

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI GEOSCIENZE
Corso di Laurea in Geologia e Geologia tecnica
Direttore Prof. Fabrizio Nestola

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN GEOLOGIA E GEOLOGIA TECNICA

Modellazione su modello fisico dello scambio di energia geotermica a bassa entalpia: analisi di dati sperimentali

Relatore:
Prof. Paolo Scotton

Laureanda:
Jolanda Cupi
Mat. 1191808

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

“... all knowledge starts from experience and ends in it.
Propositions arrived at by purely logical means
are completely empty as regards reality.“

A. Einstein, Ideas and Opinions

Sommario

Il presente lavoro di tesi ha lo scopo di presentare un apparato sperimentale progettato per lo studio dello scambio energetico che si verifica tra una sonda geotermica e l'ambiente circostante, in condizioni di bassa entalpia. Il modello fisico in questione simula il comportamento di una sonda inserita all'interno di un materiale, che può essere granulare ma anche roccioso, presente in natura.

L'apparato sperimentale ha un volume di circa $1m^3$ ed è attraversato da una sonda termica realizzata in rame. La sonda termica è servita da un circuito idraulico chiuso. La portata idrica, che attraversa la sonda termica, viene impostata così come la temperatura del fluido. Nel materiale granulare (Risetta del Brenta) che riempie l'apparato sperimentale, sono opportunamente distribuite 24 sonde di temperatura di elevata precisione.

L'apparato sperimentale può essere saturato con acqua ed è possibile realizzare un moto di filtrazione mediante l'utilizzo di un secondo circuito idraulico. Nel presente lavoro viene considerata una configurazione priva di acqua.

La prima parte dell'elaborato è dedicata ad una dettagliata descrizione del modello fisico e dei principi fisici che regolano la trasmissione del calore al suo interno.

Successivamente viene fatta una analisi del comportamento del modello fisico rispetto al caso ideale mettendo in evidenza i suoi limiti.

Punto focale dell'elaborato è la soluzione dell'equazione del calore in condizioni non stazionarie in due diverse configurazioni: per la parete piana si è trovata una soluzione analitica, per il caso del cilindro cavo, dove questo non è stato possibile per limiti matematici, si è dovuto ricorrere ad una soluzione numerica. La validità delle ipotesi e delle soluzioni che sono proposte è rafforzata ulteriormente mettendo a confronto i dati ottenuti attraverso il modello numerico con quelli ricavati attraverso il modello matematico.

Dopo aver verificato la validità della soluzione numerica, il modello viene usato per stimare la diffusività termica della Risetta del Brenta nella configurazione sperimentale e, infine, il coefficiente di conducibilità termica, λ , del materiale sperimentale.

Abstract

The aim of this thesis work is to present an experimental apparatus designed to study the energy exchange that occurs between a geothermal probe and the surrounding environment, under low enthalpy conditions. The physical model in question simulates the behavior of a probe inserted inside a material, which can be granular but also rocky, present in nature.

The experimental apparatus has a volume of about $1m^3$ and is crossed by a thermal probe made of copper; the thermal probe is served by a closed hydraulic circuit. The water flow rate, which passes through the thermal probe, is set as well as the temperature of the fluid. In the granular material (Risetta del Brenta) that fills the experimental apparatus, 24 high precision temperature probes are opportunely distributed.

The experimental apparatus can be saturated with water and it is possible to realize a filtration motion by using a second hydraulic circuit. In the present work, a water-free configuration is considered.

The first part of the paper is aimed to a detailed description of the physical model and the physical principles governing the heat transfer within it.

Subsequently, an analysis of the behavior of the physical model with respect to the ideal case is made highlighting its limitations.

The focal point of the paper is the solution of the heat equation in non-stationary conditions in two different configurations: for the flat wall an analytical solution was found, for the case of the hollow cylinder, where this was not possible due to mathematical limitations, a numerical solution had to be used. The validity of the hypotheses and solutions that are proposed is further strengthened by comparing the data obtained through the numerical model with those obtained through the mathematical model.

After verifying the truthfulness of the numerical solution, the model is used to estimate the thermal diffusivity of the Brenta Risetta in experimental configuration and, finally, the thermal conductivity coefficient, λ , of experimental material.

Indice

Elenco delle figure	4
Elenco delle tabelle	8
Elenco dei simboli	9
Introduzione	10
1 Principi fisici	12
1.1 La trasmissione del calore per conduzione	13
1.1.1 Altre proprietà	14
1.1.2 La conduzione termica in coordinate cilindriche	15
1.2 La convezione termica	17
1.3 Analisi dimensionale	18
2 Modello fisico	20
2.1 La struttura di supporto	20
2.2 I circuiti idraulici	21
2.3 Potenza macchine termiche, portata a regime nei circuiti	22
2.4 I sensori di temperatura	23
2.5 Il materiale granulare utilizzato nei test	25
3 Analisi dei dati	26
3.1 Raccolta dati	26
3.2 Comportamento del modello rispetto al caso ideale	26
4 Conduzione non stazionaria in parete piana	34
4.1 Il fenomeno fisico realizzato in laboratorio	34
4.2 Conduzione non stazionaria tra due pareti	35
4.3 Parete piena costituita da roccia o acqua	40
4.3.1 I diversi materiali a confronto	45
5 Conduzione non stazionaria in un cilindro cavo	46
5.1 La soluzione numerica non stazionaria della conduzione termica in un cilindro cavo	46
5.2 Verifica modello numerico	49
5.2.1 Verifica del modello numerico: conduzione non stazionaria in una parete piana	49
5.2.2 Verifica del modello numerico: conduzione a regime in un cilindro cavo . .	50
5.3 Diffusività termica sperimentale	50
5.4 La configurazione cilindrica secondo il modello numerico	54
5.4.1 Configurazioni cilindriche a confronto	57
6 Conclusioni	60

Elenco delle figure

1.1	Trasmissione del calore per conduzione.	12
1.2	Associazione tra trasferimento del calore per conduzione e trasferimento di energia attraverso l'attività molecolare. Il flusso di calore $q(x)$ viaggia in verso opposto a quello dell'aumento di temperatura.	13
1.3	Il grafico mostra i valori del coefficiente di conduzione termica per i diversi materiali. La conducibilità termica dipende dalle condizioni geologiche e idrogeologiche del materiale granulare [Rap].	14
1.4	Rappresentazione grafica della conduzione in coordinate cilindriche. Il tubo centrale può rappresentare la sonda termica del modello fisico.	17
1.5	Rappresentazione della convezione termica caratterizzata da corrente convettiva ascendente e discendente.	18
2.1	Le componenti strutturali dell'apparato sperimentale.	20
2.2	Schema della parte strutturale dell'apparato sperimentale e dei punti di innesto dei circuiti idraulici della sonda geotermica e del fluido di filtrazione.	21
2.3	Relazione tra potenza delle macchine termiche e portata nei circuiti al variare della variazione di temperatura subita dai fluidi nei circuiti idraulici.	22
2.4	Relazione tra portata nel circuito sonda, temperatura del fluido, regime del moto, al variare del diametro del tubo sonda.	23
2.5	I canali di acquisizione delle sonde di temperatura usati nelle varie posizioni delle aste reggi sonde (Figura 2.6).	24
2.6	In alto, la posizione planimetrica delle aste di supporto delle sonde di temperatura dentro al volume di controllo; in basso, la quota rispetto al fondo dei vari sensori di temperatura.	24
3.1	Grafici dell'andamento della temperatura, misurata a 200000s dall'inizio del test, in funzione della distanza dall'asse della sonda termica e calcolata in condizioni di regime, alle distanze dal fondo dell'apparato sperimentale di 50mm, 300mm, 500mm, 700mm, 900mm. Il primo grafico mostra la situazione all'interno dell'apparato all'istante iniziale $t = 10s$, la temperatura relativa vale zero lungo tutta la distanza x	27
3.2	Grafici che mostrano l'evoluzione delle curve di temperatura misurata e calcolata durante un arco temporale che va da 5000s a 443206s alla quota $z = 900mm$ sul fondo (periferia del cubo). Le due curve si avvicinano l'una verso l'altra senza mai combaciare. In rosso, le temperature misurate, in blu, quelle calcolate.	28
3.3	Grafici che mostrano l'evoluzione delle curve di temperatura misurata e calcolata durante un arco temporale che va da 5000s a 443206s alla quota $z = 500mm$ sul fondo (centro del cubo). Le due curve convergono fino a quasi accavallarsi l'una sull'altra dopo un tempo di circa 123 ore.	29
3.4	Tabella contenente i valori del parametro R_T e della differenza di area per le altezze $z = 50mm, 300mm, 500mm, 700mm, 900mm$	30

3.5	Il grafico mostra l'andamento del parametro Δ_{Area}	31
3.6	Grafici degli andamenti della temperatura a tempo 443206s dall'inizio del test, in funzione della distanza dall'asse della sonda termica. In rosso, la temperatura misurata sperimentalmente, in blu, la curva delle temperature teoriche in condizioni di resistività termica nulla e, in giallo, la curva delle temperature teoriche in condizioni di resistività termica diversa da zero.	32
4.1	Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale nella configurazione del test analizzato nel presente lavoro. In rosso la sonda termica ad asse verticale; attorno, il materiale granulare costituito da risetta del brenta.	34
4.2	Rappresentazione schematica di una sonda riscaldante a sezione rettangolare larga coperta su entrambi i lati da uno spessore definito di materiale. In rosso la sonda termica; ai lati, il materiale granulare costituito da risetta del brenta.	35
4.3	In alto, schema di una trave ad una campata, semplicemente appoggiata, sollecitata da un carico uniformemente distribuito e da un carico concentrato. In basso, il sistema di riferimento adottato per la determinazione delle reazioni e delle sollecitazioni.	36
4.4	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da granito espressa in percentuale. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $1,37 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata analizzata a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	41
4.5	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da marmo. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $1,26 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	42
4.6	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da calcare. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $1,14 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	43
4.7	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da acqua. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $0,15 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	44
4.8	Evoluzione delle curve di temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie, per il granito, marmo, calcare e acqua, alla distanza $x = 0,4m$ della parete piana di Figura 4.3	45
4.9	Tempi che i diversi materiali in configurazione parete piana necessitano per raggiungere il 99,9% delle condizioni di regime.	45
5.1	Suddivisione dello strato, in forma di cilindro cavo, in sottostrati di spessore Δr . Le proprietà termiche del materiale sono concentrate nei nodi.	46
5.2	Andamento della temperatura dentro una parete a superfici piane in calcare, a diversi istanti di tempo. Confronto tra la soluzione teorica (linea continua) e la soluzione numerica (simboli).	49
5.3	Andamento della temperatura dentro un cilindro cavo in calcare, a diversi istanti di tempo. Confronto tra la soluzione teorica (linea continua) e la soluzione numerica (simboli).	50

5.4	Confronto tra le temperature misurate (punti) e le temperature calcolate numericamente (linee tratteggiate) al variare del tempo. Il confronto è fatto con la temperatura misurata in 6 punti a diversa distanza dall'asse della sonda termica, alla distanza dal fondo di 0,50m.	51
5.5	In (a) l'andamento iniziale della temperatura relativa nel test di laboratorio; in (b) la temperatura misurata all'istante $t=2500s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata).	52
5.6	In (a) la temperatura misurata all'istante $t=5000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=10000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata).	52
5.7	In (a) la temperatura misurata all'istante $t=20000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=30000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata).	52
5.8	In (a) la temperatura misurata all'istante $t=50000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=100000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata).	53
5.9	In (a) la temperatura misurata all'istante $t=200000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=300000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$ (linea tratteggiata).	53
5.10	La temperatura calcolata numericamente all'istante $t=400000s$ (linea tratteggiata) e la temperatura teorica in condizioni di regime (linea continua).	53
5.11	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di granito. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 1,37 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	54
5.12	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di marmo. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	55
5.13	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di calcare. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 1,14 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	55
5.14	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di acqua. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 0,15 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	56
5.15	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di risetta del Brenta. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	56

5.16	Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime nel caso della parete piena formata da risetta del Brenta. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $0,19 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di 0.1m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.	57
5.17	Evoluzione delle curve di temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionare, per il granito, marmo, calcare e acqua, a $r = 0,044m$ del cilindro di Figura 5.1.	58
5.18	Tempo che i diversi materiali in configurazione cilindrica necessitano per raggiungere il 99.9% delle condizioni di regime.	58

Elenco delle tabelle

1.1	Valori del calore specifico per alcuni materiali [Inc06].	15
2.1	Parametri inerenti al fluido di filtrazione che scorre all'interno del modello fisico e del materiale granulare [Sco17].	22
2.2	Conducibilità idraulica dei mezzi porosi [Vol19]	23

Elenco dei simboli

$\alpha[\frac{m^2}{s}]$ diffusività termica;

$\lambda[\frac{W}{m \cdot K}]$ coefficiente di conducibilità termica;

$\rho[\frac{kg}{m^3}]$ densità;

$C[\frac{J}{K}]$ capacità termica;

$c_v[\frac{J}{kg \cdot K}]$ calore specifico;

$K[\frac{m}{s}]$ coefficiente di conducibilità idraulica;

$M[kg]$ massa;

$Q[J]$ energia termica;

$q[W]$ potenza termica;

$r[m]$ raggio;

$T[K, ^\circ C]$ temperatura;

$t[s]$ tempo;

$x[m]$ lunghezza.

Introduzione

In questa parte introduttiva si vuole sottolineare l'importanza della ricerca nell'ambito delle energie rinnovabili (in particolar modo quella geotermica), i vantaggi che possono derivarne in ambito climatico e i benefici economici.

Oggi la maggior parte dei paesi dipende dalle importazioni di combustibili fossili per assicurare il fabbisogno energetico. Anche se al momento è possibile contare sulle riserve di petrolio, queste non dureranno a lungo. In futuro, i paesi in via di sviluppo dovranno competere sempre di più con i così detti paesi sviluppati per i combustibili fossili. Una buona soluzione per ovviare a questo problema, valida sia per i paesi sviluppati che per quelli in via di sviluppo, è avere a disposizione un mix di fonti energetiche (rinnovabili) e ridurre la dipendenza dai combustibili fossili. Lo sviluppo di energie non convenzionali può rendere un paese indipendente dal punto di vista energetico e può ridurre significativamente l'emissione di CO_2 .

Sostituire i combustibili fossili con le energie rinnovabili, non porta solo ad una auspicata mitigazione del cambiamento climatico, ma anche ad un miglioramento della qualità dell'aria. Un cattivo standard ambientale non influisce necessariamente sul rendimento economico delle industrie, ma può imporre costi sostanziali alla società in termini di cattiva salute (aumento dei costi del sistema sanitario), danni alla vegetazione (riducendo le rese agricole) e agli edifici.

Ma perché proprio l'energia geotermica? Le risorse geotermiche sono molto più grandi rispetto a tutte le risorse di combustibili fossili messe insieme. Rispetto ad altre fonti rinnovabili, le risorse geotermiche permettono una fornitura di energia più efficiente e stabile e, in particolare, l'energia geotermica a bassa entalpia ha una distribuzione regionale molto ampia rendendola così più accessibile.

Il potenziale della geotermia a bassa entalpia non ha ricevuto la giusta attenzione non solo nella maggior parte dei paesi in via di sviluppo, ma anche in diversi paesi industrializzati poiché considerata non economicamente redditizia per la generazione di elettricità. Anche se questo è stato vero in passato, i progressi tecnologici fatti negli anni permettono ai sistemi geotermici a bassa entalpia di essere usati per la generazione di energia elettrica [D C08].

Tecnicamente parlando, la progettazione di un impianto geotermico (borehole heat exchanger, BHE) utilizzato in un sistema geotermico a bassa entalpia dipende dalla capacità di scambio di energia termica del sistema, sistema formato dal BHE e dall'ambiente che lo circonda. Pertanto la capacità del sistema di scambiare energia termica dipende dalle proprietà termiche dell'impianto geotermico e da quelle del materiale dentro il quale si districa la rete di borehole heat exchangers. Per progettare un sistema geotermico funzionale si può procedere con approccio analitico oppure numerico. I modelli di BHE devono essere convalidati mediante la comparazione con dati sperimentali. Questo però non assicura una progettazione ottimale poiché i dati sperimentali possono essere affetti da errori di misura in campo. Si ricorre così a modelli fisici per risolvere in maniera più meticolosa fenomeni naturali difficili da interpretare solo analiticamente o matematicamente [Gre14].

Il modello usato in questo lavoro [Gal18] può essere usato per una vasta gamma di configurazioni. Il seguente elaborato introduce il modello fisico e attraverso l'analisi dei dati sperimentali stima la diffusività termica per via numerica.

Capitolo 1

Principi fisici

Gli scambi di calore possono avvenire secondo tre modalità principali che dipendono dalla natura dei corpi che si scambiano l'energia termica e dal loro stato di aggregazione. Queste tre modalità sono la conduzione, la convezione e l'irraggiamento.

Il trasferimento di calore per conduzione avviene principalmente tra corpi allo stato solido ed implica un contatto fisico tra tali corpi. In un corpo a temperatura maggiore le molecole si muovono più velocemente e possono trasmettere questa energia di movimento che viene percepita come calore ad altre molecole vicine, urtandole. Così, quando un corpo ad alta temperatura (in Figura 1.1 a sinistra in rosso) viene posto a contatto con uno a temperatura più bassa, le molecole del primo corpo urtano quelle del secondo, trasmettendo ad esse parte della loro energia cinetica. Come effetto il secondo corpo inizia a scaldarsi a partire dalla parte messa a contatto con il primo corpo più caldo. In seguito il calore si diffonde attraverso tutto il corpo che lo riceve, fino a propagarsi all'estremità opposta.

Nei liquidi e nei gas, chiamati collettivamente fluidi, la trasmissione del calore per conduzione è trascurabile perché sono formati da molecole libere di muoversi e lontane tra di loro, per cui nei fluidi il calore si trasmette attraverso la convezione. La trasmissione del calore avviene tramite rimescolamento dell'intera massa di fluido quindi attraverso un movimento di materia.

Il terzo meccanismo di trasmissione del calore è l'irraggiamento, si tratta di radiazioni elettromagnetiche (infrarossi) che si propagano anche attraverso il vuoto.

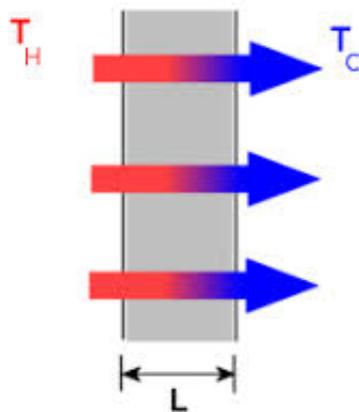


Figura 1.1: Trasmissione del calore per conduzione.

1.1 La trasmissione del calore per conduzione

Quando si parla di conduzione bisogna appellarsi al concetto di attività atomica e molecolare. In più, la conduzione può essere vista come un trasferimento di energia da particelle a più elevata energia a particella a più bassa energia, dovuto all'interazione che hanno le particelle l'una con l'altra. Sia dato un gas che occupa lo spazio contenuto tra due superfici a diversa temperatura come mostrato in Figura 1.2. La temperatura in qualsiasi punto della superficie è associata all'energia delle molecole di gas in prossimità del punto, e, a sua volta, l'energia dipende dal movimento traslazionale, rotazionale e vibrazionale delle particelle. Elevate temperature sono correlate con elevate energie molecolari e, quando le molecole vicine collidono, avviene un trasferimento di energia dalle molecole più energetiche a quelle meno energetiche. Il fenomeno della diffusione favorisce il trasferimento di energia anche in assenza di collisione nel caso dei gas.

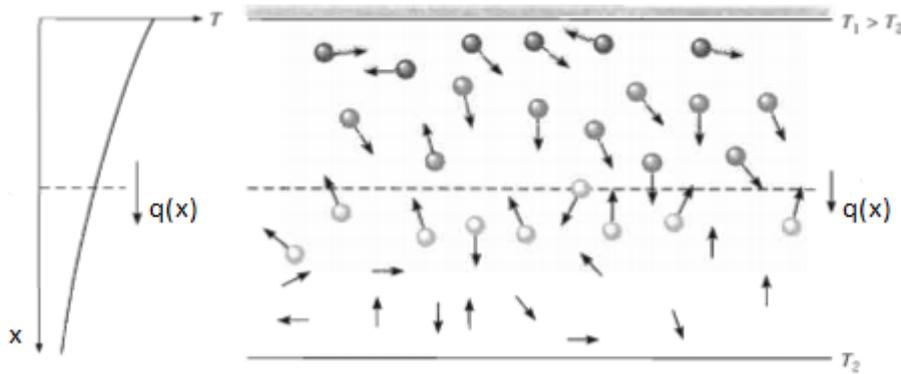


Figura 1.2: Associazione tra trasferimento del calore per conduzione e trasferimento di energia attraverso l'attività molecolare. Il flusso di calore $q(x)$ viaggia in verso opposto a quello dell'aumento di temperatura.

