



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Probabilità di transizione  
nei nuclei speculari  $^{49}\text{Mn}$  e  $^{49}\text{Cr}$

Relatore

Prof.ssa Silvia Monica Lenzi

Laureando

Mirko Menni

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Il modello a shell</b>	<b>4</b>
2.1	Modello a shell di particella singola . . . . .	4
2.2	Modello a shell interattivo . . . . .	6
2.3	Il metodo Lanczos . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Transizioni elettromagnetiche</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Stima dei livelli energetici del <math>^{49}\text{Mn}</math> e <math>^{49}\text{Cr}</math></b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Stima delle probabilità di transizione ridotte</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>15</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>16</b>



# 1 Introduzione

Nell'ultimo secolo si è potuto rilevare non solo come gli elementi della tavola periodica si possano combinare in vari modi per formare le varie sostanze, ma anche che tali elementi possano mutare uno nell'altro. Ci si è imbattuti in nuovi fenomeni, in nuovi componenti della materia e in complicati rapporti tra le grandezze in gioco, che hanno aperto lo sguardo su ulteriori profondità della natura. Si è così sviluppata la fisica nucleare, che ha ricondotto tali fenomeni al nucleo dell'atomo. In questa tesi per descriverlo ci avvaliamo del modello a shell, un modello microscopico basato sulla risoluzione dell'equazione di Schrödinger a molti corpi. Questa generalmente non la si riesce a risolvere in modo esatto, ma se ne cerca una versione approssimata, operando non sullo spazio di Hilbert completo ma su uno spazio di modello [1]. Risulta poi necessario procedere in modo perturbativo e avendo a che fare con calcoli di notevoli dimensioni, che vengono svolti dal calcolatore. Per ciò ci avvaliamo del codice Antoine [2] basato sul metodo Lanczos [3].

Storicamente il modello a shell è stato applicato a nuclei con numeri di nucleoni vicini alle chiusure di shell. Vennero poi trovati metodi di calcolo più efficaci, e grazie anche allo sviluppo dei mezzi informatici per svolgere i calcoli, da circa venti anni è possibile riprodurre la struttura di stati collettivi in nuclei relativamente lontani dalle chiusure di shell. In particolare, nei nuclei della shell  $1f_{7/2}$  sono state osservate bande rotazionali, dunque riconducibili a stati collettivi. Consideriamo questa zona di massa e scegliamo i nuclei speculari del  $^{49}_{25}\text{Mn}$  e del  $^{49}_{24}\text{Cr}$ , per cui stimiamo i livelli energetici per stati eccitati rotazionali e le probabilità di transizione tra essi. Nel fare ciò, per i livelli energetici confrontiamo le stime derivanti da due diverse interazioni efficaci e valutiamo l'importanza dell'interazione coulombiana, che è molto meno intensa dell'interazione forte, seguendo i suoi effetti nella rottura della simmetria di isospin. Il  $^{49}\text{Mn}$  e il  $^{49}\text{Cr}$  sono nuclei della shell  $1f_{7/2}$  e li studiamo considerando anche le shell superiori  $2p_{3/2}$ ,  $1f_{5/2}$  e  $2p_{1/2}$ , nella shell di valenza fp.

Nella sezione 2 illustriamo il modello a shell seguendone lo sviluppo dalla risoluzione a particella singola al modello a shell interattivo. Nella sezione 3 descriviamo in linee generali le transizioni elettromagnetiche. Infine nelle sezioni 4 e 5 vengono presentate le nostre stime teoriche e le si confronta con i dati sperimentali, rispettivamente per i livelli energetici degli stati eccitati e per le probabilità di transizione ridotte tra essi.

## 2 Il modello a shell

Il modello a shell nasce dal fatto che i nuclei presentano caratteristiche particolari se il numero di protoni, o di neutroni, sono uguali o vicini a certi numeri, detti magici. In particolare questi nuclei sono più stabili, e risultano avere così una maggiore energia di separazione dei nucleoni. Questa situazione ricorda le caratteristiche periodiche degli atomi al variare del numero di elettroni, con l'aumento dell'energia di ionizzazione verso i gas nobili, e gli orbitali atomici costruiti per spiegarle. Quindi, similmente a come si sono ricavati gli stati degli elettroni nell'atomo, si cercano gli stati del nucleo risolvendo la relativa equazione di Schrödinger. L'hamiltoniana contiene, oltre al contributo dell'energia cinetica, due contributi dell'energia potenziale, per le interazioni a due e a tre corpi, la quale riceve i contributi significativi dall'interazione forte e da quella coulombiana:

$$H = \sum_i^A T_i + \sum_{i<j}^A V_{2c}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_{i<j<k}^A V_{3c}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k). \quad (1)$$

Il problema è però stato risolto esattamente solo per nuclei molto leggeri, con  $A \leq 10$ , così ricorriamo ad approssimazioni.

