già fissati di default, da settare a seconda delle proprie esigenze. Per questo tipo di problema si è utilizzato “MaxFunEvals” che pone un limite al numero di stime della funzione (utile nei casi in cui il programma non riesca a raggiungere la convergenza per evitare un blocco del sistema) o in alternativa “MaxIter” che limita il numero di iterazioni, e “TolFun” che stabilisce la tolleranza della funzione tra ultima e penultima iterazione. Va utilizzato quando si analizzano meccanismi che raggiungono condizioni molto vicine alla singolarità poiché in questi casi il solutore fatica parecchio a trovare la soluzione ed è spesso necessario abbassare il limite di questa tolleranza rispetto al valore di default.

La funzione da fittare è salvata in un file caratterizzato dal prefisso “f-“. Nella prima parte di codice si introducono i valori in ingresso che il file principale preleva dal foglio excel, poi si esegue l’analisi cinematica del meccanismo. Per ogni intervallo di variazione della posizione verticale del perno ruota, si effettua l’analisi di posizione, definendo le coordinate dei punti significativi (le coppie rotoidali di collegamento tra i membri del meccanismo): il risultato è la corsa della molla  $L$ , definita a partire dalla posizione iniziale (di massima estensione, ove è pari a zero). Per convenzione è definita positiva in allungamento e negativa in accorciamento.

Allo stesso modo viene condotta l’analisi di velocità. Lo scopo di quest’ultima è di calcolare il rapporto di velocità  $\tau_{L,W}$  definito come:

$$\tau_{L,W} = \frac{\dot{L}}{\dot{W}}$$

dove  $\dot{L}$  è la velocità di accorciamento della molla (la derivata di  $L$ , lunghezza della corsa della molla stessa a partire dalla posizione iniziale) e  $\dot{W}$  è la velocità del perno della ruota. Dato che in questa trattazione il  $\tau_{L,W}$  è l'unico rapporto di velocità considerato verrà d'ora in avanti indicato semplicemente come  $\tau$ . Per definirlo con l'analisi di velocità si fissa la velocità di riferimento  $\dot{W}$  e dato che si tratta di un rapporto non è importante il valore in modulo di  $\dot{W}$  che viene quindi imposto pari ad uno per semplicità. La forza ridotta si ottiene come :

$$F_{rid} = (kL + \text{precarico}_{molla}) \frac{\dot{L}}{\dot{W}}$$

Dove  $k$  è il coefficiente di rigidità fornito dall'utente. Dato che  $\dot{L}$  è, al pari di  $L$ , definita per convenzione positiva in allungamento e negativa in accorciamento e poiché  $\dot{W}$  è negativa per lo spostamento verso l'alto dalla posizione iniziale a sospensione estesa (in accordo con il sistema di riferimento SAE adottato), il rapporto di velocità  $\tau$  è positivo. Di conseguenza la forza ridotta è negativa ma non essendoci necessità pratica di considerare un'inversione del suo segno per semplicità si assume positiva nel foglio di controllo (invertita poi internamente al programma), nei risultati e nei grafici. Per tener conto del precarico della molla si deve relazionarlo al precarico ridotto richiesto come dato in input dal foglio excel. Nella posizione iniziale dopo l'analisi di velocità si ricava il  $\tau$  relativo a quella posizione del forcellone. Da questo il programma calcola il precarico della molla secondo la formula:

$$P_{molla} [N] = P_{rid} [N] / \tau$$

il valore di precarico della molla viene fissato e diventa il parametro con il quale si calcola il precarico ridotto per il resto della curva e quindi per l'intera iterazione. Se all'iterazione successiva avviene una variazione della geometria tale da variare il  $\tau$ , il precarico della molla viene aggiornato. Dato che nella formula della forza ridotta il precarico dell'elemento elastico è sommato al termine  $kL$  dove  $L$  però è negativa in accorciamento, questo deve essere reso intrinsecamente negativo affinché i due contributi si sommino; l'inversione di segno avviene per il precarico ridotto all'interno del programma nel momento di raccogliere i dati dal foglio di controllo. Si è scelta questa procedura piuttosto che modificare la formula perché così a meno di convenzioni di segno quest'ultima rappresenta la realtà fisica del fenomeno (normalmente il precarico della molla è sempre concorde alla forza che si sviluppa per la compressione).

I calcoli necessari a determinare  $F_{rid}$  vengono ripetuti per ogni passo dalla posizione di massima estensione a quella di massimo accorciamento e i valori calcolati al variare della posizione vengono salvati come elementi di vettori.

Al termine dell'ottimizzazione il programma presenta nella finestra di comando di Matlab i valori ottimizzati dei parametri di progetto, il valore massimo dell'errore in modulo e l'errore RMS (*root mean square*, o errore quadratico, calcolato come la radice della somma degli errori elevati al quadrato), la forza di precarico e il corrispondente valore di compressione in millimetri da imporre alla molla.

Effettuata l'ottimizzazione viene mostrato a video un riepilogo dei risultati ottenuti. Dal file principale viene anche avviato un file esterno, contraddistinto da un prefisso "p-", per l'analisi del meccanismo dati i

parametri ottenuti in uscita al termine dell'ottimizzazione; le informazioni vengono elaborate e visualizzate in forma grafica presentando:

- Quattro schizzi della sospensione posteriore comprendenti meccanismo, forcellone e ruota nella posizione iniziale (massima estensione) e in quella finale per i parametri di primo tentativo e per quelli ottimizzati;

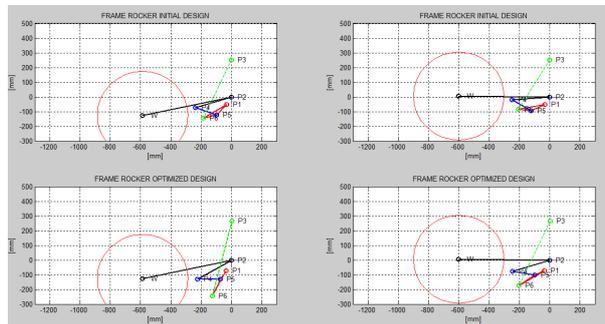


Figura 3.8. Esempio del grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

- Un diagramma che rappresenta la forza ridotta al variare dello spostamento verticale; nello stesso modo se ne rappresenta anche l'andamento desiderato e quello che si avrebbe utilizzando i parametri di primo tentativo;

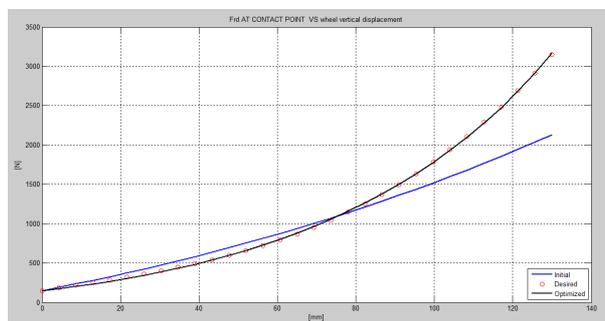


Figura 3.9. Esempio di grafico della forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

- Un grafico della corsa del gruppo molla-ammortizzatore (ordinata) al variare della posizione verticale della ruota (in ascissa);

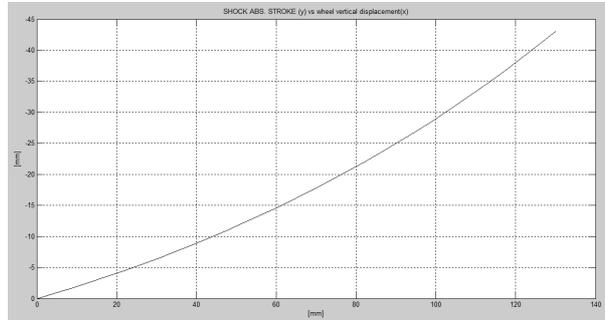


Figura 3.10. Corsa del gruppo molla-ammortizzatore (ordinate) su corsa ruota (ascisse)

- La rappresentazione del rapporto di velocità  $\tau$  tra la velocità di accorciamento del gruppo molla-ammortizzatore e la velocità verticale del perno ruota al variare dello spostamento verticale del perno ruota.

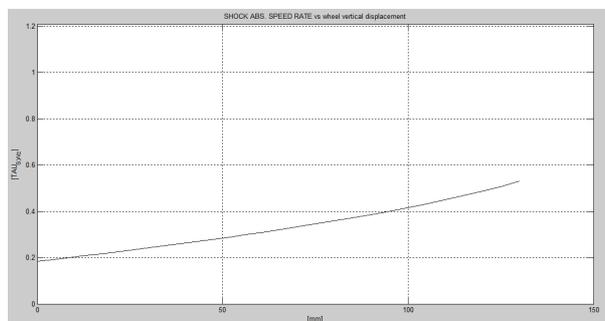


Figura 3.11. Andamento del rapporto di velocità (ordinate) su corsa ruota (ascisse)

Le figure proposte permettono di valutare più chiaramente i risultati ottenuti. Ad esempio trattandosi di un processo iterativo vi sarà sempre un errore che l'utilizzo del grafico permette di valutare con più semplicità e visione d'insieme, rispetto all'errore massimo o RMS che sono solo due valori numerici; l'errore potrebbe concentrarsi maggiormente in un ristretto campo di spostamento, del resto ciò potrebbe essere più o meno grave a

seconda della posizione in cui si verifica e rispetto a quelle che sono le esigenze specifiche dell'utente.

Oltre a queste informazioni il programma può caricare i grafici delle posizioni e le velocità orizzontale e verticale della ruota al variare della rotazione del forcellone. Questi dati sono indipendenti dal meccanismo, legati solo alla lunghezza del forcellone e alla sua posizione angolare iniziale e finale e sono solitamente fissati a priori. Si lascia all'utente la decisione di visualizzarli; sono stati inclusi per dare una maggiore generalità al programma e permettere di sperimentare anche con questi parametri.

Il programma così realizzato è già pronto per risolvere la maggior parte dei problemi, ma non riesce a gestire situazioni in cui il meccanismo raggiunge la condizione di singolarità; si è visto nel primo capitolo come tale condizione sia incompatibile con il movimento e sia causa di problemi di assemblabilità. Tuttavia il solutore di matlab continua a fornire dati in output senza evidenziare questo problema, ottenendo risultati non fisicamente validi. Ciò si manifesta nel caso in cui la singolarità si presenti durante l'ottimizzazione, dove può impedire la convergenza ad una soluzione o fornire una soluzione non realistica, così come è capitato in alcuni casi per i quali il solutore prevedeva la variazione di una lunghezza di un componente (ad esempio una biella) che invece deve rimanere costante durante il movimento. Nel caso in cui già i parametri di primo tentativo portino ad un meccanismo che nel dato campo di movimento dà problemi di assemblabilità, la convergenza diviene estremamente improbabile, poiché se il solutore è costretto a partire da tali dati il metodo iterativo pur applicato correttamente non potrà convergere ad una soluzione valida. Quindi per quanto si fosse inizialmente confidato nella capacità del

solutore di riuscire a gestire autonomamente questo problema alla fine si è dovuti intervenire per risolverlo manualmente.

Per risolvere il problema dell'assemblabilità del meccanismo di primo tentativo (realizzato cioè con i parametri di progetto di primo tentativo introdotti dall'utente nella tabella del foglio di controllo) viene utilizzato un file di preanalisi distinguibile dal prefisso "i-" seguito dal nome del meccanismo. Quest'ultimo viene richiamato dal file principale dopo la fase di acquisizione dei dati e prima dell'avvio del solutore, quindi non fa parte del processo di ottimizzazione bensì è un componente aggiunto per risolvere un particolare tipo di situazione tra quelle affrontabili da questo programma. Questo file viene definito come funzione e quindi attivato dal file principale dal comando  $[y] = \text{fun}(x)$ , dove come noto  $x$  è la coordinata generica indipendente (input) ed  $y$  è la coordinata dipendente (output). In questo caso la prima è data dai parametri inseriti dall'utente mentre la seconda è un vettore che contiene gli stessi parametri corretti per evitare la non assemblabilità. E' bene ricordare che la variazione dei parametri di primo tentativo, così come la loro scelta in generale, non impedisce il raggiungimento della convergenza, almeno da un punto di vista teorico. Il codice in questo file esegue l'analisi del meccanismo descrivendo l'andamento della posizione dei punti significativi che delineano la geometria del meccanismo dati i parametri di input. Se nel campo di movimento si presentano condizioni di non assemblabilità provvede a variare automaticamente uno o più parametri con un processo iterativo fino ad eliminare il problema. I valori dei parametri rimarranno comunque entro i valori limite imposti dall'utente, quindi nel caso in cui durante quest'iterazione un parametro raggiunga un limite, superiore o inferiore, senza che sia stata ripristinata l'assemblabilità il programma segnalerà l'errore e dovrà terminare dato che l'unico modo per risolvere il problema è

cambiare i valori limite. Durante questo processo vengono mostrati a video diversi messaggi di diagnostica in modo da guidare l'utente nella loro scelta nel caso sia necessario correggerli.

Per quanto riguarda i problemi legati al raggiungimento di una condizione di singolarità ad ottimizzazione già avviata si è dovuti intervenire sulla funzione chiamata dal solutore "lsqcurvefit". Con il solutore "fmincon" si era deciso di utilizzare una funzione penalità per aumentare l'errore nel caso si fossero presentati problemi come la singolarità. Si trattava di considerare nella funzione errore, data per ogni punto di controllo dalla differenza tra funzione desiderata e funzione ottenuta, un ulteriore termine opportunamente pesato che considerasse l'instaurarsi di una condizione di criticità incrementando l'errore e guidando così il processo di iterazione. Con l'utilizzo di "lsqcurvefit" non è possibile utilizzare questo sistema e si ricorre ad un artificio per ottenere lo stesso effetto: quando il meccanismo si avvicina alla condizione di singolarità oltre un valore soglia la funzione forza ridotta ottenuta "y" viene modificata discostandola dalla soluzione desiderata in modo da incrementare artificialmente l'errore e spingere il solutore ad allontanarsi da quella condizione. Va sottolineata la sostanziale differenza dei due approcci, legata alle diverse caratteristiche dei solutori disponibili pur essendo basati sullo stesso ragionamento: infatti il primo agisce direttamente sulla funzione errore quindi il suo peso all'interno della funzione è chiaramente definibile, nel secondo caso invece l'intervento sulla funzione errore è indiretto: il solutore "lsqcurvefit" richiede il valore della funzione e calcola internamente l'errore per cui si può solo modificare il valore della funzione ottenuta per aumentarlo. Il secondo caso richiede un intervento sicuramente più difficile e delicato; per questo aspetto sembrava quasi necessario ritornare ad utilizzare nuovamente "fmincon", ma con diverse prove e tentativi si è giunti a definire un sistema piuttosto

affidabile. L'intervento di modifica della funzione forza ridotta avviene poco prima del raggiungimento della condizione critica così da poter operare con progressività; anticipando l'intervento si aumentano le possibilità di evitare il problema ma si riduce il campo di dimensioni effettivamente sfruttabile, con conseguenze variabili a seconda dei parametri (se si lavora sempre molto distanti dalle condizioni critiche sarà del tutto ininfluenza, se invece si è costretti ad avvicinarsi a configurazioni singolari ad esempio perché si sta cercando di ridurre la dimensione del meccanismo o perché si cerca di ottenere un particolare andamento della curva, rischia di non convergere alla soluzione). Per cercare di migliorarne il funzionamento si sono anche provate diverse funzioni di ingresso (lineare, quadratica). La funzione che interviene è quindi costituita da un indicatore di avvicinamento alla condizione di singolarità che è stato definito utilizzando il coseno dell'angolo compreso tra biella e manovella. Come si può verificare studiando il quadrilatero articolato le sue condizioni limite sono i valori  $+1$  e  $-1$ . Quindi il corpo del controllo è dato dalla differenza tra il coseno e un valore leggermente inferiore a uno se si giunge alla prima condizione singolare (il coseno è prossimo a 1), oppure dalla somma se si giunge alla seconda (il coseno è prossimo a -1); il tutto è poi elevato ad un esponente scelto per via sperimentale. Così si ottiene un valore che partendo da una condizione accettabile aumenta all'avvicinarsi della criticità. A questo si moltiplica un opportuno coefficiente che inizialmente era il valore di forza massima, risultato poco efficace, e che è stato successivamente moltiplicato a sua volta per un altro coefficiente il cui valore (1000) è stato definito a seguito delle numerose prove che hanno caratterizzato la fase di messa a punto e studio del programma.

Un'altra problematica riscontrata nelle fasi di test è che il gruppo molla-ammortizzatore possa subire allungamento anche se la ruota trasla verso

l'alto: ciò può accadere sia nella fase preliminare per particolari dimensioni scelte dall'utente, sia durante il processo di ottimizzazione, poiché la procedura di analisi della posizione e della velocità è discretizzata e ciò non esclude dunque la possibilità da un'iterazione alla successiva di oltrepassare il punto critico della singolarità. In tale condizione avviene il cambio di segno della velocità di accorciamento del gruppo molla-ammortizzatore  $\dot{L}$  ma anche la corsa dello stesso ( $L$ ) cambia di segno dando ancora un prodotto positivo ed il meccanismo comincia ad operare con la molla in trazione piuttosto che in compressione, senza che per il programma vi sia alcun problema (infatti la forza mantiene lo stesso segno). E' stato dunque pensato un controllo sul segno della velocità di accorciamento  $\dot{L}$  sia nel file di preanalisi (distinguibile dal prefisso "i-") che nel file funzione (caratterizzato dal prefisso "f-"). In entrambi i casi si accerta che il valore massimo di  $\dot{L}$  non sia maggiore di zero; se ciò si verifica nella preanalisi si modificano i parametri in modo da riportarsi ad una condizione normale; purtroppo è difficile comprendere a priori il legame tra questo problema e i parametri da inserire e si è dovuto agire in maniera drastica riportando il sistema ad una condizione nota per la quale il problema non si presenta. I valori di primo tentativo teoricamente non condizionano il risultato finale ma ciò è vero solo se la differenza tra questi e il risultato finale è sufficientemente piccola (condizione fortemente dipendente dal caso specifico); in più se si erano scelti certi valori di primo tentativo questi sicuramente rientravano nei limiti fissati dall'utente, mentre la configurazione imposta dal programma potrebbe non soddisfare questa condizione e impedire l'ottimizzazione. Ne consegue dunque che l'intervento in questo caso non è del tutto automatizzabile ed è richiesta una certa sensibilità e attenzione dell'utente che dovrà decidere come

modificare i dati in ingresso per rimediare. D'altra parte la probabilità di incorrere in tale problema è piuttosto bassa e l'applicazione del controllo la riduce ulteriormente. Se il problema si presenta durante l'ottimizzazione si attiva un controllo simile a quello preparato per il problema di non assemblabilità solo con il valore massimo di  $\dot{L}$  come riferimento.

Infine restano da gestire le caratteristiche del gruppo molla-ammortizzatore quali la lunghezza minima e massima: al riguardo l'unico parametro chiesto all'utente nel foglio di controllo è la lunghezza del corpo dell'ammortizzatore dal quale si ricavano la lunghezza minima e massima del segmento che modella la molla ( $\overline{P3P6}$  nei tre casi con meccanismo). Il principio di funzionamento è lo stesso descritto per gli altri controlli e in questo caso è determinato dal valore di lunghezza minima e di corsa massima (stabilita come l'80% della lunghezza minima).

### **3.5. ANALISI DI SENSIBILITA'**

Terminata l'ottimizzazione si può avviare una post-analisi di sensibilità del meccanismo ottenuto. Questa permette di confrontare l'andamento della forza ridotta con una serie di nuove curve ottenute variando tutti i parametri (lunghezze dei membri, angoli costruttivi e posizioni dei punti di attacco) di un valore fissato al 5% per le lunghezze, sia in accorciamento che in allungamento, 5° per gli angoli e 5 mm per i punti in tutte e quattro le direzioni. Lo scopo è quello di valutare la solidità della soluzione dell'ottimizzazione, che è tanto più elevata quanto più la serie di curve elaborate da questo processo ricopia la curva originale. I parametri vengono variati uno alla volta per ogni grafico così è possibile isolare l'influenza di ognuno sulla soluzione. Un primo vantaggio è quello di stabilire il grado di

precisione necessario nella costruzione del forcellone reale. Nei casi estremi in cui si sfrutti il meccanismo vicino a condizioni critiche (singolarità) con molta probabilità questa sarà raggiunta durante questa fase di post-analisi e la forza ridotta avrà un picco notevole; teoricamente continuando lo spostamento col meccanismo in singolarità la forza tende ad infinito se gli elementi sono indeformabili come in questo modello multibody. Il valore massimo del picco non ha dunque significato fisico e può essere trascurato, il dato di cui tenere conto è la presenza del picco in sé che indica che il meccanismo ottimizzato è molto vicino alla condizione critica. Per quantificare questa condizione si utilizza l'angolo di trasmissione come definito nel capitolo 1 (a  $90^\circ$  si ha la massima trasmissibilità, a  $0^\circ$  si ha singolarità). In casi meno estremi si evidenziano comunque i parametri più delicati, che per piccole variazioni modificano significativamente il risultato, per i quali sarà necessaria maggiore attenzione in fase di produzione. Un secondo utilizzo di quest'applicazione si presenta in fase di progettazione quando oltre alla curva della forza ridotta, che ovviamente è solo uno dei parametri di cui tenere conto, si debbano rispettare altri vincoli quali la posizione dell'impianto di scarico, del gruppo motore-cambio o vi sia la volontà di contenere le dimensioni del sistema: in questo caso svolgendo un'ottimizzazione iniziale e la successiva analisi di sensibilità si avrà indicazione dei parametri poco influenti sulla curva della forza ridotta che potranno essere variati con maggiore libertà per soddisfare queste necessità.

L'analisi della sensibilità del meccanismo viene avviata su richiesta dell'utente tramite apposito messaggio, sempre in ambiente Matlab, al termine dell'ottimizzazione. In caso affermativo viene richiamato il file "tolerance" che calcola le curve di forza ridotta per i vari casi di variazione dei parametri di progetto e li mostra a video.



## **4. ESEMPI DI OTTIMIZZAZIONE PER I QUATTRO TIPI DI SOSPENSIONE**

In questo capitolo verranno presentate alcune applicazioni del programma per ogni meccanismo preso in considerazione, con curve della forza ridotta lineare, progressiva e regressiva. In particolare per questi ultimi due casi si determineranno i valori limite di progressività e regressività definendo così il campo di variabilità ottenibile per ogni meccanismo così da confrontarli e verificarne la versatilità. Per un equo raffronto sono stati imposti gli stessi valori di escursione della sospensione, ossia 130 mm (valore comune per moto stradali di tipo sportivo), partendo anche dallo stesso angolo di riferimento tra forcellone e sistema di riferimento ( $192^\circ$ ); anche il limite di lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore è uguale per tutti i casi (200 mm) così come il valore di forza ridotta massima. Per il calcolo di quest'ultimo fattore si deve considerare il tipo di motocicletta perché il campo di valori possibili nella pratica è piuttosto ampio: si può passare dalle moto da gran premio di piccola cilindrata e peso in ordine di marcia inferiore ai 100 kg a veicoli da turismo che eccedono i 250 kg; inoltre anche il peso del pilota può variare con ampio margine e la stessa scelta della rigidità della molla influisce notevolmente. Risulta pertanto necessario fissare dei valori di riferimento: si è deciso di considerare come tipologia di motocicletta la supersportiva 1000 cc con dunque un peso approssimabile in 200 kg circa. Il peso del pilota è invece fissato a 75 kg. La distribuzione dei pesi è 50/50 quindi si suppone che metà della massa totale gravi sulla ruota posteriore (lo stato dell'arte attuale di questo tipo di motociclette presenta sia casi con distribuzione del peso leggermente spostata all'anteriore sia al posteriore per cui questa scelta appare più che

ragionevole pur nella sua semplicità). Per il valore della rigidità della molla si è fatto riferimento a Thede e Parks [6], che descrivono anche la procedura usuale per determinare l'opportuno affondamento statico con pilota in sella (*sag*) pari ad un terzo della corsa del gruppo molla-ammortizzatore, regolando il precarico in funzione della rigidità stessa. I valori di rigidità delle molle posteriori per questa categoria vanno da 100 a 120 N/mm (le supersportive 600 cc sono attorno a 90 N/mm, con un peso della moto solitamente inferiore di circa 10 kg, valori abbastanza vicini ai precedenti che permettono di estendere i seguenti esempi anche a questa tipologia con un'approssimazione accettabile). Supponendo di avere un valore ragionevole di corsa del gruppo molla-ammortizzatore pari a 63 mm e imponendo che rapporto di velocità tra punto di attacco del gruppo molla-ammortizzatore e perno ruota  $\tau$  sia costante come nel caso lineare oppure considerando il  $\tau$  medio se questo varia con la posizione, ricordando che l'escursione della ruota è di 130 mm si ha:

$$\tau_{lin} = 63/130 = 0,48$$

e la forza massima ridotta alla ruota scegliendo una molla da 100 N/mm è:

$$F_{ridotta\ no\ precarico} = 100 * 63 * 0,48 = 3024\ N$$

La forza così ottenuta non è ancora la massima perché si deve aggiungere il precarico la cui entità dipende dal *sag* voluto. Con i valori stabiliti in precedenza si definisce l'equilibrio tra la forza di 21 mm di corsa del gruppo molla-ammortizzatore (cioè un terzo di 63 mm) con rigidità di 100 N/mm più il precarico e metà della massa sospesa (la massa non sospesa posteriore è fissata in 20 kg), dal quale si ricava la forza di precarico:

$$\frac{Massa\_sospesa}{2} * 9,81 = \left( K_{amm} * \frac{corsa\_max}{3} + Precarico \right) * \tau_{lin}$$

$$Precarico [N] = [(200+75)/2-20]/0,48*9,81-100*21 \approx 2401-2100 = 301 N$$

$$Precarico [mm] = 301/100 \approx 3 mm$$

Tramite il  $\tau$  si trova la componente di forza alla ruota legata al precarico ed è possibile stabilire il valore di forza massima ridotta:

$$F_{max\ rid} = 3024 + 301 * 0,48 = 3168 N$$

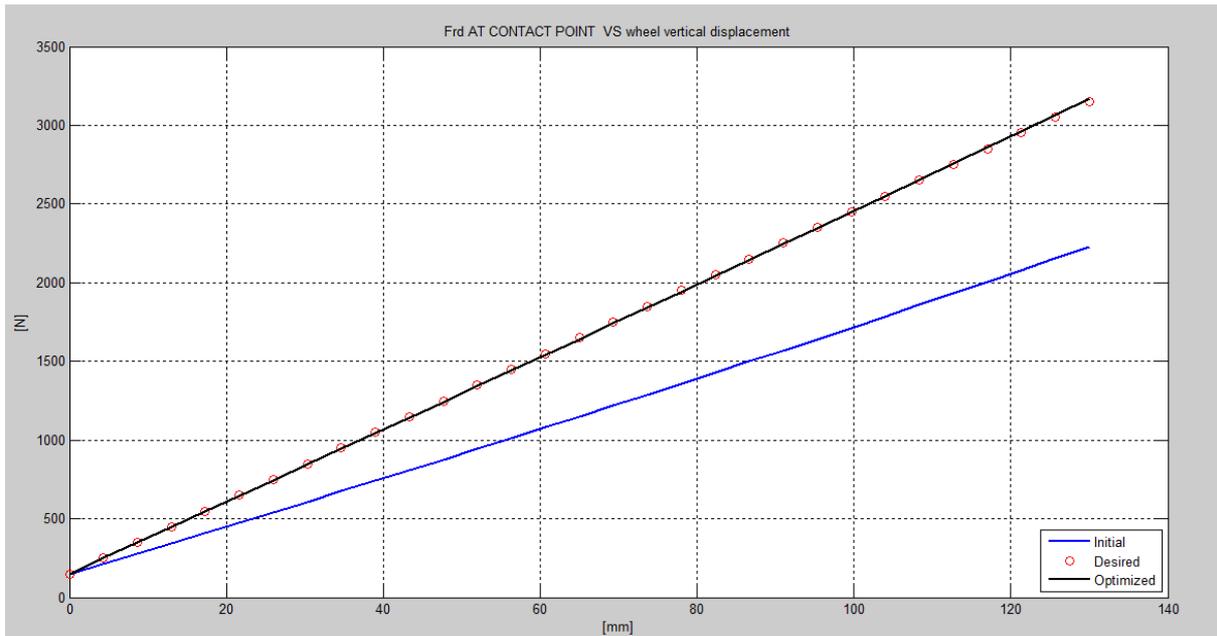
Si è deciso di prendere come valore massimo per tutti gli esempi  $F_{max\ rid} = 3150 N$  con un precarico ridotto di 150 N. Nel foglio excel di input viene richiesto quest'ultimo valore senza eseguire il calcolo appena esposto in automatico: il motivo è che come descritto poc'anzi questi dati sono indicativi e il metodo stesso di calcolo del *sag* è da intendersi come punto di partenza ragionevole per il setup della sospensione che andrà adattato sperimentalmente per ogni situazione specifica.

