Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea in Matematica

Il teorema di Hille-Yosida e semigruppi di operatori lineari

Relatore:

dott. Andrea Marson

Laureando:

Devis Marzola

Matricola N. 1168114

Anno Accademico 2021/2021 , Sessione di Laurea: 16/12/2022

Indice

Introduzione

La teoria dei semigruppi nasce nella prima metà del XX secolo, ed a partire dal 1948, con il fondamentale teorema di Hille-Yosida, acquista un'importanza centrale per una vastissima gamma di applicazioni in svariati campi: equazioni alle derivate parziali, equazioni integro-differenziali, equazioni con ritardo, teoria dei controlli, modelli matematici in dinamica delle popolazioni, meccanica quantistica ed altro ancora.
Un semigruppo su uno spazio di Banach X è, come vedremo, una famiglia $T(t)$ di operatori lineari limitati, da X in se stesso, parametrizzata su $\mathbb{R}^+$ che gode di alcune proprietà specifiche. Il risultato più importante della teoria dei semigruppi, come già accennato, è il Teorema di Hille-Yosida che caratterizza una particolare tipologia di semigruppi, chiamati fortemente continui o C_0, in termini dei loro generatori infinitesimali. Questo Teorema, assieme ad alcuni suoi corollari, risulta uno strumento molto potente per lo studio di Problemi di Cauchy astratti come vedremo nel Capitolo 4. Prima, però, ci servirà identificare il contesto teorico in cui ci troviamo e ciò sarà trattato nel Capitolo 1, in cui ci occuperemo di definire semigruppi uniformemente continui e fortemente continui e di dimostrare le principali proprietà di cui essi godono. Successivamente nel Capitolo 2 ci occuperemo nello specifico dei semigruppi C_0, più in particolare vedremo quali condizioni su un generico operatore lineare $A\colon D(A) \subset X \to X$ ci permettono di concludere che esso è proprio il generatore di un semigruppo C_0 su X e viceversa. In questo capitolo rientra l'enuciato e la dimostrazione del Teorema di Hille-Yosida. Nel capitolo 3 ci occuperemo di un'altra particolare classe di semigruppi di operatori, i semigruppi analitici, le cui proprietà saranno importanti per assicurarci determinati risultati di regolarità per le soluzioni del Problema di Cauchy nel capitolo 4. Infine nel Capitolo 5 vedremo un'applicazione della teoria precedentemente sviluppata nel contesto delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine paraboliche. Come vedremo, tale teoria offre un metodo elegante per costruire soluzioni di problemi di questo tipo.

Capitolo 1

Teoria dei semigruppi di operatori lineari limitati

Iniziamo col dare una definizione generale di semigruppo di operatori lineari.

1 Definizione. Sia X spazio di Banach.
Una famiglia parametrizzata $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, di operatori lineari limitati da X in X è un **semigruppo di operatori lineari limitati** su X se:

i) $T(0) = I$ dove I è l'operatore identità su X

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ $\forall t, s \geq 0$ *proprietà del semigruppo*

L'operatore lineare $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ dove

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{esiste} \right\}$$

definito da

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \textit{per} \quad x \in D(A)$$

si dice **generatore infinitesimale** del semigruppo $T(t)$ e $D(A)$ è il dominio di A.

1.1 Semigruppi uniformemente continui

1.1 Definizione. Il semigruppo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, si dice **uniformemente continuo** se

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma operatoriale dello spazio dei funzionali lineari e limitati da X in X, cioè $\|T(t)\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(t)x\|_X}{\|x\|_X}$ per $t \geq 0$, mentre $\|\cdot\|_X$ è la norma di X. Con un abuso di notazione indicheremo, da qui in avanti, entrambe le norme con $\|\cdot\|$ ed il contesto chiarirà a quale norma nello specifico ci stiamo riferendo.
È facile verificare che se $T(t)$ è semigruppo uniformemente continuo allora

$$\lim_{t\to s} \|T(t) - T(s)\| = 0$$

1.2 Teorema. *Sia A operatore lineare. Allora*
A è il generatore infinitesimale di un semigruppo uniformemente continuo $\iff$ A è operatore limitato

Dimostrazione.
$\Longleftarrow$ $T(t) = e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ che converge in norma $\forall t \geq 0$ e quindi definisce un operatore lineare limitato $T(t), \forall t \geq 0$.
$T(0) = I$ ovvio e $T(s+t) = T(s)T(t)$ per formula del binomio di Newton.
Usando le stime

$$\|T(t) - I\| \leq t\|A\|e^{t\|A\|}$$

e

$$\left\|\frac{T(t) - I}{t} - A\right\| \leq \|A\| \cdot \max_{0\leq s\leq t} \|T(s) - I\|$$

si vede che $T(t)$ è un semigruppo uniformemente continuo di operatori lineari limitati su X e che A è il suo generatore infinitesimale.