### 2.1 Modello a shell di particella singola

Un primo passo consiste nel semplificare i contributi dell'energia potenziale. Invece di considerare nel dettaglio le interazioni delle varie particelle, ne consideriamo l'effetto medio su una singola particella, così da avere un potenziale centrale a un corpo, che considera i moti delle particelle come tra loro indipendenti. Per una sola particella l'equazione di Schrödinger diviene [4]:

$$H_0\psi_\alpha = (T + U_0)\psi_\alpha = \epsilon_\alpha\psi_\alpha. \quad (2)$$

Passiamo in coordinate polari e le separiamo esprimendo  $\psi_\alpha$  con una funzione radiale  $R_\alpha$  e le armoniche sferiche  $Y_l^{m_l}$ :

$$\psi_\alpha = R_\alpha(r)Y_l^{m_l}(\theta, \phi) = \frac{u_\alpha(r)}{r}Y_l^{m_l}(\theta, \phi). \quad (3)$$

Giungiamo così al seguente problema radiale, dove  $m$  è la massa del nucleone:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ddot{u}_\alpha(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}u_\alpha(r) + U_0u_\alpha(r) = \epsilon_\alpha u_\alpha(r). \quad (4)$$

Sono stati proposti diversi potenziali medi  $U_0$ , che tengono conto dell'azione a corto raggio dell'interazione forte; tuttavia ogni caso può essere nettamente migliorato considerando anche l'interazione spin-orbita. Per quest'ultima risulta una correzione all'energia:

$$\epsilon_{ls} = \langle \psi_\alpha | \frac{V_{0ls}}{\hbar^2} \vec{l} \cdot \vec{s} | \psi_\alpha \rangle = V_{0ls} \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}, \quad (5)$$

dove  $\vec{l}$  è il momento angolare orbitale,  $\vec{s}$  il momento angolare di spin e si è espresso  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  in funzione del numero quantico del momento angolare totale  $j$ . Stimiamo  $U_0$  col potenziale dell'oscillatore armonico

$$U_0(r) = -V_0 + \frac{m\omega^2}{2}r^2. \quad (6)$$

Esso tuttavia non concorda bene col fatto che la densità dei nucleoni segue circa la funzione di Fermi e che l'interazione forte agisce solo a corto raggio; situazione ben riprodotta dal potenziale di Woods-Saxon, che rispetto a quello dell'oscillatore armonico è più piatto vicino all'origine e alla

superficie. Per far fronte a questo aspetto, introduciamo un termine che contribuisce all'energia  $\propto -l^2$ , che agisce soprattutto sugli orbitali ad alto  $l$ , i quali risultano essere quelli vicini alla superficie. Otteniamo dunque autofunzioni coi numeri quantici  $n$ ,  $l$ ,  $s$ ,  $j$  e  $m_j$  con cui possiamo distinguere diversi livelli energetici degeneri in  $m_j$  [4]:

$$\epsilon_{n,l,j} = -V_0 + \hbar\omega \left[ 2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right] - kl^2 + \frac{V_{0ls}}{2} \begin{cases} (-l) & \text{se } j = l + 1/2 \\ (l+1) & \text{se } j = l - 1/2. \end{cases} \quad (7)$$

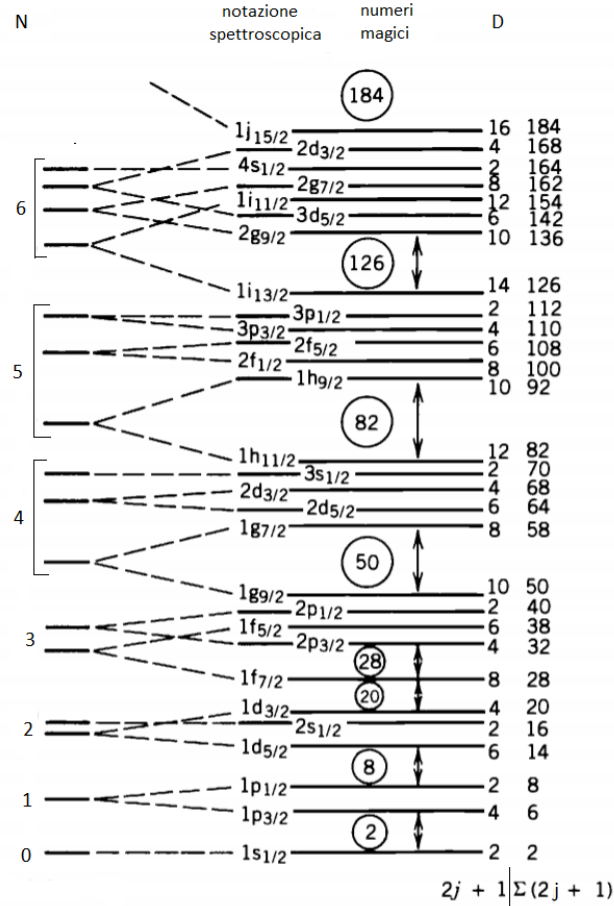


Figura 1: Livelli energetici di particella singola col potenziale dell'oscillatore armonico.  $N = 2(n - 1) + l$  è il numero quantico principale e indica il numero della shell,  $D = 2j + 1$  è la degenerazione degli stati. (tratto da [6].)