## 4.1. SOSPENSIONE DI TIPO CLASSICO

### Caso lineare

In questo esempio l'obiettivo di ottenere un andamento lineare della forza ridotta viene raggiunto con facilità ed è anche possibile utilizzare un valore di rigidità molto basso (in questo caso 50 N/mm) con lo schema, molto usato in passato, che prevede due ammortizzatori vincolati al forcellone in prossimità del perno ruota (in questo caso il valore della rigidità va diviso tra le due molle dei due ammortizzatori che avranno ciascuna una rigidità

di 25 N/mm). L'ottimizzazione ottiene la curva della forza ridotta desiderata con un margine di errore esiguo. La curva di primo tentativo ha già una forma e un valore massimo abbastanza vicini, del resto i parametri in gioco sono solo quattro e questo tipo di sospensione mostra di prediligere un andamento lineare.



**Figura 4.1. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo**

Al punto di ascissa zero il valore della curva di primo tentativo corrisponde sempre a quello desiderato perché è pari al valore di precarico ridotto impostato nel foglio excel. Da questo il programma calcola il precarico della molla nella posizione iniziale della sospensione secondo la formula:

$$P_{molla} [N] = P_{rid} [N] / \tau$$

il valore di precarico del gruppo molla-ammortizzatore viene fissato e diventa il parametro con il quale si calcola il precarico ridotto per il resto della curva. Se all'iterazione successiva avviene una variazione della geometria tale da variare il  $\tau$ , il precarico della molla viene aggiornato. Questa procedura è comune a tutti i e quattro i meccanismi.

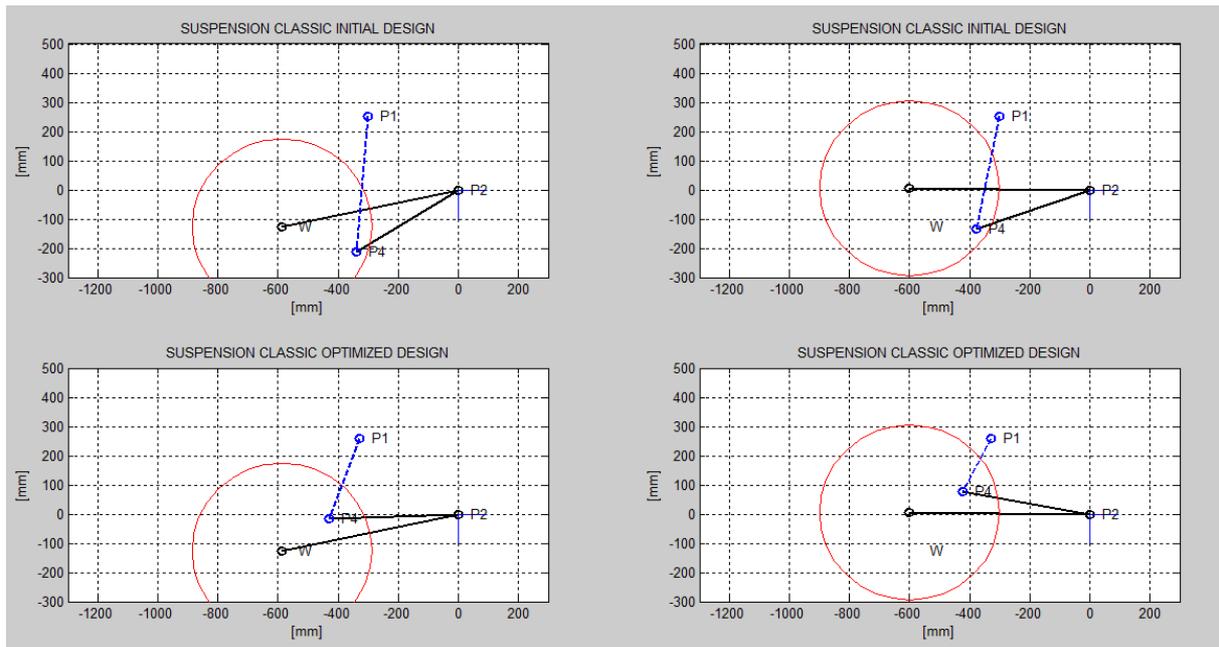
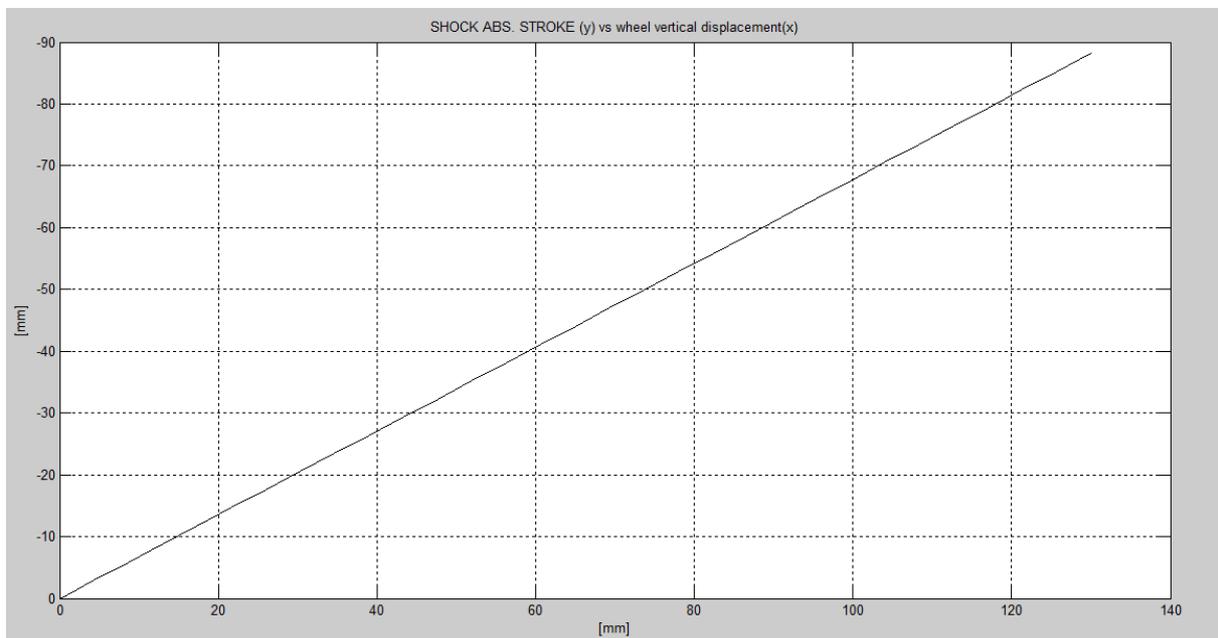


Figura 4.2. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

La seconda figura mostra graficamente la differenza tra setup iniziale ed ottimizzato dal quale si può apprezzare il cambiamento della geometria che in questo caso non è grande visto che come primo tentativo sono state scelte delle dimensioni ragionevoli ispirate alle soluzioni comuni nelle moto d'epoca.

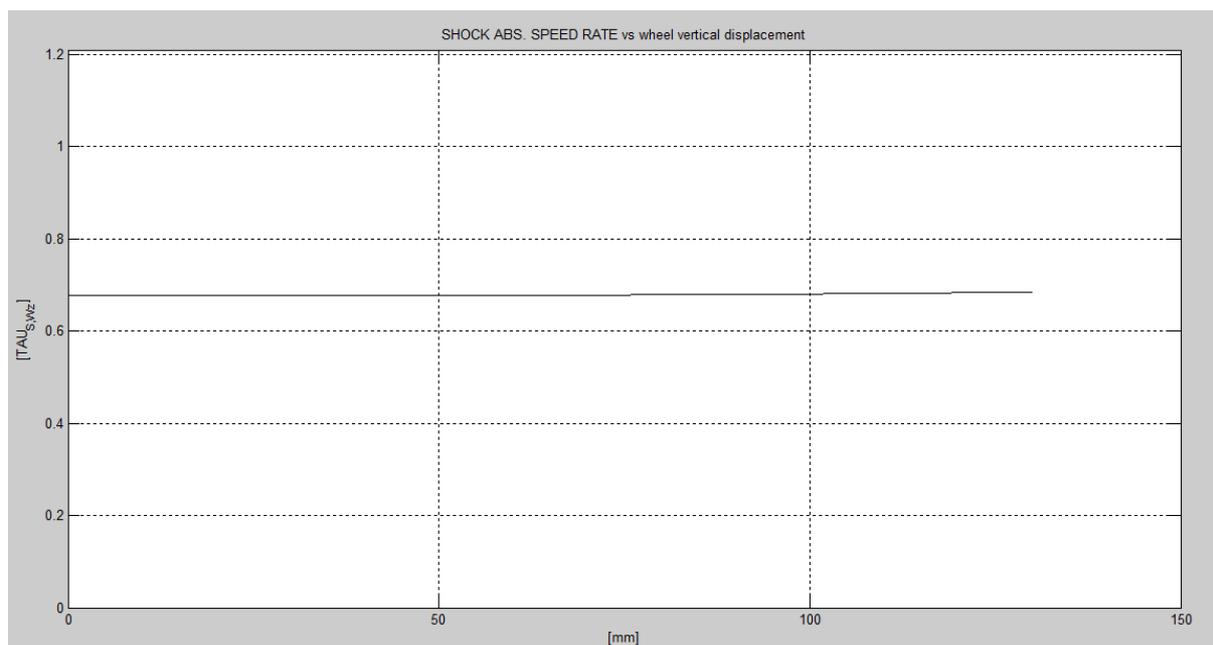
Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	100	600	400	429,9
Angolo W_P2_P4	-90	90	20	-9,9
P1_x	-500	150	-300	-328,3
P1_z	-300	-240	-250	-258,1
Errore massimo [N]	20,6		Errore RMS [N]	7,5

La tabella mostra i parametri da ottimizzare con i valori limite inferiore e superiore imposti e i parametri di primo tentativo e quelli ottimizzati (con i quali sono realizzati gli schemi della seconda figura). Più sotto compare anche indicazione sull'errore RMS di tutti i punti di controllo e sull'errore massimo (inteso in modulo). Quest'ultimo è pari a 20,6 N, che è lo 0,006% del valore massimo di 3150 N. Risulta quindi molto piccolo ed è infatti difficilmente distinguibile in figura 4.1.



**Figura 4.3. Corsa del gruppo molla-ammortizzatore (ordinate) su corsa ruota (ascisse)**

L'andamento della corsa del gruppo molla-ammortizzatore, funzione della corsa della ruota, è molto vicino a quello della forza ridotta; sono direttamente proporzionali se si sceglie un coefficiente  $k$  di rigidità della molla costante, a meno del rapporto di velocità che in questo caso è di valore pressoché costante pari a 0,68, come si può notare nell'immagine successiva.



**Figura 4.4. Andamento del rapporto di velocità (ordinate) su corsa ruota (ascisse)**

Si ricordi a proposito che il rapporto di velocità è definito come velocità di accorciamento del gruppo molla-ammortizzatore diviso velocità del perno ruota e poiché quest'ultima è fissata a  $-1$  (movimento verso l'alto nel rispetto della convenzione adottata; è pari a uno per semplicità dato che per determinare la forza serve il rapporto di velocità e non la velocità assoluta),  $\tau$  è pari alla velocità di accorciamento del gruppo molla-ammortizzatore (a meno del segno) che è la derivata della corsa (spostamento). Ciò significa che il  $\tau$  rappresenta la pendenza della funzione della figura 4.3. In quest'ultima la scala dei valori delle ordinate è negativa per la convenzione scelta di considerare negativo l'accorciamento del gruppo molla-ammortizzatore. La sua corsa è piuttosto elevata, circa 90 mm, con una lunghezza massima di 292 mm e una minima di 204 mm. Il precarico da imporre alla molla è di circa 4,5 mm.

L'analisi di sensibilità mostra che il meccanismo ottimizzato è stabile poiché la variazione dell'andamento della forza è esigua per tutti i parametri.

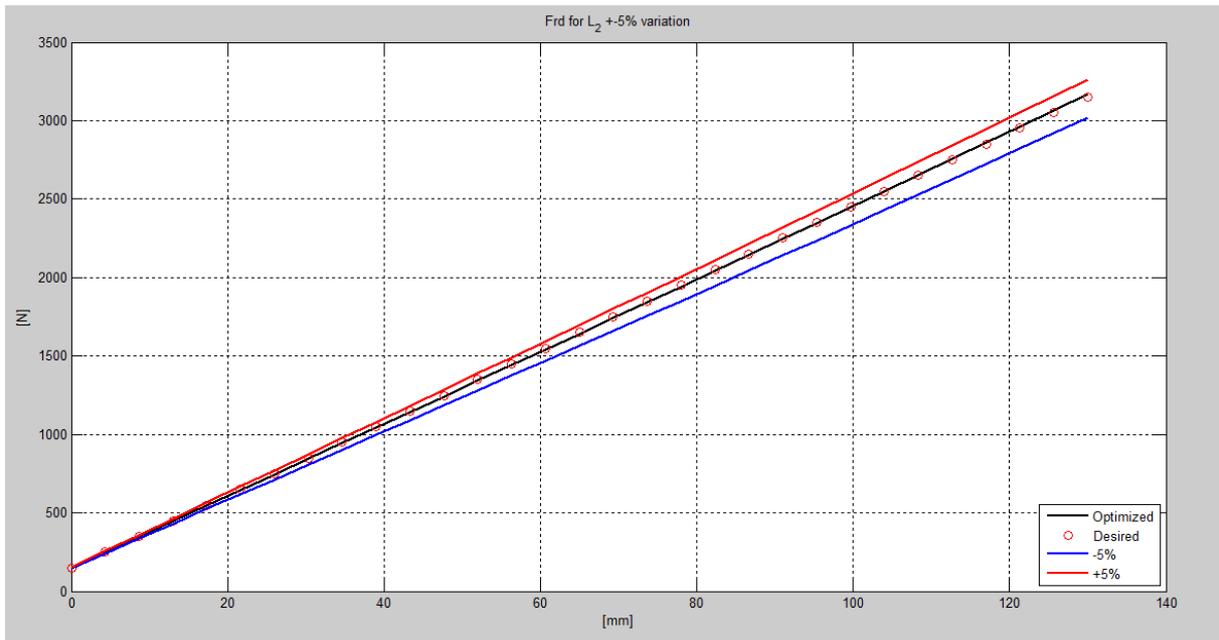


Figura 4.5. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $P_2P_4$

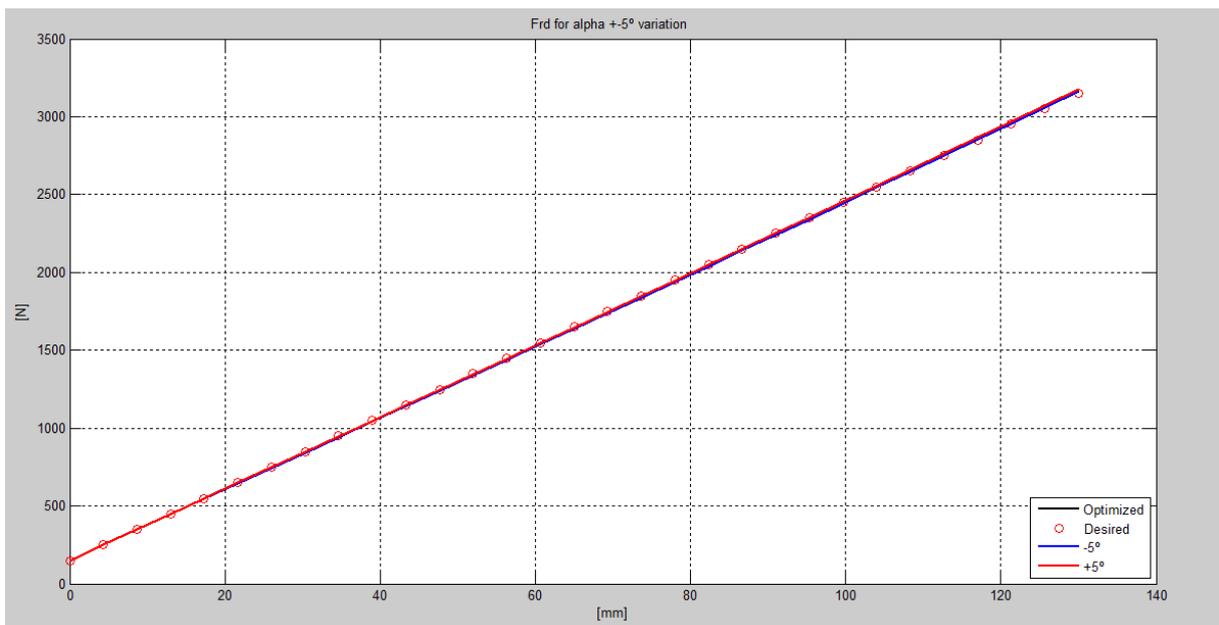
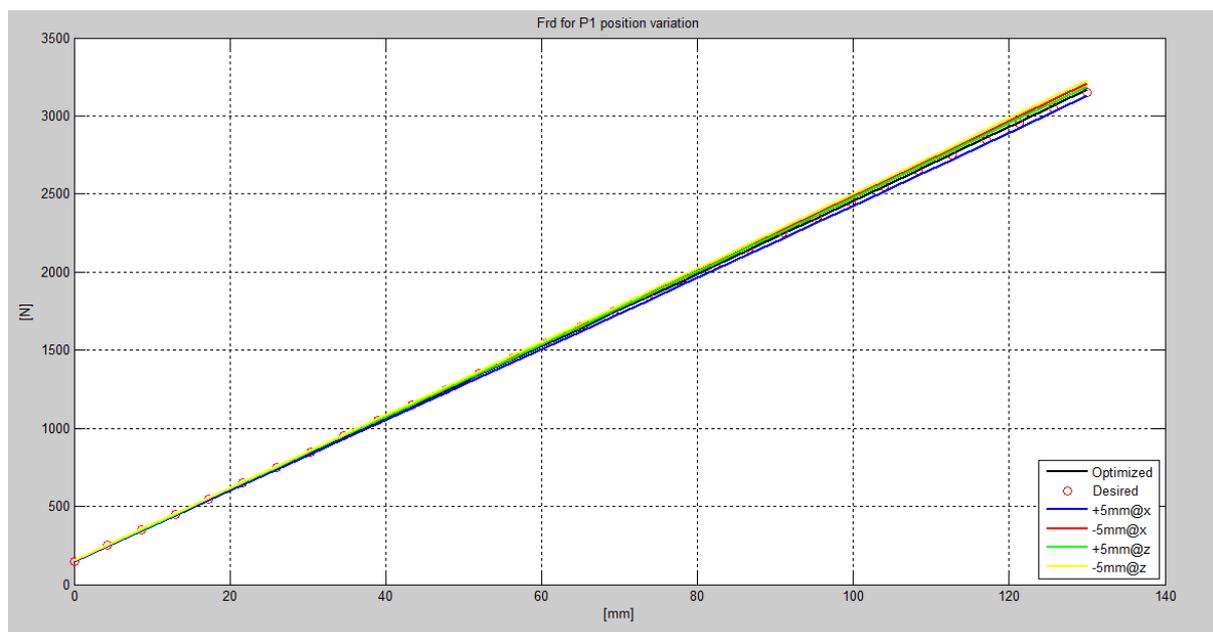


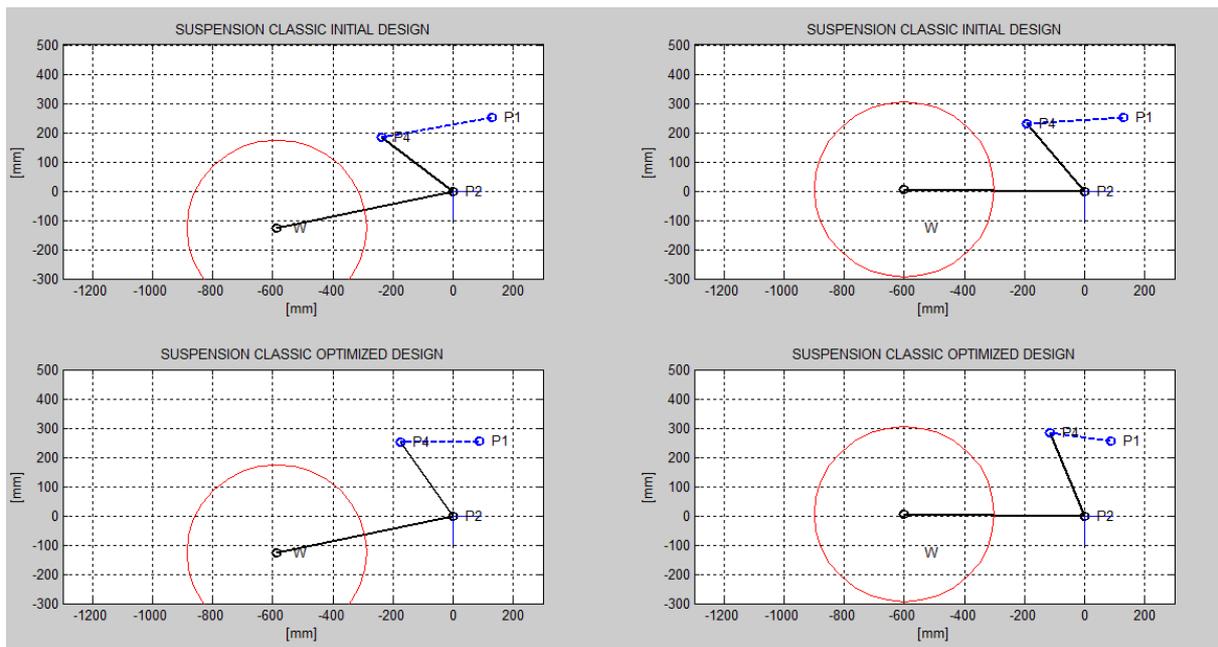
Figura 4.6. Analisi di sensibilità: variazione dell'angolo  $W_{P_2P_4}$



**Figura 4.7. Analisi di sensibilità: variazione della posizione del punto P1 secondo x e z**

### Caso lineare – Cantilever

Il seguente esempio considera ancora una forza alla ruota funzione lineare dello spostamento, ma con uno schema di tipo cantilever (a bracci uniti e monoammortizzatore), che rappresenta un'evoluzione del precedente sistema per il quale i limiti d'ingombro richiedono che il montaggio dell'elemento elastico avvenga in prossimità del forcellone. Ciò ha richiesto l'utilizzo di una molla molto più rigida (il valore finale utilizzato è di 120 N/mm). E' una soluzione ancora utilizzata per la sua semplicità e perché risulta economica oltre che per la leggerezza, per cui si tratta di una tipologia di sospensione interessante ed ancora attuale.



**Figura 4.8. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale**

La prima figura mostra la geometria della soluzione iniziale ed ottimizzata. Tra i due schemi non c'è una marcata differenza ma ciò era necessario per ottenere questa tipologia di sospensione: infatti la funzione della forza ridotta dipende da moti parametri ed è non lineare (non è certo una funzione di primo grado con un'unica soluzione) e quindi gli stessi risultati possono essere raggiunti con geometrie diverse e l'ottimizzazione convergerà a quella tra queste più "vicina" alla condizione iniziale, perciò per ottenere un cantilever in questo caso si è dovuto già abbozzarlo con i parametri di primo tentativo che il programma ha provveduto a correggere per ottenere il valore di forza massima desiderato (l'andamento si presentava già lineare al primo tentativo), mantenendo le dimensioni entro i limiti imposti dall'utente nel foglio di controllo in excel.