Quanto detto fin'ora vale anche per i liquidi, sebbene, essendo le molecole più vicine, le collisioni siano più frequenti.

Nel caso dei solidi il trasferimento di energia è dovuto alla vibrazione reticolare: gli atomi muovendosi inducono vibrazioni nel reticolo molecolare del solido.

Perciò, si può dire che il modo in cui viene trasferita l'energia dipende dallo stato fisico della materia, e quindi da come sono disposti gli atomi.

Nei solidi, il trasporto di energia termica può essere il risultato di due fenomeni: la migrazione di elettroni liberi e la propagazione di onde vibrazionali attraverso il reticolo. I quanti vibrazionali del reticolo sono chiamati fononi.

Nei conduttori domina il trasferimento di energia attraverso elettroni, nel caso di semi-conduttori e non conduttori, prevale quello per fononi.

Dalla teoria cinetica deriva la seguente espressione per la conduttività termica:

$$k = \frac{1}{3} c_p \bar{c} \lambda_{mfp} \quad (1.1)$$

dove, per i conduttori, $c_p \equiv c_e$ è il calore specifico degli elettroni per unità di volume, \bar{c} è la velocità media degli elettroni e $\lambda_{mfp} \equiv \lambda_e$ è il cammino libero medio degli elettroni, ovvero la distanza media percorsa da una particella fra due urti successivi; per i non conduttori solidi, $c_p \equiv c_{ph}$ è il calore specifico dei fononi, \bar{c} è la velocità media del suono e $\lambda_{mfp} \equiv \lambda_{ph}$ è il cammino libero medio dei fononi, ovvero la distanza media tra due eventi consecutivi di scattering dei fononi. In entrambi i casi, la conduttività termica aumenta al crescere della distanza media percorsa dai

fononi o dagli elettroni.

Quando il trasporto di energia termica dipende sia dagli elettroni che dai fononi allora la conduttività termica sarà data da:

$$k = k_e + k_{ph} \quad (1.2)$$

Essendo k_e inversamente proporzionale alla resistività elettrica (ρ_e), nel caso dei metalli, che hanno una bassa ρ_e , il valore di k_e supera quello di k_{ph} ; per le leghe, che hanno una ρ_e maggiore, il contributo di k_{ph} alla k non è più trascurabile; per i non metalli k è determinata da k_{ph} , che aumenta al diminuire delle interazioni tra gli atomi e il reticolo. La sistematicità della disposizione di un reticolo ha un impatto fondamentale sul k_{ph} . Un reticolo cristallino *bene ordinato* rispetto ad un amorfo ha una conduttività termica più elevata. In Figura 1.3 sono mostrati i valori della conducibilità termica per alcuni materiali:

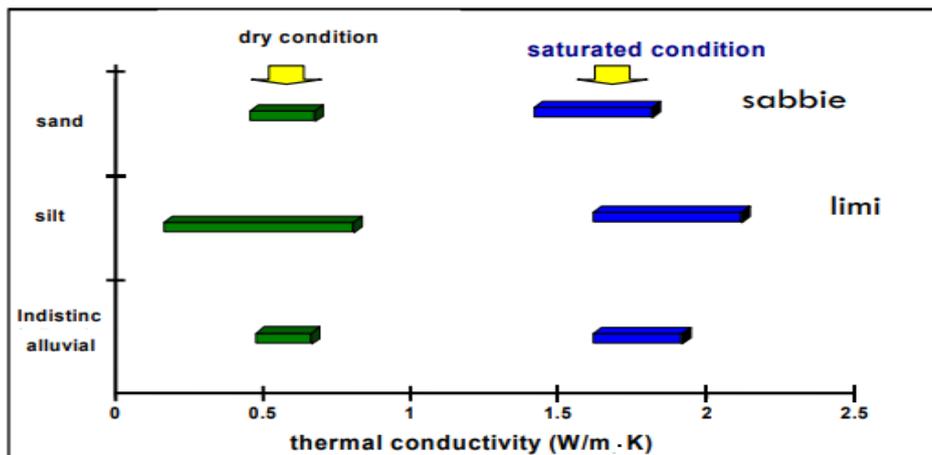


Figura 1.3: Il grafico mostra i valori del coefficiente di conduzione termica per i diversi materiali. La conducibilità termica dipende dalle condizioni geologiche e idrogeologiche del materiale granulare [Rap].

1.1.1 Altre proprietà

Nell'analizzare il trasferimento di calore bisogna tenere conto delle proprietà termo-fisiche che a loro volta si dividono in proprietà del trasporto e termodinamiche. Il coefficiente di diffusione, la conduttività termica e la viscosità cinematica si classificano come proprietà del trasporto. Proprietà termodinamiche come la densità e il calore specifico, misurano la capacità del materiale di accumulare energia termica. Per capire cos'è esattamente il calore specifico si fa riferimento all'idea di capacità termica. Un'elevata capacità termica implica che la temperatura interna di un certo materiale varia lentamente al variare della temperatura esterna. La capacità termica di un corpo di massa M rappresenta il calore necessario per far variare di un grado centigrado la temperatura dello stesso e dipende da due fattori:

- la massa;
- il tipo di materiale.

L'energia termica per far variare la temperatura di un corpo di una differenza di temperatura ΔT è uguale a:

$$Q = Mc_v \Delta T, [J] \quad (1.3)$$

La capacità termica, $C [\frac{J}{K}]$, per una variazione di temperatura di $1^\circ C$ è uguale a $C = M \cdot c_v$, dove

M è la massa e c_v è il calore specifico.

Il calore specifico, $c_v \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$, di un materiale rappresenta il calore necessario per far variare di un grado centigrado la temperatura di una massa unitaria. I valori del calore specifico si determinano in laboratorio per via sperimentale. In Tabella 1.1 sono riportati i valori del c_v per alcuni materiali:

Materiale	$c_v \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$
Acqua a 290K	4184
Aria a 300K	920
Granito	775
Marmo	830
Calcare	810

Tabella 1.1: Valori del calore specifico per alcuni materiali [Inc06].

Sostanze con elevate densità sono caratterizzate da basso calore specifico.

Il rapporto tra il coefficiente di conducibilità e la densità moltiplicata il calore specifico è la diffusività termica, con unità di misura nel Sistema Internazionale $\left[\frac{m^2}{s} \right]$:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (1.4)$$

Esso misura la capacità del materiale di condurre calore rispetto alla sua capacità di immagazzinare energia termica. Materiali con elevata diffusività termica rispondono velocemente se avvengono dei cambiamenti nel loro sistema termico, al contrario, quelli con bassa diffusività termica necessitano di più tempo per raggiungere nuove condizioni di equilibrio.

1.1.2 La conduzione termica in coordinate cilindriche

Come detto in precedenza la conduzione consiste nello scambio di calore all'interno di corpi solidi, liquidi e gassosi a condizione che non vi sia movimento di materia.

La legge fondamentale della conduzione, detta anche *Legge di Fourier* (eq. 1.5), mette in relazione l'energia termica (il calore) che attraversa nel tempo dt un volume di superficie S e profondità dx soggetto ad una variazione di temperatura dT , con il coefficiente di conduzione termica λ del materiale di cui il volume è costituito:

$$dQ = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \cdot dt \quad (1.5)$$

Il segno "-" si rende necessario per attribuire un valore positivo all'energia termica quando il gradiente di temperatura è negativo.

Dato un volume cubico infinitesimo, costituito di un materiale continuo, uniforme ed isotropo, si può calcolare la variazione di calore nelle diverse direzioni x, y, z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Si tenga presente che le proprietà fisiche dei corpi sono considerate note, indipendenti dal tempo e dalla direzione del flusso termico. Dalla condizione di conservazione dell'energia, è possibile determinare la variazione di calore lungo le tre direzioni degli assi di riferimento.

In direzione x :

$$dq_x = -\lambda \cdot dy \cdot dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$dq_{x+dx} = dq_x + \left(\frac{\partial}{\partial x} dq_x \right) \cdot dx \quad (1.7)$$

sottraendo le due equazioni, si determina l'energia termica (dq) che nel tempo entra nel volume considerato lungo la direzione x :

$$dq_x - dq_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx dy dz \quad (1.8)$$

La medesima operazione si può fare lungo le direzioni y e z , e sommando l'energia, H , generata nell'unità di tempo all'interno del volume $dx dy dz$, si ottiene il bilancio energetico:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \sum q_{in} - \sum q_{out} + H \quad (1.9)$$

Sviluppando ulteriormente l'equazione 1.9 si ottiene:

$$\frac{\lambda}{\rho c_v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{H}{\rho c_v} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.10)$$

con λ coefficiente di conduzione termica, ρ densità, c_v calore specifico.

Nell'equazione 1.10 compare un parametro molto importante ai fini di questo lavoro, la diffusività termica:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_v} \left[\frac{m^2}{s} \right].$$

Come si può evincere dalla relazione, al crescere della densità del materiale diminuisce la diffusività termica, ovvero, diminuisce la capacità del corpo a farsi attraversare da un 'disturbo' termico.

In assenza di generazione di calore interno ($H = 0$), l'equazione 1.10 diventa:

$$\frac{\lambda}{\rho c_v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{Equazione di Fourier.} \quad (1.11)$$

Qualora la temperatura fosse costante nel tempo ($\frac{\delta T}{\delta t} = 0$, regime stazionario), l'equazione 1.10 diventa:

$$\alpha \cdot \nabla^2 T + \frac{H}{\rho c_v} = 0, \quad \text{Equazione di Poisson.} \quad (1.12)$$

Infine, unendo le due condizioni precedenti, ovvero $H = 0$ e $\frac{\delta T}{\delta t} = 0$, l'equazione 1.10 diventa:

$$\nabla^2 T = 0, \quad \text{Equazione di Laplace.} \quad (1.13)$$

Risolvere l'equazione di Laplace significa conoscere come varia la temperatura in ogni punto dello spazio. In ultima analisi bisogna sottolineare che tutte le operazioni sono state eseguite basandosi sull'ipotesi di isotropia del mezzo, cioè considerando λ uguale nelle direzioni x, y, z , e densità e capacità termica indipendenti dalle coordinate spaziali.

Nel caso della conduzione termica in coordinate cilindriche la temperatura non viene più calcolata in funzione di x, y, z bensì di r, θ, z . Cambierà così anche l'equazione della conduzione:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.14)$$

Si supponga ora che al variare di θ, z, t la temperatura rimanga costante e che non ci sia generazione di energia interna H . In questo modo si passa in regime stazionario e il problema diventa monodimensionale. L'equazione 1.14 si semplifica ulteriormente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0 \quad (1.15)$$

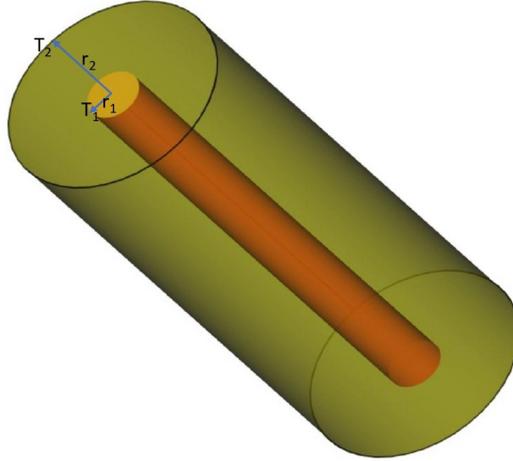


Figura 1.4: Rappresentazione grafica della conduzione in coordinate cilindriche. Il tubo centrale può rappresentare la sonda termica del modello fisico.

Risolvere l'equazione 1.15 significa calcolare la temperatura in qualsiasi punto del cilindro in Figura 1.4.

Facendo le dovute integrazioni sotto determinate condizioni al contorno (quelle in Figura 1.4) si può calcolare la temperatura a qualsiasi distanza r dall'asse che passa per il centro della sonda. La temperatura T ad una certa distanza r sarà data da:

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \cdot \ln \frac{r}{r_2} \quad (1.16)$$

dove T_1 e T_2 sono le temperature a distanza r_1 e r_2 dall'asse della sonda termica.

Infine si può calcolare la potenza termica che se ne va attraverso la superficie che circonda il tubo a distanza r dall'asse [Inc06]:

$$q = -\lambda \frac{\delta T}{\delta r} A \longrightarrow q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (1.17)$$

La potenza che passa attraverso una superficie di simmetria circolare è dipendente dalla variazione di temperatura ΔT e dal logaritmo del rapporto r_2/r_1 .

1.2 La convezione termica

La convezione è un trasferimento di energia con trasporto di materia, dovuto alla presenza di correnti nei fluidi. Si parla di convezione forzata quando è una forza esterna che fa muovere il fluido in direzione verticale oppure orizzontale, e convezione naturale. In questo ultimo caso il fluido è messo in moto da variazioni di densità. All'aumentare della temperatura del fluido diminuisce la sua densità. Poiché agiscono le forze Archimedee, il fluido che si trova ad una densità più bassa tende a salire creando una corrente convettiva ascendente. La massa che sale è sostituita da una massa più fredda che crea una corrente convettiva discendente. Si genera così un ciclo continuo in cui il trasporto di energia è legato al trasporto di massa, il trasporto di massa è legato al gradiente di temperatura che a sua volta è stato causato dal trasporto di energia.

La legge fondamentale della conduzione si scrive come segue:

$$q = -a_c \cdot A(T_1 - T_2), \quad (1.18)$$

con T_1 temperatura della superficie, T_2 temperatura del fluido, a_c coefficiente di convezione.

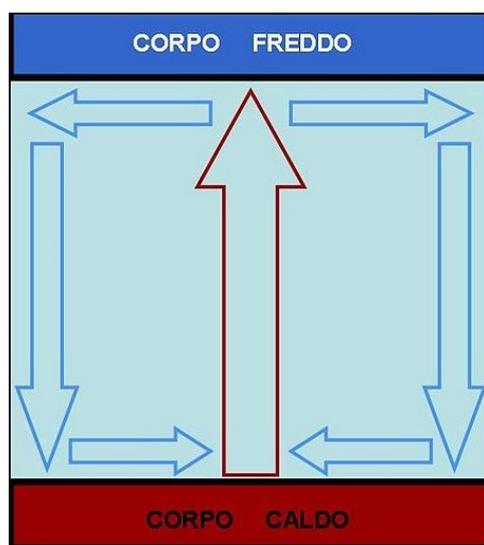


Figura 1.5: Rappresentazione della convezione termica caratterizzata da corrente convettiva ascendente e discendente.

1.3 Analisi dimensionale

L'analisi dimensionale offre un metodo per ridurre i problemi fisici complessi alla forma più semplice prima di ottenere una risposta quantitativa. Bridgman lo spiega così[Bri63]: "L'uso principale dell'analisi dimensionale è quello di dedurre da uno studio delle dimensioni delle variabili in qualsiasi sistema fisico alcune limitazioni sulla forma di qualsiasi possibile relazione tra queste variabili. Il metodo è di grande generalità e semplicità matematica". Al centro dell'analisi dimensionale c'è il concetto di similitudine. In termini fisici, la similitudine si riferisce ad una certa equivalenza tra due cose o fenomeni che sono in realtà diversi. Ad esempio, sotto alcune condizioni particolari c'è una relazione diretta tra i parametri e le forze che coinvolgono il trasporto di energia in un mezzo poroso saturo di un fluido in movimento (terreno con falda caratterizzata da acqua in movimento) e il trasporto di energia su un modello in scala ridotta, in questo caso l'apparato fisico. La domanda è: quali sono queste condizioni e qual è il rapporto tra questi parametri e forze? Matematicamente, la similitudine si riferisce a una trasformazione di variabili che porta ad una riduzione del numero di variabili indipendenti. L'analisi dimensionale applicata al problema del trasporto di energia di un mezzo poroso saturo da un fluido in movimento conduce alla determinazione di cinque gruppi adimensionali [Sco17]:

1. Numero di Reynolds: rappresenta il rapporto tra forze inerziali e forze viscosi, fornisce indicazioni sul regime del moto, laminare, turbolento o di transizione, nel fluido di filtrazione. Per un numero di Reynolds minore di 2000 il moto è laminare, per un valore maggiore di $10^5 - 10^6$ il moto diventa turbolento.

$$Re = \frac{\rho_f \cdot v_f \cdot d}{\mu_f} \quad (1.19)$$

2. Numero di Prandtl: è il rapporto tra la diffusività molecolare della quantità di moto e la diffusività molecolare termica. Per i gas, $Pr \approx 1$, il trasporto di energia termica e di quantità di moto sono confrontabili; per i liquidi, $Pr \gg 1$, il trasporto di quantità di moto è maggiore di quello di quantità termica; per i metalli liquidi $Pr \ll 1$, il trasporto di energia termica è maggiore di quello di quantità di moto.

$$Pr = \frac{\mu \rho \cdot c_p}{\rho \lambda} \longrightarrow Pr = \frac{c_{pf} \cdot \mu_f}{\lambda_f} \quad (1.20)$$

3. Numero di Nusselt: rappresenta l'importanza relativa dei termini di trasporto energetico di tipo convettivo rispetto ai termini di natura conduttiva.

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda_f} \quad (1.21)$$

4. I parametri 1.22 descrivono i rapporti di conducibilità termica e di capacità termica della parte fluida e solida che costituiscono il sistema mezzo poroso fluido di filtrazione.

$$\Pi_1 = \frac{\lambda_f}{\lambda_s}, \quad \Pi_2 = \frac{c_{pf}}{c_{ps}} \quad (1.22)$$

Nel caso il fluido di filtrazione sia contenuto all'interno di una tubazione, i numeri ricavati dall'analisi dimensionale del fenomeno di trasporto di energia diventano:

$$Re = \frac{\rho_c \cdot v_c \cdot d_c}{\mu_c}, \text{ numero di Reynolds;} \quad (1.23)$$

$$Pr = \frac{c_{pc} \cdot \mu_c}{\lambda_c}, \text{ numero di Prandtl;} \quad (1.24)$$

$$Nu = \frac{\alpha_c d_c}{\lambda_c}, \text{ numero di Nusselt.} \quad (1.25)$$

Il pedice c indica che i vari parametri sono riferiti al fluido che percorre la condotta.

Capitolo 2

Modello fisico

2.1 La struttura di supporto

L'apparato sperimentale, caratterizzato da un peso complessivo a carico pieno di circa 3000 kg , è rappresentato, nelle sue varie componenti strutturali in Figura 2.1,

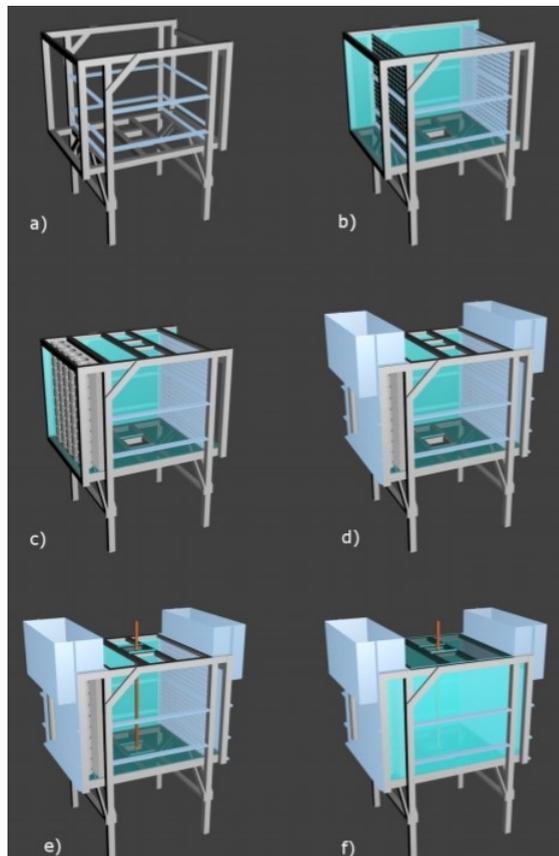


Figura 2.1: Le componenti strutturali dell'apparato sperimentale.