I nucleoni tendono ad occupare gli stati con energia minore e, come è mostrato nella figura 1, i vari orbitali possono essere raggruppati in base alla loro energia, formando varie "shell", in modo da riprodurre i numeri magici 2, 8, 20, 28, 50, 82 e 126. Tuttavia il modello a shell di particella singola è applicabile solo ai nuclei con un nucleone in più dei numeri magici, per il nucleone nel livello energetico più alto, per il quale il potenziale dei restanti nucleoni che riempiono completamente le shell a energia minore è ben approssimabile con un campo medio. Se si ha più di un nucleone dopo l'ultima shell completamente riempita, risulta necessario considerare anche le interazioni tra questi ultimi nucleoni.

## 2.2 Modello a shell interattivo

Semplifichiamo l'hamiltoniana completa dell'espressione (1) trascurando gli effetti relativistici, le dinamiche dei mesoni e dei quark e le interazioni a tre corpi. Consideriamo il potenziale come la somma di un potenziale centrale  $H_0$  e di una correzione dovuta alle singole interazioni tra i nucleoni  $H_1$ , così da trattare il problema in modo perturbativo [4]:

$$H|\psi \rangle = \left( \sum_i^A T_i + \sum_{i<j}^A V_{ij} \right) |\psi \rangle = (H_0 + H_1)\psi = E|\psi \rangle, \quad (8)$$

con

$$H_0 = \sum_i h_{0i}, \quad h_{0i}|\phi_j \rangle = (T_i + U_i)|\phi_j \rangle = \delta_{ij}\epsilon_j|\phi_j \rangle, \quad (9)$$

$$H_1 = \sum_{i<j}^A V_{ij} - \sum_i^A U_i, \quad (10)$$

dove  $U$  è un potenziale a un corpo scelto in modo da minimizzare il contributo di  $H_1$ , e  $\phi_j$  è lo stato di particella singola.

Dividiamo gli stati di particella singola in tre gruppi:

- **Core inerte:** gli orbitali delle shell ad energia inferiore che vengono completamente occupate separatamente dai protoni e dai neutroni; per il gap energetico con la shell appena successiva con energia maggiore, possiamo considerarli come sempre completamente occupati.
- **Spazio di valenza:** orbitali appena successivi al core inerte, che i nucleoni rimanenti possono occupare.
- **Spazio esterno:** orbitali successivi a quelli dello spazio di valenza, che avendo una maggiore energia rispetto a questi ultimi, hanno meno probabilità di essere occupati e si possono approssimare come vuoti.

In questo modo si può approssimare lo stato di un nucleo come dipendente solo dai nucleoni nello spazio di valenza. Così, grazie agli operatori di proiezione

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^d |\psi_i \rangle \langle \psi_i| \quad (11)$$

$$\hat{Q} = \sum_{i=d+1}^{\infty} |\psi_i \rangle \langle \psi_i| \quad (12)$$

per cui vale

$$\hat{P}^2 = \hat{P}, \quad \hat{Q}^2 = \hat{Q}, \quad \hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0, \quad (13)$$

si costruisce un'hamiltoniana efficace agente in uno spazio di modello  $P$  e non nello spazio di Hilbert completo:

$$H_{eff}|\psi' \rangle = (H'_0 + H'_1)|\psi' \rangle = E|\psi' \rangle. \quad (14)$$

Nello spazio di valenza si trovano un certo numero di nucleoni  $A_v$  che potranno occupare vari stati di particella singola  $\phi_i$ , e ogni possibile configurazione  $k$  fornisce uno stato fermionico caratterizzato da un certo valore di  $J^\pi$  dato dal determinante di Slater:



$$\psi_k^0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{A_v}) = \frac{1}{\sqrt{A_v!}} \det \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \dots & \phi_1(\vec{r}_{A_v}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{A_v}(\vec{r}_1) & \dots & \phi_{A_v}(\vec{r}_{A_v}) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Per un certo valore di  $J^\pi$  costruiamo le funzioni d'onda totali  $p$ -esime come combinazioni delle funzioni d'onda di base con quel  $J^\pi$  date dalla (15):

$$|\Psi_{J^\pi, p}\rangle = \sum_{k=1}^n a_{kp} |\psi_k^0; J^\pi\rangle. \quad (16)$$

I coefficienti  $a_{kp}$  si determinano risolvendo l'equazione di schrödinger:

$$H_{eff} \sum_{k=1}^n a_{kp} |\psi_k^0\rangle = E_p \sum_{k=1}^n a_{kp} |\psi_k^0\rangle. \quad (17)$$