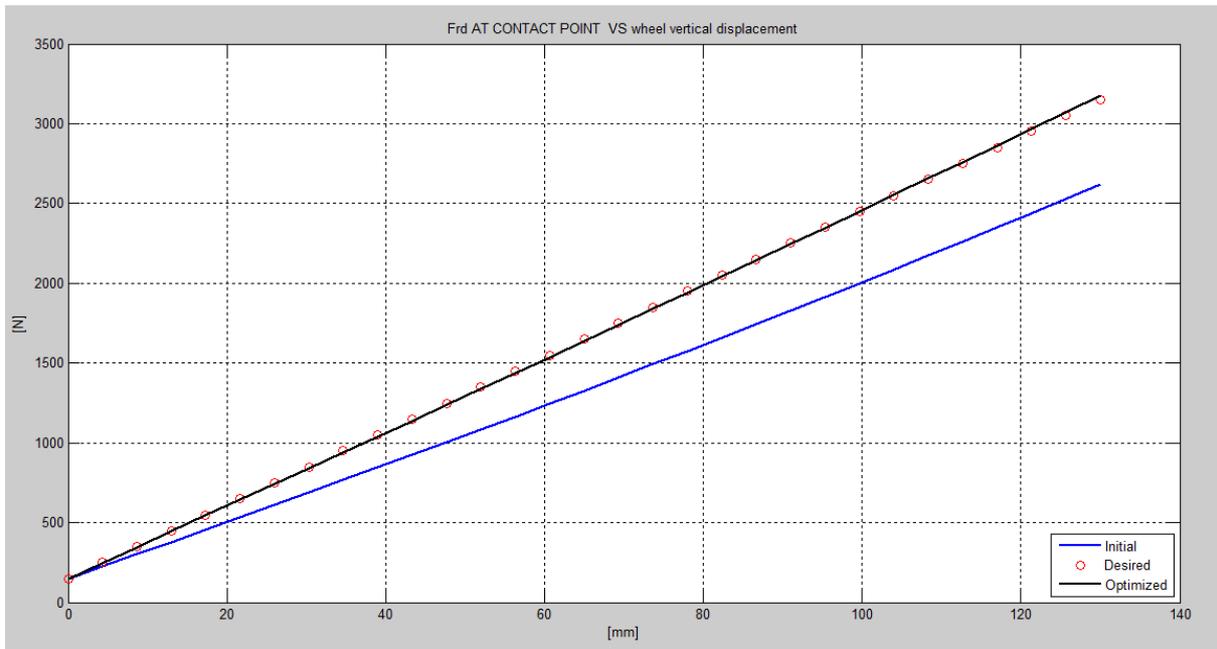
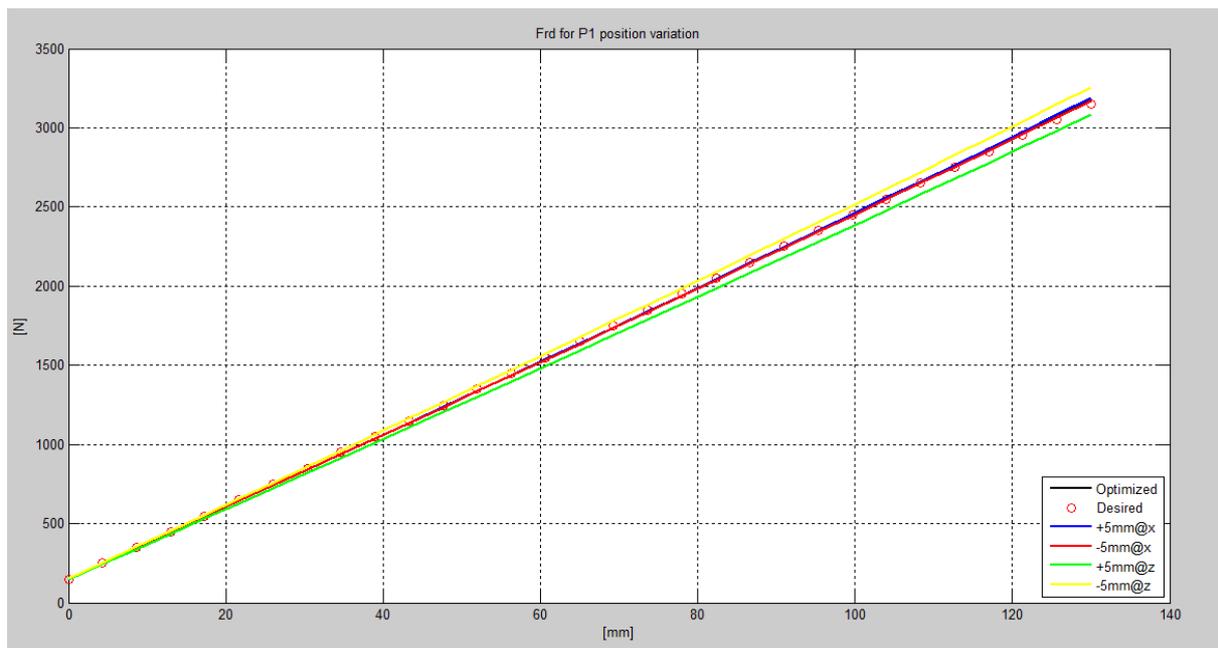


Figura 4.9. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	100	350	300	306,8
Angolo W_P2_P4	-180	180	-50	-67,6
P1_z	-500	150	130	-256,1
P1_x	-300	-240	-250	87,5
Errore massimo [N]	29,2		Errore RMS [N]	11,5

La tabella mostra che gli intervalli tra i valori limite dei parametri sono rimasti piuttosto ampi e che per ottenere il cantilever il parametro più importante da cambiare rispetto al caso precedente è stato l'angolo W\_P2\_P4. L'errore è leggermente maggiore rispetto al primo esempio ma pur sempre esiguo (l'errore massimo è lo 0,009% del valore di forza a fine

corsa) e viene dunque riportato a titolo informativo perché già dalla figura 4.9 risulta impercettibile. Il  $\tau$  è praticamente costante e di valore 0,43 e la corsa del gruppo molla-ammortizzatore in funzione dello spostamento della ruota è lineare e proporzionale alla forza ridotta per il motivo spiegato in precedenza. La corsa massima è di 57 mm con lunghezze massima e minima del gruppo molla-ammortizzatore rispettivamente 261 mm e 204 mm. Il precarico da applicare alla molla è di 3 mm. E' interessante confrontare questi risultati con quelli del caso precedente: nel primo esempio sia il  $\tau$  che la corsa massima sono maggiori e permettono così l'utilizzo di una molla meno rigida. Questo comportamento era già stato presentato nell'introduzione e si è manifestato nella pratica in questi due esempi: lo spostamento del punto di applicazione del gruppo molla-ammortizzatore lungo il forcellone ha effetto proporzionale sulla forza alla ruota (dimezzando il braccio di leva questa si dimezza) e il suo avvicinamento al perno del forcellone a parità di escursione della ruota riduce la corsa disponibile per il gruppo molla-ammortizzatore; per entrambi gli effetti si deve compensare incrementando la rigidità della molla. Questo aspetto risulterà molto importante anche nei prossimi casi. Anche in questo esempio l'analisi di sensibilità mostra variazioni poco importanti dei grafici delle forze per tutti i parametri. Si riporta quello relativo alla posizione del punto di attacco della molla al telaio (P1):



**Figura 4.10. Analisi di sensibilità: variazione della posizione del punto P1 secondo x e z**

Osservandolo con maggiore attenzione si nota che la variazione lungo l'asse z (verticale) influisce maggiormente ma sempre con un effetto esiguo. Questa informazione potrebbe essere utile in ambito di progettazione con questa geometria nel caso vi fossero problemi per l'ingombro del gruppo molla-ammortizzatore che data la sua posizione orizzontale e molto avanzata potrebbe interferire con il blocco motore-cambio o con il serbatoio; infatti indica che è possibile spostare il punto di attacco senza variare in modo importante la forza ridotta e che quindi vi è un buon margine per ridimensionare il sistema ferma restando la lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore.

### **Caso progressivo**

Per ottenere un andamento progressivo si deve realizzare la geometria in modo che il braccio di leva effettivo vari in maniera significativa, producendo di conseguenza una variazione importante del rapporto di velocità e quindi di pendenza della funzione accorciamento del gruppo molla-ammortizzatore al variare della posizione della ruota nel moto di compressione della sospensione. Questo effetto è massimizzato in prossimità della posizione di intersezione dell'asse della molla con il perno del forcellone. Per ottenere la massima progressività si dovrebbe partire con il braccio di leva effettivo pressoché nullo (quindi prossimi all'intersezione) arrivando alla posizione di massima compressione con un braccio di leva perpendicolare alla molla così da ottenere un rapporto elevato tra il  $\tau$  compresso e quello esteso. L'ottenimento di questo schema risulta impossibile per limiti di ingombro a meno di non utilizzare molle con rigidezze estremamente elevate che permettano di accorciare il braccio  $\overline{P2P4}$ , accoppiate ad ammortizzatori molto corti sempre per limitare l'ingombro; la rigidezza necessaria supererebbe comunque di gran lunga i valori utilizzati nella pratica tecnica.

Sulla base di queste considerazioni si è deciso di massimizzare la rigidezza della molla rispetto all'intervallo di valori ragionevoli (120 N/mm) e di lasciare margine di manovra al solutore con valori limite molto ampi. La stessa geometria di primo tentativo è stata fissata senza riferimento ad alcuna particolare applicazione reale.

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	100	500	150	500
Angolo W_P2_P4	-180	180	-40	-10,1
P1_z	-370	-100	-201	-370
P1_x	-500	200	180	190,3
Errore massimo [N]	26,4		Errore RMS [N]	
			17,3	

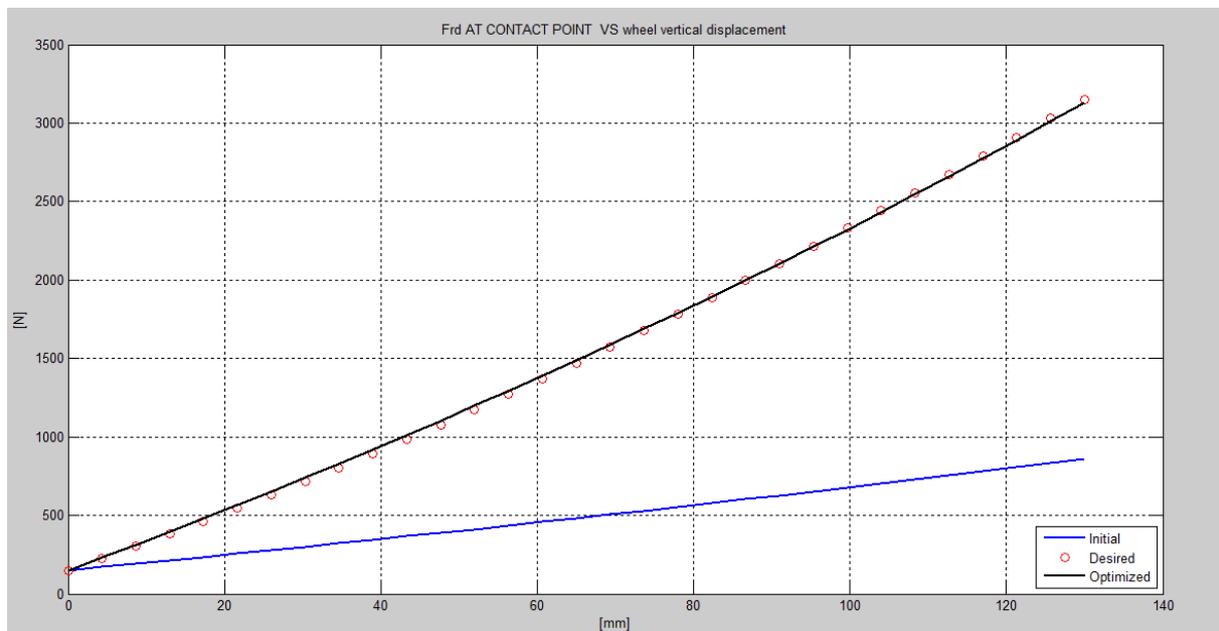
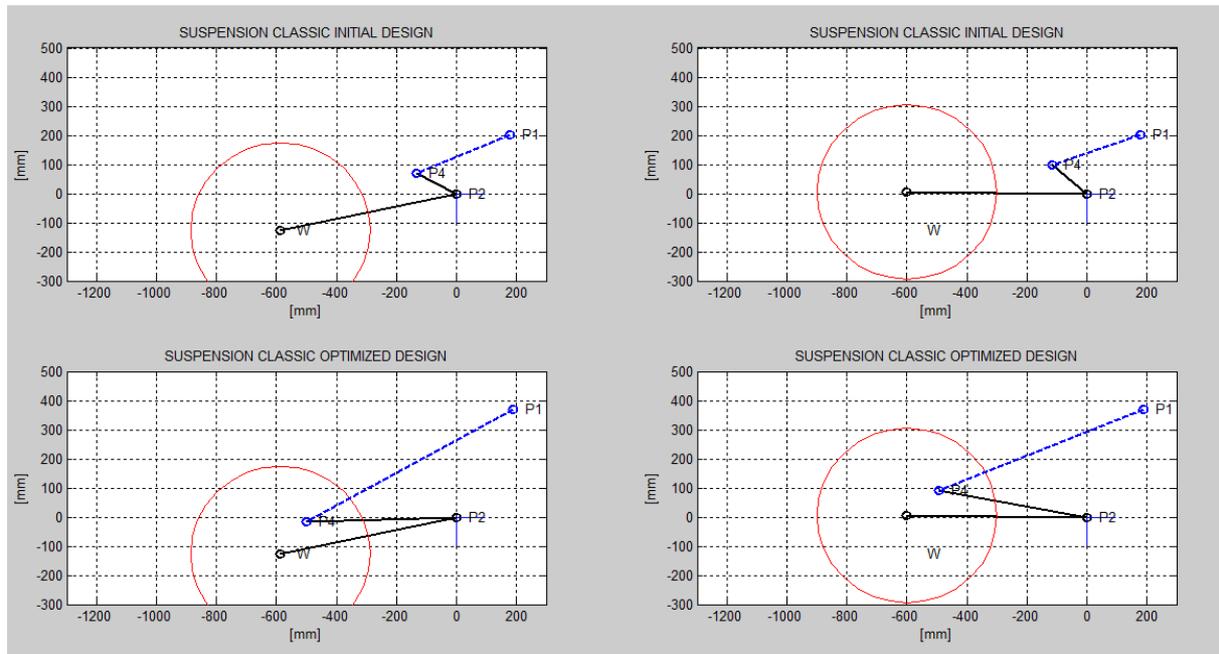


Figura 4.11. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

La soluzione ottimizzata segue abbastanza bene la curva desiderata, l'errore massimo è dello stesso livello dei due casi precedenti mentre quello RMS è più elevato, anche se sempre esiguo, questo ad indicazione del fatto che il grado di progressività è molto vicino al limite ottenibile. La funzione di primo tentativo è piuttosto diversa da quella finale ottima dimostrando capacità nel solutore di convergere da condizioni distanti.



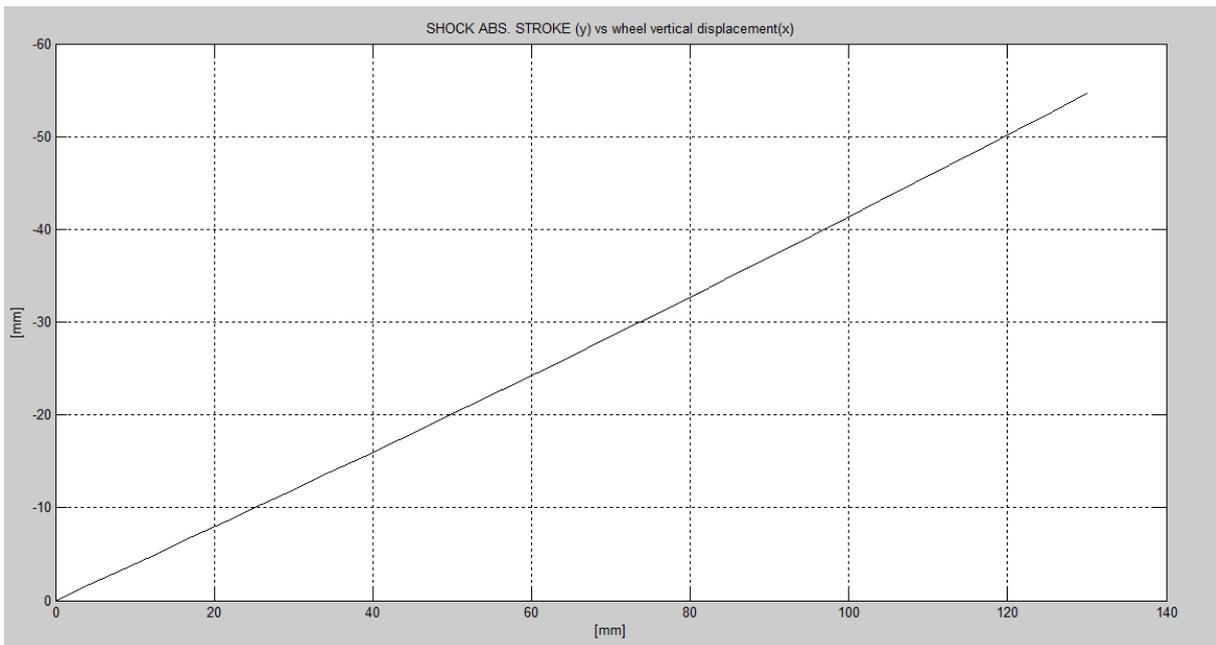
**Figura 4.12. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale**

L'indice di progressività definito come rapporto tra la rigidezza ridotta finale (sospensione compressa) e iniziale (estesa) è pari ad 1,6. Questo valore trova pieno accordo in [2], che indica un comportamento progressivo massimo per questo tipo di sospensione tra il 50% e il 60% descrivendo le stesse caratteristiche geometriche ottenute autonomamente dal programma (molle lunghe e molto inclinate e collegate vicino al perno della ruota).

Il punto P4 di attacco della molla è all'interno della ruota nel modello piano, quindi nella realtà si dovrà utilizzare una coppia di ammortizzatori con molle di rigidezza dimezzata.

Il rapporto di velocità varia da un minimo di 0,39 ad un massimo di 0,45 con andamento pressoché lineare. Di conseguenza la funzione della corsa del gruppo molla-ammortizzatore rispetto lo spostamento della ruota (figura 4.13) subirà una variazione di pendenza che ai limiti sarà pari ai valori estremi di  $\tau$  (si è mostrato che quest'ultimo corrisponde alla derivata

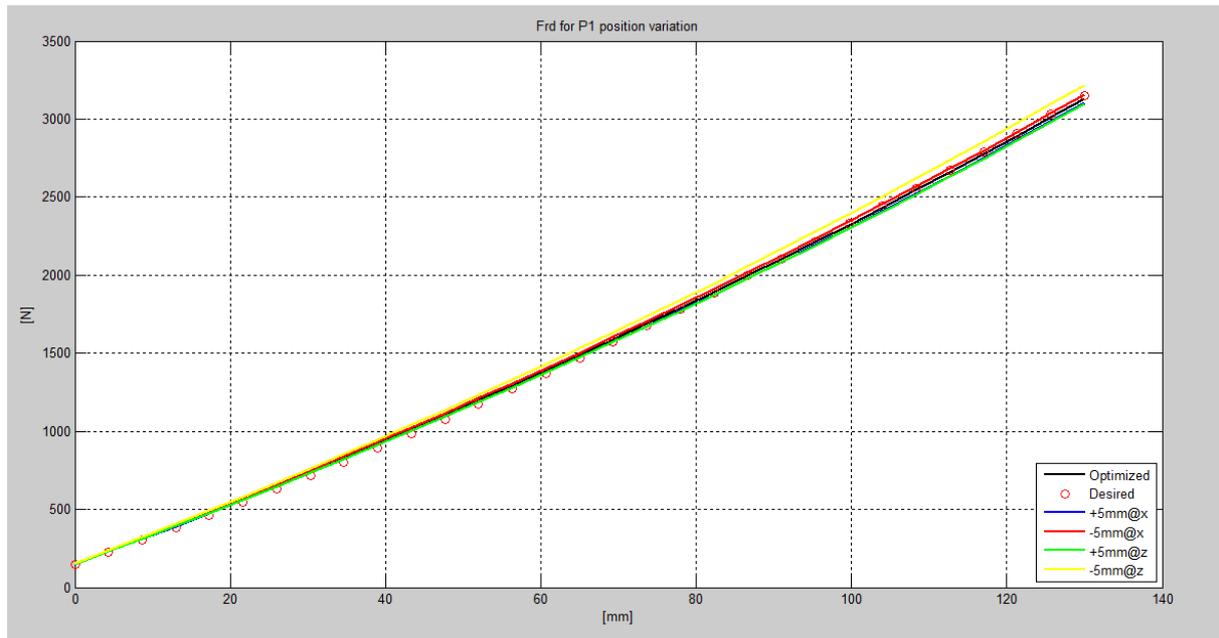
della corsa); la progressività non è elevata quindi è poco visibile dalla figura ed è poi accentuata dalla moltiplicazione con il  $\tau$ . Anche il precarico ridotto varia dal valore minimo fissato di 150 N in estensione a 173 N alla massima compressione, dato che il precarico della molla è fisso (e pari in questo caso a 3,2 mm con una forza di 383 N) e la relazione tra i due precarichi è  $P_{rid} [N] = P_{molla} [N] * \tau$ .



**Figura 4.13. Corsa del gruppo molla-ammortizzatore (ordinate) su corsa ruota (ascisse)**

La corsa degli ammortizzatori è pari a 55 mm con una lunghezza massima di 791 mm e una minima di 736 mm.

L'analisi di sensibilità non segnala particolari criticità ma provando a variare la posizione del punto P1 per ridurre l'ingombro si ha un lento e progressivo aumento dell'errore RMS dovuto a perdita di progressività ed essendo questo aspetto quello sul quale si concentra quest'analisi si è deciso di mantenere questo caso come riferimento.



**Figura 4.14. Analisi di sensibilità: variazione della posizione del punto P1 secondo x e z**

### Caso regressivo

Anche in questa tipologia valgono le considerazioni fatte in precedenza per l'andamento progressivo solo che ora la massimizzazione della regressività si avrebbe con un braccio di leva perpendicolare alla molla in estensione e il braccio di leva effettivo pressoché nullo (quindi in prossimità dell'intersezione) arrivando alla posizione di massima compressione minimizzando il rapporto tra il  $\tau$  compresso e quello esteso. Quindi essendoci gli stessi problemi di ingombro eccessivo o di rigidità della molla troppo grande si è partiti dal valore di rigidità massimo (120 N/mm) e da una geometria di primo tentativo casuale con ampi intervalli di variabilità dei parametri.

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	100	400	250	272,4
Angolo W_P2_P4	-180	90	-110	-93,2
P1_z	-400	-100	-340	-318,5
P1_x	-200	250	200	216,0
Errore massimo [N]	41,2		Errore RMS [N]	19,3

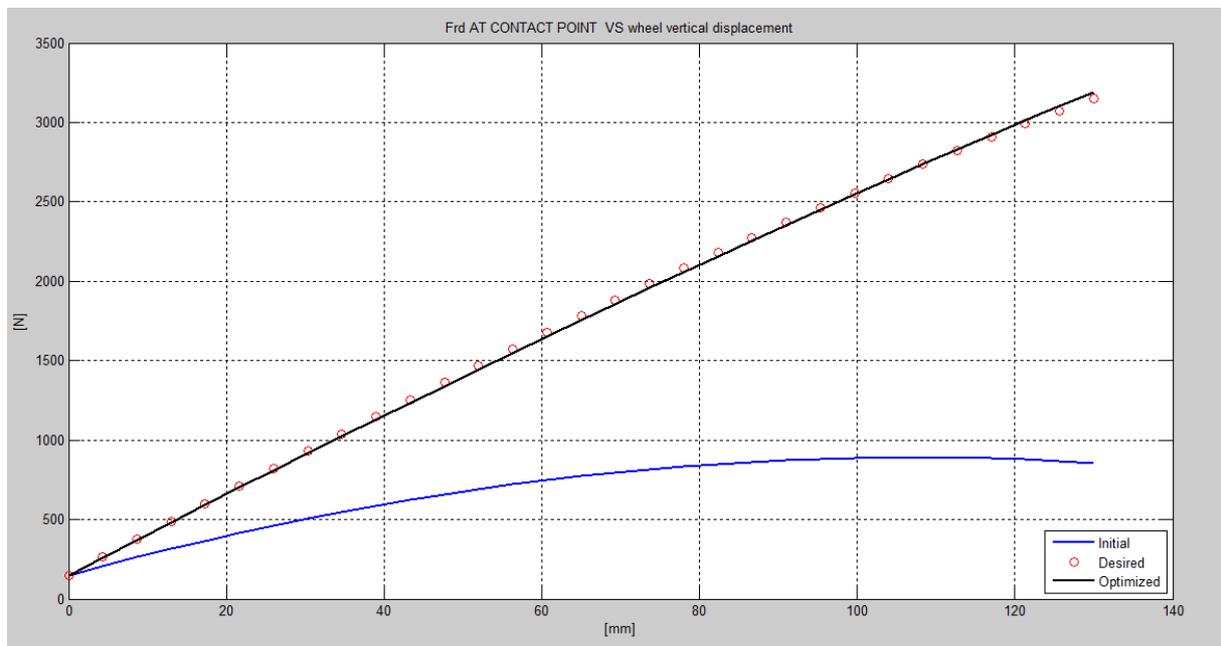
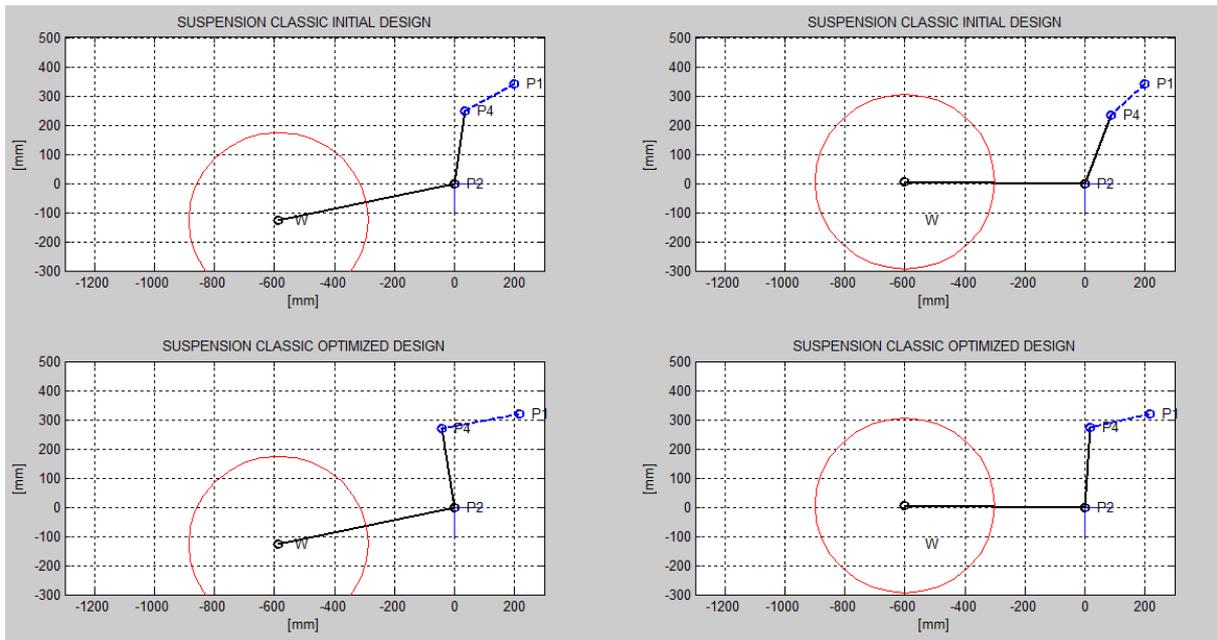


Figura 4.15. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

Il primo tentativo è interessante per due motivi: innanzitutto il valore di forza massima è ben inferiore di quello voluto per cui il solutore dimostra una buona capacità di convergenza anche se l'errore è il maggiore dei quattro casi sinora affrontati. L'indice di progressività è pari a 0,7 ed è il massimo che si sia riusciti a raggiungere con questo tipo di sospensione.



**Figura 4.16. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale**

Il secondo motivo è che la regressività della geometria di primo tentativo è maggiore di quella raggiunta nell'ottimizzazione e la figura 4.16 mostra che l'effetto è ottenuto operando vicino alla condizione di intersezione ma sottolinea anche gli aspetti critici già ricordati: infatti il gruppo molla-ammortizzatore ha una lunghezza insufficiente per poter essere realistico (dovrebbe essere allungato ma si aumenterebbe l'ingombro) in più il valore di forza ridotta massimo è ben al di sotto di quello richiesto e per aumentarlo a parità di rigidità della molla si dovrebbe allungare la leva producendo delle dimensioni assolutamente eccessive rendendo irrealizzabile questo schema.

L'analisi del rapporto di velocità è speculare rispetto l'esempio precedente quindi il valore di  $\tau$  in estensione (0,46) è maggiore di quello in compressione (0,43) e la curva della corsa del gruppo molla-ammortizzatore in funzione del movimento della ruota sarà concava. La lunghezza minima del gruppo elastico è di 204 mm, la massima è 262 mm con una corsa di 58 mm.