$\Longrightarrow$ Sia $T(t)$ semigruppo uniformemente continuo di operatori lineari limitati su X e sia A il suo generatore infinitesimo. Fissiamo $\rho > 0$, sufficentemente piccolo, tale che $\left\|I - \rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\right\| < 1$. Ciò implica, per lemma di Banach (1.3 di [Sal19], il quale afferma che, data $\|\cdot\|$ norma matriciale se per una matrice quadrata A di ordine n vale $\|I_n - A\| < 1$ allora A è invertibile) che $\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds$ è invertibile e quindi $\int_0^\rho T(s)ds$ è invertibile. Ora

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I)\int_0^\rho T(s)ds &= h^{-1}\left(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds\right) \\ &= h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$h^{-1}(T(h) - I) = \left(h^{-1}\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - h^{-1}\int_0^h T(s)ds\right)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$$

Per $h \downarrow 0$ si ha quindi che $h^{-1}(T(h)-I)$ converge in norma, quindi fortemente, all'operatore lineare limitato $(T(\rho) - I)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$ che è il generatore infinitesimale di $T(t)$. $\square$

Quindi se $T(t)$ è uniformemente continuo allora il suo generatore infinitesimale è operatore lineare limitato. Viceversa ogni operatore lineare limitato è il generatore di un semigruppo uniformemente continuo $T(t)$. Tale semigruppo è unico?

1.3 Teorema. *Siano $T(t)$ e $S(t)$ semigruppi uniformemente continui di operatori lineari limitati. Se*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)-I}{t}$$

allora $T(t) = S(t)$ $\forall t \geq 0$

Dimostrazione.
Mostriamo che, dato $M > 0$, si ha che $S(t) = T(t)$, $0 \leq t \leq M$. Sia $M > 0$ fissato, poichè $t \mapsto \|T(t)\|$ e $t \mapsto \|S(t)\|$ sono continue, $\exists C$ *costante* tale che $\|T(t)\|\|S(t)\| \leq C$, *per* $0 \leq s,t \leq M$. Dato $\varepsilon > 0$, segue dall'ipotesi di avere lo stesso generatore che $\exists\delta > 0$ tale che

$$h^{-1}\|T(h) - S(h)\| < \varepsilon/MC \quad \text{ per } 0 \leq h \leq \delta$$

Sia $0 \leq t \leq M$ e scegliamo $n \geq 1$ tale che $t/n < \delta$. Dalla proprietà dei semigruppi e dalla stima fatta qui sopra segue che

$$\|T(t) - S(t)\| = \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right)\right\|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right\|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\| \leq Cn\frac{\varepsilon}{MC}\frac{t}{n} \leq \varepsilon$$

Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario $T(t) = S(t)$ per $0 \leq t \leq M$. $\square$

1.4 Corollario. *Sia $T(t)$ un semigruppo uniformemente continuo di operatori lineari limitati. Allora*

a) Esiste una costante $\omega \geq 0$ tale che $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.

b) Esiste un unico operatore lineare limitato A tale che $T(t) = e^{tA}$.

c) L'operatore A in b) è il generatore infinitesimale di $T(t)$.

d) $t \mapsto T(t)$ è differenziabile in norma e

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Dimostrazione. Seguono tutte da b). Per mostrare b) notiamo che il generatore infinitesimale di $T(t)$ è un operatore lineare limitato A. A è anche il generatore infinitesimale di e^{tA} definito nella dimostrazione del Teorema 1.2 e quindi per il Teorema 1.3, $T(t) = e^{tA}$. □

1.2 Semigruppi fortemente continui

In tutta questa sezione X è uno spazio di Banach.

1.5 Definizione. Un semigruppo di operatori lineari limitati $T(t), 0 \leq t < \infty$, su X si dice **fortemente continuo** se

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x \quad \forall x \in X.$$

Un semigruppo di operatori lineari fortemente continuo su X verrà chiamato semigruppo di classe C_0 o semplicemente semigruppo C_0.