- a. *La struttura di supporto dell'apparato sperimentale.* L'altezza, la lunghezza, la larghezza della struttura sono rispettivamente (circa) $1,8\text{ m}$, $1,5\text{ m}$, $1,1\text{ m}$. I materiali usati per la realizzazione dell'apparato sono l'alluminio, per la struttura portante, e l'acciaio per gli elementi di supporto delle pareti laterali. Nel primo caso si tratta di elementi a sezione quadrata piena di lato 6 cm , nel secondo caso, barre a sezione rettangolare di $6\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}$;

- b. *Le pareti laterali e la lastra filtrante interna di supporto del mezzo poroso.* Il sostegno interno del materiale granulare è costituito da pareti in acciaio inossidabile forate di spessore 2 mm . L'area forata, che corrisponde al 50% della superficie totale, favorisce il passaggio del fluido di filtrazione dal punto di ingresso verso quello di uscita. In più sono state aggiunte una lastra di fondo realizzata in PVC opaco di spessore 20 mm e una lastra laterale in PVC trasparente dello spessore di 10 mm ;
- c. *I distributori di flusso e il rettificatore di flusso nella vasca di ingresso del fluido di filtrazione.* Il fluido di filtrazione viene inserito nell'apparato sperimentale attraverso 5 tubazioni verticali in PVC collocate nella vasca di carico di monte. Al fine di rendere il più uniforme possibile la portata di filtrazione sulla superficie di flusso, è stata inserita una parte alveolare in policarbonato dello spessore di 6 cm ;
- d. *Le vasche di ingresso ed uscita del fluido di filtrazione.* Le vasche di monte e di valle per l'ingresso e l'uscita del fluido di filtrazione. Le vasche sono dotate di sfioratori al fine di mantenere un gradiente piezometrico pressoché costante (valore massimo circa $0,25\frac{\text{m}}{\text{m}}$);
- e. *La sonda geotermica in rame.* Al centro del cubo è stato inserito un tubo in rame come diffusore di calore nelle prove sperimentali. La scelta di questo materiale è dovuta al suo coefficiente di conducibilità termica ($4,01\frac{\text{W}}{\text{mK}}$) [Lid03] che enfatizza gli effetti di scambio energetico tra la sonda e l'ambiente circostante. Il tubo ha un diametro interno di 28 mm , un diametro esterno di 32 mm e un'altezza interna all'apparato sperimentale di 950 mm ;
- f. *La chiusura superiore del modello.* L'ultima componente che completa l'apparato è la lastra di chiusura superiore in PVC di spessore di 1 cm .

2.2 I circuiti idraulici

Il progetto del modello fisico prevede la realizzazione di due circuiti idraulici: il circuito idraulico del freddo e il circuito idraulico del caldo. È previsto che entrambi i circuiti possano essere inseriti nel circuito sonda. In Figura 2.2 è schematizzata la parte strutturale dell'apparato sperimentale e i punti di innesto del circuito della sonda geotermica e del fluido di filtrazione.

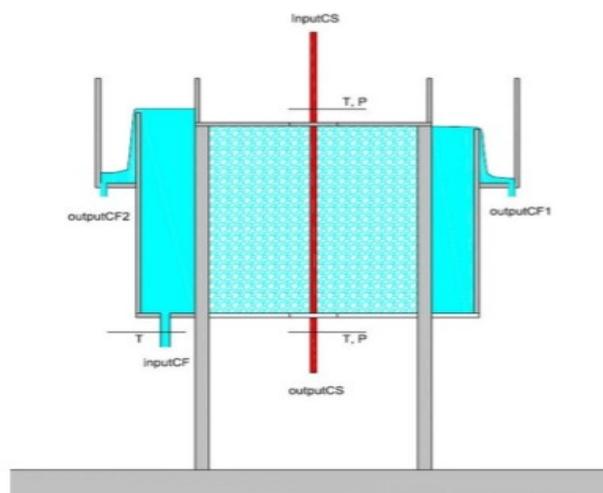


Figura 2.2: Schema della parte strutturale dell'apparato sperimentale e dei punti di innesto dei circuiti idraulici della sonda geotermica e del fluido di filtrazione.

Il circuito sonda inserisce il fluido nella parte alta dell'apparato sperimentale (inputCS) e lo riacquiesce in uscita dall'apparato sperimentale (outputCS). Il circuito del fluido di filtrazione inserisce il fluido nella parte bassa della vasca di carico (inputCF). La stabilità del moto di filtrazione attraverso il mezzo poroso dell'apparato sperimentale viene assicurata mediante due pareti sfioranti, una nella vasca di carico e l'altra nella vasca di scarico. Inoltre, l'apparato è munito di due scarichi del circuito di filtrazione, uno nella vasca di scarico (outputCF1) e l'altro dalla vasca di carico (outputCF2). I due circuiti sono pensati per assicurare in ingresso al modello una portata fluida costante a temperatura costante [Sco17].

2.3 Potenza macchine termiche, portata a regime nei circuiti

Il campo di variabilità della portata nei circuiti idraulici è una funzione della variazione di temperatura che i fluidi subiscono percorrendo l'intero circuito. Questa variazione di temperatura deve essere ripristinata da una macchina di adeguata potenza. In Figura 2.3 si nota che, a parità di potenza, la portata aumenta al diminuire della differenza di temperatura.

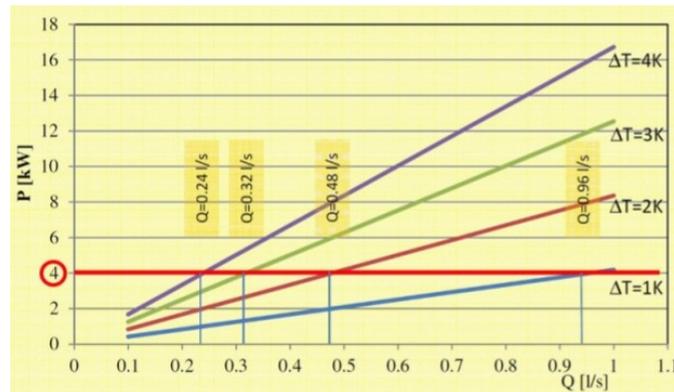


Figura 2.3: Relazione tra potenza delle macchine termiche e portata nei circuiti al variare della variazione di temperatura subita dai fluidi nei circuiti idraulici.

In Figura 2.4 vengono mostrate due situazioni diverse: nel primo caso, con numero di Reynolds pari a 2000, il flusso è al limite del comportamento laminare. La massima portata ($0,10 \frac{l}{s}$) si ottiene a basse temperature a condizione che il diametro sia di 35 mm . In b il flusso è in condizioni di transizione tra il regime laminare e il regime turbolento (numero di Reynolds pari a 20000), la massima portata per basse temperature e diametro pari a 35 mm è dell'ordine di $0,9 \frac{l}{s}$. Inoltre, conoscendo la massima portata generabile, il massimo gradiente piezometrico ottenibile e la superficie di filtrazione, si ha la Tabella 2.1:

Massima portata	$0,25 \frac{l}{s} - 1 \frac{l}{s}$
Massimo gradiente piezometrico	$\sim 0,2 \frac{m}{m}$
Superficie di filtrazione	$\sim 1 \text{ m}^2$
Velocità	$2,7 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} - 1,21 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$
Conducibilità idraulica	$1,4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} - 5,5 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$

Tabella 2.1: Parametri inerenti al fluido di filtrazione che scorre all'interno del modello fisico e del materiale granulare [Sco17].

I valori di conducibilità idraulica ottenuti corrispondono a quelli di sabbia pulita, sabbia e ghiaia. La Tabella 2.2 contiene i valori della conducibilità idraulica di alcuni mezzi porosi.

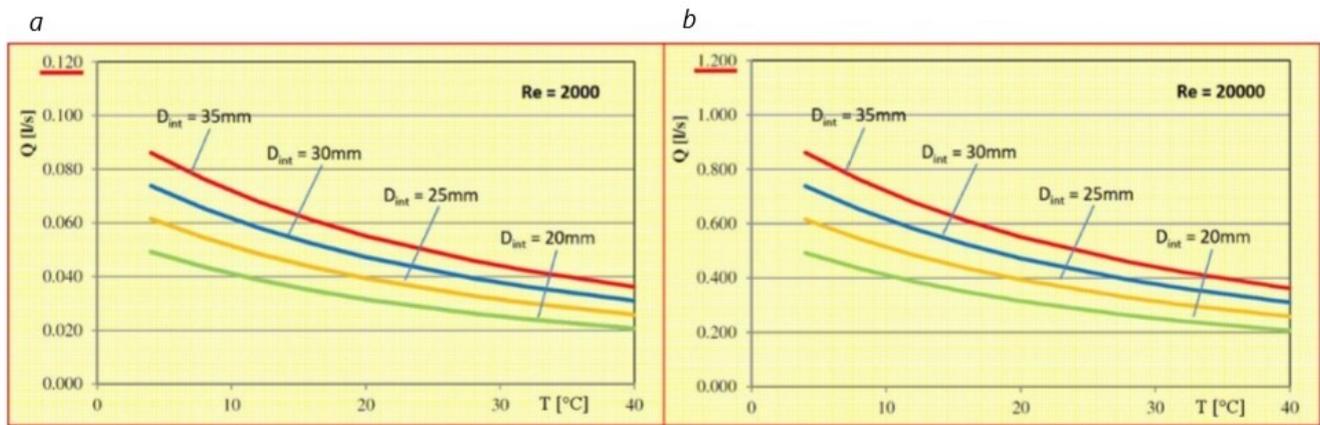


Figura 2.4: Relazione tra portata nel circuito sonda, temperatura del fluido, regime del moto, al variare del diametro del tubo sonda.

TIPO DI TERRENO	$K \left[\frac{m}{s} \right]$
Ghiaia pulita	$10^{-2} - 1$
Sabbia pulita, sabbia e ghiaia	$10^{-5} - 10^{-2}$
Sabbia molto fine	$10^{-6} - 10^{-4}$
Limo	$10^{-8} - 10^{-6}$
Argilla omogenea al di sotto della falda	$< 10^{-9}$
Argilla sovraconsolidata e fessurata	$10^{-8} - 10^{-4}$

Tabella 2.2: Conducibilità idraulica dei mezzi porosi [Vol19]

2.4 I sensori di temperatura

La principale grandezza fisica rilevata nella sperimentazione è la temperatura. Per la misura di questo parametro sono state utilizzate le termoresistenze. Le termocoppie e i termistori sono stati scartati perché ritenuti poco adatti a questo modello fisico. Le termoresistenze sono del tipo PT100. Il tempo di risposta di fabbrica ($0,3\text{sec}$) è stato aumentato a circa $2,5\text{sec}$ a causa della protezione applicata al sensore in forma di calza metallica permeabile all'acqua.

Le temperature misurate sono:

1. la temperatura del fluido nella condotta di rame in ingresso al volume di controllo e in uscita dal volume di controllo;
2. la temperatura ambiente;
3. le temperature in 24 posizioni all'interno del volume di controllo.

Nella Figura 2.5 sono raccolte tutte le informazioni inerenti i canali di acquisizione delle sonde di temperatura. Nella Figura 2.6 sono rappresentate graficamente le posizioni delle sonde di temperatura e della sonda termica. Le sonde di temperatura sono state fissate lungo aste in vetro di diametro 6 mm , e affacciate verso la sonda di rame. Le aste sono collocate a diversa distanza dalla sonda in rame e sono state disposte in maggior numero a valle della sonda (aste 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) ma anche a monte della stessa (aste 1bis, 5bis, 3bis, 7bis). Le distanze sono calcolate a partire dall'asse longitudinale dell'apparato sperimentale passante per il centro della

sonda termica (Figura 2.6.) I sensori delle sonde di temperatura sono collocati alle distanze dal fondo dell'apparato sperimentale di 50mm, 300mm, 500mm, 700mm, 900mm.

Le aste e le sonde di temperatura sono collocate in maggior numero a valle della sonda termica per descrivere al meglio il plume termico in caso di moto di filtrazione. Le sonde collocate a monte hanno la funzione primaria di permettere la verifica della condizione di simmetria nel caso di assenza del moto di filtrazione in presenza o in assenza del fluido intergranulare.

acquisition channel	internal external sound	rod number	elevation from the bottom [mm]	acquisition channel	internal external sound	rod number	elevation from the bottom [mm]	acquisition channel	internal external sound	rod number	elevation from the bottom [mm]
CH00	external			CH14	internal	3	+500	CH28	internal	3bis	+500
CH01	external			CH15	external			CH29	internal	7bis	+500
CH02	internal	1	+50	CH16	internal	3	+700	CH30	room	---	---
CH03	internal	1	+300	CH17	internal	6	+50	CH31	not used	---	---
CH04	external			CH18	external			CH32	not used	---	---
CH05	internal	1	+500	CH19	internal	6	+900	CH33	discharge	---	---
CH06	internal	1	+700	CH20	internal	4	+50	CH34	not used	---	---
CH07	internal	1	+900	CH21	internal	4	+900	CH35	not used	---	---
CH08	internal	2	+50	CH22	external			CH36	not used	---	---
CH09	internal	2	+900	CH23	internal	7	+300	CH37	not used	---	---
CH10	internal	5	+300	CH24	internal	7	+500	CH38	not used	---	---
CH11	internal	5	+500	CH25	internal	7	+700	CH39	not used	---	---
CH12	internal	5	+700	CH26	internal	1bis	+500	CH40	not used	---	---
CH13	internal	3	+300	CH27	internal	5bis	+500	CH41	not used	---	---

Figura 2.5: I canali di acquisizione delle sonde di temperatura usati nelle varie posizioni delle aste reggi sonde (Figura 2.6).

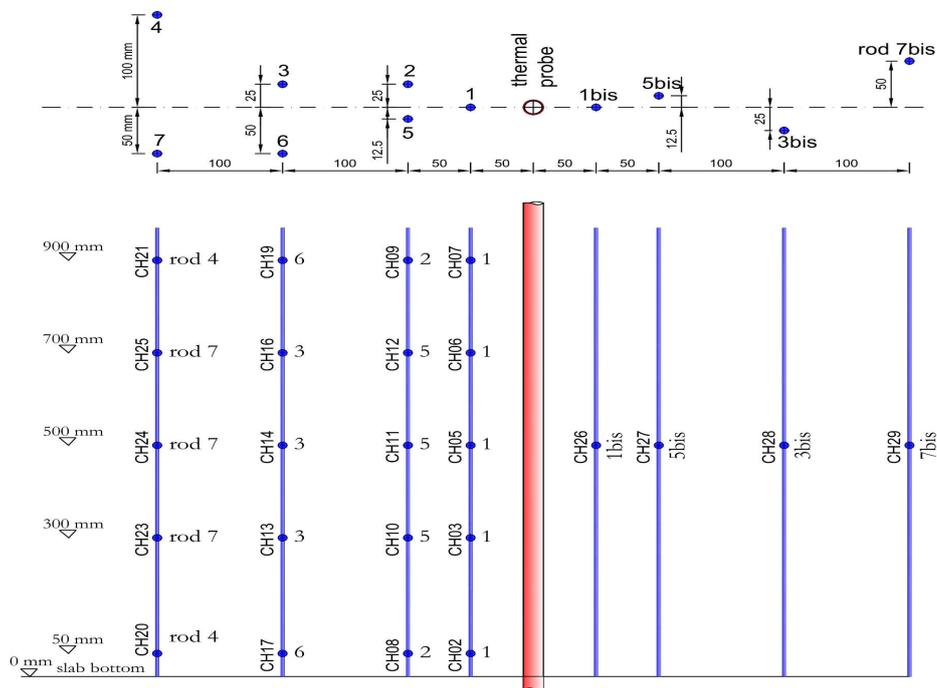


Figura 2.6: In alto, la posizione planimetrica delle aste di supporto delle sonde di temperatura dentro al volume di controllo; in basso, la quota rispetto al fondo dei vari sensori di temperatura.

Il sistema di acquisizione permette l'acquisizione in corrente continua (4-20 mA), da 42 sensori alla frequenza massima di 0,2 Hertz. I canali vengono utilizzati per l'acquisizione dei valori di temperatura, di portata e di pressione previsti [Sco17].

2.5 Il materiale granulare utilizzato nei test

Il materiale granulare utilizzato nei test è risetta del Brenta. La forma è arrotondata, il diametro medio è di circa 2mm e variabile tra 1,5mm e 3mm. Il materiale, dopo aver determinato la curva granulometrica, è stato classificato come ghiaia medio-fine. Il materiale è caratterizzato da una densità di $2730 \frac{kg}{m^3}$, da una conducibilità termica a secco $0,5 \frac{W}{m \cdot K}$, da una conducibilità termica in condizioni di saturazione di $1,7 \frac{W}{m \cdot K}$. Questi valori sono stati stimati dalla letteratura. La capacità termica del materiale granulare saturo d'acqua è stimata in $2.05 \cdot 10^6 \frac{J}{m^3 \cdot K}$.

Capitolo 3

Analisi dei dati

La configurazione sperimentale è quella del modello fisico riempito con materiale poroso ad elevata conducibilità idraulica in assenza di acqua di filtrazione. Al centro di questo apparato è stata inserita una sonda termica attraverso la quale scorre acqua. La temperatura media del fluido all'interno della sonda termica è di circa di $41\text{ }^{\circ}\text{C}$. Grazie all'elevata conducibilità termica del rame, la temperatura sulla superficie esterna della sonda termica viene approssimata con quella interna. L'ambiente esterno alla sonda è stato posto alla temperatura iniziale di $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, e così anche le pareti del modello fisico e dell'aria che circonda il modello [Sco17].

3.1 Raccolta dati

I valori di temperatura misurati mediante i sensori vanno a formare il dataset contenente le temperature in funzione del tempo trascorso e dello spazio. Le unità di misura di questa raccolta dati sono rispettivamente i *secondi* per il tempo, i $^{\circ}\text{C}$ per la temperatura e i *mm* per lo spazio. La prova ha avuto una durata di circa 5 giorni.

I sensori termici sono stati tarati utilizzando una cella di Peltier ed un termometro a mercurio di elevata precisione. La diversa pendenza delle rette di taratura è legata alla fase di manifattura durante la quale è impossibile creare sensori di identica forma.

3.2 Comportamento del modello rispetto al caso ideale

Il modello fisico può essere approssimato a un cilindro cavo che rispetta le leggi della conduzione termica esplicate precedentemente (par. 1.1.2). Sarebbe errato pensare che il modello segua esattamente l'andamento del caso ideale in quanto i sistemi naturali si comportano diversamente da quelli ideali. Per quantificare questa variazione vengono misurate le temperature all'interno del modello (temperatura misurata), poi, usando l'eq. 1.16, si ricavano le temperature che si avrebbero in condizioni di regime. A questo punto, disegnando sul grafico *distanza-temperatura* la curva delle temperature calcolate e quella delle temperature misurate, si può notare come siano discostate l'una rispetto all'altra. Questa procedura è stata eseguita per diversi tempi ($5000s$, $10000s$, $20000s$, $25000s$, $50000s$, $100000s$, $150000s$, $200000s$, $300009s$, $400006s$, $443206s$), per diverse distanze dall'asse centrale della sonda e per diverse altezze z ($50mm$, $300mm$, $500mm$, $700mm$, $900mm$).

Nei grafici di Figura 3.1, costruiti con i dati rilevati al tempo $200000s$ si nota un aumento della distanza rispetto alla configurazione di regime, passando da quota $500mm$ verso quota $50mm$ e verso quota $900mm$.

Considerando invece l'intervallo temporale che va da $5000s$ a $443206s$ si deduce che, al trascorrere del tempo e alle quote di $300mm$, $500mm$, $700mm$, la curva della temperatura misurata tende

alla curva della temperatura calcolata, senza mai sovrapporsi (Figura 3.2 e Figura 3.3). Via via che ci si allontana dalla quota centrale, le due curve si avvicinano ma la discrepanza tra le due è maggiore in confronto a quella che caratterizza le curve in posizione centrale. Si può quindi sostenere che, da una parte, il modello fisico si avvicina al comportamento del modello ideale nella sua parte centrale, dall'altra, avvicinandosi alla periferia, questo andamento non viene più rispettato. Tale fenomeno è causato dalla significativa permeabilità termica residua, a seguito dell'isolamento realizzato, della parte superiore e inferiore dell'apparato sperimentale.