La stabilità della soluzione non è influenzata dalla posizione del punto di attacco della molla al telaio ma gli altri due parametri sono più delicati:

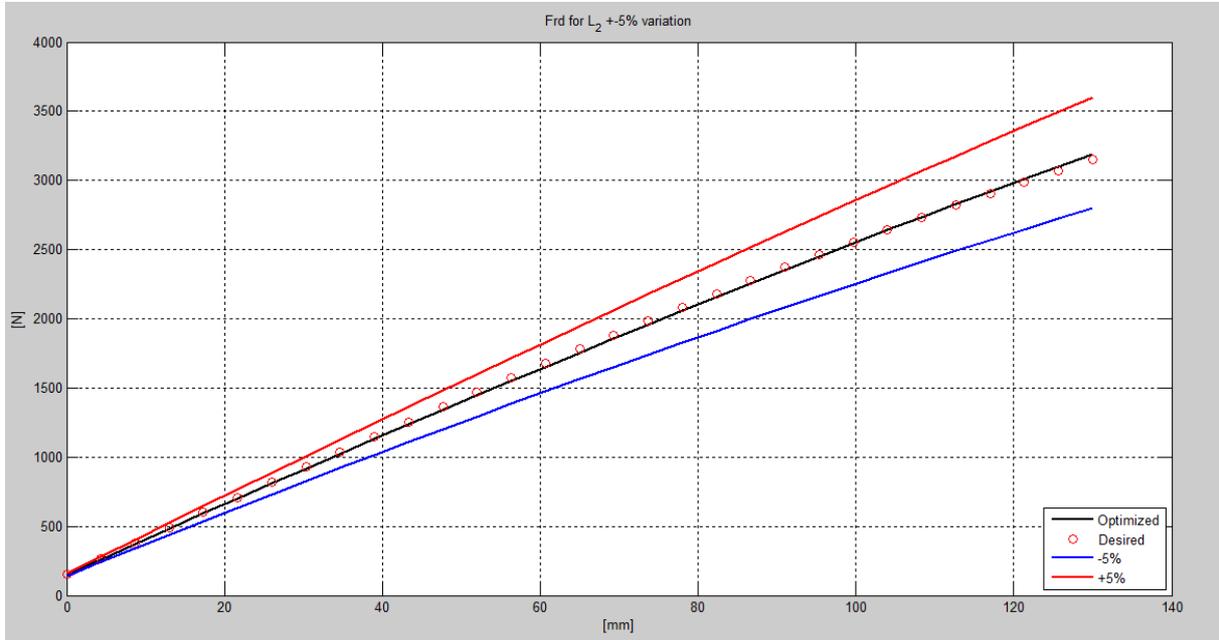


Figura 4.17. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $P2P4$

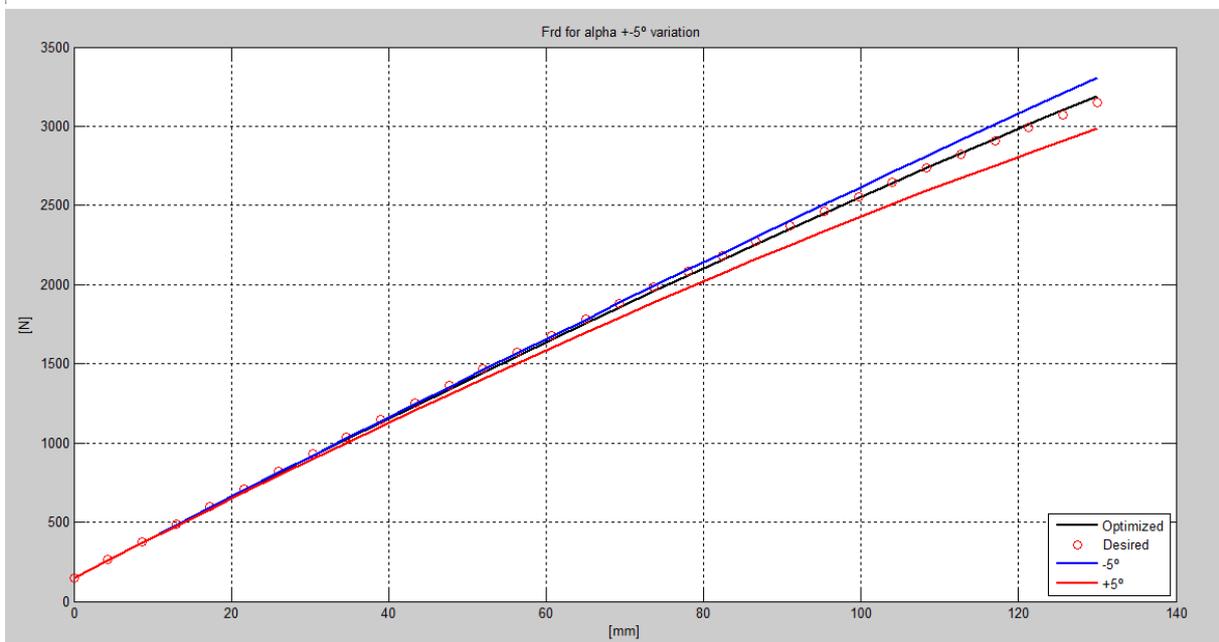


Figura 4.18. Analisi di sensibilità: variazione dell'angolo  $W_{P2_P4}$

## 4.2. SOSPENSIONE BILANCIERE – TELAIO

### Caso lineare

La sospensione classica si è già mostrata adatta a questa curva ad andamento lineare ma l'utilizzo di un meccanismo per tale applicazione può risultare desiderabile per motivi (quali la concentrazione della massa, le caratteristiche di trazione ecc.) che esulano dalle tematiche affrontate in questo lavoro. I casi lineari verranno quindi presentati anche con i meccanismi a titolo di confronto. La geometria di primo tentativo è liberamente ispirata agli schemi presenti in letteratura e i margini degli intervalli sono lasciati ampi.

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	400	250	265,0
Angolo W_P2_P4	-50	90	5	-22,7
$\overline{P4P5}$	20	400	100	99,0
$\overline{P1P5}$	20	400	200	173,7
$\overline{P1P6}$	20	400	50	174,8
Angolo P6_P1_P5	-50	90	15	29,8
P3_z	-300	-100	-250	-20,0
P3_x	-200	100	0	-257,6
P1_z	20	100	50	-32,3
P1_x	-100	100	-30	54,6
Errore massimo [N]	58,2		Errore RMS [N]	26,3

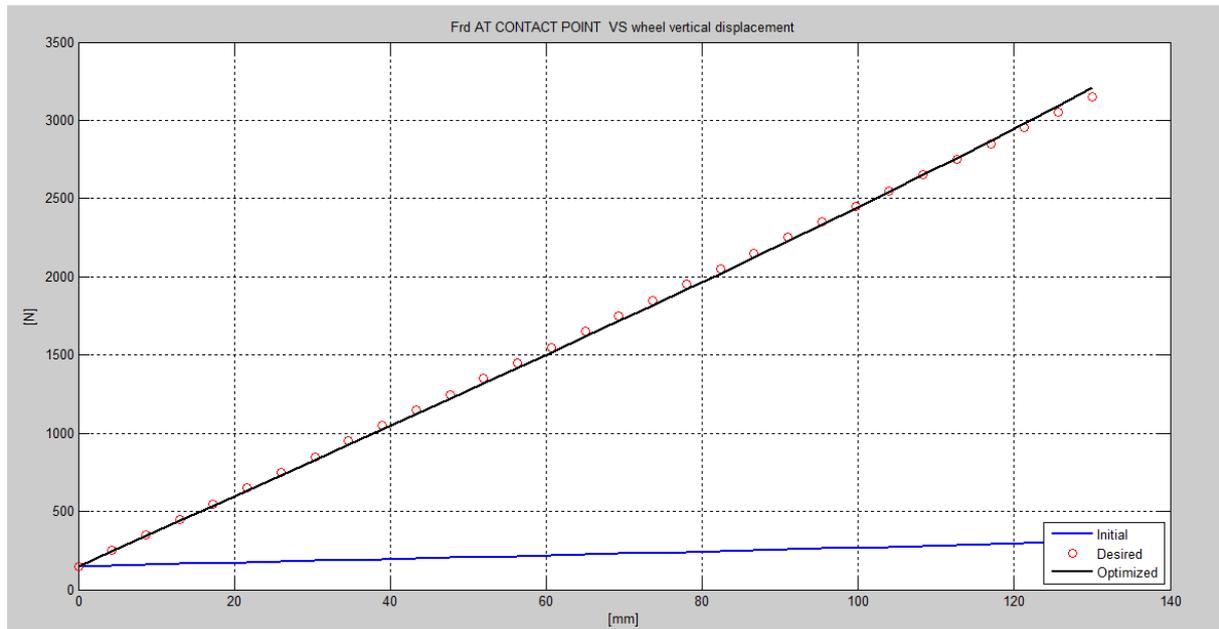


Figura 4.19. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

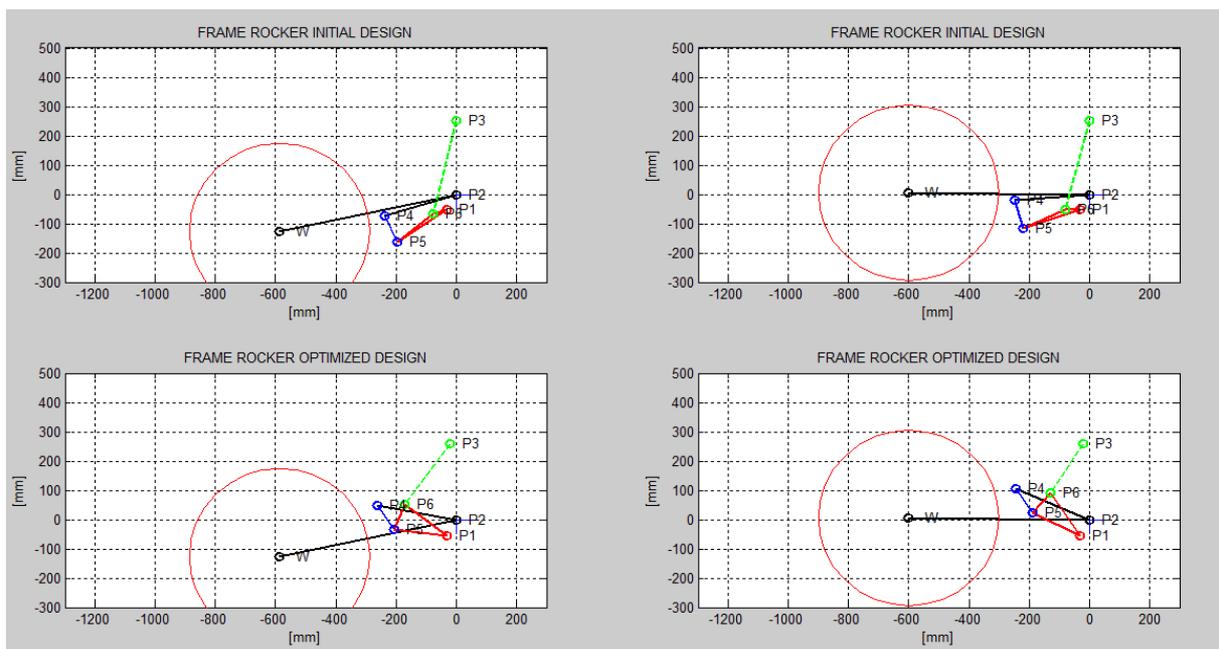
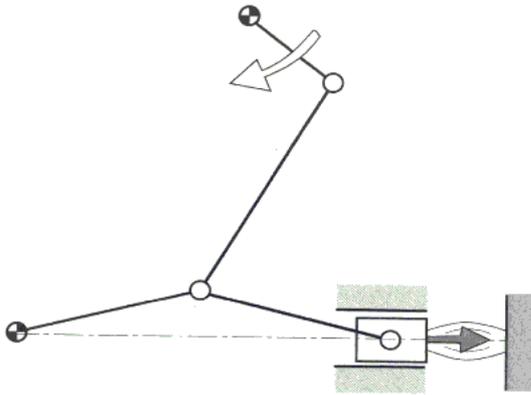


Figura 4.20. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

La curva di primo tentativo è molto diversa da quella finale dimostrando ancora buone capacità da parte del solutore. Quest'ultimo ha provveduto ad allungare il braccio di leva della molla ( $\overline{P1P6}$ ) per avere un valore di corsa

della molla sufficiente ed ha modificato gli altri parametri avvicinandosi ad una condizione di singolarità. Questa caratteristica la si ritrova anche in meccanismi di *toggle* o a ginocchiera che sono utilizzati come moltiplicatori di forza sfruttando l'elevato rapporto di velocità tra movente e cedente in prossimità della configurazione singolare.



**Figura 4.21. Meccanismo a ginocchiera moltiplicatore di forza [5]**

In questo caso invece il solutore si è avvantaggiato del grande spostamento del punto P6 rispetto al movimento ridotto del forcellone, dovuto al rapporto di velocità locale, per ottenere il valore di corsa necessario per fornire la forza massima desiderata pur posizionando il gruppo molla-ammortizzatore molto vicino al perno del forcellone.

La corsa massima del gruppo elastico è infatti pari a 57 mm (la lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore è 200 mm); il  $\tau$  si attesta attorno allo 0,43. La rigidità della molla è stata scelta di valore massimo (120 N/mm) per ottimizzare la compattezza del meccanismo; il precarico così viene ad essere pari a 3 mm. Un po' insoddisfacente l'errore visto che sia il valore massimo che il valore RMS superano quelli degli esempi visti finora.

L'analisi di sensibilità ha segnalato delle criticità, come ci si poteva aspettare, riguardanti la singolarità del meccanismo. I parametri per i quali una differenza del 5% impedisce l'assemblabilità sono  $\overline{P2P4}$  e  $\overline{P1P5}$ .  $\overline{P4P5}$  non è segnalato poiché essendo molto corto una sua variazione del 5% non è sufficiente a raggiungere la singolarità, ma è comunque un

parametro da gestire con attenzione. Per quantificare l'entità dell'avvicinamento alla condizione di singolarità si è misurato l'angolo di trasmissione che raggiunge il valore minimo di  $30^\circ$  (dove a  $0^\circ$  si ha singolarità). Se a  $90^\circ$  si ha il massimo della trasmissibilità  $30^\circ$  potrebbe non sembrare un valore così estremo ma l'analisi di sensibilità ha messo in luce la criticità della condizione. Si ricorda che il valore massimo raggiunto dal picco in figura 4.18 e 4.19 non è importante, ciò che conta è la presenza del picco in sé che indica il problema d'assemblabilità. Per  $\overline{P2P4}$  il problema riguarda la linea rossa, quindi il caso d'incremento della lunghezza, mentre per  $\overline{P1P5}$  è dovuto all'accorciamento (linea blu), come si può facilmente constatare dagli schemi di figura 4.16.

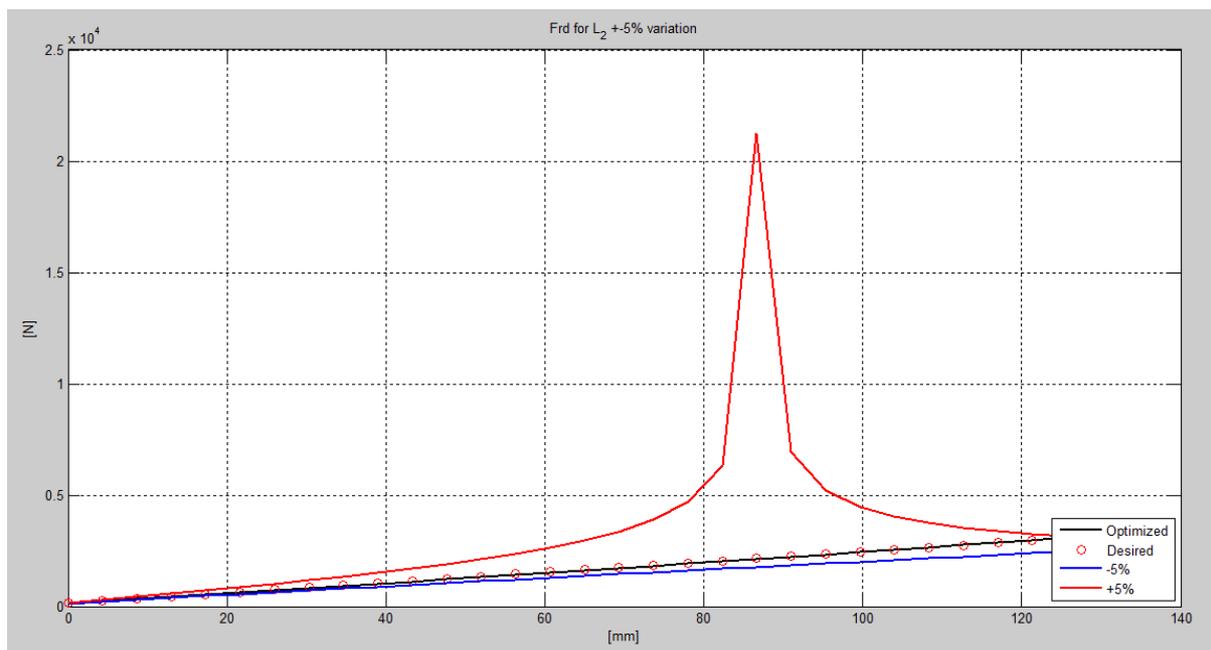


Figura 4.22. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P2P4}$

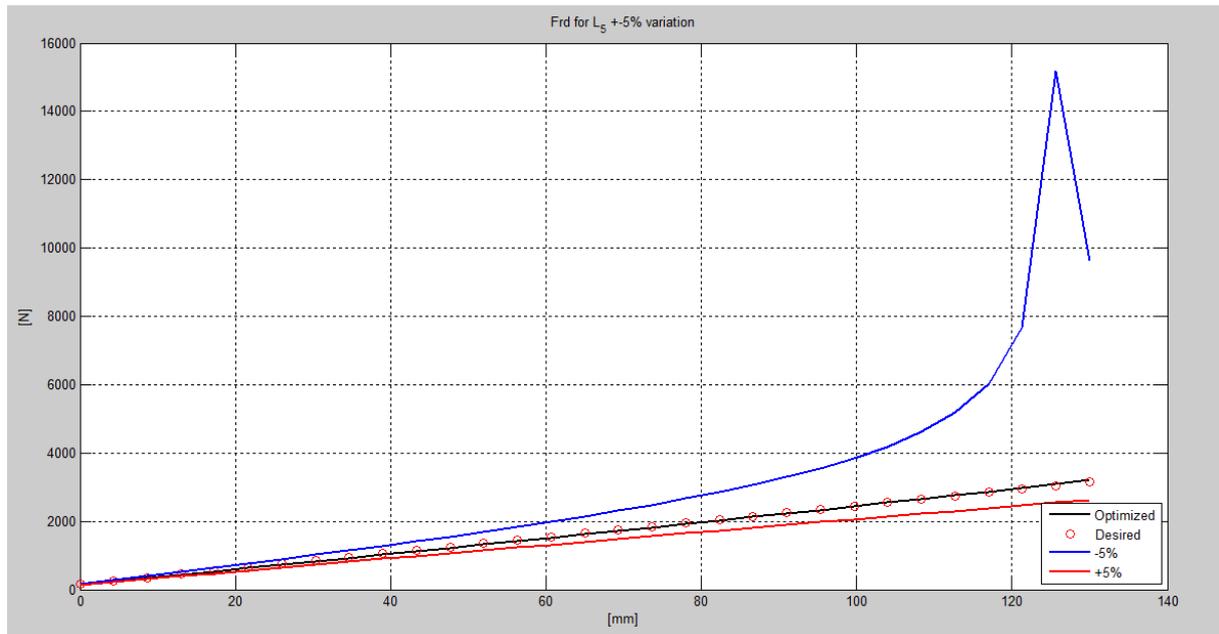


Figura 4.23. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P1P5}$

### Caso progressivo

Come descritto in [2] questo schema sospensivo si adatta perfettamente a questo caso. Infatti l'indice di progressività massimo raggiunto è pari a 7, ossia la rigidezza ridotta con la sospensione in posizione compressa è 7 volte maggiore di quella in posizione estesa, con un notevole incremento rispetto al caso classico. Oltre questo livello di progressività il solutore tende a diventare poco preciso pur riuscendo ad incrementare la curvatura ed è portato ad adottare dimensioni eccessive e ad avvicinarsi alla condizione di singolarità. Per favorire il raggiungimento di questo risultato estremo si è utilizzata una molla di rigidezza massima rispetto l'intervallo di scelta (120 N/mm). Pur essendo un caso molto spinto l'errore si è mantenuto molto basso (l'errore massimo è pari allo 0,006% del valore di

forza massima: è ragionevole valutare l'errore in rapporto alla forza massima dato che il primo valore della curva è necessariamente corretto poiché è il precarico ridotto che è imposto e quindi l'errore si manifesta in maniera maggiore nella parte finale della curva). La differenza più evidente tra la forza ridotta di primo tentativo e quella ottimizzata è la variazione di curvatura, ottenuta dal solutore sfruttando una lunga leva ( $\overline{P1P6}$ ) posta quasi verticale in posizione iniziale così da creare una grande variazione del rapporto di velocità. Si è dovuti intervenire riducendo i valori limite di alcuni parametri (l'angolo alpha -  $W_{P2\_P4}$ ,  $\overline{P1P6}$ ,  $P1$ ) affinché il meccanismo non si abbassasse eccessivamente così da mantenere un'opportuna distanza da terra. Il valore di  $\tau$  va da 0,18 esteso a 0,53

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	400	250	257,6
Angolo $W_{P2\_P4}$	-50	25	5	18,0
$\overline{P4P5}$	20	400	100	150,1
$\overline{P1P5}$	20	400	100	71,7
$\overline{P1P6}$	20	200	180	197,2
Angolo $P6\_P1\_P5$	-180	180	15	-5,6
$P3\_z$	-300	200	-250	-267,4
$P3\_x$	-200	100	0	2,7
$P1\_z$	-100	200	50	71,8
$P1\_x$	-50	-20	-30	-32,7
Errore massimo [N]	20,6		Errore RMS [N]	12,0

compresso, con un comportamento progressivo com'era lecito attendersi visto che l'andamento della forza ridotta è dato praticamente dal prodotto della funzione corsa del gruppo molla-ammortizzatore per la sua derivata, che sono oltretutto due funzioni dipendenti (generalmente, come nei casi

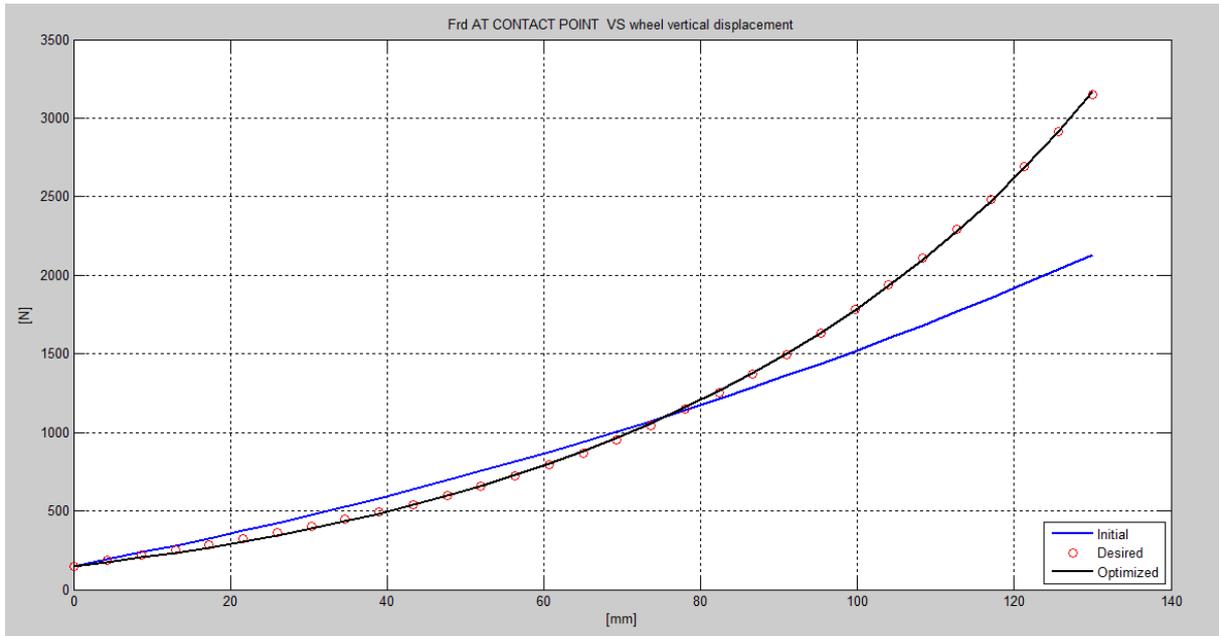


Figura 4.24. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

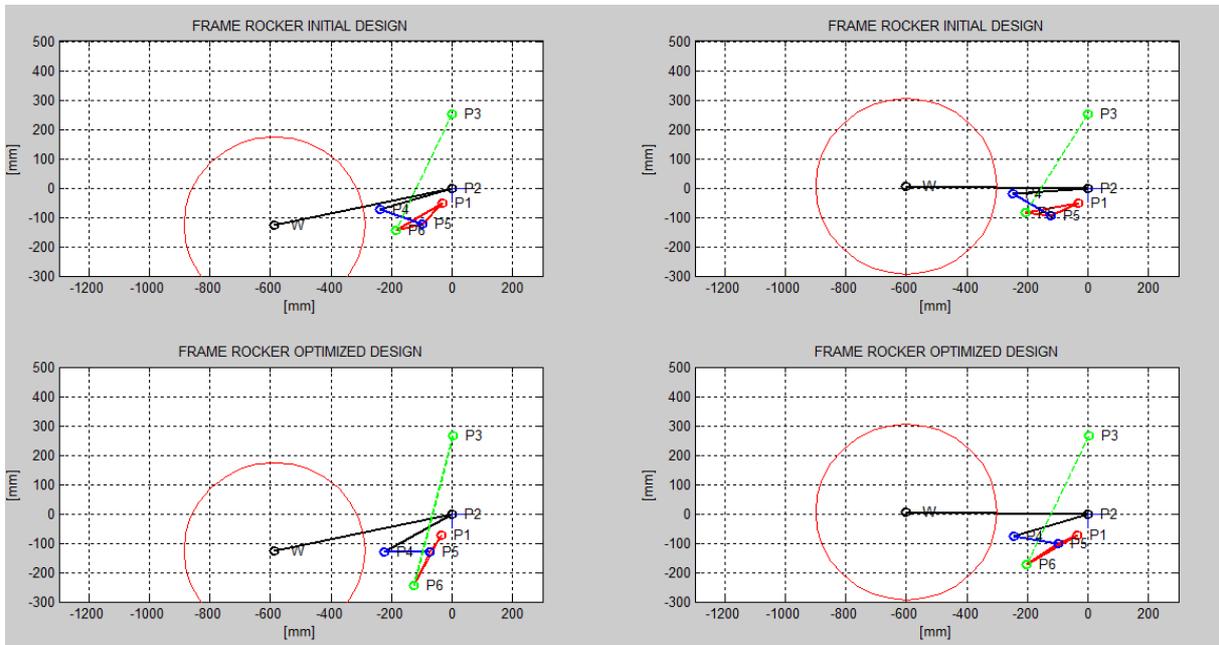
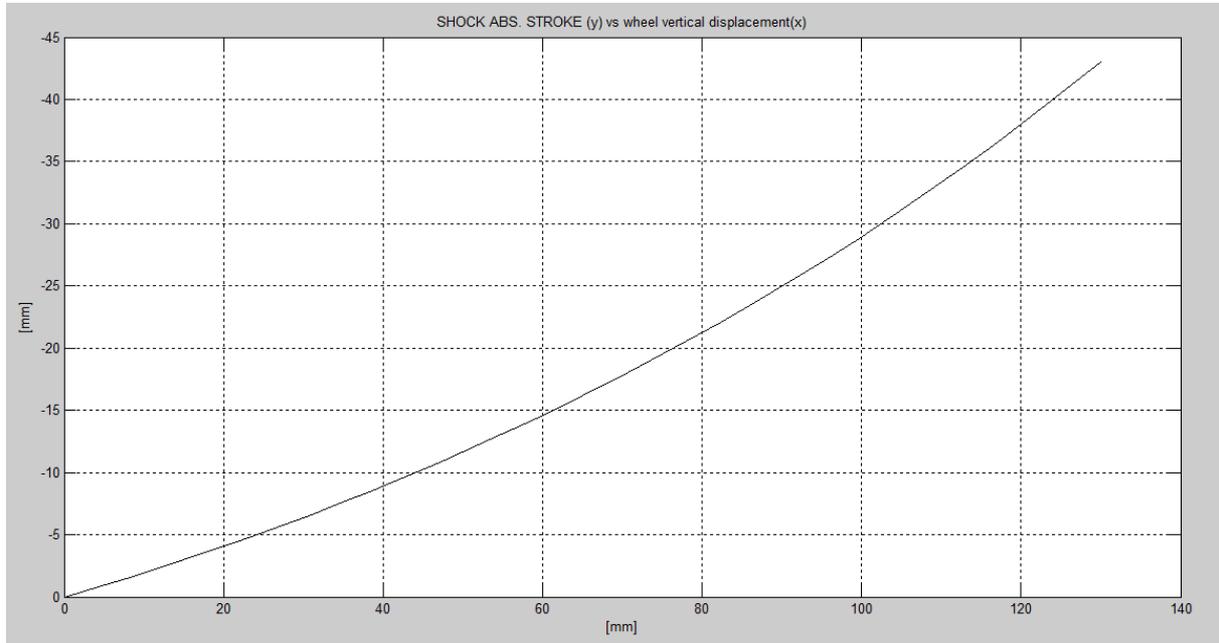
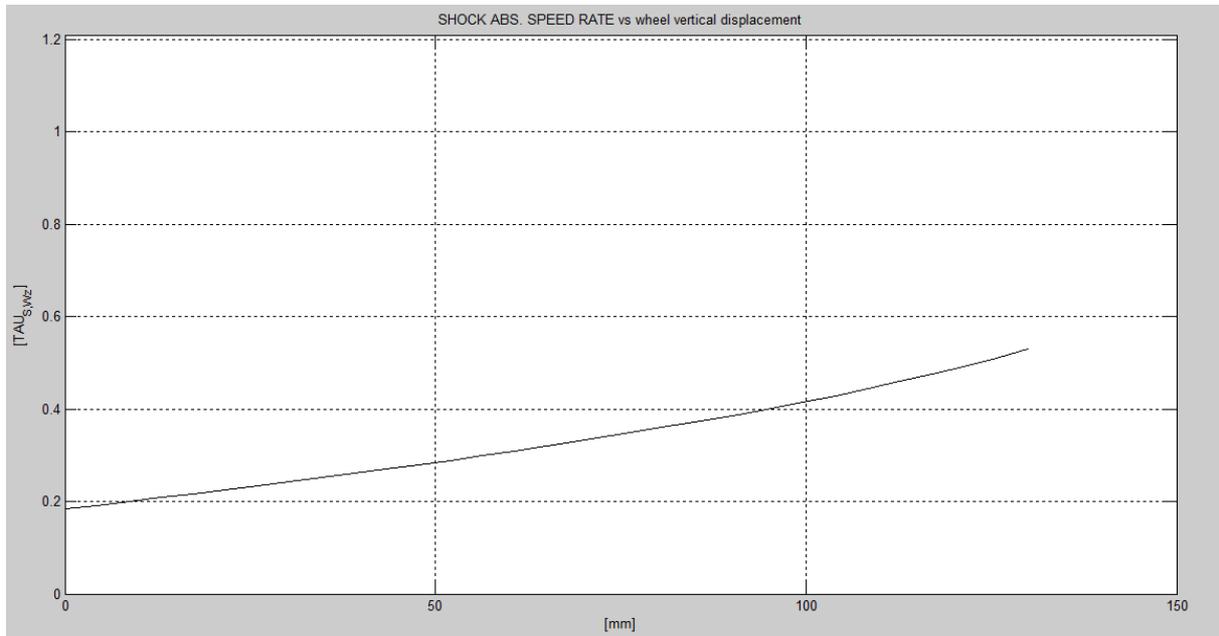


Figura 4.25. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

già visti, hanno la concavità nella stessa direzione). Quindi dal risultato, ossia dalla forza ridotta, è possibile intuire l'andamento delle due curve. In questo esempio vengono ancora riproposte nelle figure 4.26 e 4.27.