1.6 Teorema. *Sia $T(t)$ un semigruppo C_0. Allora esistono $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tali che*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \textit{per } 0 \leq t < \infty.$$

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\exists\ \eta > 0$ tale che $\|T(t)\|$ è limitato per $0 \leq t \leq \eta$. Se questo è falso, allora esiste una successione $\{t_n\}_{n \geq 1}$ tale che $t_n \geq 0$, $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$. Dal teorema sull'uniforme limitatezza segue che per qualche $x \in X$, $\{T(t_n)x\}_{n \geq 1}$ è illimitato che è in contrasto con l'ipotesi che il semigruppo sia C_0. Quindi, $\|T(t)\| \leq M$ per $0 \leq t \leq \eta$. Poichè $\|T(0)\| = 1$, deve essere $M \geq 1$. Sia $\omega = \eta^{-1} \log M \geq 0$. Dato $t \geq 0$ abbiamo $t = n\eta + \delta$ dove $0 \leq \delta < \eta$ e quindi per la proprietà dei semigruppi

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\eta} = Me^{\omega t}$$

□

1.7 Corollario. *Se $T(t)$ è un semigruppo C_0 allora $\forall x \in X$ $t \mapsto T(t)x$ è funzione continua da $\mathbb{R}_0^+$ (la semiretta reale non negativa) in X.*

Dimostrazione. Sia $t, h \geq 0$. La continuità di $t \mapsto T(t)x$ segue da

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\|$$

e per $t \geq h \geq 0$

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \leq Me^{\omega t} \|x - T(h)x\|$$

□

1.8 Teorema. *Sia $T(t)$ un semigruppo C_0 e sia A il suo generatore infinitesimale. Allora*

a) Per $x \in X$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$$

.

b) Per $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x$$

.

c) Per $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

.

d) Per $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$$

.

Dimostrazione. a) segue direttamente dalla continuità di $t \mapsto T(t)x$.

b) Siano $x \in X$ e $h > 0$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)xds\end{aligned}$$

e per $h \downarrow 0$ il termine a destra tende a $T(t)x - x$.

c) Sia $x \in D(A)$ e $h > 0$. Allora

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \to T(t)Ax \quad \text{per} \quad h \downarrow 0.$$

Quindi $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Da sopra segue che

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

cioè la derivata destra di $T(t)x$ è $T(t)Ax$. Ci rimane, quindi, solo da dimostrare che per $t > 0$, la derivata destra di $T(t)x$ esiste ed equivale a $T(t)Ax$. Questo segue da

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right] \\
&\quad = \lim_{h\downarrow 0} T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right] + \lim_{h\downarrow 0}(T(t-h)Ax - T(t)Ax)
\end{aligned}$$

e dal fatto che entrambi i termini a destra siano 0, il primo poichè $x \in D(A)$ e $\|T(t-h)\|$ è limitato per $0 \leq h \leq t$ e il secondo per la continuità forte di $T(t)$.

d) Si ottiene integrando $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ del punto c) da s a t.

□

Ricordiamo ora la definizione di operatore lineare chiuso, di chiusura di un operatore e di operatore chiudibile.

2 Definizione. Dato X spazio di Banach, un operatore lineare

$$A\colon D(A) \subseteq X \to X$$

è detto **chiuso** se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A)$ convergente a $x \in X$ tale che:

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in X$$

si ha che $x \in D(A)$ e che:

$$Ax = y$$

In modo equivalente, A è chiuso se il suo grafico è chiuso in $X \times Y$. Dato un operatore A, se la chiusura del suo grafico in $X \times Y$ è il grafico di un qualche operatore $\bar{A}$, allora $\bar{A}$ è la **chiusura** di A, e A è detto **chiudibile**. A è quindi chiudibile se è la restrizione di un operatore chiuso $\bar{A}$ al dominio $D(A)$ di A.

1.9 Corollario. *Se A è il generatore di un semigruppo C_0 $T(t)$ allora $D(A)$, il dominio di A, è denso in X e A è un operatore lineare chiuso.*

Dimostrazione. $\forall x \in X$ pongo $x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$. Per il punto b) del Teorema 1.8, $x_t \in D(A)$ per $t > 0$ e per a) dello stesso teorema $x_t \to x$ per $t \downarrow 0$. Quindi $\overline{D(A)}$, la chiusura di $D(A)$, è tutto X. La linearità di A è evidente. Per provare la sua chiusura considero $x_n \in D(A), x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ per $n \to \infty$. Dal punto d) del Teorema 1.8 abbiamo

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds.$$

L'integranda del lato destro converge uniformemente a $T(s)y$ negli intervalli limitati. Di conseguenza per $n \to \infty$ abbiamo