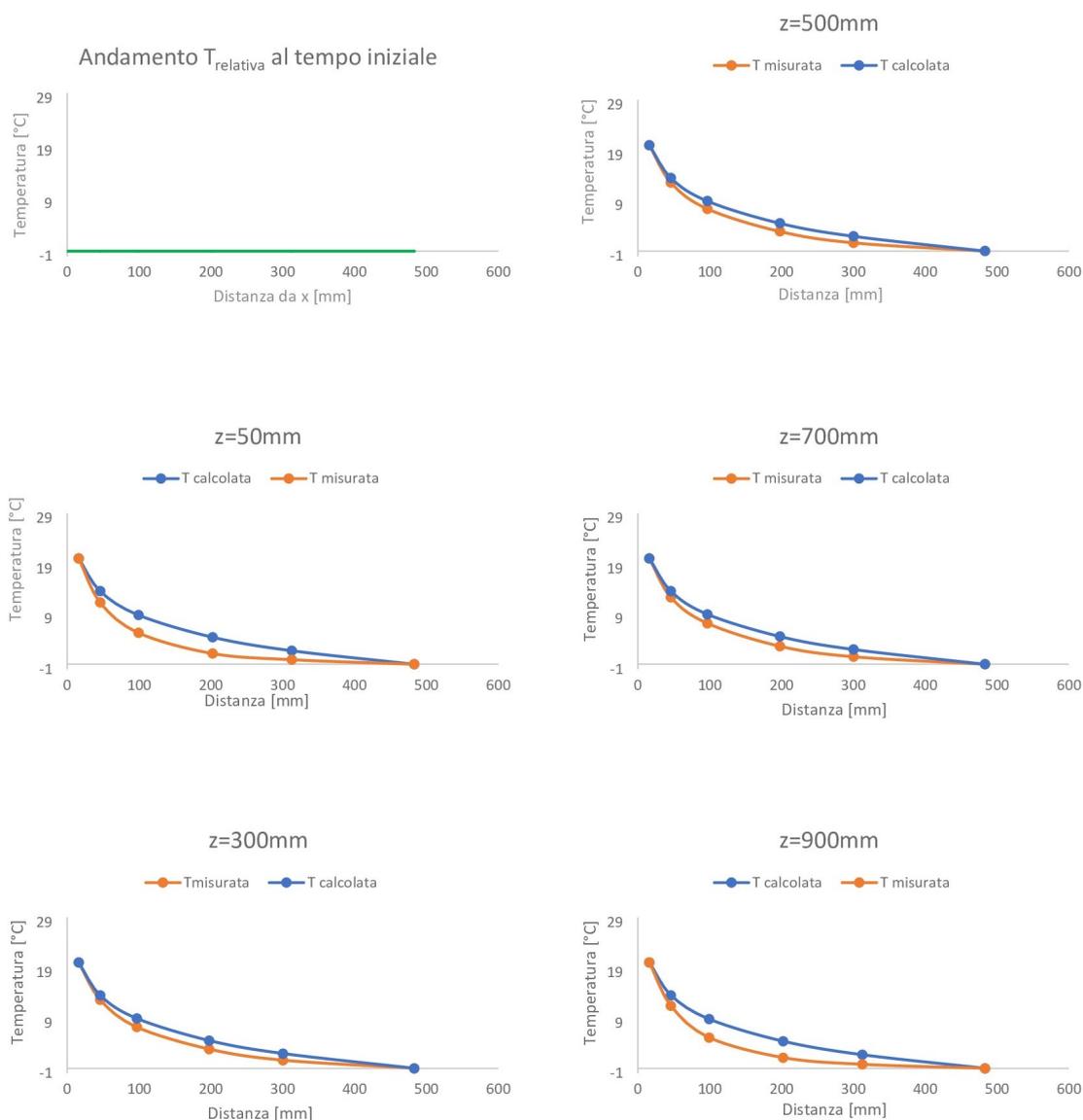


Figura 3.1: Grafici dell'andamento della temperatura, misurata a 200000s dall'inizio del test, in funzione della distanza dall'asse della sonda termica e calcolata in condizioni di regime, alle distanze dal fondo dell'apparato sperimentale di 50mm, 300mm, 500mm, 700mm, 900mm. Il primo grafico mostra la situazione all'interno dell'apparato all'istante iniziale $t = 10s$, la temperatura relativa vale zero lungo tutta la distanza x .

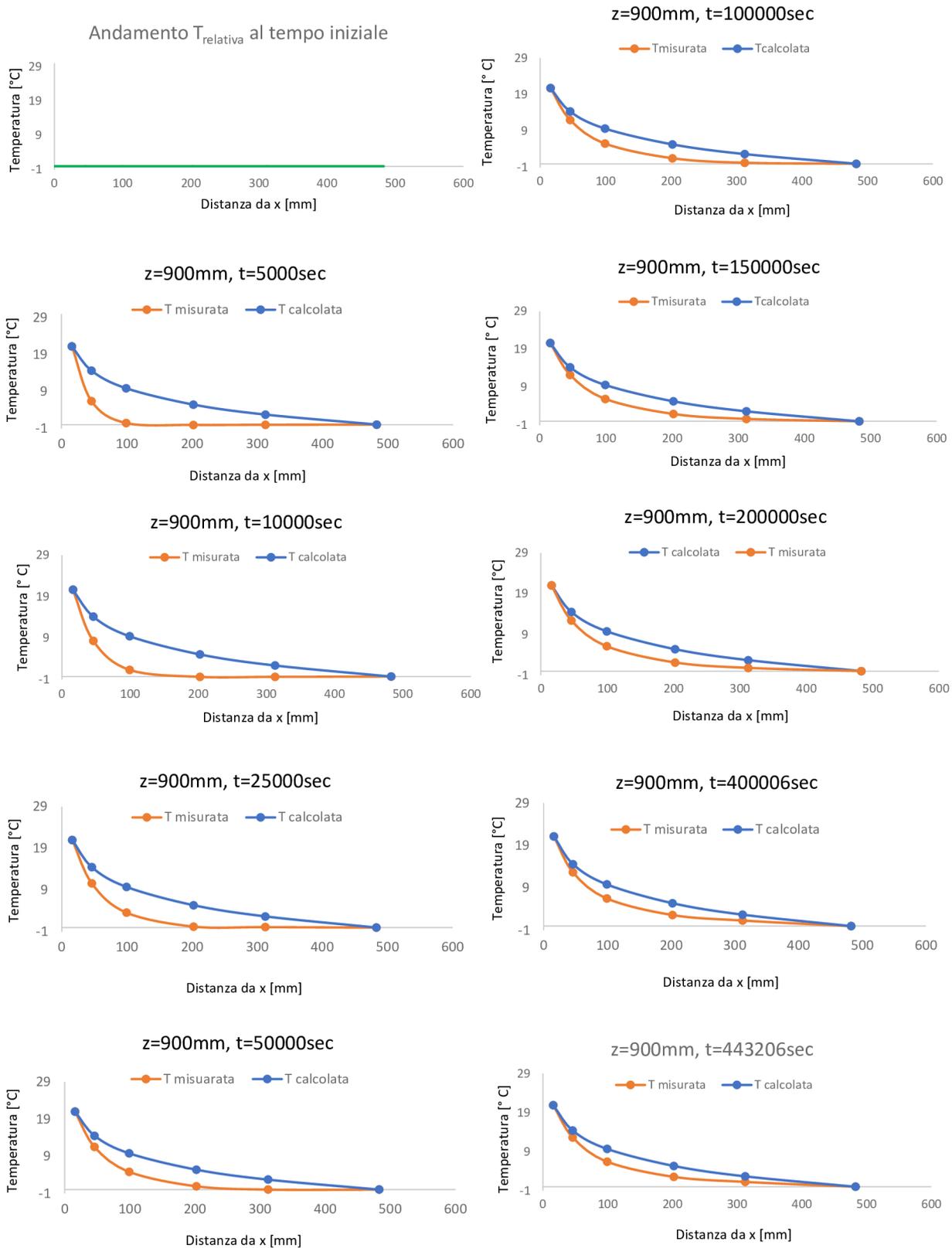


Figura 3.2: Grafici che mostrano l'evoluzione delle curve di temperatura misurata e calcolata durante un arco temporale che va da 5000s a 443206s alla quota $z = 900\text{mm}$ sul fondo (periferia del cubo). Le due curve si avvicinano l'una verso l'altra senza mai combaciare. In rosso, le temperature misurate, in blu, quelle calcolate.

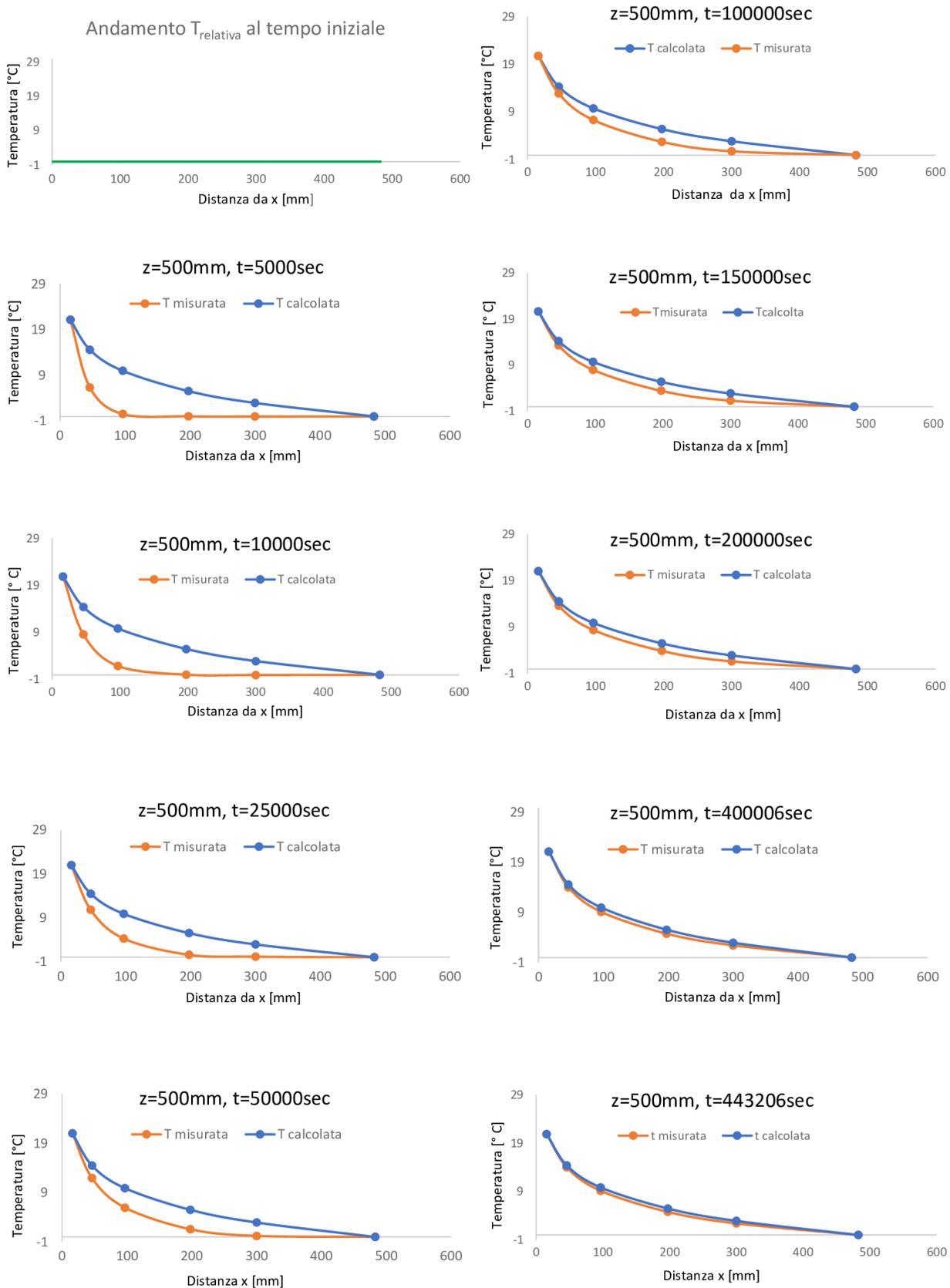


Figura 3.3: Grafici che mostrano l'evoluzione delle curve di temperatura misurata e calcolata durante un arco temporale che va da $5000s$ a $443206s$ alla quota $z = 500\text{mm}$ sul fondo (centro del cubo). Le due curve convergono fino a quasi accavallarsi l'una sull'altra dopo un tempo di circa 123 ore.

Per quantificare l'evoluzione nel tempo della differenza tra i valori misurati e quelli calcolati si definisce il parametro adimensionale R_T come segue:

$$R_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (Tm_{ti} - Tc_i)^2}{Tc_i^2}} \quad (3.1)$$

con Tm_{ti} la temperatura misurata all'istante t ad una distanza i dall'asse della sonda termica e Tc_i la temperatura a regime indipendente dal tempo, alla distanza i .

In Figura 3.4 vengono raggruppati tutti i valori di R_T :

ALTEZZA z [mm]	50		300		500	
TEMPO [s]	Δ Area [mm 2 C]	R_T [-]	Δ Area [mm 2 C]	R_T [-]	Δ Area [mm 2 C]	R_T [-]
5000	2051	1.82	2045	1.8	2049	1.8
10000	1850	1.71	1814	1.68	1818	1.68
20000	1650	1.59	1572	1.54	1578	1.55
25000	1567	1.52	1490	1.46	1472	1.45
50000	1460	1.37	1186	1.25	1190	1.26
100000	1134	1.18	828	0.91	813	0.92
150000	965	1.02	612	0.69	630	0.67
200000	977	0.98	524	0.58	498	0.56
300009	798	0.77	375	0.37	335	0.34
400006	818	0.8	184	0.22	255	0.25
443206	836	0.83	262	0.28	204	0.23

ALTEZZA z [mm]	700		900	
TEMPO [s]	Δ Area [mm 2 C]	R_T [-]	Δ Area [mm 2 C]	R_T [-]
5000	2050	1.8	2046	1.82
10000	1826	1.68	1833	1.72
20000	1590	1.55	1653	1.61
25000	1504	1.48	1555	1.51
50000	1204	1.26	1374	1.41
100000	853	0.95	1158	1.23
150000	677	0.73	991	1.07
200000	578	0.64	995	1.01
300009	439	0.44	825	0.81
400006	374	0.36	832	0.81
443206	316	0.34	842	0.83

Figura 3.4: Tabella contenente i valori del parametro R_T e della differenza di area per le altezze $z = 50mm, 300mm, 500mm, 700mm, 900mm$.

All'aumentare del tempo, R_T diminuisce, in particolare, nelle tre colonne con $z = 300mm, 500mm, 700mm$ diminuisce tendendo a 0. Avere R_T uguale a zero significa che in quel punto dello spazio e in quell'istante il modello raggiunge le condizioni teoriche di regime stazionario. Il fatto che alle quote $z = 300mm, 500mm, z = 700mm, R_T$ acquisisca un valore molto basso, conferma quanto scritto prima, che la zona centrale del cubo si avvicina al caso teorico. Valori prossimi alle condizioni di regime si raggiungono per tempi superiori a 200000s.

Basandosi sui dati elaborati fino a questo punto sembra che il modello non abbia raggiunto le condizioni di regime. Le valutazioni svolte sopra mostrano una tendenza asintotica al raggiungimento delle condizioni di regime. Per stimare l'evoluzione nel tempo del fenomeno analizzato vengono calcolate, per le tre quote centrali (quote giudicate poco influenzate dalle condizioni al contorno

della parete superiore e inferiore) e per 11 istanti di osservazione ben distribuiti nell'intervallo di tempo rilevato, le aree ($mm^{\circ}C$) tra la curva delle temperature a regime e la curva delle temperature misurate. I valori ottenuti vengono mediati sulle tre quote considerate, parametro Δ_{Area} , e presentati in Figura 3.5.

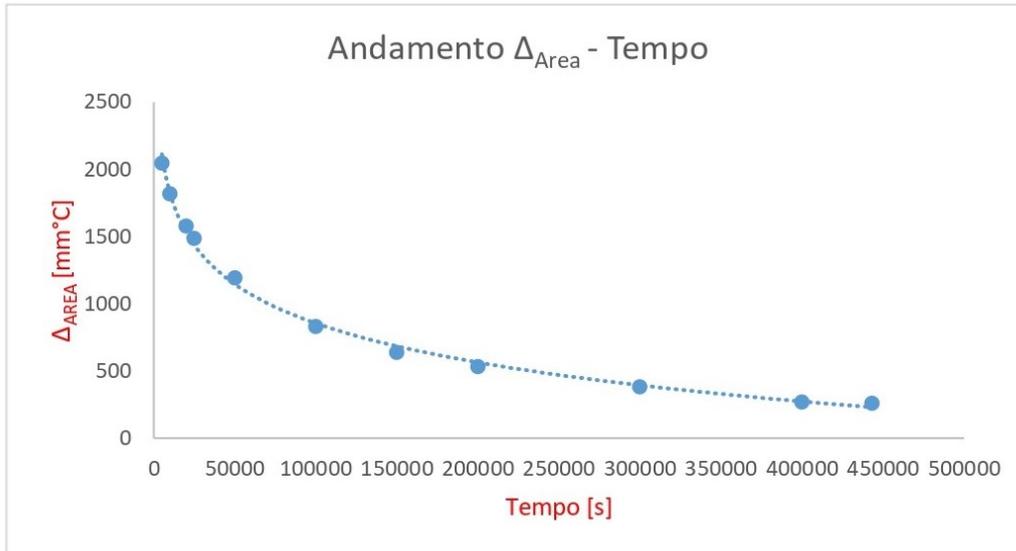


Figura 3.5: Il grafico mostra l'andamento del parametro Δ_{Area} .

I punti così calcolati vengono interpolati con una curva logaritmica ottenendo un coefficiente di determinazione, R^2 , elevato e pari a 0,996.

Le condizioni del sistema rispetto alle condizioni di regime vengono stimate definendo il parametro $\beta(t) = \left(\frac{Area_{iniziale} - Area_t}{Area_{iniziale}} \right) \cdot 100$.

All'istante di tempo 443206 (istante di fine acquisizione) β assume il valore 0,87%. Quando β vale 0,99% il tempo assume il valore di 602127s, ad indicare la necessità di estendere il tempo della prova sperimentale da circa 5 giorni a circa 7 giorni.

Le valutazioni sopra eseguite sono basate sulla ipotesi che la temperatura del materiale granulare in corrispondenza della superficie esterna della sonda termica sia praticamente pari alla temperatura misurata all'interno del liquido che fluisce nella sonda. Questa ipotesi corrisponde a considerare una resistenza termica nulla all'interno della parete in rame (materiale dotato di grande conducibilità termica) della sonda termica e a resistenza termica nulla tra la superficie esterna della sonda termica e il materiale granulare. Per valutare gli effetti sull'andamento delle temperature nel materiale viene ora ipotizzata una riduzione della temperatura del materiale a contatto con la superficie esterna della sonda termica di $1^{\circ}C$. Si suppone, quindi, che la condizione al contorno interna della temperatura del materiale granulare passi da $20,85^{\circ}C$ a $19,85^{\circ}C$. Con questo valore sono state costruite in Figura 3.6, le curve di temperatura teoriche e sperimentali.

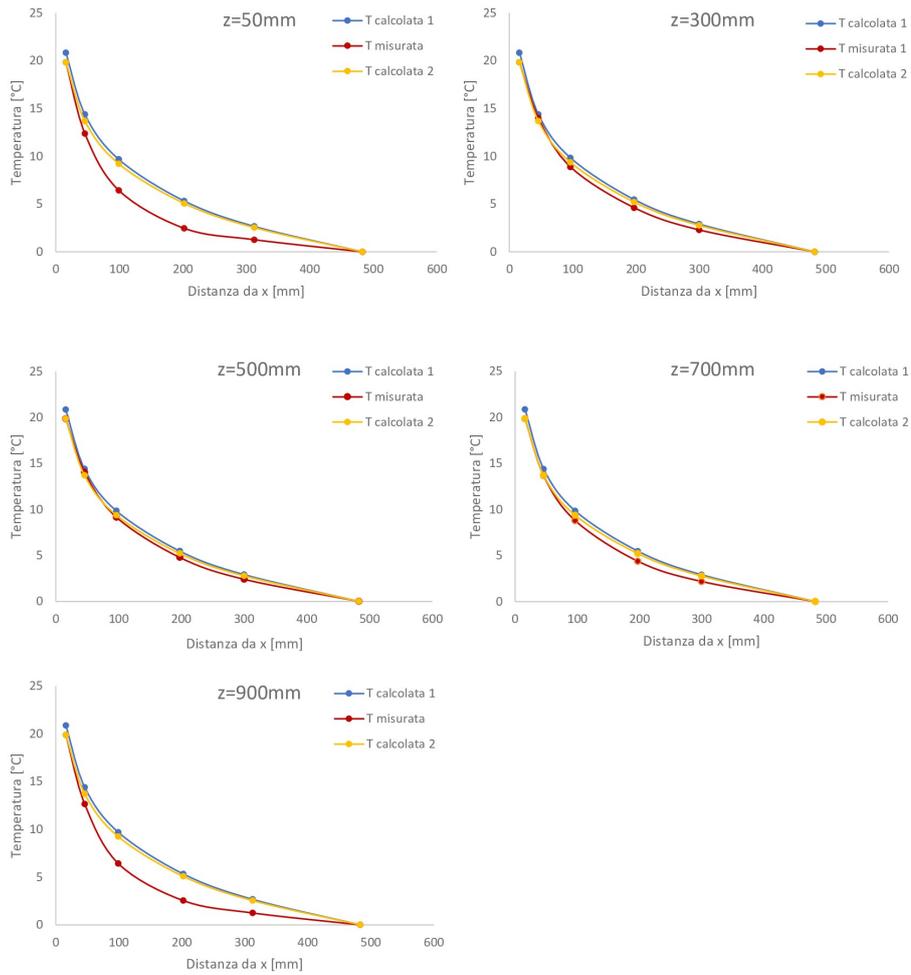


Figura 3.6: Grafici degli andamenti della temperatura a tempo 443206s dall'inizio del test, in funzione della distanza dall'asse della sonda termica. In rosso, la temperatura misurata sperimentalmente, in blu, la curva delle temperature teoriche in condizioni di resistività termica nulla e, in giallo, la curva delle temperature teoriche in condizioni di resistività termica diversa da zero.

Come si può notare, la differenza tra la curva teorica e sperimentale permane, avvalorando l'ipotesi che l'esperimento non sia effettivamente molto prossimo alle condizioni di regime.