**Figura 4.26. Corsa del gruppo molla-ammortizzatore (ordinate) su corsa ruota (ascisse)**



**Figura 4.27. Andamento del rapporto di velocità (ordinate) su corsa ruota (ascisse)**

La molla va precaricata di 6,8 mm, il valore più alto finora ottenuto; la sua corsa è di 43 mm e la lunghezza minima è pari a 485 mm.

L'analisi di sensibilità indica che per la variazione del parametro  $\overline{P2P4}$  si ha singolarità: misurando l'angolo di trasmissione questo ha un valore minimo di  $35^\circ$  ma poiché questo elemento è il più lungo dopo il forcellone un suo allungamento del 5% è sufficiente a rendere in assemblabile il meccanismo.

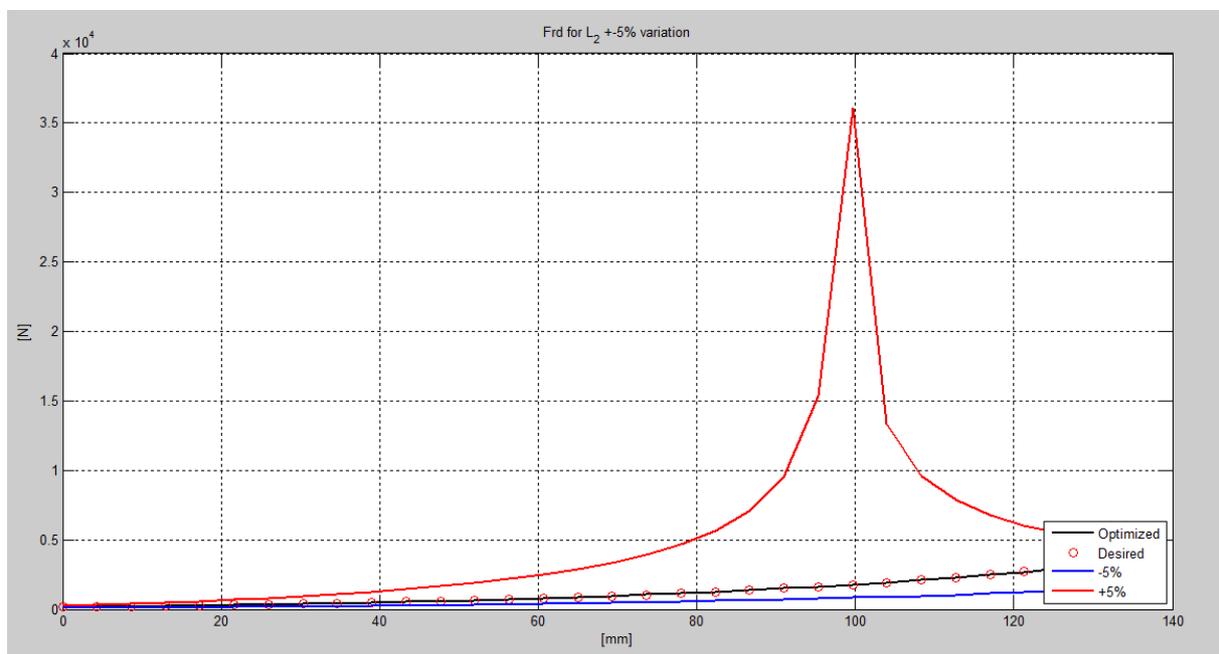


Figura 4.28. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P2P4}$

Anche altri parametri creano grandi variazioni della curva ( $\overline{P1P5}$ ,  $\overline{P4P5}$ ,  $P1$ ); in particolare si nota che per  $\overline{P4P5}$  con un accorciamento del 5% si ha un notevole aumento della forza massima e della progressività, il che porterebbe a pensare che vi sia la possibilità di migliorare l'ottimizzazione così ottenuta compattando ulteriormente il quadrilatero e incrementando la progressività. Di fatto il risultato poteva essere ulteriormente estremizzato

ma, come già accennato, andando oltre il valore di progressività ottenuto in questo esempio la differenza tra funzione desiderata ed ottimizzata tendeva ad aumentare e si perdeva il controllo sulla soluzione anche se questa in alcuni casi riusciva ad essere più progressiva. Questo fatto rappresenta un limite del programma, tuttavia il valore dell'indice di progressività raggiunto in questo esempio è molto elevato e quindi questo difetto non risulta molto invalidante se si considerano valori usualmente utilizzati nella pratica.

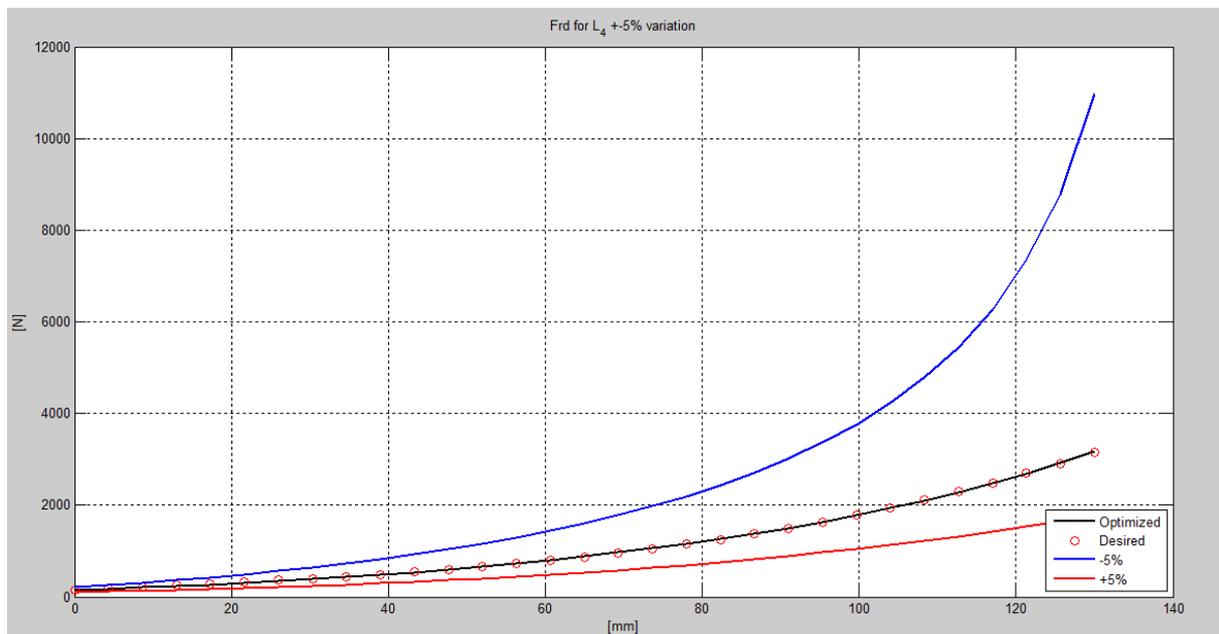


Figura 4.29. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P4P5}$

### Caso regressivo

Se la progressività può essere ottenuta in maniera ottima con questo schema sospensivo ciò non può esser detto per l'andamento regressivo. L'indice di progressività è infatti di poco migliore rispetto al caso della sospensione classica; il valore migliore raggiunto è 0,65. I valori della tabella di controllo in excel sono uguali a quelli del caso precedente a meno dei valori iniziali di  $\overline{P1P5}$  e  $\overline{P1P6}$  che sono stati rispettivamente raddoppiato quasi dimezzato. Ciò ha pure allontanato maggiormente la curva di primo tentativo da quella desiderata ma ha così mostrato la capacità di convergenza del solutore. L'errore è maggiore del caso progressivo, come si può vedere in figura 4.30, la parte centrale della curva

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	400	250	260,3
Angolo W_P2_P4	-50	25	5	-23,2
$\overline{P4P5}$	20	400	100	101,6
$\overline{P1P5}$	20	400	200	177,1
$\overline{P1P6}$	20	200	100	194,6
Angolo P6_P1_P5	-180	180	15	97,2
P3_z	-300	200	-250	-250,8
P3_x	-200	100	0	-2,3
P1_z	-100	200	50	69,4
P1_x	-50	-20	-30	-33,2
Errore massimo [N]	27,1		Errore RMS [N]	17,6

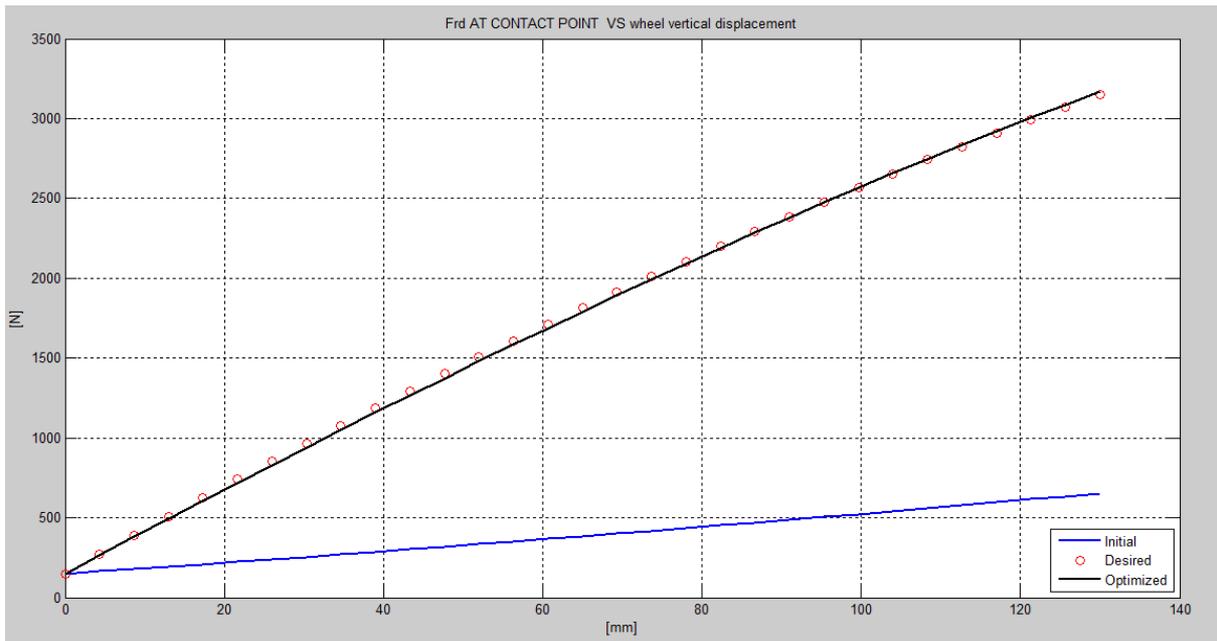


Figura 4.30. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

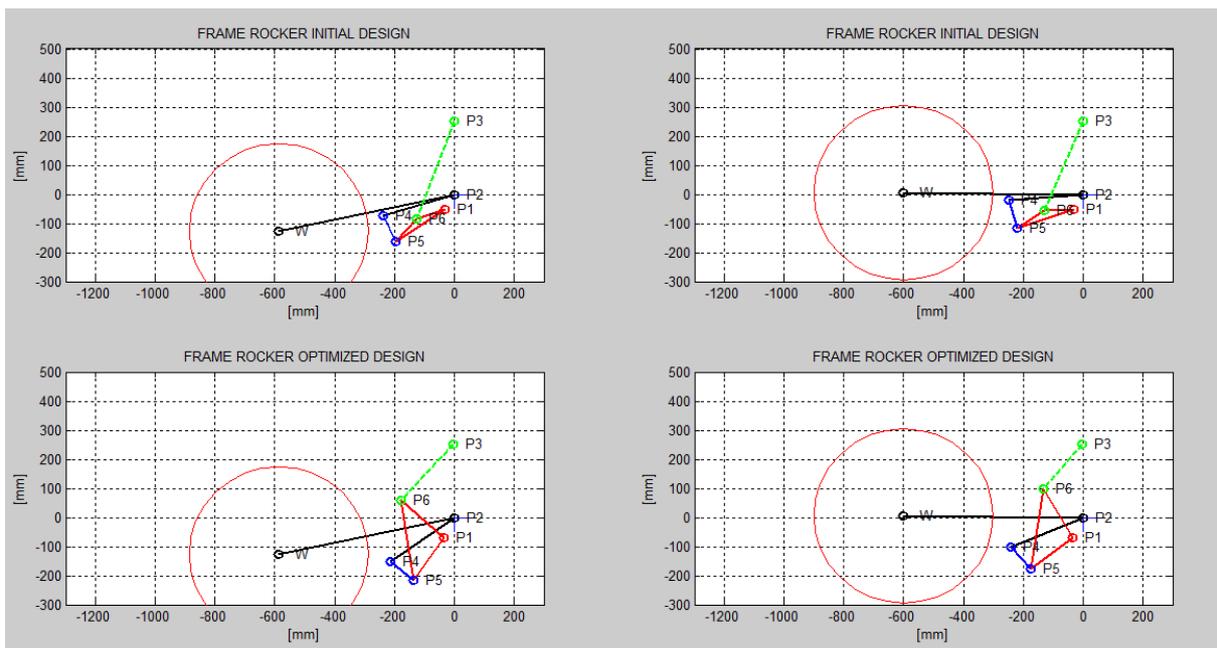


Figura 4.31. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

ottimizzata sottostima quella desiderata mentre nella parte finale avviene il contrario (per cui la forza finale è leggermente maggiore di quella prefissata, per la precisione di 16 N). Ciò significa che il valore di regressività qui raggiunto è il massimo ottenibile per questo meccanismo.

La variazione maggiore dell'ottimizzazione è la dimensione del triangolo P1 P5 P6 (il bilanciante) che fornisce la leva sufficiente per raggiungere la forza massima desiderata e che con gli altri parametri del cinematismo genera un marcato movimento orizzontale del punto P6 che nella corsa della sospensione si muove verso il punto di attacco della molla al telaio (P3) riducendo così il  $\tau$  e generando regressività. Il rapporto di velocità varia da 0,47 in posizione iniziale a 0,43. La corsa del gruppo molla-ammortizzatore è di 59 mm e la lunghezza minima è al limite inferiore accettabile: 200 mm. Data la difficoltà ad ottenere regressività si è rimasti su una molla di rigidità 120 N/mm che come già descritto in precedenza richiede una corsa minore e quindi l'utilizzo di un  $\tau$  minore a parità delle altre condizioni e permette di generare variazioni maggiori del braccio di leva effettivo. L'analisi di stabilità non mostra criticità anzi risulta piuttosto stabile. Il parametro più delicato è  $\overline{P1P6}$ ; l'effetto della sua variazione è mostrato in figura 4.32.

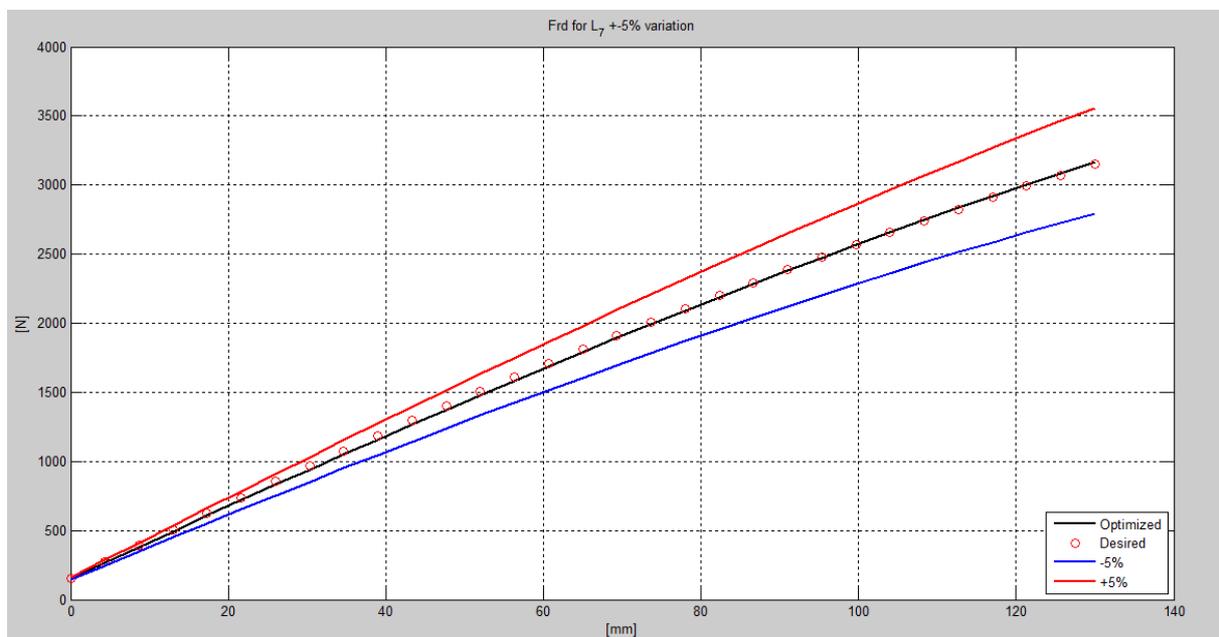


Figura 4.32. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P1P6}$

### 4.3. SOSPENSIONE BIELLA – TELAIO

#### Caso lineare

La sospensione con meccanismo di tipo biella – telaio condivide la forma generale con il caso precedente con la sola differenza dell’attacco inferiore della molla collegato alla biella invece che al bilanciere, per cui risulta naturale confrontare in maniera più stretta questi due meccanismi. Per il primo esempio con questo schema si sono lasciati così dei valori limite e di primo tentativo simili agli esempi precedenti. L’ottimizzazione ha prodotto un risultato curioso che si è deciso di presentare.

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	300	280	290,1
Angolo W_P2_P4	-50	25	5	-50
$\overline{P4P5}$	20	400	200	205,6
$\overline{P1P5}$	20	400	200	227,7
$\overline{P5P6}$	20	400	200	267,7
Angolo P6_P1_P5	-180	180	15	2,5
P3_z	-300	-100	-250	-277,9
P3_x	0	100	50	26,8
P1_z	50	100	60	55,4
P1_x	0	100	5	31,6
Errore massimo [N]	21,4		Errore RMS [N]	9,4

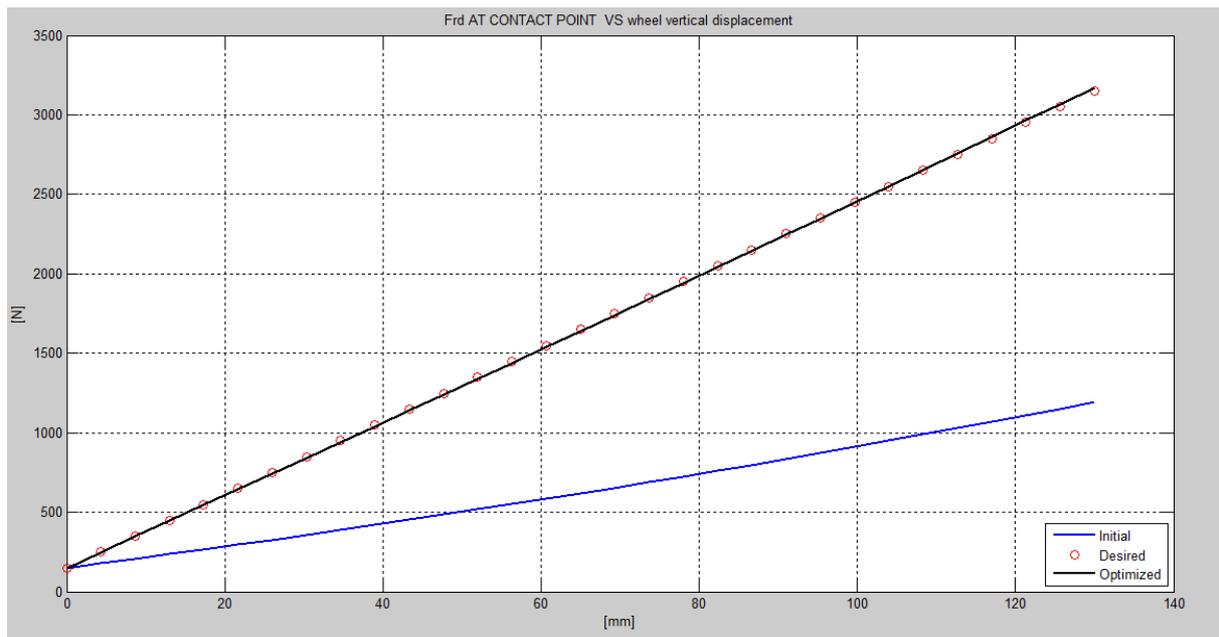


Figura 4.33. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

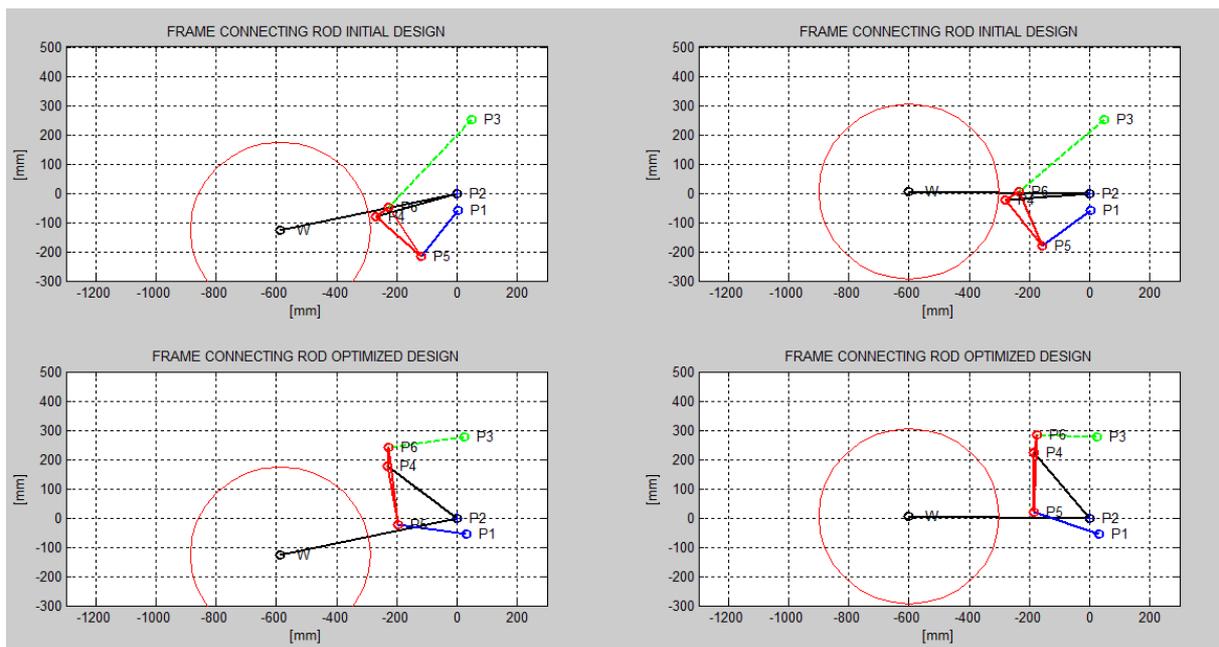
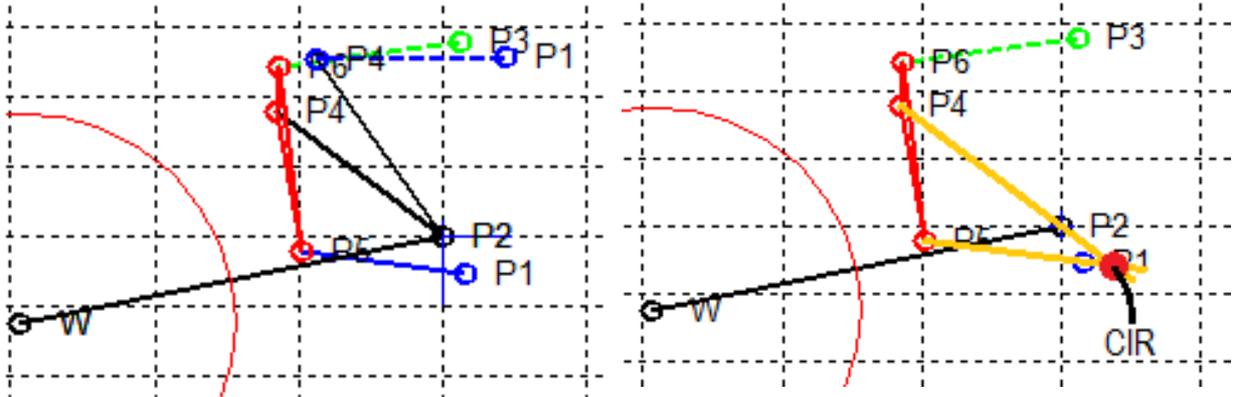


Figura 4.34. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

Osservando lo schema ottimizzato si nota che per la forma e per il movimento dei membri del quadrilatero il sistema è molto simile alla configurazione cantilever già presentata in precedenza peraltro con lo stesso andamento della forza. Il risultato è del tutto fortuito come si può

vedere dallo schema iniziale. La conferma della somiglianza è resa più chiara nella seguente figura:



**Figura 4.35. Confronto biella – telaio / cantilever (sinistra) e centro d’istantanea rotazione del triangolo P4 P5 P6 (destra)**

A sinistra la sovrapposizione delle due geometrie conferma l’analogia soprattutto nella dimensione del braccio di leva sul quale è applicata la molla (che ha la stessa rigidezza in entrambi i casi: 120 N/mm). Il secondo fattore da verificare è che il movimento relativo del triangolo P4 P5 P6 (la biella) rispetto al forcellone sia quasi nullo. In effetti ciò avviene come si può notare in figura 4.34 ed il motivo può essere spiegato riprendendo la teoria della cinematica dei meccanismi: nel moto piano si definisce centro d’istantanea rotazione (CIR) di un membro il punto ad esso solidale avente velocità nulla in un dato istante. Il CIR del triangolo è evidenziato in figura 4.35 a destra e risulta essere molto vicino al perno del forcellone P2 e questa distanza varia molto poco nell’arco di movimento della sospensione. Se i due punti coincidessero non vi sarebbe moto relativo tra il triangolo e il forcellone, in realtà vi è uno spostamento molto esiguo che peraltro migliora la prestazione della sospensione poiché riduce il valore dell’errore come si può constatare dalle due tabelle. L’utilità di questo esempio rimane

tuttavia solo didattica perché nella pratica la maggiore complessità del meccanismo rende sicuramente più ragionevole il collegamento del gruppo molla-ammortizzatore direttamente al forcellone in configurazione cantilever. Concludendo il confronto si osserva che tutti i parametri sono allineati: il  $\tau$  è pari a 0,44, la corsa è di 57 mm con una lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore di 200 mm e il precarico è di 2,9 mm.