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds.$$

Dividendo per $t > 0$ e mandando $t \downarrow 0$, vediamo, usando il punto a) del Teorema 1.8, che $x \in D(A)$ e $Ax = y$. □

1.10 Teorema. *Siano $T(t)$ e $S(t)$ semigruppi C_0 di operatori lineari limitati con generatori infinitesimali rispettivamente A e B. Se $A = B$ allora $T(t) = S(t)$ per $t \geq 0$.*

Dimostrazione. Sia $x \in D(A) = D(B)$. Dal punto c) del Teorema 1.8 segue facilmente che la funzione $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ è differenziabile e che

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Quindi $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ è costante ed in particolare i suoi valori in $s = 0$ e $s = t$ sono gli stessi, cioè $T(t)x = S(t)x$. Questo vale $\forall x \in D(A)$ e poichè, per il corollario 1.9, $D(A)$ è denso in X e $T(t), S(t)$ sono limitati, $T(t)x = S(t)x$ $\forall x \in X$. □

Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, allora per corollario 1.9 $\overline{D(A)} = X$. Vale anche il seguente risultato:

1.11 Teorema. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$. Se $D(A^n)$ è il dominio di A^n, allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ è denso in X.*

Dimostrazione. 1.2.7 del [Paz92]. □

Concludiamo questa sezione con un'applicazione del Teorema 1.8.

1.12 Lemma. *Sia A generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$, tale che $\|T(t)\| \leq M$ $\forall t \geq 0$. Se $x \in D(A^2)$, allora $\|Ax\|^2 \leq 4M^2\|A^2x\|\|x\|$.*

Dimostrazione. Usando il punto d) del Teorema 1.8 è facile verificare che per $x \in D\left(A^2\right)$

$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2xds$$

Quindi

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\leq t^{-1}(\|T(t)x\| + \|x\|) + t^{-1}\int_0^t (t-s)\left\|T(s)A^2x\right\| ds \\ &\leq \frac{2M}{t}\|x\| + \frac{Mt}{2}\left\|A^2x\right\|\end{aligned}$$

Qui abbiamo usato che $M \geq 1$ poichè $\|T(0)\| = 1$. Se $A^2x = 0$ allora quella sopra implica $Ax = 0$ e quindi la tesi è soddisfatta. Se $A^2x \neq 0$ sostituiamo $t = 2\|x\|^{1/2}\|A^2x\|^{-1/2}$ in quella sopra e quindi segue la tesi. $\square$

Capitolo 2

Generatori infinitesimali di semigruppi fortemente continui

Sia $T(t)$ un semigruppo C_0. Dal Teorema 1.6 segue che esistono costanti $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tale che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ per $t \geq 0$. Se $\omega = 0$ allora $T(t)$ è detto **uniformemente limitato** e, inoltre, se $M = 1$ è detto **semigruppo di contrazioni** C_0. In questa sezione ci occuperemo della caratterizzazione dei generatori infinitesimali di semigruppi C_0 di contrazioni. Tali condizioni riguardano il comportamento del risolvente del generatore infinitesimale A del semigruppo di contrazioni preso in esame. Ricordiamo brevemente due definizioni:

3 Definizione. Dato A operatore lineare su X, **l'insieme risolvente** $\rho(A)$ è l'insieme

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ è invertibile } \} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \text{ è operatore lineare limitato in } X\right\}\end{aligned}$$

$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1},\ \lambda \in \rho(A)$, è chiamato **risolvente** di A.

2.1 Il teorema di Hille-Yosida

2.1 Teorema (Teorema di Hille-Yosida). *Sia A un operatore lineare (non necessariamente limitato).*
A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni $T(t), t \geq 0$ $\Longleftrightarrow$

i) A è chiuso e $\overline{D(A)} = X$.

ii) L'insieme risolvente $\rho(A)$ di A contiene $\mathbb{R}^+$ e $\forall\lambda > 0$ vale

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$ Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 allora è chiuso e $\overline{D(A)} = X$ per corollario 1.9. Per $\lambda > 0$ e $x \in X$ sia

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt.$$

Poichè $t \mapsto T(t)x$ è continua e uniformemente limitata, l'integrale esiste come integrale improprio di Riemann e definisce un operatore lineare limitato $R(\lambda)$ che soddisfa

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|$$

Inoltre, per $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt\end{aligned}$$

Per $h \downarrow 0$, il membro a destra converge a $\lambda R(\lambda)x - x$. Questo implica che $\forall x \in X$ e $\forall\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ e $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, o