Moltiplicando la (17) per  $\langle \psi_l^0 |$  si ottiene

$$\sum_{k=1}^n H_{lk} a_{kp} = E_p a_{lp}, \quad (18)$$

dove

$$H_{lk} = \langle \psi_l^0 | H_{eff} | \psi_k^0 \rangle = \langle \psi_l^0 | H_0 + H_1 | \psi_k^0 \rangle = E_k^0 \delta_{lk} + \langle \psi_l^0 | H_1 | \psi_k^0 \rangle. \quad (19)$$

Si giunge così all'equazione matriciale

$$[H][A] = [E][A], \quad (20)$$

dove  $[H]_{lk} = H_{lk}$ ,  $[A]$  è composta dai coefficienti  $a_{kp}$  e  $[E]$  è diagonale coi valori di  $E_p$ . Le soluzioni sono non nulle per i coefficienti con la condizione

$$\det([H] - E_p \mathbf{1}) = 0, \quad (21)$$

da cui si ricavano gli  $n$  valori di  $E_p$ . Moltiplichiamo ora la (18) per il coefficiente  $a_{lp'}$  relativo alla soluzione  $p'$  e sommiamo in  $l$ ; inoltre sfruttiamo la condizione di ortonormalizzazione tra gli stati

$|\Psi_{J^\pi, p}\rangle$ , che risulta  $\sum_{k=1}^n a_{kp} a_{kp'} = \delta_{pp'}$ . Si ottiene:

$$\sum_{l,k=1}^n a_{lp'} H_{lk} a_{kp} = E_p \delta_{pp'}, \quad (22)$$

che consiste nell'equazione matriciale

$$[A]^{-1}[H][A] = [E]. \quad (23)$$

Essendo  $[E]$  diagonale, il problema agli autovalori consiste nel trovare una base di vettori che renda  $[H]$  diagonale. La dimensione di  $[H]$  è data dal numero di funzioni di base con un dato  $J$  date dalla (15); queste in totale sono circa

$$N_{basi} \approx \binom{D_p}{n_p} \binom{D_n}{n_n}, \quad (24)$$

con  $D_i$  la degenerazione dello spazio di valenza e  $n_i$  il numero di protoni o neutroni che lo occupano. La dimensione di  $[H]$  è quindi facilmente elevata, e i conti per diagonalizzarla vengono svolti tramite un calcolatore.

### 2.3 Il metodo Lanczos

Diagonalizziamo  $[H]$  con il calcolatore servendoci del codice Antoine [2], il quale usa il metodo Lanczos [3]. Tramite  $H_{eff}$  viene costruita una matrice tridiagonale nel seguente modo. Si parte da uno stato iniziale  $|1\rangle$  e si definisce quello successivo ortonormale tramite

$$\begin{cases} |2'\rangle = H_{eff}|1\rangle - H_{11}|1\rangle \\ \langle 1|2'\rangle = 0 \\ |2\rangle = \frac{|2'\rangle}{\sqrt{\langle 2'|2'\rangle}} \end{cases} \quad (25)$$

Da ciò si ricavano gli elementi di matrice di  $H_{eff}$ :  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$  e  $H_{22}$ . Il processo viene ripetuto ponendo

$$|n+1'\rangle = H_{eff}|n\rangle - \sum_{i=1}^n H_{in}|i\rangle \quad (26)$$

e si ottiene la matrice tridiagonale simmetrica

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 & \dots \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 & \dots \\ 0 & H_{32} & H_{33} & H_{34} & \dots \\ 0 & 0 & H_{43} & H_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (27)$$

che può essere diagonalizzata al posto di  $[H]$ , tramite metodi iterativi in modo più agevole.

Useremo Antoine per trovare lo stato fondamentale e quelli eccitati e per calcolarne le energie e le probabilità di transizione elettromagnetica. Per lo spazio di valenza consideriamo gli stati di particella singola  $1f_{7/2}$ ,  $2p_{3/2}$ ,  $1f_{5/2}$  e  $2p_{1/2}$ , che usiamo per gli stati  $\phi_i$  nella formula (15).

### 3 Transizioni elettromagnetiche

Uno stato eccitato del nucleo decade in uno stato ad energia inferiore mediante la radiazione elettromagnetica emettendo un fotone gamma con energia data dalla differenza dell'energia degli stati:

$$E_\gamma = E_i - E_f. \quad (28)$$

La radiazione elettromagnetica può essere di tipo elettrico (E) o magnetico (M), ovvero generata dall'oscillazione di un campo elettrico o di uno magnetico. Inoltre dipende dall'ordine del multipolo, elettrico o magnetico, che la genera: a un multipolo di ordine  $L$  corrisponde una radiazione con momento angolare  $L$ .