L'analisi di sensibilità indica che la soluzione è molto stabile.

### Caso lineare convenzionale

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	300	263	290,1
Angolo W_P2_P4	-50	25	22	-50
$\overline{P4P5}$	20	400	73	205,6
$\overline{P1P5}$	20	240	180	227,7
$\overline{P5P6}$	20	400	69	267,7
Angolo P6_P1_P5	-180	180	90	2,5
P3_z	-300	-100	-123	-277,9
P3_x	-50	100	-44	26,8
P1_z	50	200	171	55,4
P1_x	-50	100	-31	31,6
Errore massimo [N]	5,6		Errore RMS [N]	3,3

La tabella con i parametri di controllo è stata modificata per ottenere un risultato convenzionale: il primo tentativo è stato scelto prendendo le misure da una figura in una rivista di settore [7] e rapportandole alla lunghezza del forcellone.

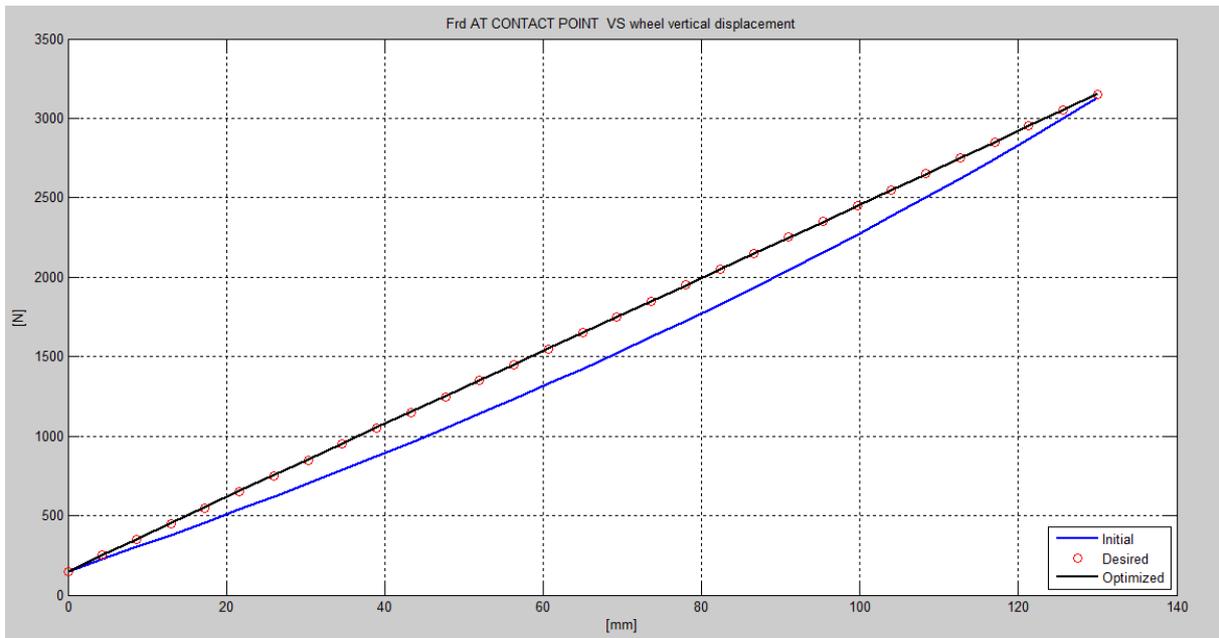


Figura 4.36. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

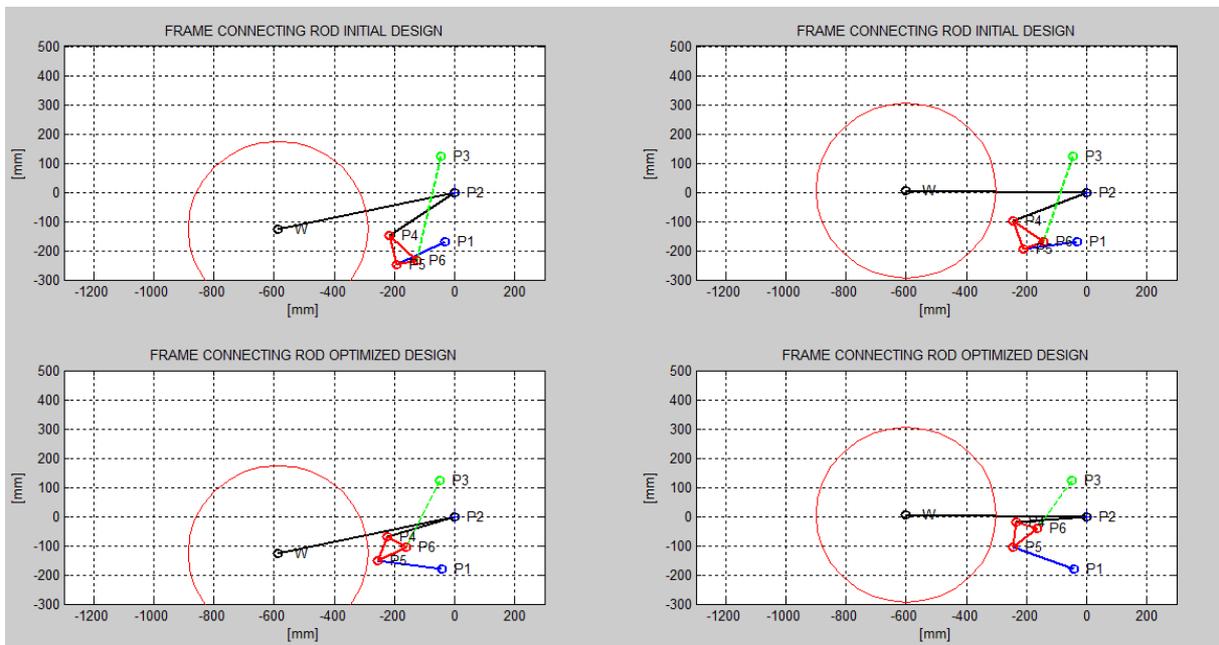


Figura 4.37. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

La curva di primo tentativo è molto vicina a quella finale per cui non ha certamente messo a dura prova il solutore. D'altro canto fornisce una conferma implicita della ragionevolezza del valore massimo assunto per la forza ridotta all'inizio di questo capitolo. Da notare che l'errore raggiunge il valore minimo di tutti i casi sinora visiti. Il rapporto di velocità assume un valore praticamente costante di 0,44, la corsa del gruppo molla-ammortizzatore è di 57 mm e la sua lunghezza minima è di 200 mm. Il precarico con la molla di rigidità 120 N/mm è di 2,8 mm.

Anche per questo caso l'analisi di sensibilità dimostra la grande stabilità dello schema ottenuto.

### **Caso progressivo**

I tentativi di estremizzare la curvatura della funzione forza ridotta hanno portato a raggiungere un indice di progressività pari a 6 che nel confronto diretto con la sospensione bilanciata – telaio risulta inferiore e quindi indica una minore efficacia. Anche in questa occasione per ottenere forza massima e curvatura elevata il solutore ha mostrato la tendenza ad aumentare le dimensioni, il che con questa configurazione porta al contatto del meccanismo con la ruota. Per ovviare a questo problema si sono posti dei limiti sulle lunghezze  $\overline{P2P4}$  e  $\overline{P1P5}$ . Sono state apportate alcune modifiche per cercare di migliorare il risultato e portarlo allo stesso livello del caso con meccanismo di tipo bilanciata – telaio e la scelta che ha portato maggiori benefici è stata quella di concedere massima libertà alla posizione del punto di attacco del bilanciata P1. La figura 4.39 mostra che

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	215	210	195,5
Angolo W_P2_P4	-360	360	12	-50,4
$\overline{P4P5}$	2	150	70	122,8
$\overline{P1P5}$	2	225	220	210,0
$\overline{P5P6}$	1	150	70	70,5
Angolo P6_P1_P5	-360	360	125	69,5
P3_z	-250	-100	-250	-280,3
P3_x	-300	100	-100	-124,5
P1_z	-200	180	50	-104,4
P1_x	-250	100	0	-30,7
Errore massimo [N]	4,5		Errore RMS [N]	2,5

il cambiamento della soluzione finale è stato radicale con l'intero meccanismo spostato sopra al forcellone dalla posizione iniziale bassa, più convenzionale ma che alla luce del risultato ottenuto non lasciava al meccanismo uno spazio sufficiente. La progressività è stata ottenuta generando con la compressione della sospensione una rotazione del triangolo P4 P5 P6 (la biella) che allontana orizzontalmente il punto di attacco del gruppo molla-ammortizzatore P6 dal perno del forcellone P2 aumentando il  $\tau$ ; l'effetto è pure incrementato verticalmente poiché alzando la ruota la distanza di P6 dal forcellone aumenta fino giungere al valore massimo in posizione finale; ciò aumenta la corsa permettendo sia il raggiungimento della forza massima sia un incremento di comportamento

progressivo. Il rapporto di velocità iniziale è di 0,23, quello finale di 0,51. La corsa del gruppo molla-ammortizzatore è di 46 mm con una lunghezza minima di 233 mm; il precarico è di 5,5 mm.

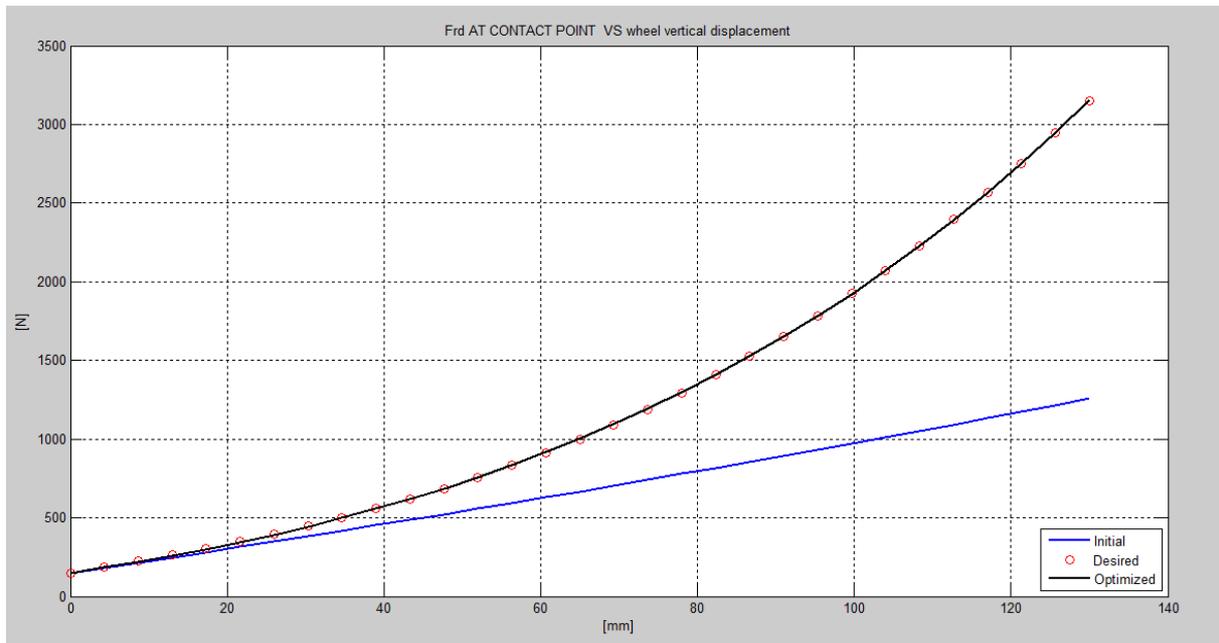


Figura 4.38. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

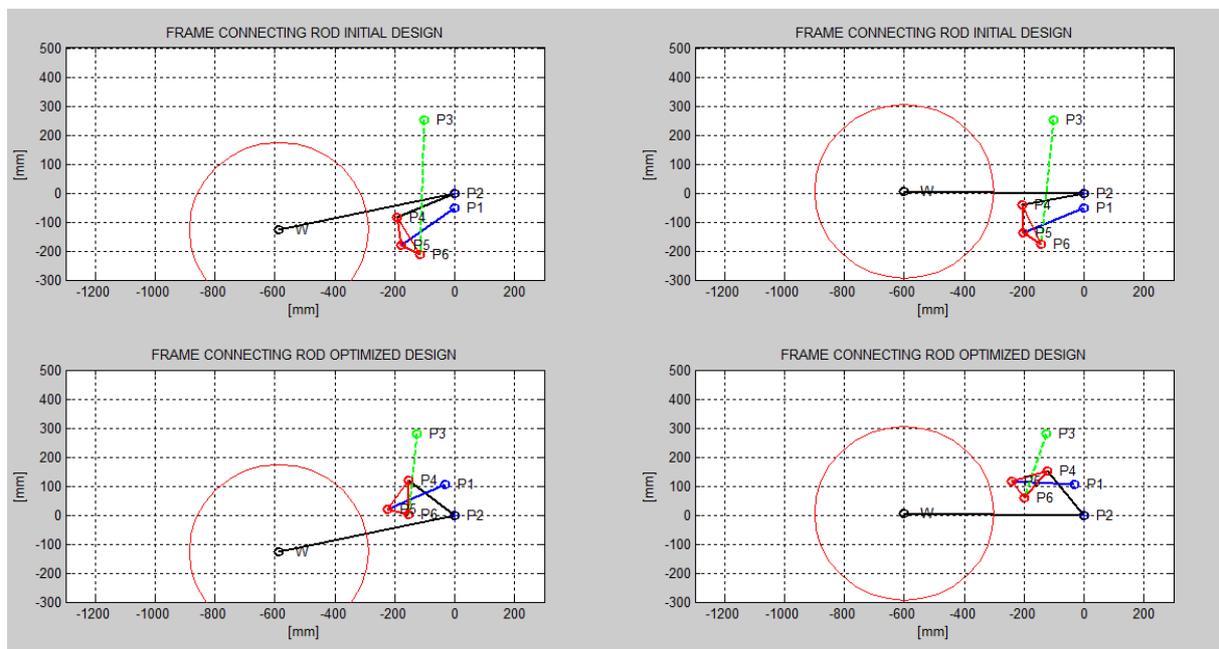


Figura 4.39. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

Per un equo confronto col caso precedente si è mantenuta una rigidezza della molla di 120 N/mm. L'errore è risultato molto basso, una caratteristica che sembra propria di questo meccanismo.

Per quanto riguarda l'analisi di sensibilità l'assemblabilità non è mai compromessa durante il moto della sospensione ma vi sono ben 5 parametri che influiscono in maniera importante sulla stabilità della soluzione, che richiede dunque precisione costruttiva. Questi parametri sono:  $\overline{P2P4}$ , l'angolo alpha ( $W_{P2P4}$ ),  $\overline{P4P5}$  e le posizioni orizzontali e verticali di P1. Gli effetti della variazione dei più importanti tra quelli indicati sono esposti nelle seguenti figure.

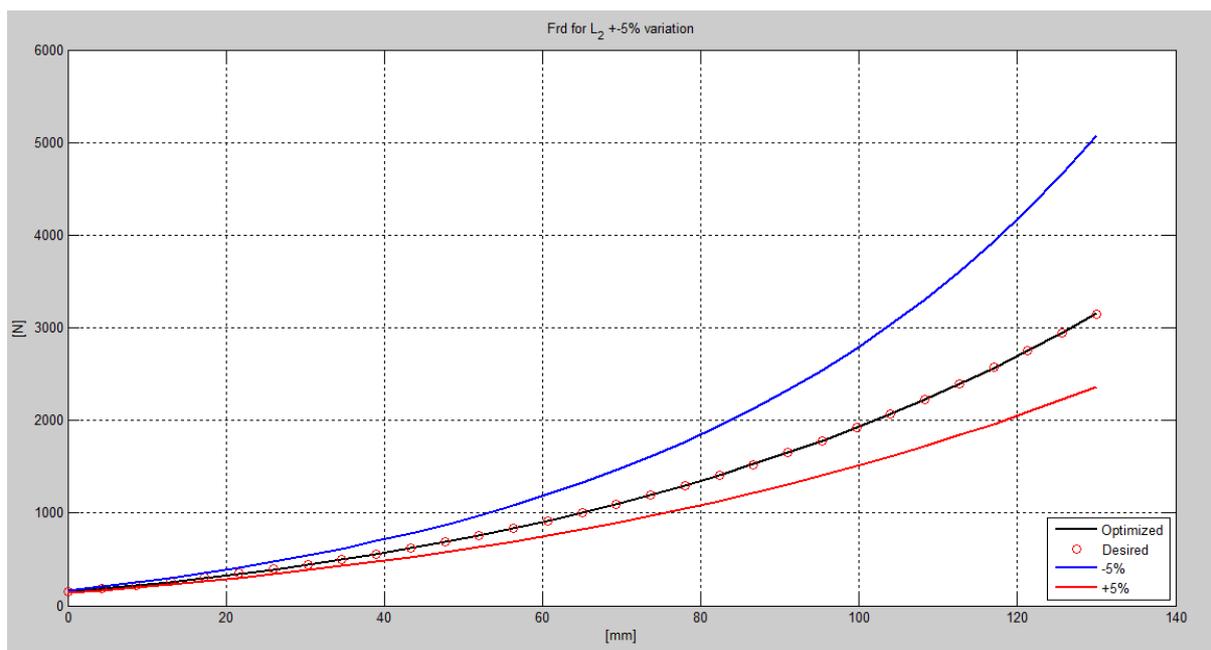


Figura 4.40. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P2P4}$

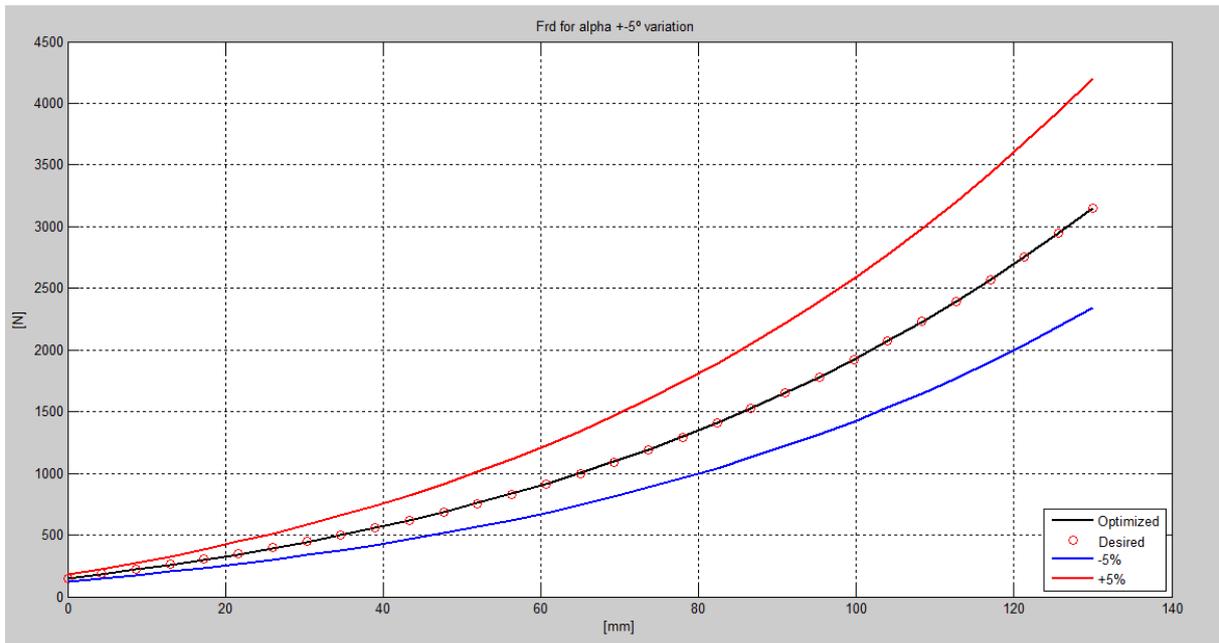


Figura 4.41. Analisi di sensibilità: variazione dell'angolo W\_P2\_P4

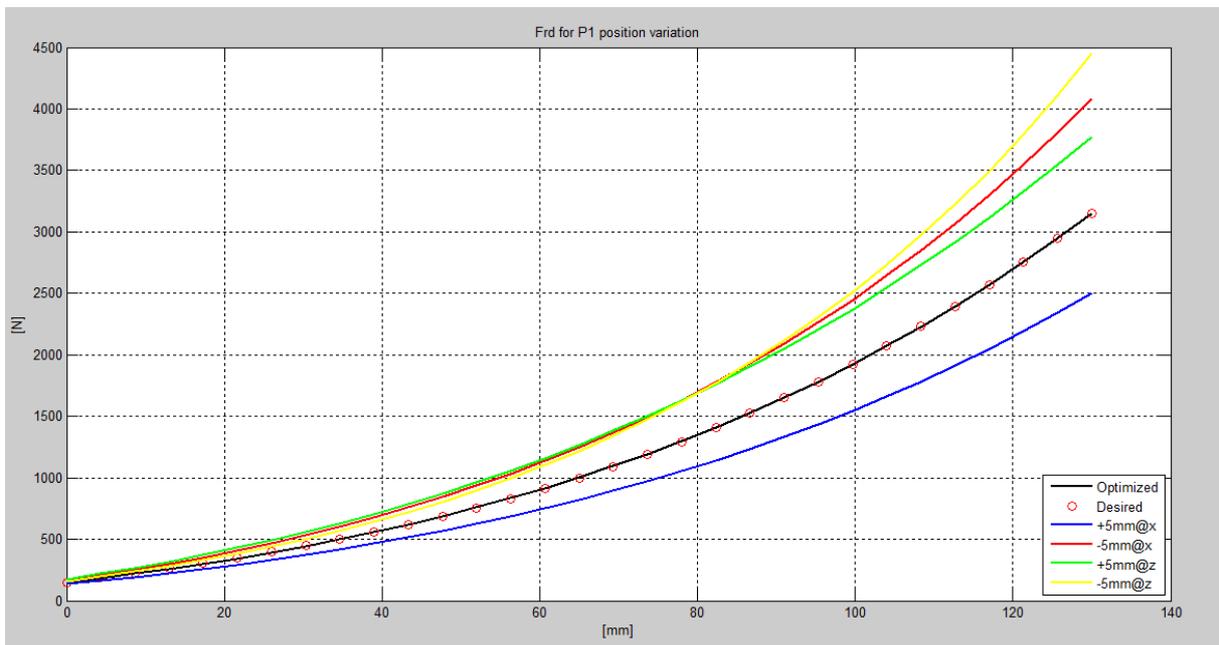


Figura 4.42. Analisi di sensibilità: variazione della posizione del punto P1 secondo x e z

### Caso regressivo

Nel realizzare curve della forza ridotta di tipo regressivo questo meccanismo si dimostra più adatto della sospensione a bilanciere – telaio: in questo esempio si è arrivati ad un indice di progressività di 0,55. Oltre questo valore il meccanismo si sovrapponeva con la ruota divenendo improponibile a meno di complicarne notevolmente la realizzazione. Questo comportamento conferma le indicazioni in [2] dove è indicata la sua capacità di realizzare abbastanza bene tutti e tre i tipi di curva. Osservando la figura 4.46 si evidenzia una notevole differenza tra la geometria di primo tentativo e quella finale. Ad esempio l'angolo delta (P6\_P1\_P5) dal valore iniziale di  $90^\circ$  passa a circa  $-18^\circ$ , creando un triangolo P4 P5 P6 di forma

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	300	250	288,6
Angolo W_P2_P4	-360	360	0	-44,8
$\overline{P4P5}$	20	400	100	223,4
$\overline{P1P5}$	20	400	100	187,4
$\overline{P5P6}$	20	400	50	164,7
Angolo P6_P1_P5	-360	360	90	-18,4
P3_z	-350	-200	-300	-321,0
P3_x	-400	100	50	-182,3
P1_z	50	200	170	160,1
P1_x	-50	100	-30	-50,0
Errore massimo [N]	2,0		Errore RMS [N]	1,1

speculare rispetto al precedente; in generale c'è stata una notevole variazione di quasi tutti i parametri.