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I$$

Per $x \in D(A)$ abbiamo

$$\begin{aligned}R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right) = AR(\lambda)x\end{aligned}$$

Qui abbiamo usato il punto c) del Teorema 1.8 e la chiusura di A. Dalle ultime ultime due uguaglianze qui sopra segue che

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \quad \text{per} \quad x \in D(A)$$

Quindi, $R(\lambda)$ è l'inverso di $\lambda I - A$, esiste $\forall\lambda > 0$ e soddisfa la stima in ii). Le condizioni i) e ii) sono quindi necessarie se A è il generatore infinitesimale si un semigruppo C_0 di contrazioni. $\square$

Per dimostrare che le condizioni i) e ii) sono sufficienti per affermare che A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni ci servono tre lemmi.

2.2 Lemma. *Sia A operatore che soddisfa le condizioni i) e ii) del Teorema 2.1 di Hille-Yosida e sia $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Allora*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x \qquad \textit{per} \qquad x \in X.$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $x \in D(A)$. Allora

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|AR(\lambda : A)x\| \\ &= \|R(\lambda : A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0 \qquad \text{per } \lambda \to \infty\end{aligned}$$

Ma $D(A)$ è denso in X e $\|\lambda R(\lambda : A)\| \leq 1$. Quindi $\lambda R(\lambda : A)x \to x$ per $\lambda \to \infty \ \ \forall x \in X$. □

Definiamo ora, $\forall \lambda > 0$, **l'approssimazione di Yosida** di A come

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$$

A_λ è un approssimazione di A nel senso seguente:

2.3 Lemma. *Sia A operatore che soddisfa le condizioni i) e ii) del Teorema 2.1 di Hille-Yosida. Se A_λ è l'approssimazione di Yosida di A, allora*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \qquad \textit{per } x \in D(A)$$

Dimostrazione. Per $x \in D(A)$ abbiamo per il Lemma 2.2 e per definizione di A_λ che

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax$$

□

2.4 Lemma. *Sia A operatore che soddisfa le condizioni i) e ii) del Teorema 2.1 di Hille-Yosida. Se A_λ è l'approssimazione di Yosida di A, allora A_λ è il generatore infinitesimale di un semigruppo uniformemente continuo di contrazioni e^{tA_λ}. Inoltre, per ogni $x \in X, \lambda, \mu > 0$ abbiamo*

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq t\,\|A_\lambda x - A_\mu x\|$$

Dimostrazione. Dalla definizione di A_λ è chiaro che esso è un operatore lineare limitato e quindi è il generatore infinitesimale di un semigruppo uniformemente continuo e^{tA_λ} di operatori lineari limitati per Teorema 1.2. Inoltre

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)}\right\| \leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R(\lambda:A)\|} \leq 1$$

e quindi e^{tA_λ} è un semigruppo di contrazioni. È chiaro dalla definizione che e^{tA_λ}, e^{tA_μ} , A_λ e A_μ commutano tra loro. Di conseguenza

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu x}\right) ds\right\| \\ &\leq \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\left(A_\lambda x - A_\mu x\right)\right\| ds \leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|\end{aligned}$$

□

Siamo ora pronti per concludere la dimostrazione del Teorema 2.1 di Hille-Yosida.

Dimostrazione. (Necessità Teorema di Hille-Yosida)
$\Longleftarrow$ Sia $x \in D(A)$. Allora

$$\left\|e^{tA_\lambda x} - e^{tA_\mu x}\right\| \leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| \leq t\left\|A_\lambda x - Ax\right\| + t\left\|Ax - A_\mu x\right\|$$

Dalla disuguaglianza qui sopra e dal Lemma 2.3 segue che per $x \in D(A)$, $e^{tA\lambda}x$ converge per $\lambda \to \infty$ e la convergenza è uniforme sugli intervalli limitati. Poichè $D(A)$ è denso in X e $\left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq 1$, segue che

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x \quad \text{ per ogni } \quad x \in X.$$

Il limite qui sopra è ancora uniforme sugli intervalli limitati. Da tale limite segue facilmente che il limite $T(t)$ soddisfa la proprietà dei semigruppi, che $T(0) = I$ e che $\|T(t)\| \leq 1$. Inoltre $t \mapsto T(t)x$ è continua $\forall t \geq 0$ in quanto limite uniforme della funzione continua $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$. Quindi $T(t)$ è un semigruppo C_0 di contrazioni su X. Per concludere la dimostrazione mostreremo che A è il generatore infinitesimale di $T(t)$. Sia $x \in D(A)$. Allora usando il limite usato prima sopra e il Teorema 1.8 abbiamo

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(e^{tA_\lambda}x - x\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sAA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Axds$$

L'ultima uguaglianza segue dalla convergenza uniforme di $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ a $T(t)Ax$ sugli intervalli limitati. Sia B il generatore infinitesimale $T(t)$ e sia $x \in D(A)$.