Nella transizione tra due stati con i rispettivi momenti angolari totali  $J_i$  e  $J_f$  si ha la conservazione del momento angolare, cosicché il momento angolare della radiazione che viene emessa deve rispettare

$$|J_i - J_f| \leq L \leq J_i + J_f. \quad (29)$$

Inoltre deve essere conservata la parità  $P$ :

$$P_i = P_f P_\gamma \quad \leftrightarrow \quad P_\gamma = P_i P_f, \quad (30)$$

dove

$$P_\gamma = \begin{cases} (-1)^L & \text{per radiazione elettrica} \\ (-1)^{L+1} & \text{per radiazione magnetica.} \end{cases} \quad (31)$$

La frequenza con cui i fotoni vengono emessi è data dal tasso di transizione  $T$ , che dipende dal numero d'onda  $k$  e dal momento angolare  $L$  della radiazione [5]:

$$T(L) = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} k^{2L+1} B(\sigma L), \quad (32)$$

dove  $B(\sigma L)$  è detta probabilità di transizione ridotta, e dipende dal carattere elettrico ( $\sigma=E$ ) o magnetico ( $\sigma=M$ ) della radiazione e dal suo momento angolare  $L$ ; viene espresso quantisticamente tramite gli operatori di multipolo  $O(\sigma L)$  e dipende dallo stato iniziale e finale del nucleo:

$$B(\sigma L) = |\langle \psi_f | O(\sigma L) | \psi_i \rangle|^2 = |\langle \psi_f | \sum_{j=1}^A O(\sigma L; j) | \psi_i \rangle|^2, \quad (33)$$

dove  $O(\sigma L; j)$  è riferito al nucleone  $j$ -esimo.  $B(\sigma L)$  riceve così il contributo di tutti i nucleoni, e anche se si ha una transizione che cambia solo lo stato dei nucleoni nello spazio di valenza, comunque quelli nel core inerte subiscono il rinculo della transizione e influiscono su  $B(\sigma L)$ . Tuttavia col modello a shell gli stati sono definiti su uno spazio di modello che considera solo gli  $N_v$  nucleoni nello spazio di valenza; si costruiscono quindi degli opportuni operatori di multipolo efficaci, i quali attribuiscono ai protoni e ai neutroni cariche elettriche e fattori giromagnetici efficaci, diversi da quelli che sono loro propri, che vengono ricavati dalle misure sperimentali e risultano dipendenti dagli stati iniziali e finali. Per i nuclei che studiamo in questa tesi nello spazio di valenza abbiamo shell  $f$  e  $p$ , così usiamo le relative cariche efficaci standard di  $1.5e$  per protoni e  $0.5e$  per neutroni, mentre i fattori giromagnetici orbitali e di spin non subiscono considerevoli variazioni e usiamo quelli di particella libera. Si ottiene:

$$B(\sigma L) = |\langle \psi'_f | O_{eff}(\sigma L) | \psi'_i \rangle|^2 = |\langle \psi'_f | \sum_{j=1}^{N_v} O_{eff}(\sigma L; j) | \psi'_i \rangle|^2. \quad (34)$$

A parità di multipolarità le transizioni elettriche risultano più probabili di quelle magnetiche, e entrambe le tipologie divengono molto meno frequenti all'aumentare di  $L$ . In questa tesi consideriamo transizioni tra stati a parità negativa con  $\Delta J = 1$  o  $\Delta J = 2$ , e per le considerazioni prima svolte sulla conservazione del momento angolare e della parità si ha che le transizioni più frequenti tra quelle possibili risultano essere le E2 per transizioni con  $\Delta J = 2$  e le E2 e le M1 per transizioni con  $\Delta J = 1$ , mentre le rimanenti risultano di frequenza trascurabile. Per le transizioni con  $\Delta J = 1$  si hanno così due tipologie di radiazione; sperimentalmente per distinguerle si misura la distribuzione angolare dell'intensità della radiazione, la quale accoglie due differenti contributi dalle radiazioni E2 e M1, che possono essere individuati tramite il fit con una funzione interpolante che sommi tali due contributi. Esso fornisce il parametro di mixing  $\delta$  che indica il rapporto tra il tasso di transizione di una radiazione rispetto a quello dell'altra, e da questo si calcolano le due probabilità di transizione ridotte  $B(E2)$  e  $B(M1)$ .

## 4 Stima dei livelli energetici del $^{49}\text{Mn}$ e $^{49}\text{Cr}$

Per i nuclei del  $^{49}\text{Mn}$  e del  $^{49}\text{Cr}$  calcoliamo le energie dello stato fondamentale con  $J^\pi = \frac{5}{2}^-$  e degli stati eccitati delle bande rotazionali con  $J^\pi = \frac{7}{2}^-, \frac{9}{2}^-, \frac{11}{2}^-, \dots, \frac{31}{2}^-$ , ovvero fino alla terminazione di banda, visto che  $\frac{31}{2}$  è il massimo  $J$  nella shell  $f_{7/2}$ . In un primo momento, trascuriamo l'interazione coulombiana tra i nucleoni, la quale è molto meno intensa dell'interazione forte: protoni e neutroni, al netto di una leggera differenza di massa, risultano così avere le stesse caratteristiche e possono essere visti secondo la simmetria di isospin come due stati diversi della medesima particella, avente i numeri quantici di isospin  $t = \frac{1}{2}$  e  $t_z = +\frac{1}{2}$  per i neutroni,  $t_z = -\frac{1}{2}$  per i protoni. Quindi l'hamiltoniana tratta allo stesso modo protoni e neutroni, e siccome i nuclei del  $^{49}\text{Mn}$  e del  $^{49}\text{Cr}$  sono speculari, otteniamo una identica stima dei livelli energetici per i due nuclei.