Capitolo 4

Conduzione non stazionaria in parete piana

4.1 Il fenomeno fisico realizzato in laboratorio

Il fenomeno fisico realizzato in laboratorio può essere descritto matematicamente utilizzando l'equazione della conduzione in coordinate cilindriche. Nella ipotesi che il materiale possa ritenersi omogeneo, isotropo e che, per almeno una parte della lunghezza della sonda termica all'interno dell'apparato sperimentale, il fenomeno non risenta delle condizioni al contorno della parete superiore e inferiore, il problema fisico può essere scritto matematicamente nel modo seguente (Figura 4.1):

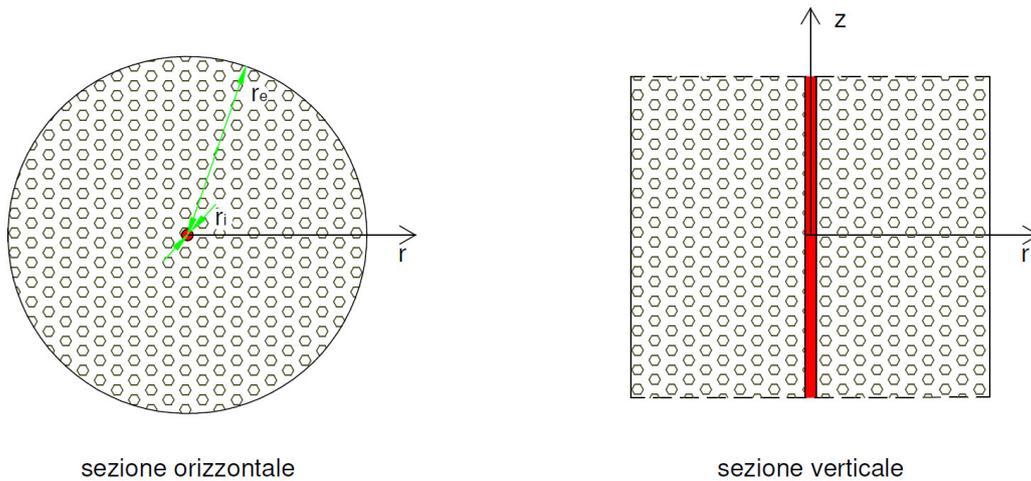


Figura 4.1: Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale nella configurazione del test analizzato nel presente lavoro. In rosso la sonda termica ad asse verticale; attorno, il materiale granulare costituito da risetta del brenta.

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) \quad (4.1)$$

con le condizioni al contorno:

$$T(r_i, t) = T_i, \quad T(r_e, t) = T_e,$$

e con la condizione iniziale:

$$T(r, 0) = T_i \text{ in } r_i < r < r_e.$$

α è la diffusività termica:

$$\alpha = \frac{\lambda}{c_v \cdot \rho}$$

dove λ è la conducibilità termica del materiale, c_v la capacità termica del materiale e ρ la densità del materiale.

La funzione $T(r, t)$ che risolve il problema non è stata ancora ottenuta, a causa della difficoltà nel tener conto delle condizioni al contorno. Per questa ragione, generalmente, problemi di questo tipo vengono risolti per via numerica.

Nel presente lavoro, prima di affrontare la via numerica di soluzione del problema posto, si è cercato di descrivere le relazioni tra i parametri termodinamici in una configurazione geometricamente diversa, anche se simile alla precedente, ma per la quale è possibile ottenere una soluzione analitica. Si considera, quindi, il problema monodimensionale di Figura 4.2, sonda rettangolare molto larga che riscalda due pareti piane disposte sui due lati, descritto matematicamente dalla eq. 4.2 e dalle condizioni al contorno e iniziali indicate:

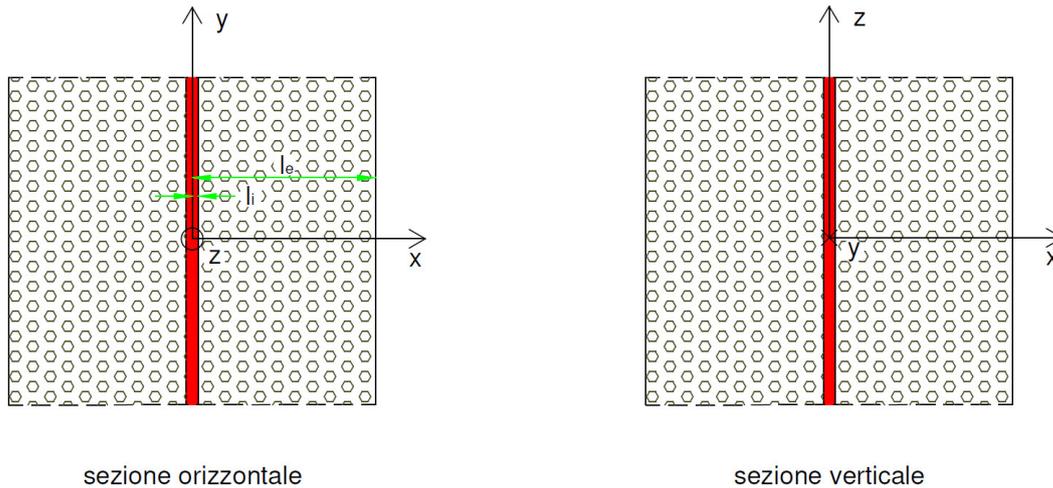


Figura 4.2: Rappresentazione schematica di una sonda riscaldante a sezione rettangolare larga coperta su entrambi i lati da uno spessore definito di materiale. In rosso la sonda termica; ai lati, il materiale granulare costituito da risetta del brenta.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \tag{4.2}$$

con le condizioni al contorno:

$$T(l_i, t) = T_{l_i}, \quad T(l_e, t) = T_{l_e},$$

e con la condizione iniziale:

$$T(x, 0) = T_i \text{ in } l_i < x < l_e.$$

4.2 La soluzione teorica non stazionaria della conduzione termica tra due pareti piane parallele

Si tratta di risolvere il problema della conduzione termica, in regime non stazionario, all'interno di un materiale di spessore definito nella direzione x e infinitamente esteso nelle altre due direzioni (Figura 4.3, configurazione sostanzialmente identica a quella di Figura 4.2). Il materiale è considerato omogeneo, isotropo e con proprietà termodinamiche indipendenti dal tempo.

Su una faccia, in posizione $x = 0$, la temperatura viene mantenuta costante e pari a T_0 (condizione al contorno). Sulla faccia a distanza $x = l$ la temperatura viene mantenuta costante nel tempo e pari a T_l (condizione al contorno). Nel materiale la temperatura iniziale è costante e pari a T_i

(condizione iniziale) [Sco20].

Il problema che deve essere risolto è, quindi, il seguente:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

con le condizioni al contorno:

$$T(0,t)=T_0, \quad T(l,t) = T_l,$$

e con la condizione iniziale:

$$T(x,0)=T_i \text{ in } 0 < x < l.$$

α è la diffusività termica:

$$\alpha = \frac{\lambda}{c_v \cdot \rho}$$

dove λ è la conducibilità termica, c_v la capacità termica del materiale e ρ la densità del materiale.

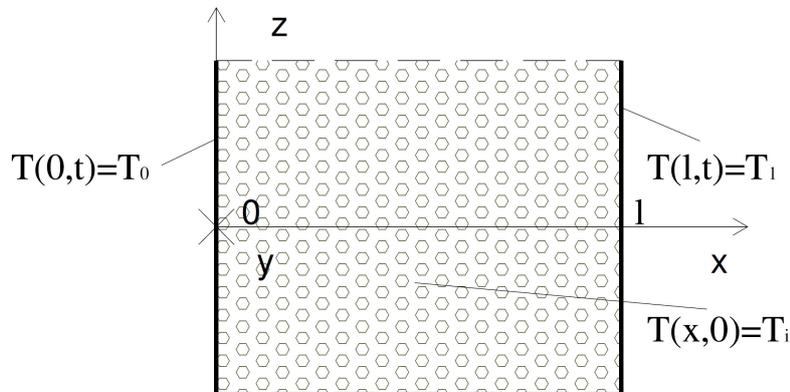


Figura 4.3: In alto, schema di una trave ad una campata, semplicemente appoggiata, sollecitata da un carico uniformemente distribuito e da un carico concentrato. In basso, il sistema di riferimento adottato per la determinazione delle reazioni e delle sollecitazioni.

Per ottenere la soluzione si ipotizza che si possa descrivere la $T(x,t)$ nella forma seguente:

$$T(x,t) = V(x,t) + F(x)$$

con $F(x) = ax + b$. a e b si determinano dalle condizioni al contorno. Dalla condizione al contorno in $x = 0$ si ottiene:

$$T(0,t) = T_0 = V(0,t) + a \cdot 0 + b$$

Imponendo $V(0,t) = 0$ si ottiene $b = T_0$.

Dalla condizione al contorno in $x = l$ si ottiene:

$$T(l,t) = T_l = V(l,t) + a \cdot l + T_0$$

Imponendo $V(l,t) = 0$ si ottiene $a = \frac{T_l - T_0}{l}$. Dalla condizione iniziale si ottiene infine:

$$T(x,0) = T_i = V(x,0) + \frac{T_l - T_0}{l} \cdot x + T_0$$

e, quindi, $V(x,0) = (T_i - T_0) - \frac{T_l - T_0}{l} \cdot x$. Il nuovo problema diviene:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

con le condizioni al contorno:

$$V(0,t)=0, \quad V(l,t)=0,$$

e con la condizione iniziale:

$$V(x,0) = (T_i - T_0) - \frac{T_i - T_0}{l} \cdot x \text{ in } 0 < x < l.$$

Si ipotizza ora che esista una soluzione della equazione differenziale del tipo:

$$V(x,t) = Y(t) \cdot X(x),$$

dove $Y(t)$ è una funzione della sola variabile tempo, t , e $X(x)$ è una funzione della sola variabile spaziale, x . Eseguendo la derivata parziale prima rispetto al tempo e la derivata parziale seconda rispetto allo spazio e sostituendo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial Y(t)}{\partial t} \cdot X(x) \\ \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} &= Y(t) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nella eq. 4.4 si ottiene:

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} \cdot X(x) = \alpha \cdot Y(t) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

e, in forma più compatta: $Y' \cdot X = \alpha \cdot Y \cdot X''$.

Separando i termini dipendenti dal tempo dai termini dipendenti dallo spazio si ottiene la relazione $(1/\alpha) \cdot Y'/Y = X''/X$. La quantità a sinistra dipende soltanto dal tempo, mentre la quantità a destra dipende solo dallo spazio. Entrambe devono, quindi, essere uguali ad una costante. È facile verificare che deve essere una costante negativa. Si pone allora:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{Y'}{Y} = \frac{X''}{X} = -\mu^2,$$

e il problema si risolve, risolvendo le due equazioni:

$$\begin{aligned} Y' + \alpha \cdot \mu^2 \cdot Y &= 0; \\ X'' + \mu^2 \cdot X &= 0. \end{aligned}$$

La soluzione della prima equazione differenziale è una funzione esponenziale del tipo:

$$Y = A \cdot e^{-\alpha \cdot \mu^2 \cdot t}$$

con A una opportuna costante. La soluzione della seconda equazione differenziale è una funzione ottenuta dalla combinazione lineare delle funzioni trigonometriche *sin* e *cos*:

$$X = B \cdot \sin(\mu \cdot x) + C \cdot \cos(\mu \cdot x)$$

con B e C opportune costanti. La soluzione assume, allora, la forma seguente:

$$V(x,t) = A \cdot e^{-\alpha \cdot \mu^2 \cdot t} \cdot (B \cdot \sin(\mu \cdot x) + C \cdot \cos(\mu \cdot x))$$

Ponendo ora la condizione al contorno in $x = 0$, $T(0,t) = 0$ si ottiene:

$$A \cdot e^{-\alpha \cdot \mu^2 \cdot t} \cdot C = 0.$$

e, siccome A deve essere diversa da zero, altrimenti la funzione perde la dipendenza dal tempo, deve essere $C = 0$. La soluzione diviene allora:

$$V(x, t) = A \cdot e^{-\alpha \cdot \mu^2 \cdot t} \cdot B \cdot \sin(\mu \cdot x) = E \cdot e^{-\alpha \cdot \mu^2 \cdot t} \cdot \sin(\mu \cdot x)$$

Si pone ora la condizione al contorno in $x = l$: $V(l, t) = 0$. Si pone, cioè:

$$V(l, t) = E \cdot e^{-\alpha \cdot \mu^2 \cdot t} \cdot \sin(\mu \cdot l) = 0.$$

La costante E deve essere diversa da zero e deve essere allora $\sin \mu \cdot l = 0$, e quindi $\mu \cdot l = m \cdot \pi$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e ancora $\mu = \frac{m \cdot \pi}{l}$. La soluzione assume la forma:

$$V(x, t) = E_m \cdot e^{-\alpha \cdot (\frac{m \cdot \pi}{l})^2 \cdot t} \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x),$$

dove si è sostituito E_m a E per indicare che la costante cambia al variare di m .

La posizione della condizione iniziale, $t = 0$ fornisce la relazione:

$$V(x, 0) = (T_i - T_0) - \frac{T_l - T_0}{l} \cdot x = E_m \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x).$$

Si nota che non è possibile soddisfare questa condizione con soluzioni del tipo indicato (una retta non è descrivibile con una funzione sinusoidale). È possibile, però, considerare una somma di soluzioni del tipo trovato perché anche questa soddisfa l'equazione differenziale data. Si considera, allora, la seguente nuova soluzione:

$$V(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \cdot e^{-\alpha \cdot (\frac{m \cdot \pi}{l})^2 \cdot t} \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x).$$

La posizione della condizione al contorno fornisce ora:

$$V(x, 0) = (T_i - T_0) - \frac{T_l - T_0}{l} \cdot x = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x). \quad (4.5)$$

La nuova soluzione è la serie di Fourier di una funzione dispari su mezzo periodo. I coefficienti E_m valgono allora:

$$E_m = \frac{2}{l} \int_0^l [C_1 - C_2 \cdot x] \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x) \cdot dx, \quad (4.6)$$

con $C_1 = (T_i - T_0)$ e $C_2 = \frac{T_l - T_0}{l}$. La soluzione dell'integrale fornisce i valori dei coefficienti E_m :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{2}{l} \int_0^l [C_1 - C_2 \cdot x] \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x) \cdot dx \\ &= \frac{2}{l} \cdot C_1 \cdot \int_0^l \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x) \cdot dx - \frac{2}{l} \cdot C_2 \cdot \int_0^l x \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x) \cdot dx \\ &= \frac{2}{l} \cdot C_1 \cdot |(-1) \cdot \frac{l}{m \cdot \pi} \cdot \cos(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x)|_0^l - \frac{2}{l} \cdot C_2 \cdot \int_0^l x \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x) \cdot dx \end{aligned}$$

Integrando per parti il secondo termine si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^l x \cdot \sin(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x) \cdot dx &= -|x \cdot \frac{l}{m \pi} \cdot \cos(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x)|_0^l + \int_0^l \frac{l}{m \cdot \pi} \cos(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x) \cdot dx \\ &= -\frac{l^2}{m \pi} \cdot \cos(\frac{m \cdot \pi}{l}) + 0 \end{aligned}$$

e sostituendo:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{2}{l} \cdot \left[-C_1 \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot (\cos m\pi - 1) - C_2 \cdot \left(-\frac{l^2}{m\pi} \cdot \cos m\pi \right) \right] \\ &= \frac{2}{m\pi} \cdot C_1 \cdot (1 - \cos m\pi) + C_2 \cdot \frac{2l}{m\pi} \cdot \cos m\pi \end{aligned}$$

La soluzione $T(x, t)$ dell'equazione differenziale è, infine,:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= V(x, t) + F(x, t) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} E_m \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x\right) + \frac{T_i - T_0}{l} \cdot x + T_0 = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{m\pi} \cdot C_1 \cdot (1 - \cos m\pi) + C_2 \cdot \frac{2l}{m\pi} \cdot \cos m\pi \right] \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \\ &\quad \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x\right) + \frac{T_i - T_0}{l} \cdot x + T_0 \end{aligned}$$

essendo $C_1 = T_i - T_0$ e $C_2 = \frac{T_i - T_0}{l}$ si ottiene, in definitiva:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{m\pi} \cdot (T_i - T_0) \cdot (1 - \cos m\pi) + \left(\frac{T_i - T_0}{l}\right) \cdot \frac{2l}{m\pi} \cdot \cos m\pi \right] \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \\ &\quad \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{l} \cdot x\right) + \frac{T_i - T_0}{l} \cdot x + T_0 \end{aligned}$$

Stabilito che:

$T_0 = 0^\circ\text{C}$ è la temperatura alla faccia sinistra;

$T_1 = 20^\circ\text{C}$ è la temperatura alla faccia destra;

$T_i = 0^\circ\text{C}$ è la temperatura iniziale dentro il materiale;

$x_0 = 0\text{m}$ è la posizione della faccia sinistra;

$x_l = 0.5\text{m}$ è la posizione della faccia destra;

$\alpha \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$ è la diffusività termica del materiale che costituisce la parete,

si considerano diversi tipi di configurazione di parete.

4.3 Parete piena costituita da roccia o acqua

Di seguito viene studiata l'influenza della diffusività termica sulla distribuzione della temperatura all'interno di una parete composta da roccia ignea, roccia metamorfica, roccia sedimentaria e acqua.

Conduzione in rocce ignee

Le rocce ignee si classificano in base alle modalità con cui si sono formate oppure basandosi sulla composizione mineralogica. Secondo le modalità con cui si sono formate, si suddividono in:

rocce intrusive (o plutoniche);

rocce effusive (o vulcaniche);

rocce ipoabissali (o filoniane).

Per il caso della parete piena costituita da roccia ignea sono state scelte le rocce intrusive e più precisamente, il granito.

Le rocce plutoniche sono rocce formatesi dalla solidificazione di magmi che si sono intrusi all'interno della crosta terrestre. Poiché il magma si trova fermo dentro la crosta, circondato da altre rocce che fanno da isolante termico, il raffreddamento avviene in tempi molto lunghi. In tali condizioni, tutto il fuso arriva a cristallizzare e la roccia ignea intrusiva che ne deriva è interamente formata da cristalli di grandi dimensioni, generalmente euedrali, e visibili ad occhio nudo e fenocristalli.

Anche le rocce plutoniche si possono classificare in due modi, seguendo le modalità con cui si sono formate oppure differenziandole in base alla composizione mineralogica. Secondo quest'ultima, i graniti possono essere definiti come rocce plutoniche acide a grana grossa costituite da quarzo (20-60%), feldspati alcalini, plagioclasio e da minerali mafici quali biotite (il più comune) e orneblenda. Altri minerali che possono essere presenti in casi particolari sono: pirosseni, andalusite, muscovite, granato, corindone e tormalina.

Rocce con una percentuale di quarzo compresa tra il 20% ed il 60% ma con differente rapporto feldspati alcalini/plagioclasio vengono dette rocce granitoidi e assumono nomi diversi in base al rapporto feldspati alcalini/plagioclasio. Rocce con plagioclasio < 10% sono dette graniti a feldspati alcalini, rocce con plagioclasio > 65% sono dette granodioriti, rocce con plagioclasio > 90% sono dette tonaliti. Queste rocce sono definite "granitoidi" in quanto spesso, macroscopicamente e sul terreno, sono difficilmente distinguibili dai graniti sensu stricto [Bat02].

Nel presente lavoro, si considerano valori dei parametri termodinamici del granito ottenuti dalla letteratura [Inc06], come rappresentativi dei molti graniti presenti in natura.

Perciò, tenendo in considerazione le condizioni al contorno riportate nel par.4.2, si abbia una parete piena di granito caratterizzato da:

$$\rho = 2630 \frac{kg}{m^3};$$

$$c_v = 775 \frac{J}{kg \cdot K};$$

$$\lambda = 2,79 \frac{W}{m \cdot K};$$

$$\alpha = 1,37 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}.$$

Applicando l'equazione del calore in condizioni non stazionarie si ottiene la temperatura al variare dello spazio e del tempo. La Figura 4.4 mostra come al variare del tempo, a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra, la temperatura si avvicina a quella calcolata in condizioni di regime in maniera asintotica. In ordinata della figura è riportato il rapporto tra la temperatura all'istante generico e la temperatura di regime in percentuale:

$$\frac{T(x_0, t)}{T(x_0, t_\infty)} 100$$

La temperatura della parete di granito a $x = 0.4m$, raggiunge il 99,9% delle condizioni di stazionarietà dopo circa 18 ore.