Dividendo l'espressione sopra per $t > 0$ e mandando $t \downarrow 0$ vediamo che $x \in D(B)$ e che $Bx = Ax$. Quindi $B \supseteq A$. Poichè B è il generatore infinitesimale di $T(t)$, segue dalla condizione necessaria che $1 \in \rho(B)$. Viceversa, supponiamo per ii) che $1 \in \rho(A)$. Poichè $B \supseteq A$, $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$ che implica che $D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$ e quindi $A = B$. $\square$

Il Teorema 2.1 di Hille-Yosida e la sua dimostrazione portano a delle semplici conseguenze che vedremo ora.

2.5 Corollario. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni $T(t)$. Se A_λ è l'approssimazione di Yosida di A, allora*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda x} \qquad \textit{per } x \in X.$$

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del Teorema 2.1 segue che il limite a destra definisce un semigruppo C_0 di contrazioni, $S(t)$, il cui generatore infinitesimale è A. Dal Teorema 1.10 segue allora che $T(t) = S(t)$. $\square$

2.6 Corollario. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni $T(t)$. L'insieme risolvente di A contiene il semipiano destro aperto, cioè, $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ e per tali λ*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Dimostrazione. L'operatore $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ è ben definito per λ che soddisfa $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Nella dimostrazione della necessità del Teorema 2.1 è stato mostrato che $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ e quindi $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$. La stima della tesi per $R(\lambda)$ è ovvia. $\square$

Sia $T(t)$ un semigruppo C_0 che soddisfa $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ (per $\omega \geq 0$). Consideriamo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. $S(t)$ è ovviamente un semigruppo C_0 di contrazioni. Se A è il generatore infinitesimale di $T(t)$, allora $A - \omega I$ è il generatore infinitesimale di $S(t)$. Viceversa se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni $S(t)$, allora $A + \omega I$ è il generatore infinitesimale di $T(t)$, semigruppo C_0 che soddisfa $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. Queste osservazioni ci portano alla caratterizzazione dei generatori infinitesimali di semigruppi C_0 che soddisfano $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.

2.7 Corollario. *Un operatore lineare A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 che soddisfa $\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \iff$*

i) A è chiuso e $\overline{D(A)} = X$

ii) L'insieme risolvente $\rho(A)$ di A contiene il raggio $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda > \omega\}$ e per tali λ

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Concludiamo questa sezione con un risultato che è spesso utile per provare che un dato operatore A soddisfa le condizioni sufficienti del Teorema di Hille-Yosida, le quali implicano che esso è generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni. Sia X spazio di Banach e sia X^* il suo duale. Denotiamo il valore di $x^* \in X^*$ in $x \in X$ con $\langle x^*, x\rangle$ o $\langle x, x^*\rangle$. Se A è un operatore lineare in X il suo **range numerico** $S(A)$ è l'insieme

$$S(A) = \{\langle x^*, Ax\rangle : x \in D(A), \|x\| = 1, \\ x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \langle x^*, x\rangle = 1\}.$$

2.8 Teorema. *Sia A un operatore lineare chiuso con dominio $D(A)$ denso in X. Sia $S(A)$ il range numerico di A e sia Σ il complementare di $\overline{S(A)}$ in $\mathbb{C}$. Se $\lambda \in \Sigma$ allora $\lambda I - A$ è invertibile e ha immagine chiusa. Inoltre, se $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ è tale da soddisfare $\rho(A) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$ allora lo spettro di A è contenuto nel complementare S_0 di Σ_0 e*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})}$$

dove $d(\lambda : \overline{S(A)})$ è la distanza di λ da $\overline{S(A)}$.

Dimostrazione. 1.3.9 del [Paz92] □

2.2 Il teorema di Lumer-Phillips

Nella precedente sezione abbiamo visto la caratterizzazione di Hille-Yosida del generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni. In questa sezione vedremo una caratterizzazione differente degli stessi generatori infinitesimali. Per fare ciò abbiamo bisogno di alcune nozioni preliminari.
Sia X spazio di Banach e sia X^* il suo duale. Denotiamo il valore di $x^* \in X^*$ in $x \in X$ con $\langle x^*, x\rangle$ o $\langle x, x^*\rangle$. Per ogni $x \in X$ definiamo **l'insieme duale** $F(x) \subseteq X^*$ come

$$F(x) = \left\{x^* : x^* \in X^* \quad \text{e} \quad \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}$$

Dal Teorema di Hahn-Banach segue che $F(x) \neq \emptyset \ \ \forall x \in X$.