Per la shell fp che noi consideriamo sono state proposte diverse hamiltoniane efficaci, e qui adoperiamo quelle che hanno dato risultati migliori. Effettuiamo le stime delle energie per il  $^{49}\text{Cr}$  con le due hamiltoniane efficaci chiamate kb3g [7] e gxpf1a [8], e le confrontiamo con i dati sperimentali del National Nuclear Data Center [9], come mostrato in figura:

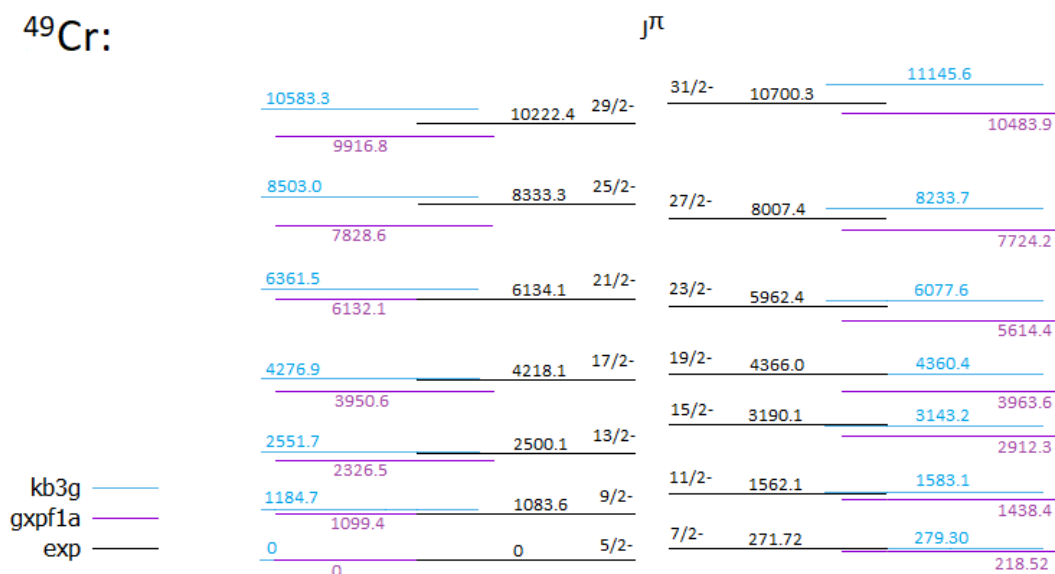


Figura 2: Livelli energetici sperimentali del  $^{49}\text{Cr}$  in confronto coi calcoli teorici effettuati con le  $H_{eff}$  kb3g e gxpf1a, espressi in keV

Dalla figura 2 possiamo notare che le predizioni teoriche seguono bene l'andamento dei dati sperimentali, in particolare l'hamiltoniana kb3g dà risultati più accurati. Più precisamente, confrontiamo le due hamiltoniane efficaci calcolando la media quadratica delle deviazioni dai dati sperimentali delle stime teoriche degli  $N=13$  livelli energetici eccitati:

$$D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (E_{i,th} - E_{i,exp})^2}{N}}. \quad (35)$$

Includendo anche i risultati per i dati sperimentali del  $^{49}\text{Mn}$ , si ottengono i seguenti valori di D:

	kb3g	gxpfla
$^{49}\text{Cr}$	195 keV	271 keV
$^{49}\text{Mn}$	153 keV	286 keV

Tabella 1: Medie quadratiche delle deviazioni delle stime teoriche dai dati sperimentali (D), usando le hamiltoniane efficaci kb3g e gxpfla, per  $^{49}\text{Cr}$  e  $^{49}\text{Mn}$

I dati in tabella 1 mostrano che l'hamiltoniana kb3g fornisce stime migliori.