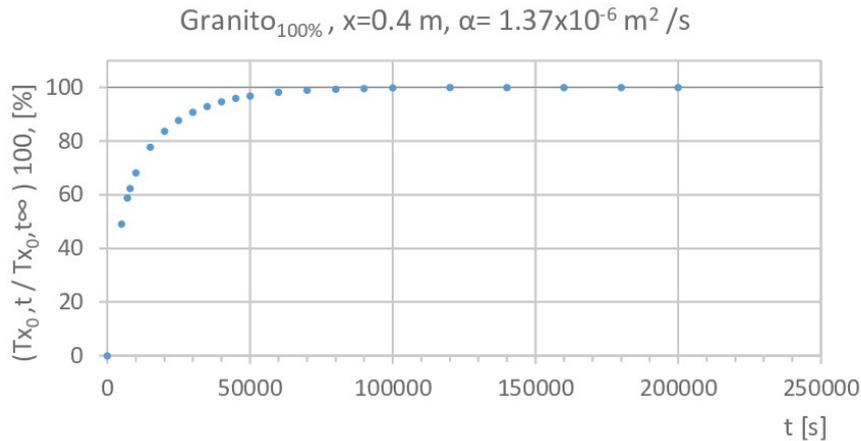


Figura 4.4: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da granito espressa in percentuale. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $1,37 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ e la temperatura è stata analizzata a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

Condizione in rocce metamorfiche

Le rocce metamorfiche sono figlie di un insieme di processi attraverso i quali la mineralogia e la struttura della roccia vengono modificate. Questi processi sono dovuti al tentativo delle rocce di riequilibrarsi a seguito di cambiamenti di pressione e temperatura diverse da quelle a cui la roccia si è formata. Sono processi che avvengono allo stato solido e sono generalmente molto lenti. A seconda che il metamorfismo sia accompagnato da un aumento o da una diminuzione della temperatura e della pressione si avrà: metamorfismo progrado, al progressivo aumentare della temperatura e della pressione, una qualsiasi roccia, subisce trasformazioni mineralogiche e/o tessiturali con formazione di associazioni di minerali stabili a temperature e pressioni crescenti; metamorfismo retrogrado, al progressivo diminuire della temperatura e della pressione, una qualsiasi roccia, subisce trasformazioni mineralogiche e/o tessiturali con formazione di associazioni di minerali stabili a temperature e pressioni decrescenti.

Come campione rappresentativo delle rocce metamorfiche è stato scelto il marmo.

Il marmo è una roccia metamorfica generata dalla ricristallizzazione dei minerali carbonatici di rocce sedimentarie. Questo processo fa sì che la grana tenda ad aumentare, conferendo al marmo il suo tipico aspetto saccaroide.

La maggior parte dei marmi è composta da calcite o, meno comunemente, dolomite. I marmi si formano generalmente durante il metamorfismo regionale; si rinvengono anche nelle zone di contatto tra intrusioni plutoniche e rocce carbonatiche incassanti. Come per il granito, anche il marmo può essere il risultato di diverse combinazioni di minerali. Il marmo scelto per questa casistica è un marmo generico con i seguenti parametri [Inc06]:

$$\rho = 2680 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c_v = 830 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\lambda = 2,80 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$\alpha = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

A questo punto, si mettono a confronto i valori delle temperature a $0,4m$ ottenuti mediante l'equazione del calore in condizioni di non stazionarietà con le temperature ricavate in condizioni di regime. Dal momento che la diffusività termica è leggermente inferiore a quella del granito ci si aspetta che la curva del marmo raggiunga il 99,9% di regime per tempi maggiori. Effettivamente, dal grafico in Figura 4.5 emerge che la temperatura della parete di marmo a $x = 0,4m$, raggiunge il 99,9% delle condizioni di stazionarietà dopo circa 19 ore.

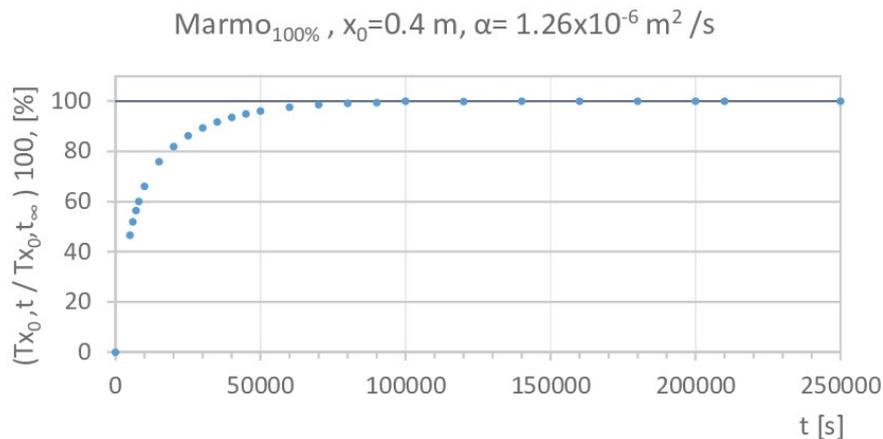


Figura 4.5: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da marmo. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $1,26 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di $0,4m$ dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

Condizione in rocce sedimentarie

Le rocce sedimentarie sono il risultato dell'insieme dei fenomeni di alterazione, erosione, trasporto e accumulo di rocce preesistenti.

L'alterazione superficiale delle rocce esistenti avviene ad opera degli agenti atmosferici, che, per via chimica o fisica, generano nuovo materiale di origine organica ed inorganica. Il vento, l'acqua o i ghiacci prendono in carico questo materiale e lo depositano sul fondo dei bacini marini, lacustri o delle valli. Questo materiale, definito sedimento, è costituito in gran parte da materiale inorganico di disgregazione e in misura minore da gusci o scheletri di organismi.

La trasformazione del sedimento in roccia prende il nome di litificazione e avviene attraverso uno dei processi fondamentali in geologia denominato diagenesi. La diagenesi si verifica a temperature inferiori a $200^\circ C$ e a pressioni inferiori a $0,15$ GPa. Per intervalli superiori di pressione e temperatura si entra nel campo metamorfico.

La prima fase della diagenesi riguarda la compattazione ovvero il materiale sedimentato nei bacini è compattato dal peso degli altri sedimenti che man mano si vanno ad accumulare, portando alla riduzione degli spazi vuoti esistenti fra i granuli; successivamente alla compattazione si ha la cementazione. Se le condizioni ambientali lo permettono, la litificazione può avvenire in tempi lunghissimi anche dell'ordine del milione di anni.

Come campione rappresentativo delle rocce sedimentarie è stato scelto il calcare.

Il calcare è una roccia il cui componente principale è la calcite. Essendo il calcare una roccia sedimentaria, come tale la sua composizione è sempre molto variabile in funzione delle condizioni da cui ha avuto origine [Str]. Si distinguono calcari di:

1. origine chimica. Determinante per la formazione chimica del calcare è il prodotto di soluzione del $CaCO_3$ e gli stadi di dissociazione dell'acido carbonico;
2. origine organogena. I calcari sono formati dalla deposizione e sedimentazione di gusci o scheletri calcarei di animali morti;
3. origine clastica. Le rocce calcaree clastiche si formano in seguito alla disgregazione di agglomerati di calcari formati per origine chimica o organogena.

Anche in questo caso è stato preso in considerazione un generico calcare a cui sono stati attribuiti i seguenti valori [Inc06]: $\rho = 2320 \frac{kg}{m^3}$, $c_v = 810 \frac{J}{kg \cdot K}$, $\lambda = 2,15 \frac{W}{m \cdot K}$, $\alpha = 1,14 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$.

Risolvendo l'equazione del calore in condizioni di non stazionarietà, si ottengono i risultati della Figura 4.6:

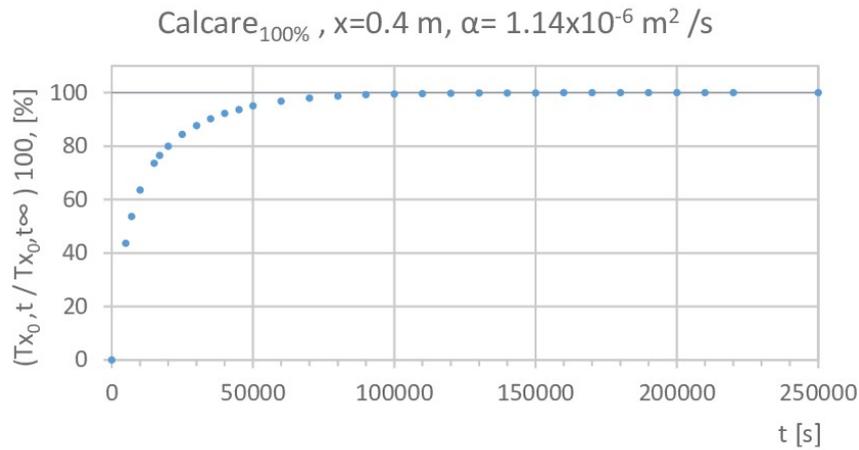


Figura 4.6: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da calcare. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $1,14 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

La diffusività termica è diminuita ulteriormente, ragion per cui il tempo necessario affinché la parete raggiunga il 99,9% delle condizioni di stazionarietà a una distanza $x = 0,4m$ aumenta, sono infatti necessari circa 22 ore.

Conduzione in acqua

Per il caso dell'acqua si presuppone che la parete di lunghezza 0,5m, con una temperatura di 20°C alla parete destra, sia stata riempita con acqua. Per l'acqua sono stati usati i seguenti parametri [Inc06]:

$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$c_v = 4184 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\lambda = 0,63 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$\alpha = 0,15 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}.$$

Risolvendo l'equazione del calore in condizioni non stazionarie si evince che, a distanza $x = 0,4m$, per avvicinarsi alle condizioni di regime, è necessario un tempo di gran lunga maggiore rispetto ai casi del marmo, granito e calcare. Questo è dovuto alla bassa diffusività termica che caratterizza l'acqua, e che rende necessari circa 7 giorni per far raggiungere alla parete, alla distanza $x = 0,4m$, il 99,9% delle condizioni di regime (Figura 4.7).

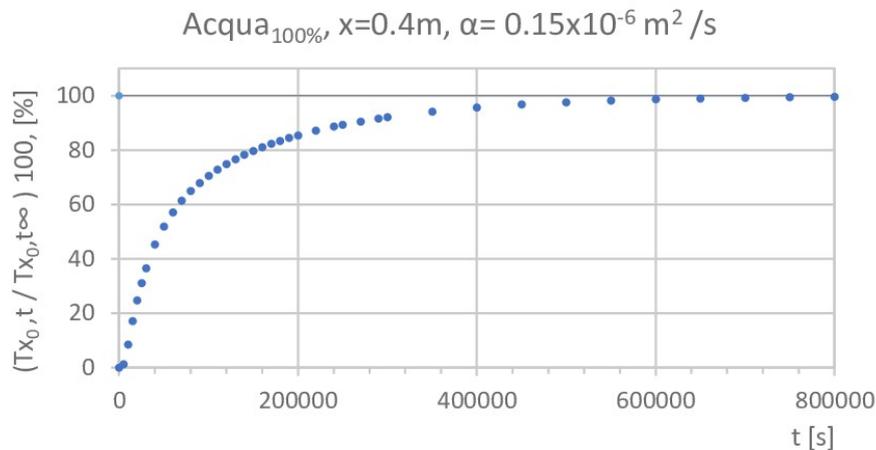


Figura 4.7: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie nel caso della parete piena formata da acqua. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $0,15 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di 0,4m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

4.3.1 I diversi materiali a confronto

In conclusione, in Figura 4.8 sono messi a confronto gli andamenti della temperatura nel tempo, a $x=0,4m$ di Figura 4.3, nelle pareti costituite dai diversi materiali considerati, quando il fenomeno di trasmissione del calore è la conduzione. Le diverse rocce considerate non presentano differenze significative nell'andamento della temperatura, soprattutto in confronto con l'andamento della temperatura nel caso dell'acqua. In quest'ultimo caso, la bassa diffusività termica (minore di circa un ordine di grandezza rispetto alle rocce considerate) causa l'avvicinamento alle condizioni di regime in tempi molto più lunghi (da circa 20 ore a circa 7 giorni). Nel grafico in Figura 4.9 vengono comparati i tempi che i diversi materiali impiegano per raggiungere il regime. In ordine crescente, al granito occorrono circa 18 ore, al marmo, circa 19 ore, al calcare, circa 22 ore e all'acqua circa sette giorni.

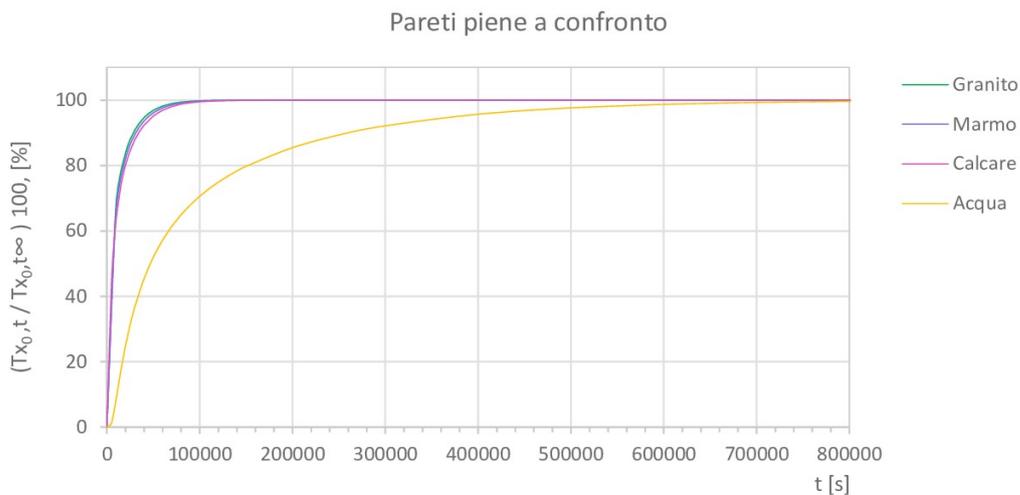


Figura 4.8: Evoluzione delle curve di temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionarie, per il granito, marmo, calcare e acqua, alla distanza $x = 0,4m$ della parete piana di Figura 4.3

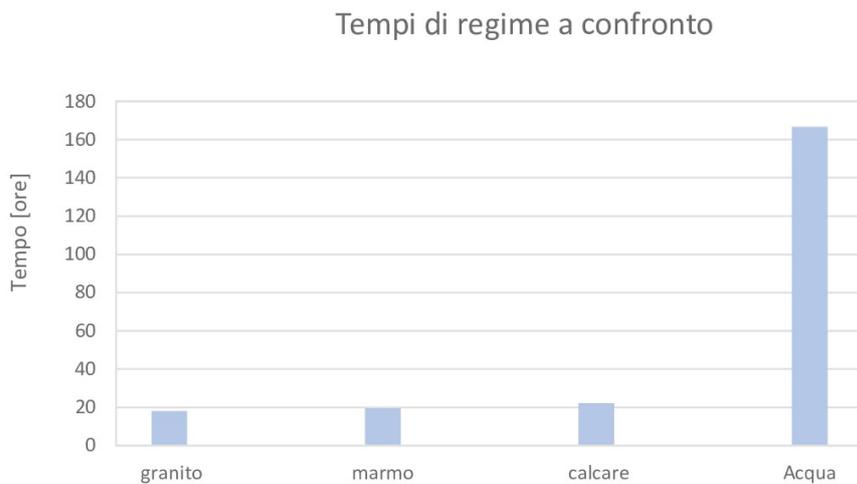


Figura 4.9: Tempi che i diversi materiali in configurazione parete piana necessitano per raggiungere il 99,9% delle condizioni di regime.

Capitolo 5

La conduzione termica non stazionaria in un cilindro

5.1 La soluzione numerica non stazionaria della conduzione termica in un cilindro cavo

Si tratta di risolvere il problema della conduzione termica, in regime non stazionario, all'interno di un materiale disposto in forma di cilindro cavo (Figura 5.1) con raggio interno R_i e raggio esterno R_e . La temperatura sulla superficie interna (condizione al contorno interna) è costante nel tempo, così come la temperatura sulla superficie esterna (condizione al contorno esterna). La temperatura del materiale tra le due superfici è costante e pari alla condizione al contorno sulla superficie esterna [Sco20].

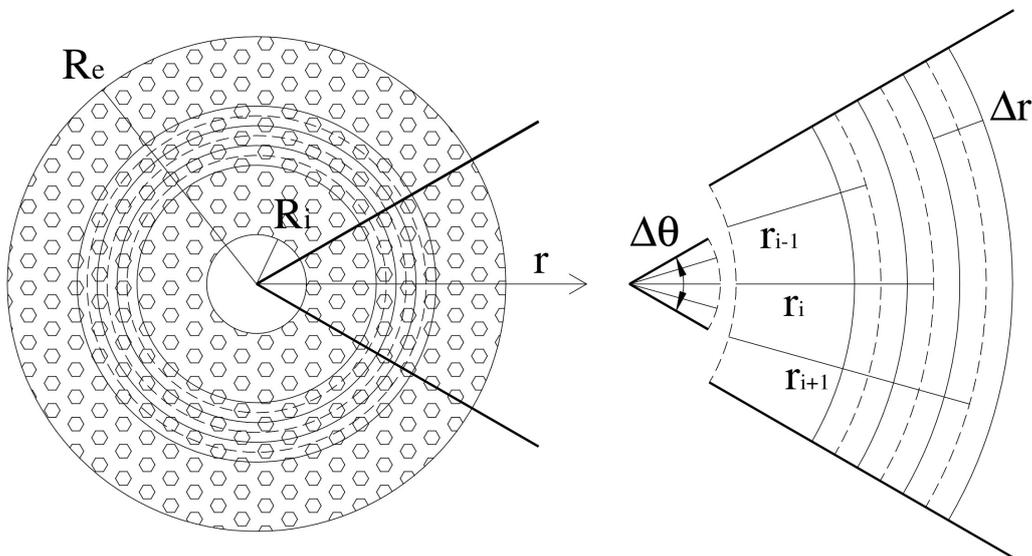


Figura 5.1: Suddivisione dello strato, in forma di cilindro cavo, in sottostrati di spessore Δr . Le proprietà termiche del materiale sono concentrate nei nodi.

Il cilindro cavo è ipotizzato indefinitamente lungo lungo il suo asse. Il materiale è suddiviso in strati di spessore Δr . Il cerchio mediano (tratteggiato in Figura 5.1) viene chiamato nodo. L'equazione del bilancio energetico relativo allo strato generico "i", a distanza r_i dall'asse del cilindro, permette di definire la relazione esistente, al generico istante di tempo t , tra la temperatura dello strato i e dei due strati adiacenti $i - 1$ e $i + 1$. Considerando il volume caratterizzato dalla superficie tratteggiata in Figura 5.1 e di altezza uni-

taria, e considerando positivo l'asse r come in figura, l'energia termica entrante ($Q_{input,i}$), l'energia termica uscente ($Q_{output,i}$) e la variazione di energia interna (ΔE_{int}) nel tempo Δt possono essere approssimate come segue:

$$\begin{aligned} Q_{input,i} &= -\lambda \cdot \left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \Delta \theta \cdot \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r} \cdot \Delta t, \\ Q_{output,i} &= -\lambda \cdot \left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \Delta \theta \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} \cdot \Delta t, \\ \Delta E_{int} &= c_v \cdot \rho \cdot r_i \cdot \Delta \theta \cdot \Delta r \cdot (T'_i - T_i), \end{aligned}$$

essendo c_v la capacità termica del materiale, ρ la densità del materiale, T'_i la temperatura nel nodo i all'istante di tempo $t + \Delta t$. Il bilancio energetico nell'intervallo di tempo Δt ($Q_{input,i} - Q_{output,i} = \Delta E_{int}$) si scrive come segue:

$$\begin{aligned} -\lambda \cdot \left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \Delta \theta \cdot \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r} \cdot \Delta t + \lambda \cdot \left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \Delta \theta \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} \cdot \Delta t &= \\ &= c_v \cdot \rho \cdot r_i \cdot \Delta \theta \cdot \Delta r \cdot (T'_i - T_i). \end{aligned}$$

calcolando i flussi termici in base al valore della temperatura al tempo t . Isolando la temperatura al nodo i nell'istante di tempo $t + \Delta t$ si ottiene:

$$T'_i = T_i + \frac{\lambda}{c_v \cdot \rho} \cdot \Delta t \cdot \left[\frac{r_i - \Delta r/2}{r_i \cdot \Delta r^2} \cdot (T_{i-1} - T_i) + \frac{r_i + \Delta r/2}{r_i \cdot \Delta r^2} \cdot (T_{i+1} - T_i) \right],$$

e, nel caso si possa ritenere Δr piccolo rispetto a r :

$$T'_i = T_i + \frac{\lambda}{c_v \cdot \rho} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \cdot [T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1}] = T_i + M \cdot [T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1}],$$

con $M = \frac{\lambda}{c_v \cdot \rho} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$.