2.9 Definizione. Un operatore lineare A è **dissipativo** se $\forall x \in D(A) \ \ \exists x^* \in F(x)$ tale che $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

In seguito diamo una utile caratterizzazione degli operatori dissipativi.

2.10 Teorema. *Sia A operatore lineare.*
A è dissipativo $\Longleftrightarrow$ $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\| \quad \forall x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$ Siano A dissipativo, $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$. Se $x^* \in F(x)$ e $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$ allora

$$\|\lambda x - Ax\|\|x\| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \geq \operatorname{Re}\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \geq \lambda\|x\|^2$$

e quindi segue la tesi.
$\Longleftarrow$ Sia $x \in D(A)$ e supponiamo che $\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| \quad \forall\lambda > 0$. Se $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e $z_\lambda^* = y_\lambda^* / \|y_\lambda^*\|$, allora $\|z_\lambda^*\| = 1$ e

$$\begin{aligned}\lambda\|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| = \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^*\rangle \\ &= \lambda \operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^*\rangle - \operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^*\rangle \leq \lambda\|x\| - \operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^*\rangle\end{aligned}$$

per ogni $\lambda > 0$. Quindi

$$\operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^*\rangle \leq 0 \quad \text{ e } \quad \operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|$$

Poichè la palla unitaria di X^* è compatta nella topologia debole di X^*, la rete $z_\lambda^*, \lambda \to \infty$, ha un punto di accomulazione debole $z^* \in X^*, \|z^*\| \leq 1$. Dalle ultime due disequazioni qui sopra segue che $\operatorname{Re}\langle Ax, z^*\rangle \leq 0$ e $\operatorname{Re}\langle x, z^*\rangle \geq \|x\|$. Ma $\operatorname{Re}\langle x, z^*\rangle \leq |\langle x, z^*\rangle| \leq \|x\|$ e quindi $\langle x, z^*\rangle = \|x\|$. Prendendo $x^* = \|x\|z^*$ abbiamo che $x^* \in F(x)$ e $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. Quindi $\forall x \in D(A)$ $\exists x^* \in F(x)$ tale che $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$ e quindi A è dissipativo. □

2.11 Teorema (Teorema di Lumer-Philips).
Sia A un operatore lineare con dominio $D(A)$ denso in X.

a) Se A è dissipativo ed $\exists\lambda_0 > 0$ tale che l'immagine, $R(\lambda_0 I - A)$, di $\lambda_0 I - A$ è X, allora A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni su X.

b) Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni su X allora $R(\lambda I - A) = X \quad \forall\lambda > 0$ e A è dissipativo. Inoltre, $\forall x \in D(A)$ e $\forall x^* \in F(x)$, $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

Dimostrazione. a) Sia $\lambda > 0$, A dissipativo implica per Teorema 2.10 che $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda\|x\|$ per ogni $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$. Poiché $R(\lambda_0 I - A) = X$, segue da sopra con $\lambda = \lambda_0$ che $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ è un operatore lineare limitato e quindi chiuso. Ma allora $\lambda_0 I - A$ è chiuso e quindi anche

A è chiuso. Se $R(\lambda I - A) = X \quad \forall \lambda > 0$ allora $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \lambda^{-1}$ (segue da sopra per teorema 2.10). Dal Teorema di Hille-Yosida segue che A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni su X. Per completare la prova di a) rimane da mostrare che $R(\lambda I - A) = X \quad \forall \lambda > 0$. Consideriamo l'insieme

$$\Lambda = \{\lambda : 0 < \lambda < \infty \text{ e } R(\lambda I - A) = X\}.$$

Sia $\lambda \in \Lambda$. Per ciò che si è visto sopra si ha che $\lambda \in \rho(A)$. Poichè $\rho(A)$ è aperto, un intorno di λ è in $\rho(A)$. L'intersezione di questo intorno con la retta reale è chiaramente in Λ e quindi Λ è aperto. Sia infatti $\lambda_n \in \Lambda, \lambda_n \to \lambda > 0 \quad \forall y \in X \quad \exists x_n \in D(A)$ tale che

$$\lambda_n x_n - A x_n = y.$$

Dalla disequazione data dal teorema 2.10 segue che $\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C$ per $C > 0$. Ora,

$$\begin{aligned} \lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m (x_n - x_m) - A (x_n - x_m)\| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m| \, \|x_n\| \leq C \, |\lambda_n - \lambda_m| \, . \end{aligned}$$