Consideriamo dunque quest'ultima hamiltoniana efficace e includiamo ora l'interazione coulombiana. Stimiamo i livelli energetici per il  $^{49}\text{Cr}$  e il  $^{49}\text{Mn}$  e li intabelliamo insieme ai dati sperimentali [9]:

$^{49}\text{Cr}$			$^{49}\text{Mn}$		
$J^\pi$	$E_{th}$ [keV]	$E_{exp}$ [keV]	$J^\pi$	$E_{th}$ [keV]	$E_{exp}$ [keV]
5/2 <sup>-</sup>	0	0	5/2 <sup>-</sup>	0	0
7/2 <sup>-</sup>	281.89	271.72	7/2 <sup>-</sup>	282.53	261.38
9/2 <sup>-</sup>	1159.2	1083.6	9/2 <sup>-</sup>	1172.00	1059.18
11/2 <sup>-</sup>	1566.8	1562.1	11/2 <sup>-</sup>	1571.12	1541.31
13/2 <sup>-</sup>	2506.1	2500.1	13/2 <sup>-</sup>	2535.8	2481.3
15/2 <sup>-</sup>	3099.8	3190.1	15/2 <sup>-</sup>	3131.3	3189.3
17/2 <sup>-</sup>	4214.0	4218.1	17/2 <sup>-</sup>	4259.4	4250.3
19/2 <sup>-</sup>	4301.5	4366.0	19/2 <sup>-</sup>	4360.4	4446.3
21/2 <sup>-</sup>	6277.8	6134.1	21/2 <sup>-</sup>	6329.6	/
23/2 <sup>-</sup>	6009.8	5962.4	23/2 <sup>-</sup>	6054.9	6056.4
25/2 <sup>-</sup>	8441.0	8333.3	25/2 <sup>-</sup>	8425.5	/
27/2 <sup>-</sup>	8162.0	8007.4	27/2 <sup>-</sup>	8176.1	8080.4
29/2 <sup>-</sup>	10482.3	10222.4	29/2 <sup>-</sup>	10512.4	/
31/2 <sup>-</sup>	11034.9	10700.3	31/2 <sup>-</sup>	11078.4	10724.5

Tabella 2: Livelli energetici teorici con  $H_{eff}$  kb3gcoul ( $E_{th}$ ) e sperimentali ( $E_{exp}$ )

Le incertezze sui dati sperimentali risultano tra 0.1 e 2 keV, ovvero molto inferiori alla deviazione delle previsioni teoriche dai dati sperimentali, e quindi non sono state inserite in tabella. Le stime teoriche subiscono una leggera variazione rispetto al caso in cui non si è considerata l'interazione coulombiana e si differenziano per il  $^{49}\text{Cr}$  e per il  $^{49}\text{Mn}$ , in modo tale da migliorare la predizione: per il  $^{49}\text{Cr}$  il valore di D passa da 195 a 140 keV, mentre per il  $^{49}\text{Mn}$  D passa da 153 a 127 keV.

## 5 Stima delle probabilità di transizione ridotte

Calcoliamo ora le probabilità di transizione ridotte per le transizioni elettromagnetiche tra gli stati sopra ricavati, in particolare per le radiazioni E2 tra stati con  $\Delta J = J_{iniziale} - J_{finale} = 1, 2$  e M1 tra stati con  $\Delta J = 1$ . Per il  $^{49}\text{Mn}$  non sono ancora stati ricavati i relativi dati sperimentali, che sono oggetto di ricerca di una tesi dottoranda in corso [10]. Per il  $^{49}\text{Cr}$  abbiamo invece a disposizione i dati sperimentali [9], con i quali possiamo confrontare le nostre stime teoriche.

$J^\pi$ stato iniziale	$B_{th}(E2, \Delta J = 1)$	$B_{exp}(E2, \Delta J = 1)$	$B_{th}(E2, \Delta J = 2)$	$B_{exp}(E2, \Delta J = 2)$
7/2 <sup>-</sup>	387	383 (117)		
9/2 <sup>-</sup>	330	426 (149)	112	149 (43)
11/2 <sup>-</sup>	251	96 (85)	192	197 (20)
13/2 <sup>-</sup>	180	5.3 (+160-53)	222	85 (43)
15/2 <sup>-</sup>	115	/	218	309 (96)
17/2 <sup>-</sup>	64.8	/	171	96 (53)
19/2 <sup>-</sup>	79.5	/	181	142 (13)
21/2 <sup>-</sup>	42.6	/	144	170 (53)
23/2 <sup>-</sup>	59.5	/	167	122 (9)
25/2 <sup>-</sup>	0.407	/	11.6	/
27/2 <sup>-</sup>	13.1	/	97.9	83.1 (75)
29/2 <sup>-</sup>	5.59	/	72.5	/
31/2 <sup>-</sup>	3.52	/	66.0	28.8 (64)

$J^\pi$ stato iniziale	$B_{th}(M1, \Delta J = 1)$	$B_{exp}(M1, \Delta J = 1)$
7/2 <sup>-</sup>	0.148	0.149 (36)
9/2 <sup>-</sup>	0.405	0.448 (90)
11/2 <sup>-</sup>	0.483	0.465 (54)
13/2 <sup>-</sup>	0.639	0.394 (72)
15/2 <sup>-</sup>	0.803	/
17/2 <sup>-</sup>	0.307	/
19/2 <sup>-</sup>	0.504	/
21/2 <sup>-</sup>	0.0305	/
23/2 <sup>-</sup>	0.269	/
25/2 <sup>-</sup>	0.0029	/
27/2 <sup>-</sup>	1.57	2.99 (83)
29/2 <sup>-</sup>	0.342	/
31/2 <sup>-</sup>	2.12	2.69 (54)