La soluzione numerica dell'equazione della conduzione scritta in coordinate cilindriche può essere ottenuta con un metodo esplicito alle differenze finite, approssimando i vari termini come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{T'_i - T_i}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \frac{T_{i+1} - 2 \cdot T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2} \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{\Delta r}. \end{aligned}$$

Sostituendo i termini espressi alle differenze finite nell'equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{T'_i - T_i}{\Delta t} = \alpha \cdot \left(\frac{T_{i+1} - 2 \cdot T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{\Delta r} \right).$$

Per valutare l'ordine di grandezza dell'errore che si commette sostituendo alle derivate dell'equazione di Fourier i rapporti fra differenze finite si sviluppano in serie di Taylor i vari termini attorno al nodo i :

$$T'_i - T_i = \Delta t \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i + \dots$$

$$T_{i+1} - 2 \cdot T_i + T_{i-1} = \Delta r^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)_i + 2 \cdot \frac{\Delta r^4}{4!} \cdot \left(\frac{\partial^4 T}{\partial r^4} \right)_i + \dots$$

$$T_{i+1} - T_{i-1} = 2 \cdot \Delta r \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i + 2 \cdot \frac{\Delta r^3}{3!} \cdot \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_i + \dots$$

Sostituendo i vari termini nella equazione alle differenze finite si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i &= \alpha \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i\right] + \\ &- \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i + \alpha \cdot \left[\frac{\Delta r^2}{12} \cdot \left(\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_i + \frac{1}{r} \cdot \frac{\Delta r^2}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_i\right] + \dots \end{aligned}$$

L'accuratezza del metodo dipende quindi da Δt e da Δr^2 .

La stabilità del metodo esplicito descritto viene valutata dal punto di vista fisico, imponendo che, durante l'intervallo di integrazione, la temperatura T' non sia tale da cambiare il segno del flusso energetico (se all'inizio del passo di integrazione temporale la temperatura al nodo è in aumento, così si impone debba essere alla fine del passo di integrazione con il nuovo valore della temperatura calcolato).

Nella ipotesi che il passo di integrazione spaziale Δr sia abbastanza piccolo e che il flusso energetico sia positivo si scrive $Q_{input,i} - Q_{output,i} > 0$ ottenendo:

$$T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1} > 0.$$

Il flusso energetico deve mantenersi positivo anche sostituendo a T_i il valore della temperatura ottenuto dalla integrazione $T'_i = T_i + M \cdot (T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1})$:

$$T_{i-1} - 2 \cdot T_i - 2 \cdot M \cdot (T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1}) + T_{i+1} > 0.$$

Il fattore M deve allora essere:

$$M = \frac{\lambda}{c_v \cdot \rho} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta r^2} < \frac{1}{2}.$$

Lo stesso si ottiene nella ipotesi di flusso energetico negativo.

5.2 La verifica del comportamento del modello numerico

Il comportamento del modello numerico viene analizzato confrontando la soluzione numerica con due configurazioni fisiche di cui è nota la soluzione teorica.

Nel primo caso si confronta la soluzione teorica della conduzione non stazionaria all'interno di una parete piana in un istante di tempo con la corrispondente soluzione numerica. Nel secondo caso si confronta la soluzione teorica in condizioni stazionarie della conduzione all'interno di un cilindro cavo con la corrispondente soluzione numerica, ottenuta come evoluzione della conduzione non stazionaria.

5.2.1 Verifica del modello numerico: conduzione non stazionaria in una parete piana

Si considera, in questo caso, una parete piana di spessore $0,5m$ costituita di calcare. Le proprietà del materiale sono le seguenti: densità $\rho = 2320kg/m^3$, conducibilità termica $\lambda = 2,15W/mK$, capacità termica $c_v = 810J/kgK$, diffusività termica $\alpha = 1,1441 \cdot 10^{-6}$. La temperatura alla parete interna, T_{int} , è posta a $20^\circ C$, alla parete esterna, T_{est} a 0° . La temperatura iniziale all'interno della parete, T_{iniz} è posta a 0° .

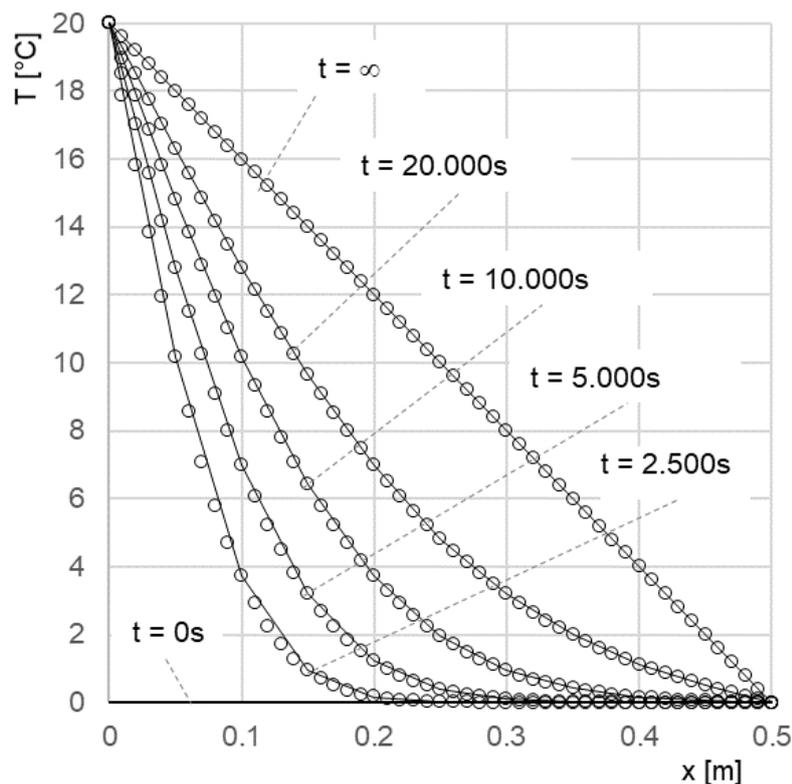


Figura 5.2: Andamento della temperatura dentro una parete a superfici piane in calcare, a diversi istanti di tempo. Confronto tra la soluzione teorica (linea continua) e la soluzione numerica (simboli).

In Figura 5.2 è rappresentato l'andamento della temperatura all'interno della parete, ottenuto attraverso la soluzione teorica (par.4.2) e attraverso la soluzione numerica (par.5.1) per alcuni istanti di tempo.

Il modello numerico appare in grado di descrivere correttamente la soluzione teorica ad ogni istante considerato.

5.2.2 Verifica del modello numerico: conduzione a regime in un cilindro cavo

Si considera, in questo caso, un cilindro cavo con proprietà geometriche prossime a quelle dell'apparato sperimentale. Il cilindro interno ha raggio $R_{int} = 0,016m$ e raggio esterno $R_{est} = 0,516m$. Il materiale del cilindro cavo è calcare, con proprietà già descritte nel par.4.3.

In questa configurazione non è disponibile una soluzione teorica non stazionaria, mentre è disponibile la soluzione numerica. Il confronto viene allora eseguito tra la soluzione teorica a regime stazionario e la soluzione numerica a tempo molto grande.

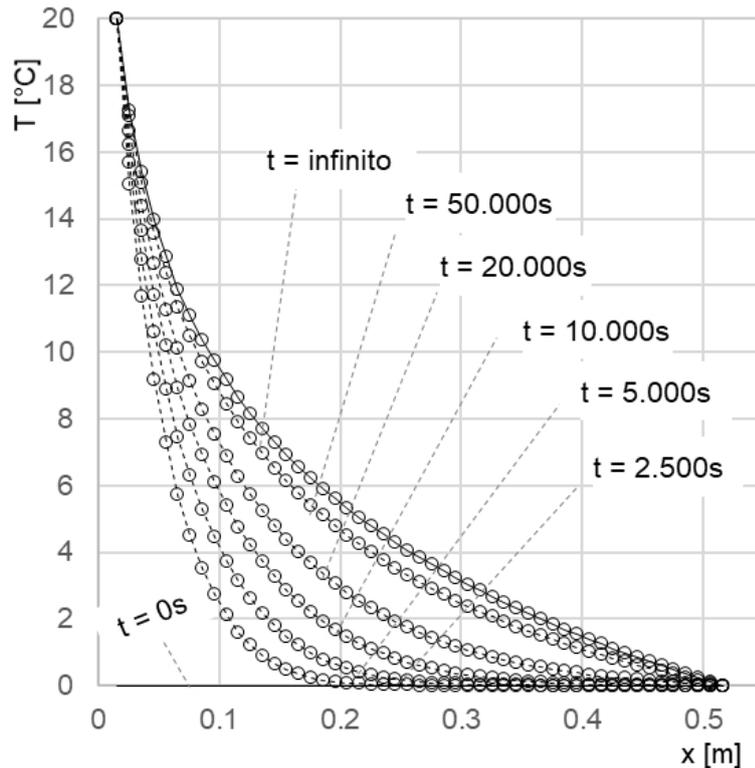


Figura 5.3: Andamento della temperatura dentro un cilindro cavo in calcare, a diversi istanti di tempo. Confronto tra la soluzione teorica (linea continua) e la soluzione numerica (simboli).

In Figura 5.3 è mostrato il confronto tra l'andamento teorico e numerico della temperatura all'interno del cilindro cavo a tempo molto grande e l'andamento solo numerico della temperatura ottenuto a tempi inferiori.

Anche in questo caso, dove è stato possibile ottenere sia la soluzione numerica sia la soluzione teorica, è evidente un accordo pressoché completo.

5.3 Stima della diffusività termica per via sperimentale e numerica

La diffusività termica del materiale utilizzato in laboratorio nel test descritto nel par.2.5 viene stimata utilizzando i dati di temperatura rilevati e il modello numerico precedentemente descritto. In Figura 5.4 è riportato, per diversi istanti di tempo (0s, 2500s, 5000s, 10000s, 20000s, 30000s, 50000s, 100000s, 200000s, 300000s, 400000s), l'andamento della temperatura rilevato in laboratorio e l'andamento ottenuto per via numerica quando alla diffusività termica è stato assegnato il valore

di $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$.

I dati sperimentali di temperatura sono riferiti alla distanza dal fondo pari a 0,50m. La distanza dall'asse della sonda termica dei punti di misura della temperatura è pari a 0,016m (superficie esterna della sonda termica), 0,046m, 0,0968m, 0,1976m, 0,3001m, 0,483m (distanza massima dall'asse della sonda termica occupata dal materiale granulare).

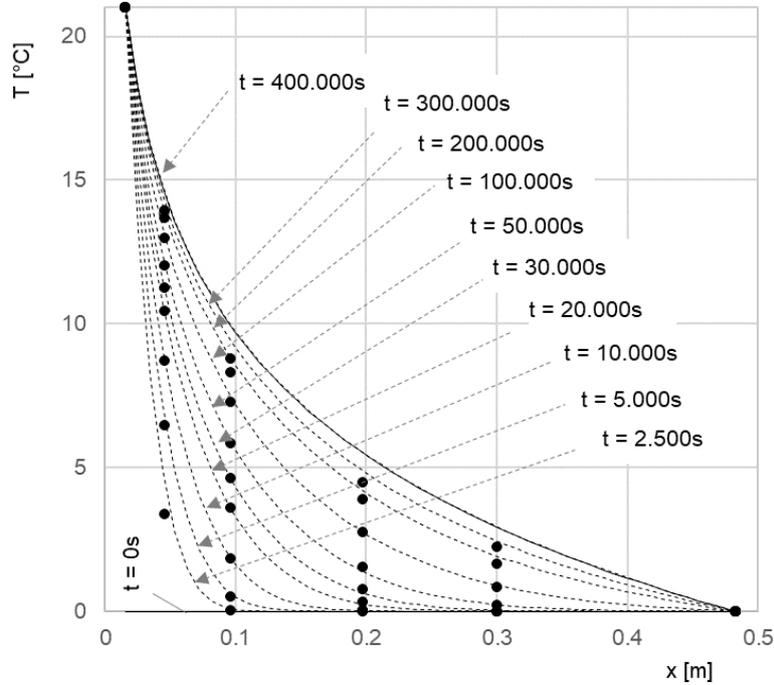


Figura 5.4: Confronto tra le temperature misurate (punti) e le temperature calcolate numericamente (linee tratteggiate) al variare del tempo. Il confronto è fatto con la temperatura misurata in 6 punti a diversa distanza dall'asse della sonda termica, alla distanza dal fondo di 0,50m.

Nelle Figure 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 sono riportati gli stessi dati della Figura 5.4 isolando i vari istanti di tempo. Come si nota, per l'assegnato valore della diffusività termica, l'accordo tra i valori misurati e calcolati è molto buono fino all'istante di tempo di 100000s. Successivamente si notano valori di temperatura misurati minori rispetto ai valori calcolati.

I risultati ottenuti mostrano come, sperimentalmente, non sia stata raggiunta, seppure di poco, la condizione di regime, condizione che avrebbe dovuto presentarsi non oltre 400000s (Figura 5.10). D'altra parte, per tempo inferiore a 200000s, l'accordo tra temperatura misurata e temperatura calcolata indica la possibilità di assegnare al materiale sperimentale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} m^2/s$, un valore molto inferiore alla diffusività termica dei diversi materiali solidi di cui è costituito l'ammasso granulare.

A partire dal valore della diffusività termica è possibile calcolare anche il coefficiente di conducibilità termica λ del materiale sperimentale (risetta del Brenta).

Noti i valori del peso specifico ($26132 \frac{N}{m^3}$), della porosità (0,4247), del calore specifico ($805 \frac{J}{kg \cdot K}$) e della diffusività termica appena calcolata, si stima una λ pari a $0,241 \frac{W}{m \cdot K}$.

Con $\lambda = 0,241 \frac{W}{m \cdot K}$, risolvendo l'equazione 1.17, si ottiene una potenza termica trasmessa attraverso la superficie che circonda la sonda termica a distanza r dall'asse pari a:

$$q = \frac{20,99 - 0}{\frac{1}{2\pi \cdot 0,241} \cdot \ln \frac{0,483}{0,016}} \rightarrow q = 9,32 \frac{W}{m^2} \quad (5.1)$$

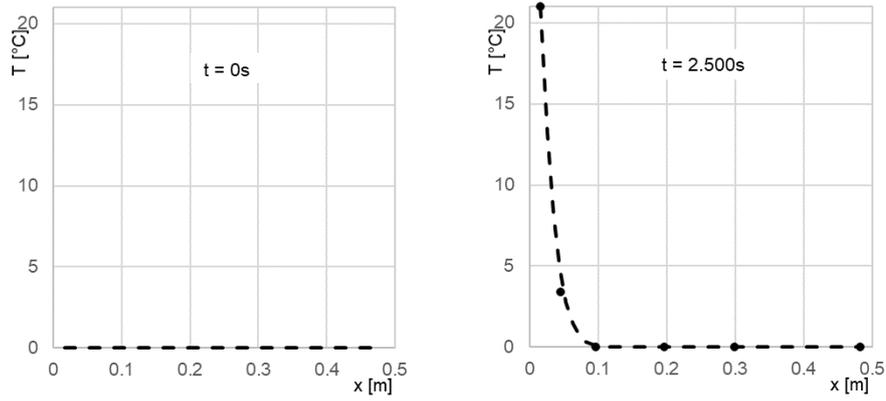


Figura 5.5: In (a) l'andamento iniziale della temperatura relativa nel test di laboratorio; in (b) la temperatura misurata all'istante $t=2500s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata).

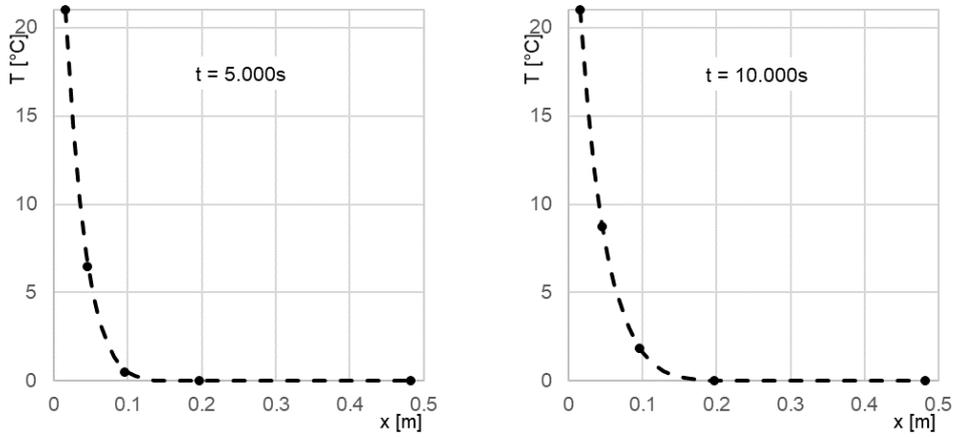


Figura 5.6: In (a) la temperatura misurata all'istante $t=5000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=10000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata).

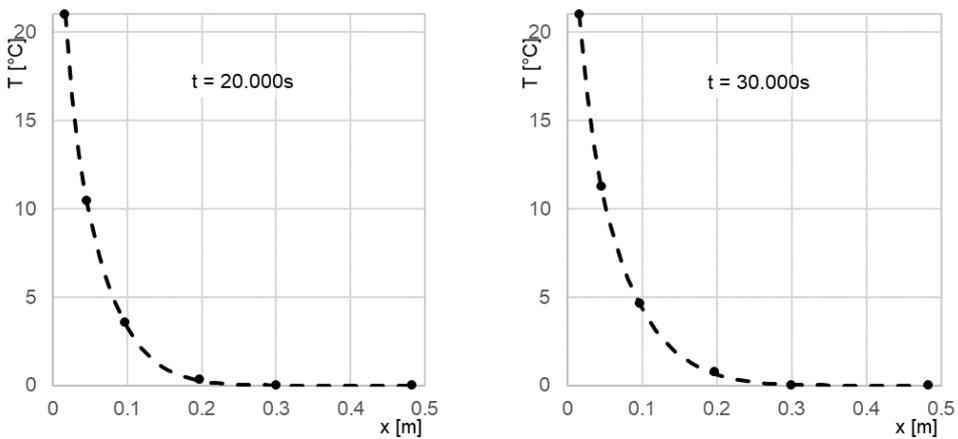


Figura 5.7: In (a) la temperatura misurata all'istante $t=20000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=30000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata).

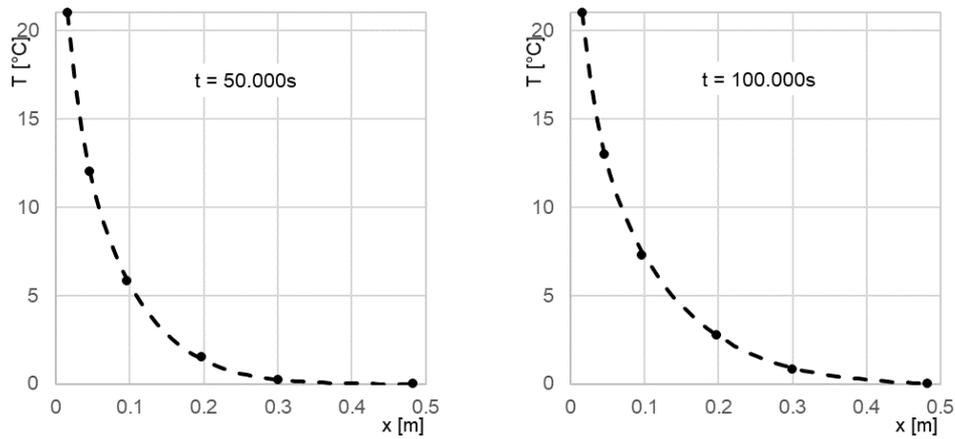


Figura 5.8: In (a) la temperatura misurata all'istante $t=50000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=100000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata).

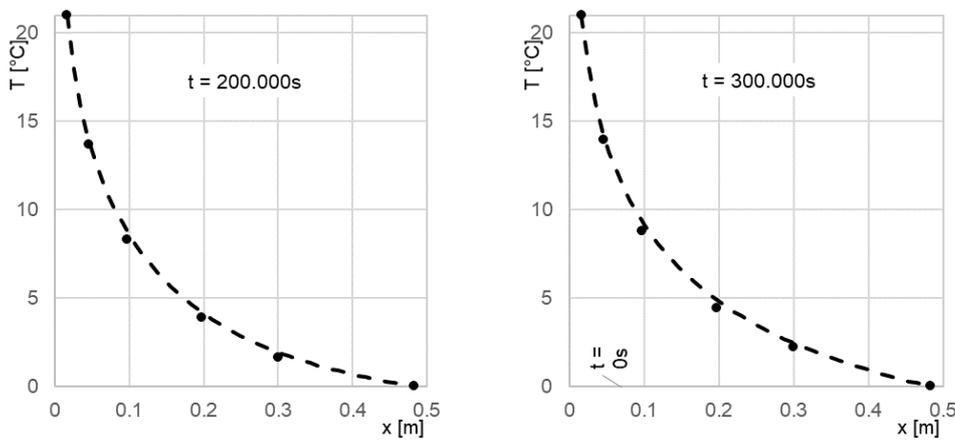


Figura 5.9: In (a) la temperatura misurata all'istante $t=200000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata); in (b) la temperatura misurata all'istante $t=300000s$ (punti neri) e la temperatura calcolata attribuendo al materiale la diffusività termica $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6}m^2/s$ (linea tratteggiata).