Pur con la necessità di gestire un grande cambiamento il programma ha raggiunto la soluzione con un errore estremamente basso. La geometria

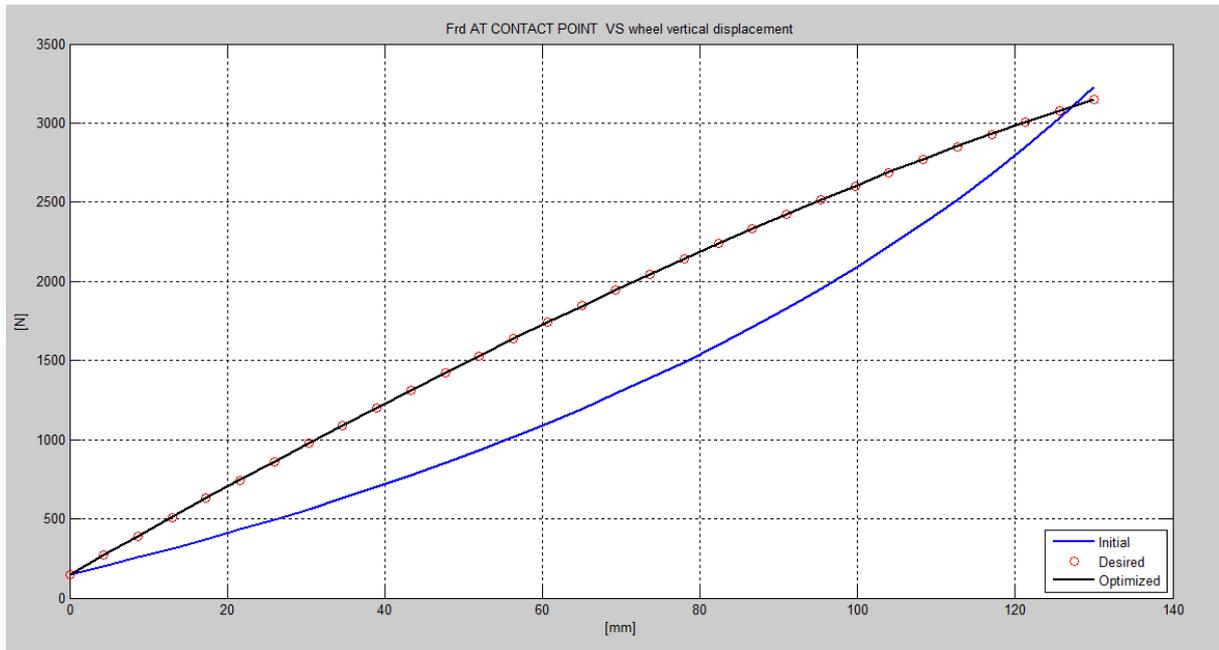


Figura 4.43. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

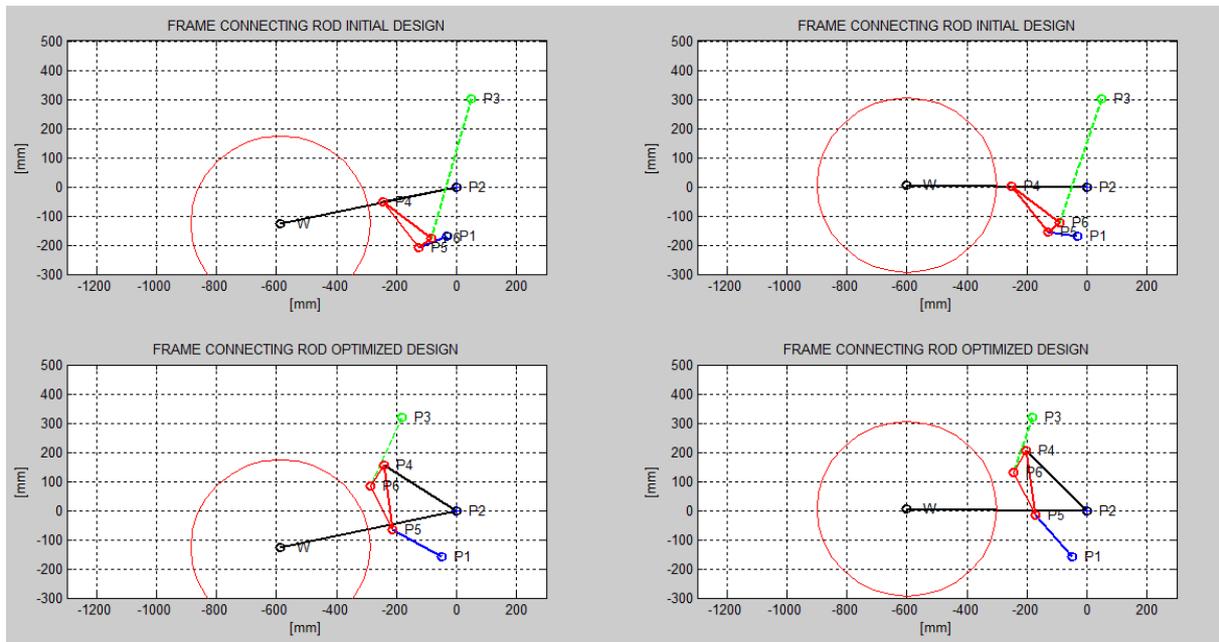


Figura 4.44. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

finale risulta meno compatta di quella iniziale eppure il valore di forza massima è molto simile.

Il rapporto di velocità va da un valore di 0,49 in estensione a 0,42 in compressione. La corsa è di 60 mm con una lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore di 200 mm. Il precarico con la molla di rigidezza 120 N/mm è di 2,5 mm.

Il meccanismo con tali dimensioni raggiunge un notevole grado di stabilità come si può verificare con l'analisi di sensibilità. Il parametro più delicato è  $\overline{P2P4}$  che con una variazione della lunghezza del 5% incide sul valore di forza massima per circa l'8%.

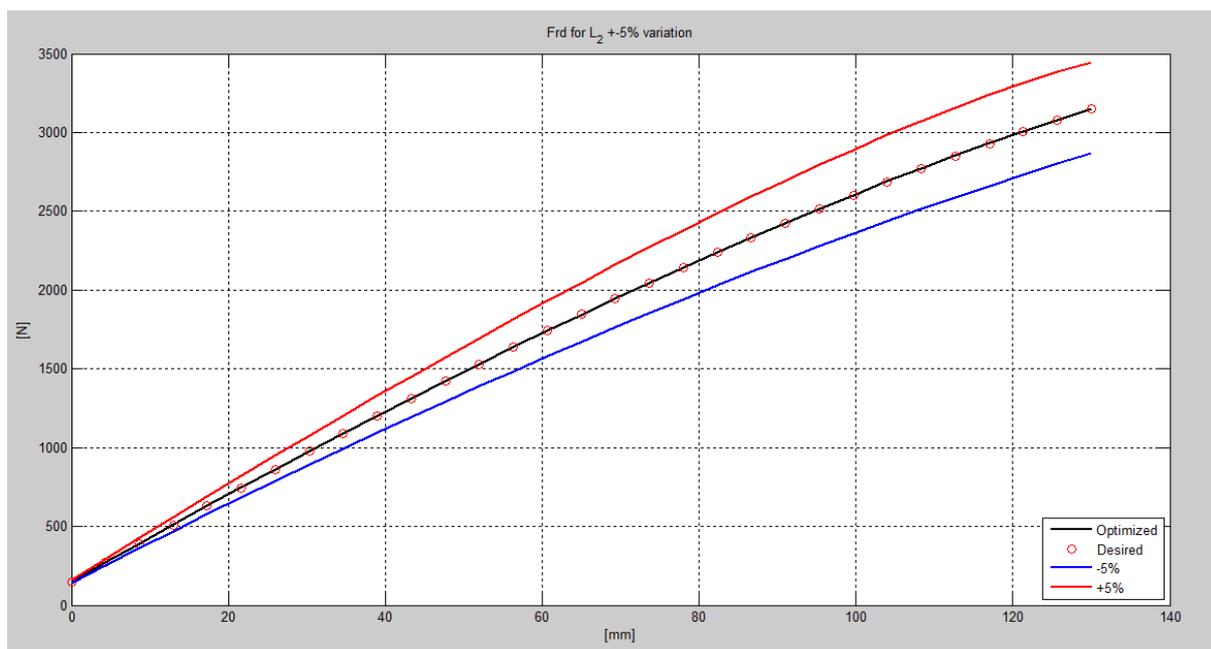


Figura 4.45. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P2P4}$

#### 4.4. SOSPENSIONE BILANCIERE – FORCELLONE

##### Caso lineare

La particolarità che distingue questo meccanismo da tutti gli altri è l'isolamento dal telaio del gruppo molla-ammortizzatore visto che quest'ultimo è interposto tra due membri del meccanismo (il forcellone e il bilanciante). Questa caratteristica permette di incrementare notevolmente la corsa della molla a parità di movimento della ruota utilizzando la geometria esattamente come illustrata in figura 1.3c. che mostra come la distanza tra i punti di attacco del gruppo molla-ammortizzatore si riduce comprimendo la sospensione sia per il movimento verso l'alto del forcellone sia per il

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	120	110	109,9
Angolo W_P2_P4	-90	50	20	17,2
$\overline{P4P5}$	30	400	270	261,7
$\overline{P1P5}$	30	60	50	50,1
$\overline{P1P6}$	30	400	120	118,5
$\overline{P2P3}$	50	300	80	77,2
Angolo P6_P1_P5	-180	180	160	131,5
Angolo W_P2_P3	-180	10	0	9,2
P1_z	-250	100	-230	-230,0
P1_x	-250	100	-20	-19,5
Errore massimo [N]	8,2		Errore RMS [N]	5,0

movimento verso il basso dell'attacco al bilanciere; ciò consente a parità di forza ridotta massima da raggiungere di compattare il meccanismo. Per questo esempio si è cercato dunque di massimizzare questo aspetto, per questo motivo la curva di primo tentativo è già abbastanza vicina a quella

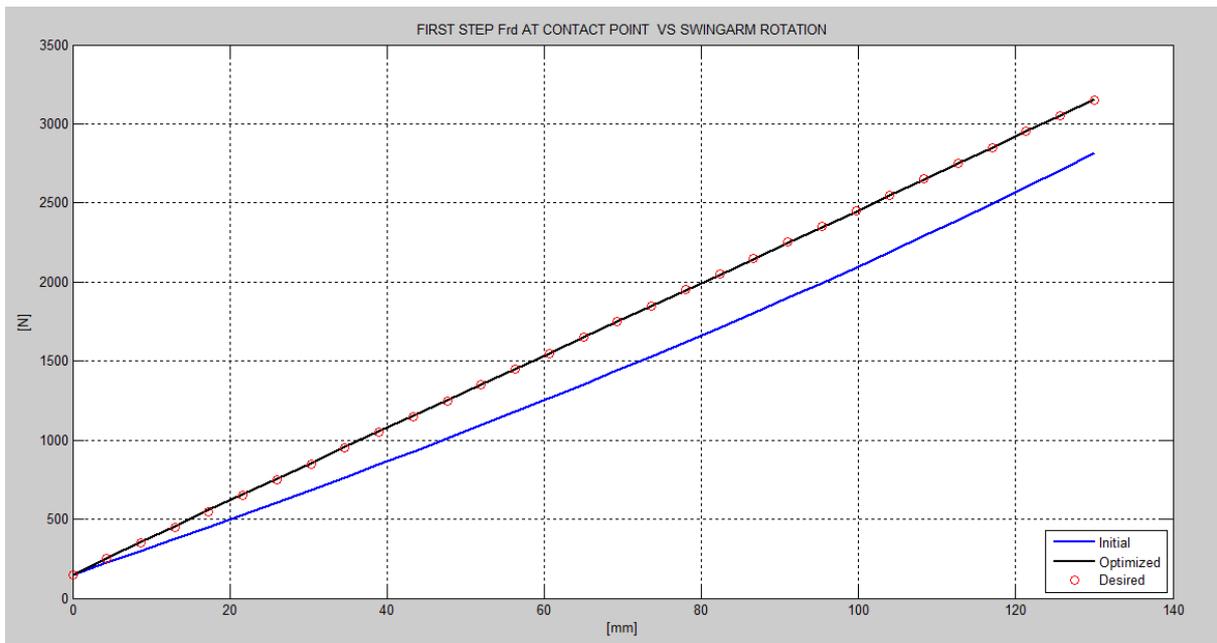


Figura 4.46. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

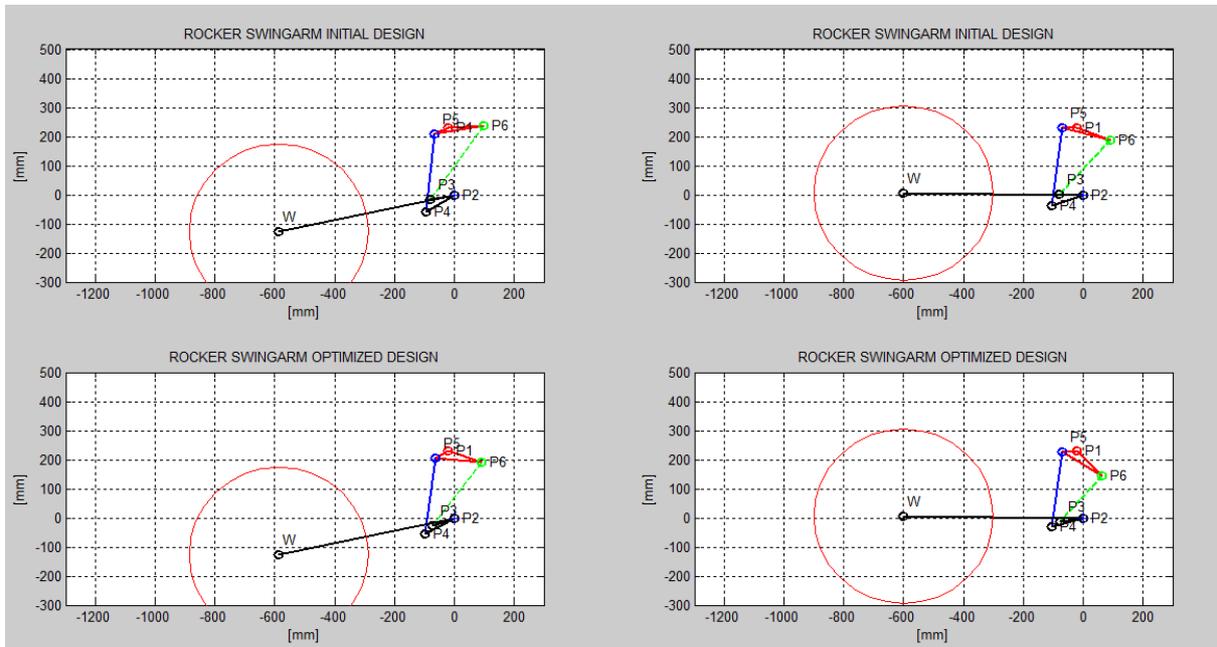


Figura 4.47. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

finale e alcuni parametri presentano dei limiti stretti, precisamente  $\overline{P2P4}$ ,  $\overline{P1P5}$  e l'angolo epsilon ( $W_{P2P3}$ ) ai quali si adattano di conseguenza anche  $\overline{P2P3}$  e  $\overline{P1P6}$  per poter soddisfare la funzione desiderata; poi anche la posizione verticale di P1 è molto limitata così da contenere l'ingombro sotto la sella; di conseguenza la lunghezza iniziale di  $\overline{P4P5}$  è un compromesso per non scendere sotto il valore di lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore senza tuttavia allungarlo troppo sempre per ridurre le dimensioni. Il risultato è davvero ottimo come mostra la figura 4.47: il gruppo molla-ammortizzatore si trova posizionato sopra il perno del forcellone e con la biella molto vicina e ciononostante la corsa ottenibile è tale da poter ridurre la rigidità della molla a 100 N/mm. Il rapporto di velocità è pari a circa 0,48 che è un valore in linea agli esempi precedenti ma ottenuto con dimensioni dei membri notevolmente ridotte. A tal proposito si deve ricordare che il numeratore del  $\tau$  è la velocità di accorciamento del gruppo molla-ammortizzatore che negli altri casi coincide con la velocità del suo punto di attacco inferiore (essendo quella del punto al telaio per forza di cose nulla); ma nel meccanismo bilanciere – forcellone i punti si muovono in opposizione per cui anche uno spostamento ridotto permette di ottenere una corsa elevata: il valore massimo per questo caso è di 62 mm. La lunghezza minima del gruppo molla-ammortizzatore è di 210 mm. Il precarico da applicare è di 3 mm. L'analisi di sensibilità non indica particolari criticità; i parametri più influenti in tal senso sono  $\overline{P2P4}$ ,  $\overline{P1P5}$ ,  $\overline{P1P6}$ , la posizione di P1 e  $\overline{P4P5}$ . Per quest'ultimo dato che è il più delicato, la figura 4.48 illustra gli effetti della variazione della sua lunghezza.

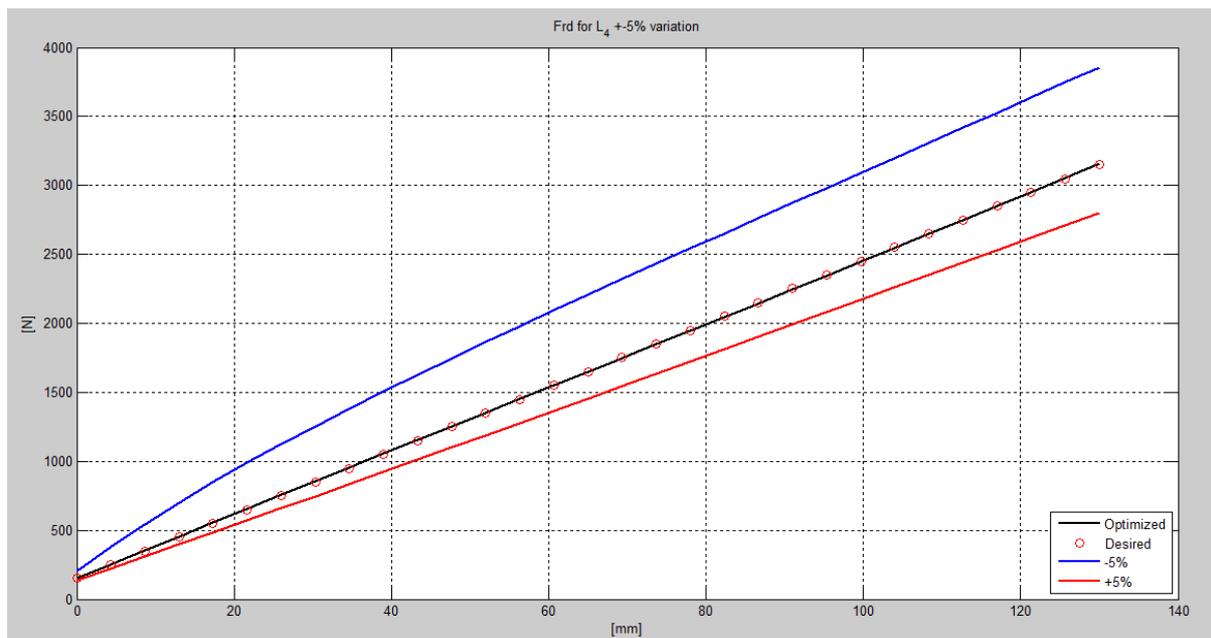


Figura 4.48. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P4P5}$

### Caso progressivo

La particolare caratteristica di questo meccanismo si mostra molto vantaggiosa anche per questo esempio: infatti la sua compattezza permette di creare una notevole variazione del  $\tau$  sempre con i principi già descritti nei paragrafi precedenti, ossia utilizzando geometrie che permettano nel campo di movimento della sospensione di variare notevolmente il braccio di leva effettivo, operazione limitata principalmente dal massimo ingombro consentito che in questo caso è quindi un punto di forza sfruttabile per incrementare questa caratteristica. Difatti l'indice di progressività massimo ottenuto con una molla di rigidità 120 N/mm è pari a 10, con quindi un netto distacco rispetto alle altre tre tipologie già viste. Peraltro il risultato continua ad essere facilmente ottenibile anche variando i parametri di

primo tentativo (soprattutto la posizione orizzontale di P1) che è stata così adeguata per ottimizzare l'ingombro anche se la priorità in questo caso era il raggiungimento della massima progressività.

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	30	300	150	159,1
Angolo W_P2_P4	-90	50	40	11,7
$\overline{P4P5}$	30	400	260	258,8
$\overline{P1P5}$	25	390	30	30,6
$\overline{P1P6}$	30	400	50	96,4
$\overline{P2P3}$	50	300	250	93,3
Angolo P6_P1_P5	-360	360	220	244,0
Angolo W_P2_P3	-180	40	40	40,0
P1_z	-300	200	-180	-182,7
P1_x	-250	100	-20	-22,1
Errore massimo [N]	33,9		Errore RMS [N]	15,4

Oltre questo valore di progressività il solutore continua a convergere ma si raggiungono presto dimensioni verticali eccessive (nel tentativo da parte del programma di massimizzare la variazione del  $\tau$  con il bilanciere in posizione iniziale verticale e sempre più lungo e abbassando anche eccessivamente il punto di attacco inferiore della molla). I valori dell'errore non sono i più bassi ma si devono valutare tenendo conto della curvatura estrema ottenuta. La figura 4.49 denota un marcato aumento della forza

massima e della curvatura dalla configurazione di primo tentativo a quella finale. Il valore del rapporto di velocità varia da 0,15 in estensione a 0,52 in compressione. La corsa del gruppo molla-ammortizzatore è di 42 mm e la sua lunghezza minima è di 312 mm. Il precarico è di ben 8,5 mm.

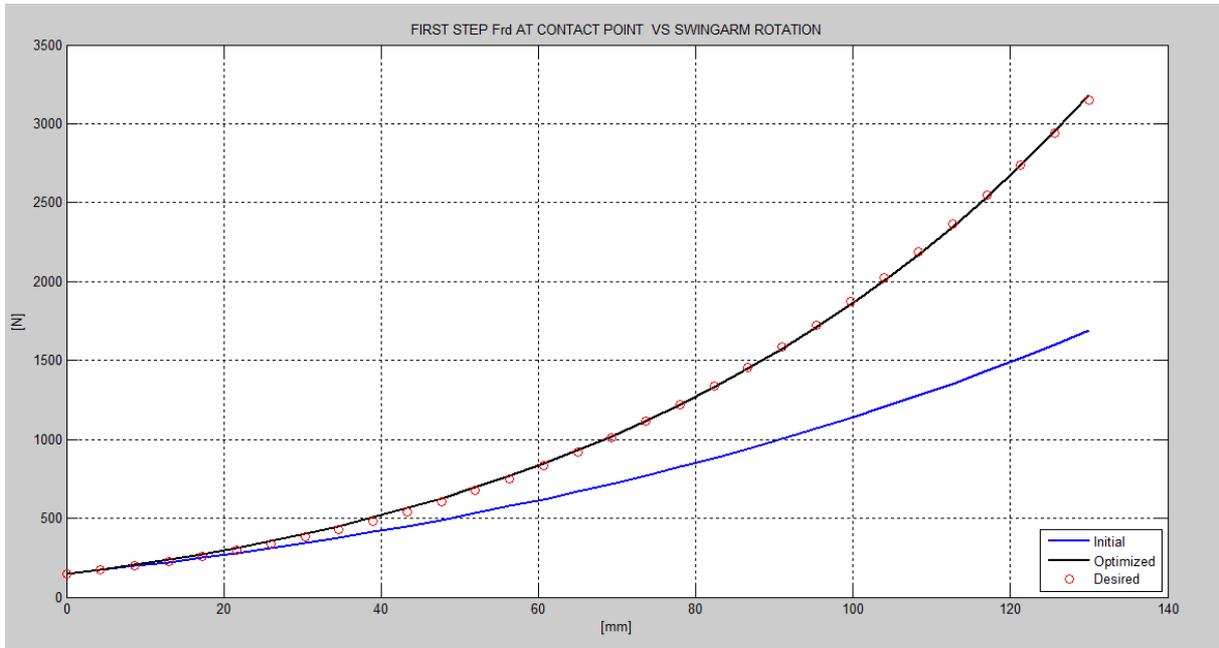


Figura 4.49. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

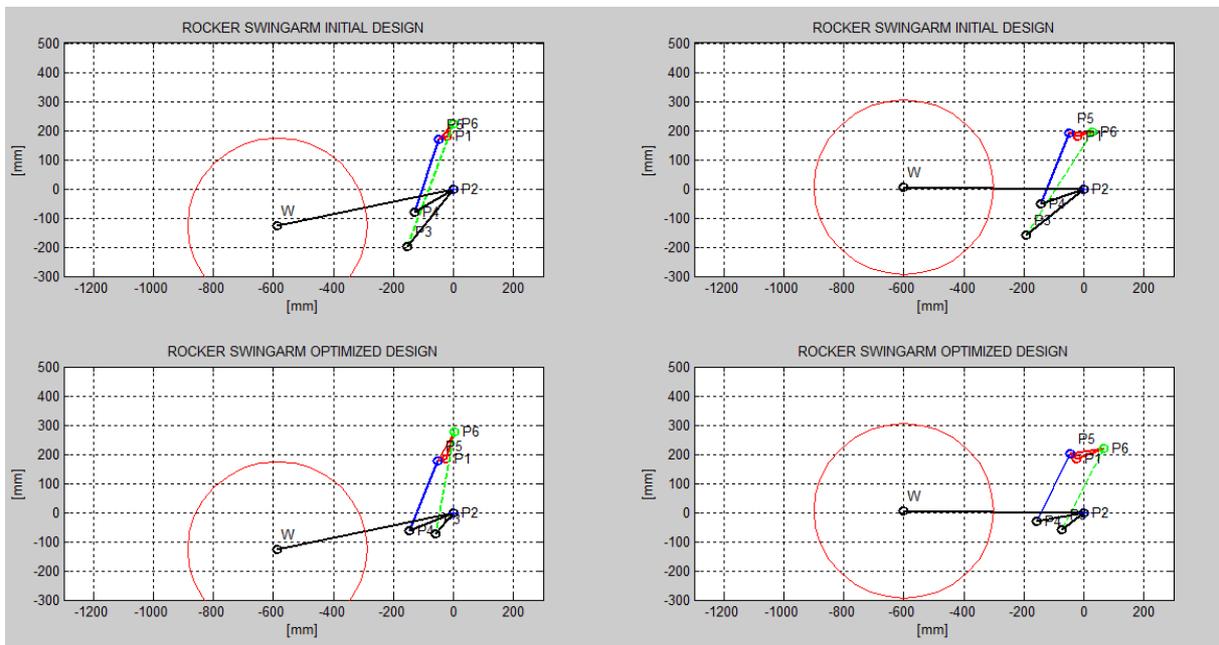


Figura 4.50. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

Nell'analisi di sensibilità si evidenzia un problema di assemblabilità per il parametro  $\overline{P4P5}$  in posizione estesa, infatti il picco in figura 4.51 è vicino all'origine degli assi e si estende per valori negativi cosicché finisce fuori scala e non è interamente visibile: esso riguarda la linea blu quindi il caso di accorciamento come si poteva già intuire dalla figura 4.50. L'angolo di trasmissibilità minimo è pari a  $61^\circ$  (dove si ricorda per  $90^\circ$  si ha la massima trasmissibilità e a  $0^\circ$  si ha singolarità); da questo esempio si comprende dunque che questo parametro da solo non è sufficiente a descrivere questa situazione che dipende anche dal rapporto delle dimensioni dei membri e perciò l'analisi di sensibilità risulta più efficace anche per questo scopo.