Tabella 3: Probabilità di transizione ridotte per  $^{49}\text{Cr}$ , teoriche e sperimentali; le  $B(E2)$  sono in  $e^2\text{fm}^4$ , le  $B(M1)$  in  $\mu_N^2$

$J^\pi$ stato iniziale	$B_{th}(E2, \Delta J = 1) [e^2\text{fm}^4]$	$B_{th}(E2, \Delta J = 2) [e^2\text{fm}^4]$	$B_{th}(M1, \Delta J = 1) [\mu_N^2]$
7/2 <sup>-</sup>	404		0.157
9/2 <sup>-</sup>	308	113	0.425
11/2 <sup>-</sup>	245	197	0.502
13/2 <sup>-</sup>	155	217	0.685
15/2 <sup>-</sup>	124	210	0.838
17/2 <sup>-</sup>	67.9	177	0.356
19/2 <sup>-</sup>	107	176	0.595
21/2 <sup>-</sup>	54.5	156	0.0423
23/2 <sup>-</sup>	95.2	190	0.319
25/2 <sup>-</sup>	0.171	18.1	0.0022
27/2 <sup>-</sup>	6.06	112	1.60
29/2 <sup>-</sup>	1.09	44.4	0.371
31/2 <sup>-</sup>	4.44	50.3	2.12

Tabella 4: Probabilità di transizione ridotte teoriche previste per il  $^{49}\text{Mn}$

Nella tabella 3 possiamo osservare che, con l'eccezione del  $B(E2, \Delta J = 1)$  con  $J_{iniziale} = 13/2$ , le predizioni teoriche hanno una deviazione dai dati sperimentali ben confrontabile con le loro incertezze. Dunque il modello a shell, nello spazio di valenza della shell principale fp e con l'interazione efficace kb3g, è in grado di riprodurre funzioni d'onda di stati collettivi lungo le bande rotazionali basate sullo stato fondamentale e fino ad alti momenti angolari.



## 6 Conclusioni

Abbiamo applicato il modello a shell per la descrizione di stati eccitati rotazionali per nuclei relativamente lontani dalla chiusura di shell, il  $^{49}\text{Mn}$  e il  $^{49}\text{Cr}$ . Le stime dei livelli energetici sono state dapprima effettuate con due hamiltoniane efficaci diverse senza considerare l'interazione coulombiana tra protoni, e hanno mostrato di seguire bene l'andamento dei dati sperimentali, in particolare quelle ottenute con l'hamiltoniana kb3g. Usando quest'ultima, le stime sono poi state ripetute includendo l'interazione coulombiana, e si è potuto osservare un discreto miglioramento in entrambi i nuclei. L'interazione coulombiana chiaramente rompe la simmetria di isospin, perché agisce solo sui protoni. Tuttavia il suo effetto è tale da poter considerare l'isospin un buon numero quantico.

Sono poi state stimate le probabilità di transizione ridotte tra gli stati prima individuati, le quali coinvolgono le funzioni d'onda nella loro complessità, e costituiscono così un ulteriore test per il modello a shell. Per il  $^{49}\text{Cr}$ , le stime teoriche sono state confrontate coi dati sperimentali disponibili riuscendo bene a riprodurli, entro le incertezze sperimentali. Si sono inoltre calcolate le stime per il  $^{49}\text{Mn}$ , i cui dati sperimentali ad oggi non sono stati ricavati, ma sono oggetto di ricerca.

## Bibliografia

- [1] E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves and A. P. Zuker, *The shell model as a unified view of nuclear structure*, Rev. Mod. Phys. 77 (2005) 427.
- [2] E. Caurier, *Shell Model Code ANTOINE*, IRES, Strasbourg 1989-2004.
- [3] C. Lanczos, 1950, J. Res. Natl. Bur. Stand. 45, 252.
- [4] K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics*, Institute of Physics Publishing, Dirac House, Temple Back, Bristol BS1 6BE, UK (1994).
- [5] K. Heyde, *The Nuclear Shell Model*, Springer-Verlag, Heidelberg (2004).
- [6] K. S. Krane, *Introductory nuclear physics*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1988).
- [7] A. Poves, J. Sánchez-Solano, E. Caurier, and F. Nowacki, 2001, Nucl. Phys. A 694, 157.
- [8] M. Honma, T. Otsuka, B.A. Brown, and T. Mizusaki, Eur. Phys. J. A 25, s01, 499 (2005).
- [9] I dati sperimentali dei livelli energetici e delle probabilità di transizione ridotte del  $^{49}\text{Cr}$  e  $^{49}\text{Mn}$  sono tratti da <https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>.
- [10] Rafael Escudeiro, PhD Thesis, Università di Padova, to be published.