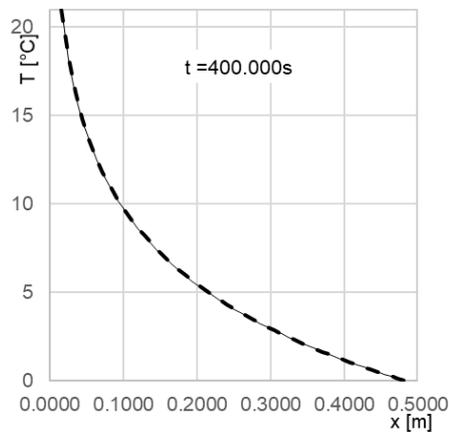


Figura 5.10: La temperatura calcolata numericamente all'istante $t=400000s$ (linea tratteggiata) e la temperatura teorica in condizioni di regime (linea continua).

5.4 La configurazione cilindrica secondo il modello numerico

Similmente a quanto fatto nel caso di conduzione all'interno di una parete piana (par. 4.3), anche nel caso di cilindro cavo si analizza il tempo impiegato dai diversi materiali per raggiungere il 99.9% delle condizioni di regime in una particolare posizione all'interno del cilindro. Utilizzando i parametri termici descritti nel par. 4.3, si usa il modello numerico per ricavare la temperatura all'interno del cilindro in funzione della distanza r . La temperatura a regime si ricava mediante l'equazione 1.16 del par. 1.1.2. Le condizioni al contorno sono sempre le stesse, a $r = 0,016m$ si ha una T pari a $20,99^{\circ}C$ e a $r = 0,483m$ la T vale $0^{\circ}C$.

Di seguito vengono mostrati i risultati ottenuti con il modello numerico per le differenti configurazioni cilindriche, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro: granito (Figura 5.11), marmo (Figura 5.12), calcare (Figura 5.13), acqua (Figura 5.14), risetta del brenta (Figura 5.15):

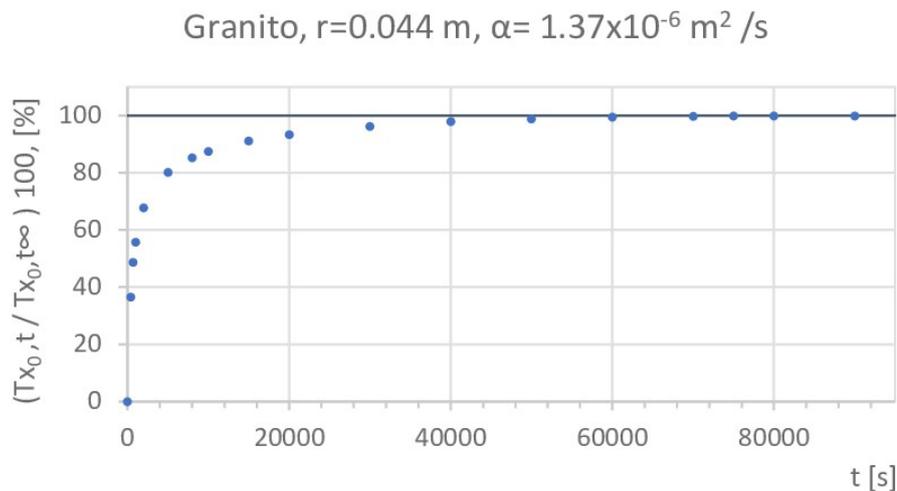


Figura 5.11: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di granito. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 1,37 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

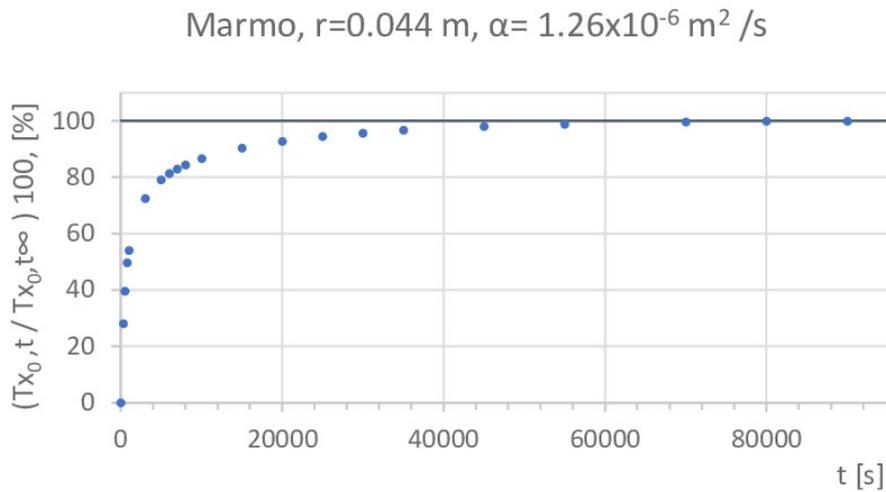


Figura 5.12: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044\text{m}$ dall'asse del cilindro fatto di marmo. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

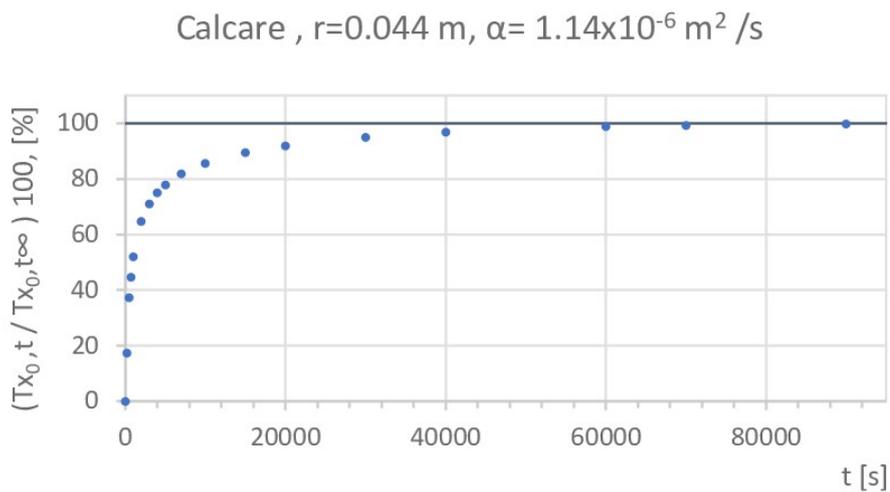


Figura 5.13: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044\text{m}$ dall'asse del cilindro fatto di calcere. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 1,14 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. A 100, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

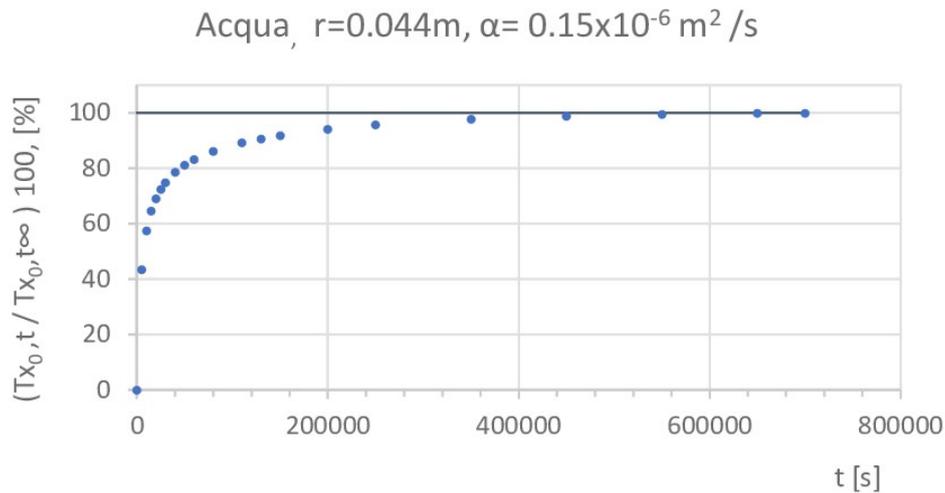


Figura 5.14: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di acqua. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 0,15 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

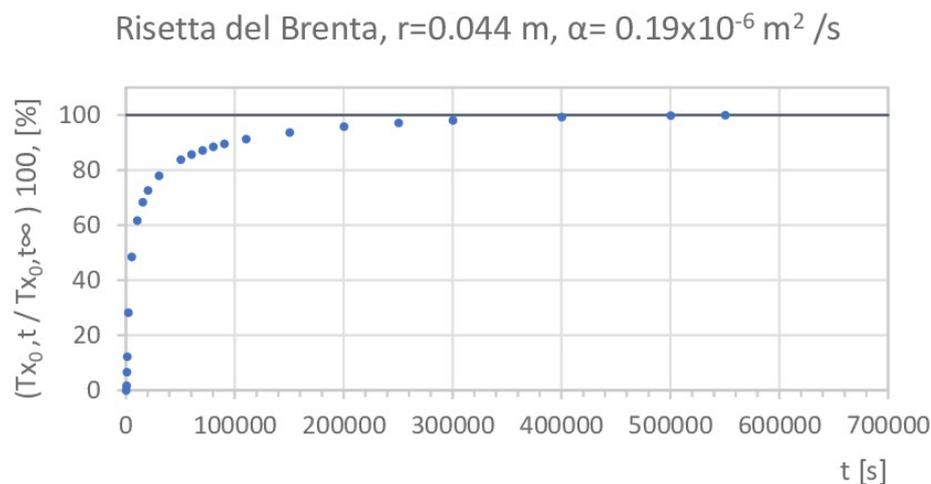


Figura 5.15: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime, alla distanza $r = 0,044m$ dall'asse del cilindro fatto di risetta del Brenta. La temperatura è stata calcolata usando il modello numerico con $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. A 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

Nel par.4.3 non era possibile calcolare l'andamento della temperatura in una parete piana composta del materiale che riempie il modello sperimentale in quanto la diffusività termica era ignota. Ora che la diffusività termica è nota, in Figura 5.16 viene mostrato l'andamento della temperatura nel tempo rispetto a quella in condizioni stazionarie a una distanza di $0,1m^1$ nel caso di una parete piana formata da risetta del Brenta.

¹Attenzione, nel modello numerico cambia il sistema di riferimento per il caso della parete piana: per la soluzione analitica si era scelta come parete a $20^\circ C$ quella destra, ora, la parete a $20^\circ C$ è quella sinistra. Quindi, nel Par. 4.3, a $x = 0m$ la temperatura vale $0^\circ C$, ora, a $x = 0m$ la temperatura vale $20^\circ C$.

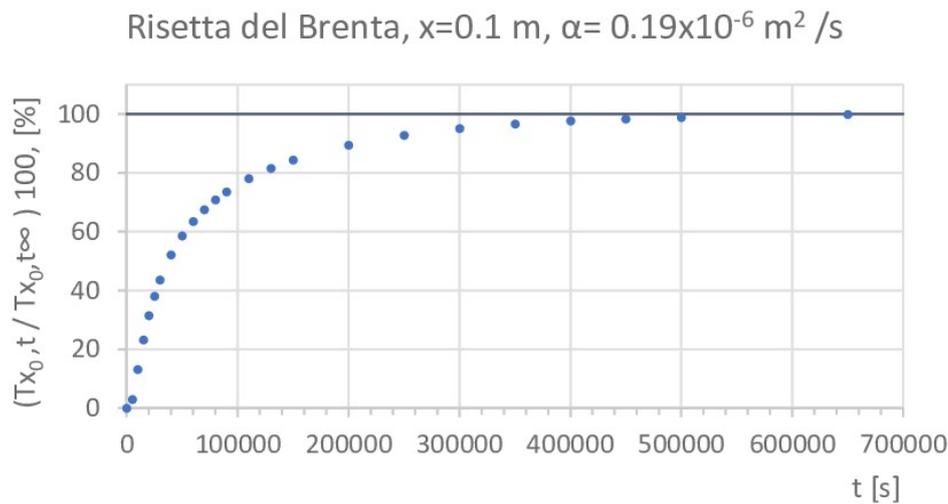


Figura 5.16: Andamento della temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni di regime nel caso della parete piena formata da risetta del Brenta. La parete è caratterizzata da una diffusività termica pari a $0,19 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ e la temperatura è stata calcolata a una distanza di 0.1m dalla parete sinistra; a 100%, la retta che rappresenta la condizione di stazionarietà.

5.4.1 Configurazioni cilindriche a confronto

In Figura 5.17 vengono comparati gli andamenti della temperatura nel tempo, a $r = 0,044\text{m}$, di un cilindro costituito da granito, marmo, calcare, acqua e risetta del Brenta, con la conduzione come fenomeno di trasmissione del calore.

Si evince che nel caso delle rocce riempienti completamente il cilindro non si hanno differenze rilevanti. Sono le curve del cilindro in configurazione risetta del Brenta e acqua a dissociarsi significativamente dal comportamento di quelle rocciose.

La bassa diffusività termica di questi due componenti (risetta e acqua), che per il risetta è conseguenza della sua elevata porosità (42% circa), fa sì che il tempo necessario per l'avvicinamento alle condizioni di regime sia molto più lungo.

Infatti, il materiale granulare e l'acqua sono caratterizzati da una diffusività termica minore di circa un ordine di grandezza rispetto alla diffusività termica delle rocce considerate.

In Figura 5.18 sono messi a confronto i tempi che le diverse configurazioni cilindriche impiegano per raggiungere il regime: al granito occorrono circa 21 ore, al marmo circa 22 ore, al calcare circa 25 ore, alla risetta del Brenta circa 6 giorni e all'acqua circa 8 giorni.

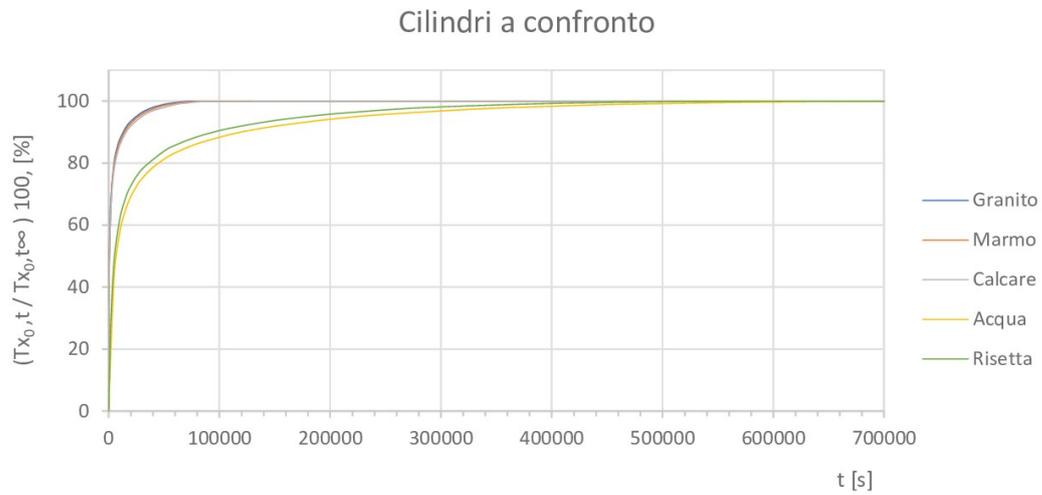


Figura 5.17: Evoluzione delle curve di temperatura nel tempo rispetto alla temperatura in condizioni stazionare, per il granito, marmo, calcare e acqua, a $r = 0,044m$ del cilindro di Figura 5.1.

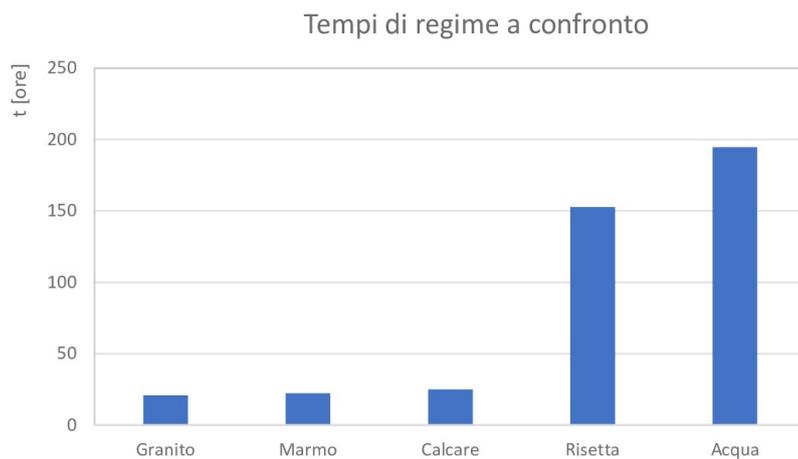


Figura 5.18: Tempo che i diversi materiali in configurazione cilindrica necessitano per raggiungere il 99.9% delle condizioni di regime.

Capitolo 6

Conclusioni

- Il trasferimento del calore in condizioni di stazionarietà può essere descritto dall'equazione di Fourier in coordinate cilindriche;
- Il meccanismo principale di trasmissione del calore risulta essere la conduzione termica, ciò non esclude che anche la convezione agisca in minima parte;
- Il comportamento del modello fisico si discosta rispetto al caso ideale, in particolare, si avvicina al comportamento del modello ideale nella sua parte centrale e, avvicinandosi alla periferia, la discrepanza aumenta. La permeabilità termica residua sulla parete inferiore e quella superiore è responsabile di tale fenomeno;
- Il modello fisico mostra una tendenza asintotica al raggiungimento delle condizioni di regime anche prolungando la prova oltre i 5 giorni;
- Pur considerando una resistenza termica della sonda diversa da zero, la differenza tra la curva di temperatura teorica e quella sperimentale, in condizioni prossime alle condizioni di regime, permane;
- Il fenomeno fisico realizzato in laboratorio può essere descritto matematicamente dall'equazione della conduzione in coordinate cilindriche solo per il caso stazionario. In condizioni di non stazionarietà non è possibile trovare una soluzione matematica a causa della difficoltà nel tenere conto delle condizioni al contorno;
- Il problema per il cilindro cavo in condizioni non stazionarie è risolto attraverso un modello numerico;
- Il modello numerico è stato programmato anche per risolvere il problema della conduzione termica, in regime non stazionario, all'interno di una materiale disposto in forma di parete piana. Paragonando l'andamento della temperatura nella parete piana, calcolata con la soluzione teorica dell'equazione differenziale $T(x, t)$, con l'andamento della temperatura nella parete piana calcolata con il modello numerico, è emerso che le due soluzioni sono perfettamente coincidenti;
- Verificato il corretto comportamento del modello numerico, attraverso un metodo iterativo è stata calcolata la diffusività termica del materiale contenuto nel modello fisico;
- Nota la porosità, il peso specifico e la capacità termica del materiale sperimentale, è stata determinata la sua conducibilità termica.

Bibliografia

- [Bri63] Percy Williams Bridgman. *Dimensional analysis*. Revised Edition. Yale University Press, 1963. ISBN: 9781177678803,1177678802.
- [Bat02] R. W. Le Maitre A. Streckeisen B. Zanettin M. J. Le Bas B. Bonin P. Bateman. *Igneous Rocks: A Classification and Glossary of Terms: Recommendations of the International Union of Geological Sciences Subcommittee on the Systematics of Igneous Rocks*. 2^a ed. 2002. ISBN: 052166215X,9780521662154,9780511066511,0511068646,9780511068645.
- [Lid03] David R. Lide. *CRC Handbook of chemistry and physics*. 84th. CRC Press, 2003. ISBN: 0849304849,9780849304842.
- [Inc06] Frank P. Incropera. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 6th. Wiley, 2006. ISBN: 0470055545,9780470055540.
- [D C08] Jochen Bundschuh D. Chandrasekharam. *Low-Enthalpy Geothermal Resources for Power Generation*. 1^a ed. Taylor Francis, 2008. ISBN: 0415401682,9780415401685,9780203894552.
- [Gre14] D.L. Green. *Modelling geomorphic systems: Scaled physical models*. 2014.
- [Sco17] P. Scotton. *Un apparato sperimentale per lo studio dello scambio energetico tra sottosuolo e la sonda geotermica. Project GEOTERM(Geoscambio nella provincia autonoma di Trento)*. Trento: Reet-FBK. 2017.
- [Gal18] P. Scotton G. Teza D. Rossi G. Dalla Santa A. Galgaro. Experimental setup to measure the heat-exchange processes by controlling thermal e hydraulic conditions, 2018.
- [Vol19] R. Volpe. *An experimental apparatus for the study of low enthalpy geothermal energy*. 2019.
- [Rap] D. Rapti-Caputo. URL: <http://www.labelab.it/site/wp-content/uploads/sites/2/atti/W-M-Rapti-Caputo.pdf>.
- [Str] A. Strekeisen. URL: <http://www.alexstrekeisen.it/sedi/index.php>.
- [Sco20] P. Scotton. *Comunicazione personale*. Dicembre 2020.