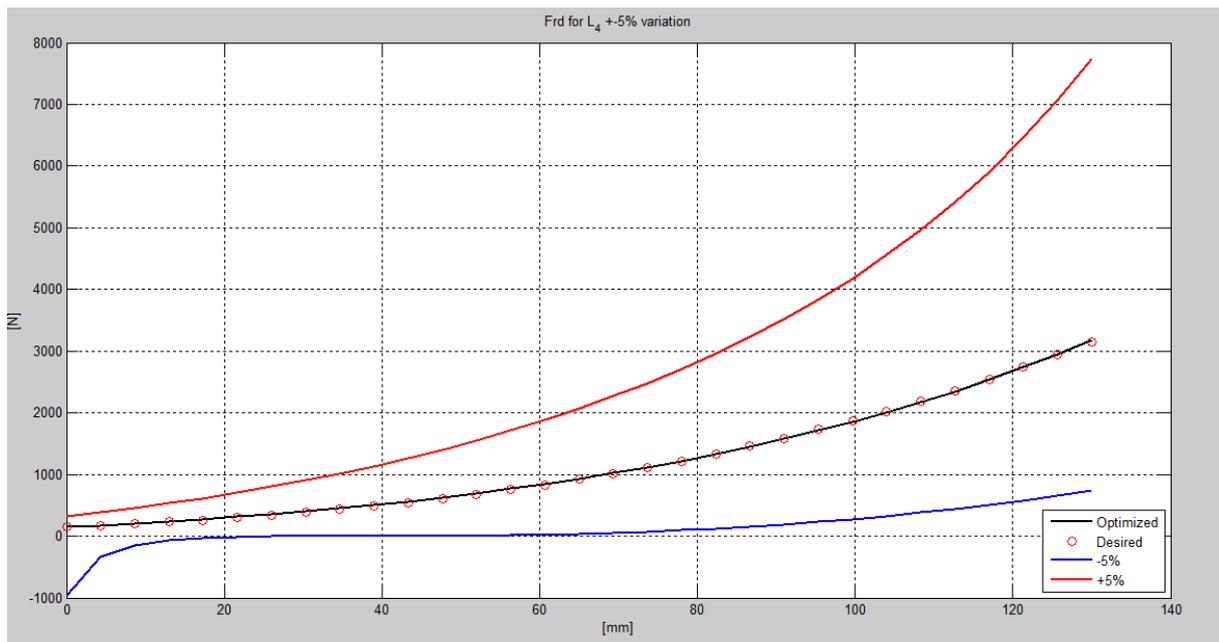
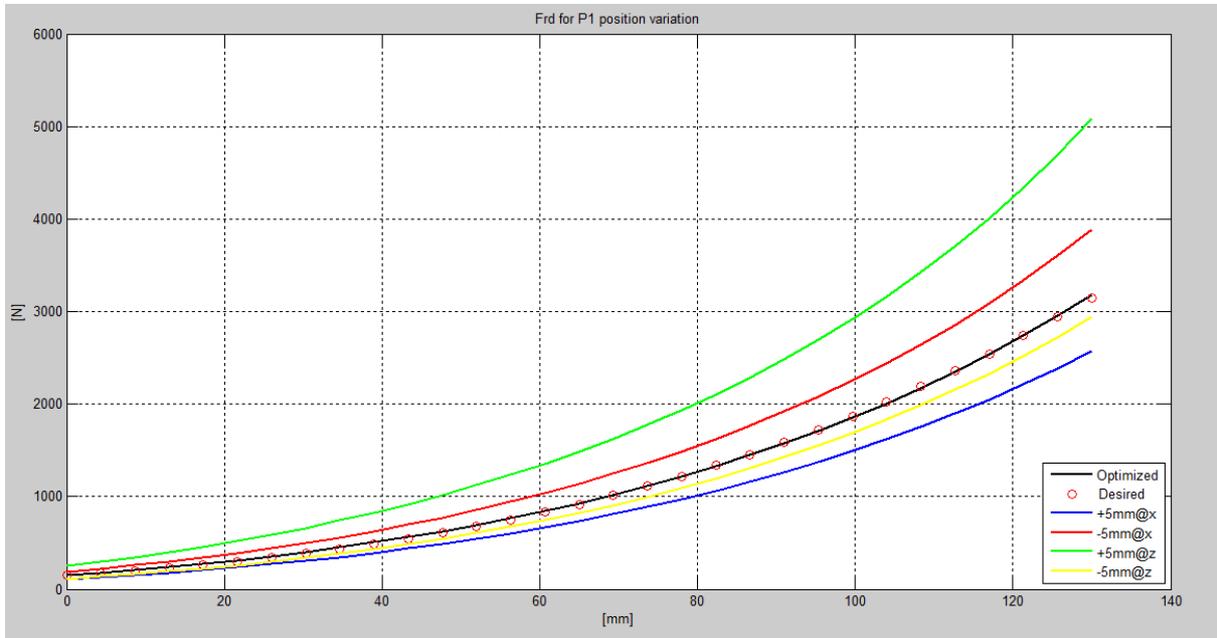


Figura 4.51. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P4P5}$

Altri quattro parametri creano variazioni importanti:  $\overline{P2P4}$ ,  $\overline{P2P3}$  e le posizioni verticali e orizzontali di P1. L'effetto di quest'ultime è illustrato in figura 4.52. Questa delicatezza della soluzione ottenuta è diretta

conseguenza delle dimensioni ridotte e del grado di progressività così elevato.



**Figura 4.52. Analisi di sensibilità: variazione della posizione del punto P1 secondo x e z**

### Caso regressivo

Le caratteristiche di questo meccanismo che hanno permesso di ottenere risultati superiori nei casi precedenti continuano a funzionare anche per la regressività: infatti l'indice di progressività raggiunto è addirittura di 0,1 (il più basso ottenuto finora era di 0,55). I valori limite dei parametri sono praticamente gli stessi del caso precedente, quelli di primo tentativo sono un po' più abbondanti ed infatti la forza massima di primo tentativo raggiunge un valore più di tre volte superiore a quello voluto pur senza eccedere nelle dimensioni massime consentite (ad esempio senza interferire

con la ruota), fatto che non era mai capitato negli esempi precedenti e che fornisce un'ulteriore prova della capacità di questo meccanismo di realizzare grandi forze ridotte entro i limiti di ingombro o alternativamente di ottenere le stesse forze ridotte con dimensioni estremamente compatte.

Parametri	Limite inferiore	Limite superiore	OTTIMIZZAZIONE	
			Vettore di primo tentativo	Vettore soluzione
$\overline{P2P4}$	20	300	250	245,4
Angolo W_P2_P4	-90	50	20	17,8
$\overline{P4P5}$	20	400	300	363,9
$\overline{P1P5}$	20	390	50	90,7
$\overline{P1P6}$	20	400	50	76,4
$\overline{P2P3}$	20	300	285	258,0
Angolo P6_P1_P5	-180	180	160	82,4
Angolo W_P2_P3	-180	40	20	1,9
P1_z	-300	0	-280	-275,6
P1_x	-250	100	-200	-208,6
Errore massimo [N]	4,5		Errore RMS [N]	2,1

Anche la geometria ottimizzata è più ingombrante di quella degli altri due casi studiati con questo meccanismo, ma ciò ha permesso di contenere l'errore a valori davvero irrisori. Il cambiamento maggiore rispetto la soluzione di primo tentativo riguarda l'attacco inferiore dell'ammortizzatore che è stato sollevato e la lunghezza di quest'ultimo che è stata notevolmente ridotta pur rimanendo sempre entro il limite minimo di 200

mm (il valore minimo in compressione è di 210 mm). Per ottenere un tale comportamento regressivo la rigidità della molla è stata mantenuta massima rispetto l'intervallo di scelta (120 N/mm).

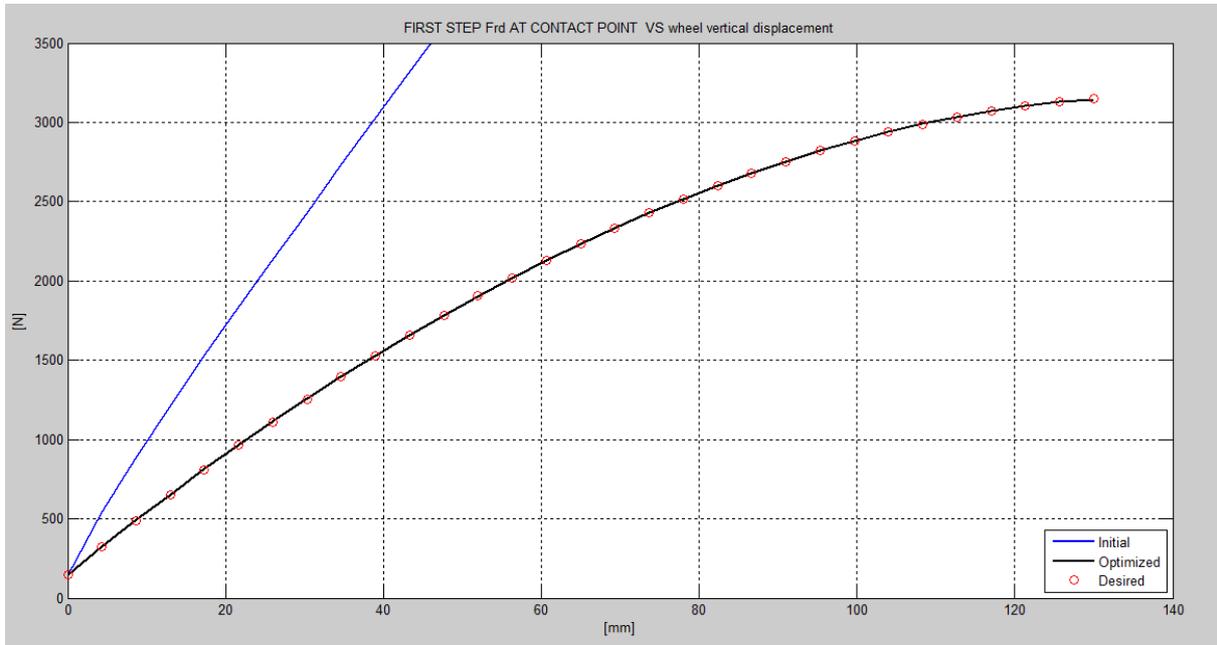


Figura 4.53. Forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo

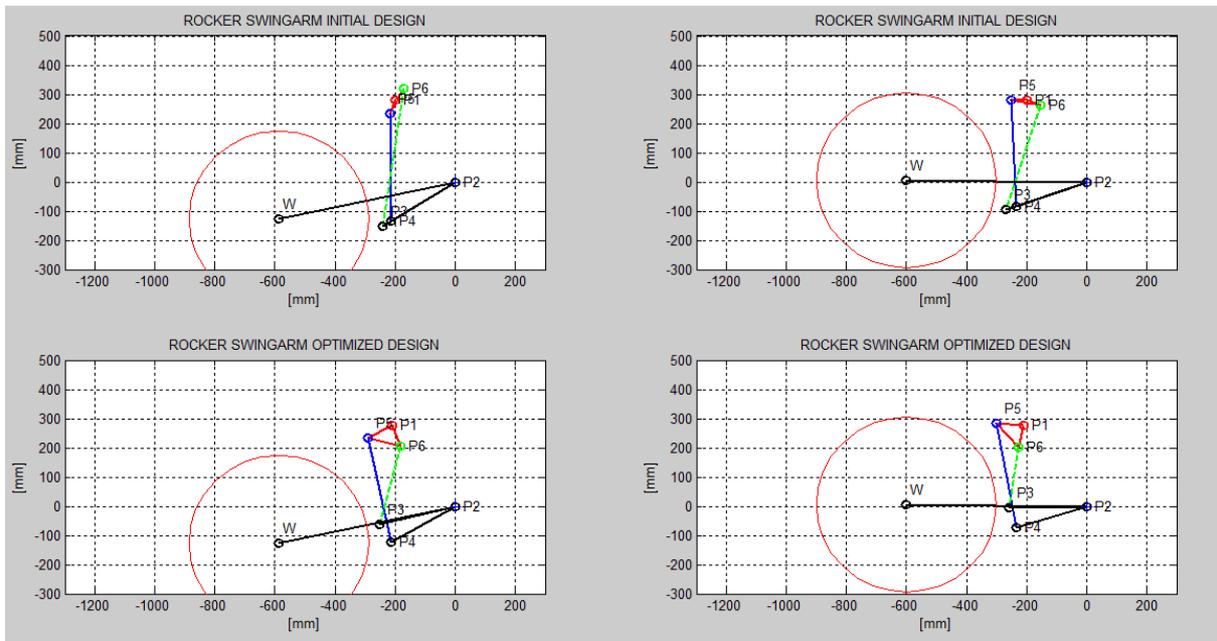


Figura 4.54. Grafico del tentativo iniziale ed ottimizzato nelle posizioni iniziale e finale

Il rapporto di velocità varia da 0,58 con sospensione estesa a 0,39 con sospensione compressa. La corsa del gruppo molla-ammortizzatore è di 64 mm e il precarico è di 2 mm.

Infine per l'analisi di sensibilità si segnalano quattro parametri:  $\overline{P4P5}$ ,  $\overline{P2P3}$ , delta (P6\_P1\_P5) e la posizione verticale di P1. Tra questi il più importante è il primo: il suo effetto è mostrato in figura 4.55.

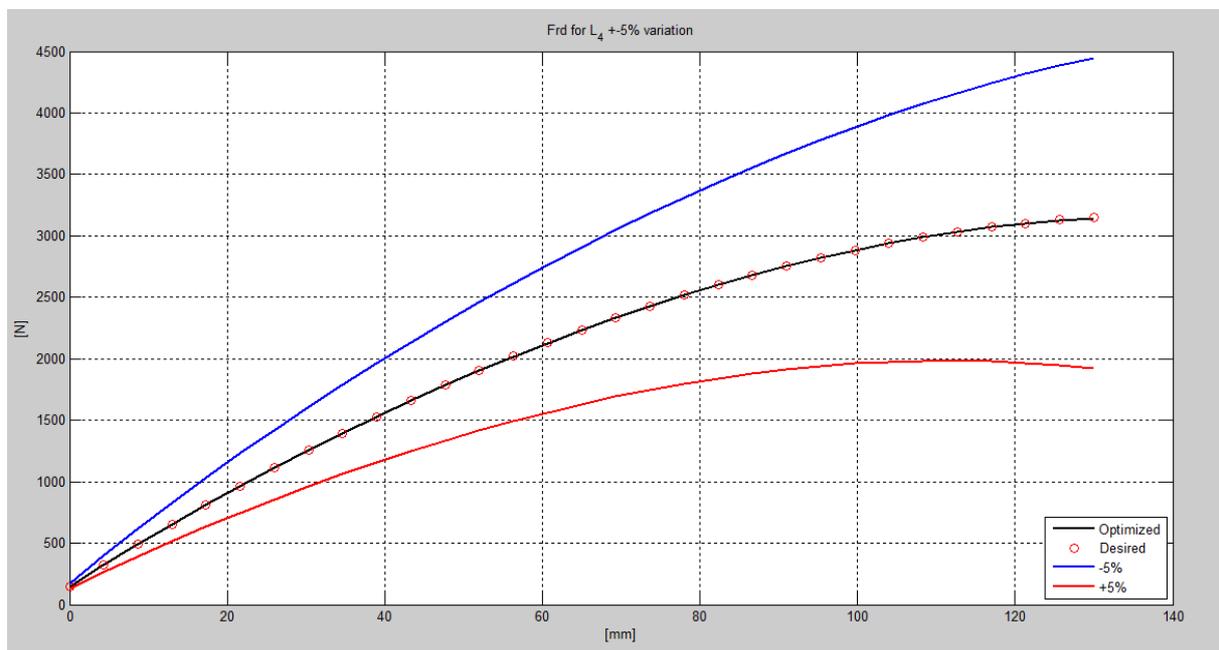


Figura 4.55. Analisi di sensibilità: variazione della lunghezza  $\overline{P4P5}$

## 4.5. ANALISI DEI RISULTATI

In questo paragrafo si commenteranno e approfondiranno alcuni degli aspetti più indicativi sulla base dei risultati ottenuti. Innanzitutto la figura 4.56 riassume le capacità dei quattro tipi di sospensione presi in considerazione di ottenere comportamenti progressivi e regressivi delle curve di forza ridotta:

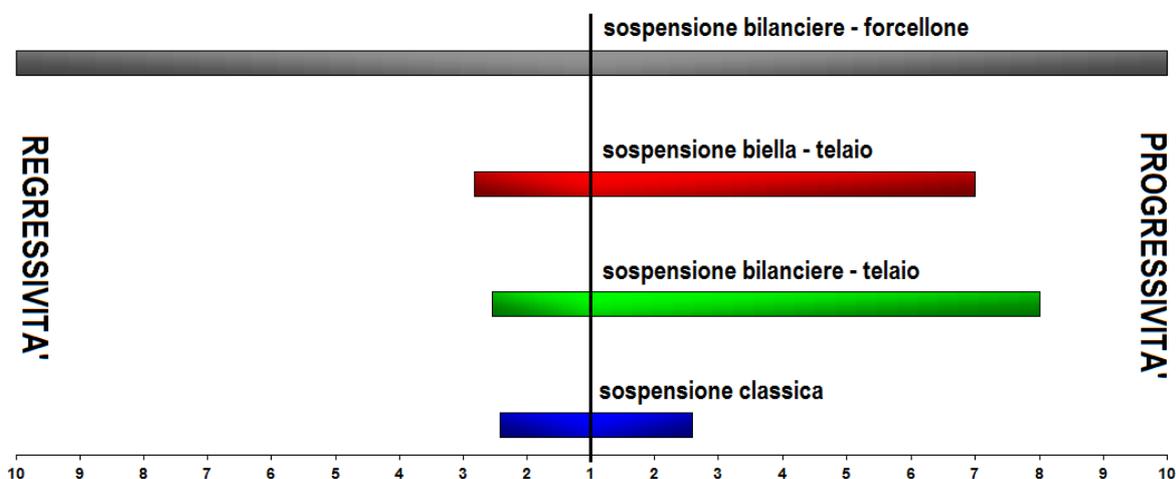


Figura 4.56. Grafico del comportamento progressivo e regressivo delle quattro sospensioni

La rappresentazione è basata sull'indice di progressività, cioè sul rapporto delle pendenze in uscita ed in ingresso delle curve della forza ridotta che è quindi il rapporto tra la rigidità ridotta finale e quella iniziale. Per rendere più chiaro il comportamento del campo regressivo del grafico nella metà a sinistra si è utilizzata la definizione inversa, ossia il rapporto tra rigidità ridotta in ingresso e quella in uscita cosicché anche da quel lato il rapporto è sempre maggiore di uno e soprattutto si possono apprezzare le proporzioni reali dei valori ottenuti.

Il primo fatto che colpisce è la superiorità dell'ultima tipologia presentata, soprattutto in campo regressivo. Proprio su questo aspetto se si considerano solo le prime tre sospensioni si evidenzia una propensione al comportamento progressivo o viceversa una maggiore difficoltà a realizzare una curva regressiva (questa considerazione non riguarda la sospensione bilanciata – forcellone che invece ha un comportamento assolutamente simmetrico tra progressività e regressività). E' interessante cercare di spiegare questo comportamento utilizzando i risultati teorici presentati nel paragrafo 1.4. Dati i punti fissi di progetto, che sono la forza ridotta massima, l'intervallo di rigidzze ammissibili della molla e il campo di dimensioni fattibili, la capacità di ottenere la curvatura della funzione forza ridotta dipende dalla variazione del  $\tau$ . Se quest'ultimo viene approssimato con il suo sviluppo in serie del primo ordine (3):

$$\tau = \tau_0 + \frac{d\tau}{dx} \Delta x$$

La forza ridotta può essere espressa come (4):

$$F_{ridotta} = F_s * \tau_0 + F_s * \left( \frac{d\tau}{dx} \Delta x \right)$$

dove  $F_s$  rappresenta la forza della molla,  $\tau_0$  è il rapporto di velocità nella posizione iniziale e  $\frac{d\tau}{dx} \Delta x$  è la variazione del  $\tau$  a seguito dello spostamento  $\Delta x$ . Ora poiché il rapporto di velocità è crescente nel caso progressivo e decrescente nel caso regressivo la sua derivata sarà rispettivamente positiva e negativa. Nel caso progressivo dunque il secondo termine dell'equazione (4) si somma al primo invece nel caso regressivo si sottrae. Per questo a parità delle altre condizioni per ottenere lo stesso valore di  $F_{ridotta}$  per il

caso regressivo è necessario aumentare  $F_s$ , ed avendo vincolato il coefficiente di rigidità della molla ciò può essere ottenuto unicamente incrementando la corsa del gruppo molla-ammortizzatore. Infatti osservando gli esempi si vede che in tutti i casi a parità di rigidità della molla i valori di corsa sono maggiori per la regressività rispetto alla progressività. A questo punto, dato che il valore di corsa ottenibile è legato alle dimensioni del meccanismo, a parità di limiti d'ingombro si otterrà un minore differenziale di  $\tau$ , dalla posizione iniziale a quella finale della sospensione, nel caso regressivo, il che spiega il comportamento effettivamente riscontrato. Si può ottenere questa stessa interpretazione in maniera più intuitiva guardando gli schemi ottenuti per i vari meccanismi. Per i casi progressivi comprimendo la sospensione si nota la somma di due effetti: lo spostamento del punto mobile di attacco della molla verso il perno della ruota e verticalmente un suo movimento maggiore rispetto al punto di pari coordinata  $x$  solidale al forcellone. Soprattutto questa caratteristica, oltre a generare progressività, aumenta la corsa e quindi concorre a raggiungere il valore massimo richiesto. Al contrario nei casi regressivi il movimento verticale del punto mobile di attacco della molla è minore del movimento del forcellone e quindi riduce la corsa e di conseguenza la forza ridotta massima e questo fenomeno è tanto più marcato quanto più la curva ha un andamento regressivo, cioè quanto più è grande il differenziale del  $\tau$  tra le posizioni iniziale e finale.

Le caratteristiche dei rapporti di velocità sopra descritte sono responsabili anche di un'altro effetto: il precarico da imporre alla molla a parità di precarico ridotto richiesto (legato alle caratteristiche del veicolo e del pilota e quindi uguale per tutti i casi in questione) è maggiore per le curve progressive rispetto alle regressive. Riprendendo la relazione tra questi due valori si ha:

$$P_{rid} [N] = P_{molla} [N] * \tau$$

Quindi poiché il precarico ridotto dipende dal rapporto di velocità iniziale essendo quest'ultimo basso nel caso progressivo si dovrà compensare con una maggiore forza di precarico della molla.

## CONCLUSIONI

Si è sviluppato un metodo di sintesi dimensionale del meccanismo applicato a sospensioni posteriori motociclistiche. I parametri di progetto, che rappresentano le lunghezze dei membri, gli angoli e le posizioni dei punti di attacco, vengono variati iterativamente in modo da minimizzare la distanza tra l'andamento della forza ridotta desiderata e quella ottimizzata. Il metodo riesce a trattare anche il problema dell'assemblabilità del meccanismo utilizzando una strategia assimilabile al concetto di funzione penalità, ossia incrementando artificialmente l'errore in prossimità di questa condizione critica, consentendo al solutore di riconoscerla e di continuare in altre direzioni. La moltitudine di esempi applicativi presentati in questa tesi hanno confermato l'efficacia e la stabilità del metodo.

Il programma con il quale è stato implementato dopo una fase di studio ed aggiustamento sperimentale si è dimostrato valido e affidabile e risulta in grado di gestire varie problematiche oltre alla non-assemblabilità, quali il controllo delle dimensioni del gruppo molla-ammortizzatore, in modo da garantire che siano realistiche e che lo rendano realizzabile, e permette anche di evitare configurazioni che, seppur fattibili, non sono praticamente utilizzate, come quelle che prevedono l'utilizzo di una molla a trazione. I dati da fornire in ingresso sono innanzitutto la scelta di una tra le quattro configurazioni di sospensioni attualmente implementate, le caratteristiche della forza ridotta desiderata (valore del precarico ridotto, della forza massima, l'andamento della curva scelto imponendo le pendenze, e quindi le rigidità ridotte, iniziale e finale), la rigidità della molla, i valori limite dei parametri di progetto e una loro scelta di primo tentativo; poi vi sono altri dati di minore importanza o già preimpostati con i quali si può adattare

il modello alle proprie esigenze specifiche. Al termine dell'ottimizzazione il programma mostra i parametri ottimizzati con altre informazioni utili: gli errori, massimo e RMS, il valore di precarico della molla e il suo valore di corsa massima. Per rendere i risultati più chiari e immediati vengono presentati con grafici comprendenti gli schemi del meccanismo di primo tentativo e ottimizzato agli estremi del campo di movimento, l'andamento della forza ridotta desiderata, ottimizzata e di primo tentativo ed altri parametri utili.

Al programma principale è allegata un'applicazione che permette di effettuare un'analisi di sensibilità del meccanismo che valuta gli effetti della variazione di ogni parametro di progetto sulla forza ridotta ottimizzata. Questa applicazione presenta due peculiarità: fornisce informazioni sulla stabilità e sull'attuabilità della soluzione ottenuta indicando ad esempio per quali parametri sia necessaria una maggiore precisione in fase di produzione, ma è anche un valido strumento in fase di progettazione perché individuando i parametri meno sensibili informa il progettista su quali potrà intervenire perseguendo risultati quali la massima compattezza o il posizionamento ideale del gruppo molla-ammortizzatore compatibilmente con altri vincoli progettuali.

Gli esempi applicativi realizzati, oltre a testimoniare il buon funzionamento del metodo, hanno permesso di confrontare le caratteristiche delle quattro tipologie di sospensione. Ci si è soffermati sulla capacità di ottenere curve progressive e regressive e si è definito il campo di variabilità di ogni tipologia trovando riscontri nella letteratura scientifica.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] William F. Milliken, Douglas L. Milliken, “*Race Car Vehicle Dynamics*”, SAE, 1995.
- [2] Vittore Cossalter, “*Motorcycle Dynamics*”, Ed. italiana, Padova, 2008.
- [3] Desmond J. Higham, Nicholas J. Higham, “*Matlab Guide*”, Second Edition, 2005.
- [4] Fabrice D. Rouah, Gregory Vainberg, “*Option pricing models & volatility using Excel VBA*”, Wiley & Sons, 2007.
- [5] Vittore Cossalter, “*Meccanica applicata alle macchine*”, 5<sup>a</sup> edizione, Edizioni Progetto, Padova, 2006.
- [6] Paul Thede, Lee Parks, “*Race tech’s Motorcycle Suspension Bible*”, Motorbooks Workshop, 2010.
- [7] Sport Rider Magazine, June 2010.
- [8] Alberto Doria, “*Assetto e Controllo del Veicolo*”, dispense del corso.
- [9] Massimo Guiggiani, “*Dinamica del Veicolo*”, Città Studi Editore, 2007.
- [10] R.A.Williams, “*Automotive active suspension Part 1: basic principles*”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, Vol. 211, No. 6, 1997.
- [11] Mike Blundell, Damian Harty, “*The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*”, Elsevier, 2004.
- [12] Chih-Jer Lin, Po-Ting Lin, Shen-Kai Yu, “*Optimization of Suspension Design Based on Evolution Algorithm for a Novel E-bike*”, World Congress on Intelligent Control and Automation, June 2011, Taiwan.

- [13] Vittore Cossalter, Alberto Doria, M. Pasini, “*A simple numerical approach of a class of planar mechanisms*”, Mechanism and Machine Theory, Vol 27, no. 3, pp. 357-366, 1992.
- [14] Balike, K. P. , Rakheja, S., Stiharu, I., “*Development of kinetodynamic quarter-car model for synthesis of a double wishbone suspension*”, Vehicle System Dynamics, 49: 1, 107 — 128, First published on: 10 June 2010.
- [15] Vittore Cossalter, Mauro Da Lio, Alberto Doria, “*Optimum synthesis of spatial function generator mechanisms*”, Meccanica, Volume 28, pp 263-268, 1993.
- [16] Giovanni Dalla Torre, “*Analisi dinamica dei veicoli a due ruote mediante modelli matematici*”, tesi di dottorato in Ingegneria Industriale, Università di Padova, Anno accademico 2006/2008.
- [17] Sancibrian, Ramon, Garcia, Pablo, Viadero, Fernando, Fernandez, Alfonso, De-Juan, Ana, “*Kinematic design of double-wishbone suspension systems using a multiobjective optimisation approach*”, Vehicle System Dynamics, 48: 7, 793 — 813, First published on: 09 December 2009.

## **RINGRAZIAMENTI**

Desidero ringraziare il gruppo di ricerca MDRG dell’Università di Padova per il supporto ricevuto e in particolare il professor Doria per la professionalità e la cortesia con cui mi ha seguito durante lo svolgimento di questo lavoro.