Quindi $\{x_n\}_{n \geq 1}$ è successione di Cauchy. Sia $x_n \to x$. Allora $A x_n \to \lambda x - y$. Poichè A è chiuso, $x \in D(A)$ e $\lambda x - A x = y$. Quindi $R(\lambda I - A) = X$ e $\lambda \in \Lambda$. Quindi Λ è anch'esso chiuso in $]0, \infty[$ e poichè $\lambda_0 \in \Lambda$ dall'ipotesi $\Lambda \neq \varnothing$ segue $\Lambda =]\,0, \infty\,[$. Ciò completa la dimostrazione di a).

b) Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni, $T(t)$, su X, allora per il Teorema di Hille-Yosida $\rho(A) \supseteq]0, \infty\,[$ e quindi $R(\lambda I \; - A) = X \; \forall \lambda > 0$. Inoltre, se $x \in D(A), \;\; x^* \in F(x)$ allora

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|T(t)x\| \, \|x^*\| \leq \|x\|^2$$

e quindi,

$$\operatorname{Re} \langle T(t)x - x, x^* \rangle = \operatorname{Re} \langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|^2 \leq 0$$

Dividendo per $t > 0$ e mandando $t \downarrow 0$ si ha

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Ciò vale $\forall x^* \in F(x)$ e completa la dimostrazione.

$\square$

2.12 Corollario. *Sia A un operatore lineare chiuso con dominio denso in X. Se entrambi A e A^* sono dissipativi, allora A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni su X.*

Dimostrazione. Per a) del Teorema 2.11 di Lumer-Phillips è sufficiente provare che $R(I-A) = X$. Poichè A è dissipativo e chiuso $R(I-A)$ è un sottospazio chiuso di X. Se $R(I-A) \neq X$ allora $\exists x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tale che $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ per $x \in D(A)$. Questo implica $x^* - A^*x^* = 0$. Poichè A^* è anch'esso dissipativo segue da Lumer-Philips che $x^* = 0$ e ciò è assurdo perchè $x^* \neq 0$ per ipotesi. □

Concludiamo la sezione con alcune proprietà degli operatori dissipativi.

2.13 Teorema. *Sia A un operatore dissipativo su X.*

a) Se $\exists \lambda_0 > 0$, tale che $R(\lambda_0 I - A) = X$ allora $R(\lambda I - A) = X$ $\forall \lambda > 0$.

b) Se A è chiudibile allora $\bar{A}$, la chiusura di A, è anch'essa dissipativa.

c) Se $\overline{D(A)} = X$ allora A è chiudibile.

Dimostrazione.

a) È già stato mostrato nella dimostrazione di a) del Teorema 2.11 di Lumer-Phillips.

b) Sia $x \in D(\bar{A})$, $y = \bar{A}x$. Allora $\exists \{x_n\}_{n\geq 1} : x_n \in D(A)$, tale che $x_n \to x$ e $Ax_n \to y = \bar{A}x$. Dal Teorema 1.22 segue che $\|\lambda x_n - Ax_n\| \geq \lambda \|x_n\|$ per $\lambda > 0$ e mandando $n \to \infty$ abbiamo

$$\|\lambda x - \bar{A}x\| \geq \lambda \|x\| \quad \text{per } \lambda > 0$$

Poichè quella sopra vale $\forall x \in D(\bar{A})$ si ha che $\bar{A}$ è dissipativo per Teorema 2.10.

c) Suppongo, per assurdo, che A non sia chiudibile. Allora $\exists \{x_n\}_{n\geq 1}$ tale che $x_n \in D(A), x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$ con $\|y\| = 1$. Dal Teorema 2.10 segue che $\forall t > 0$ e $\forall x \in D(A)$

$$\left\| \left(x + t^{-1}x_n\right) - tA\left(x + t^{-1}x_n\right) \right\| \geq \left\| x + t^{-1}x_n \right\|$$

Mandando $n \to \infty$ e dopo $t \to 0$ segue che $\|x - y\| \geq \|x\|$ $\forall x \in D(A)$. Ma questo è impossibile se $D(A)$ è denso in X e quindi A è chiudibile.

□

2.14 Teorema. *Sia A un operatore dissipativo con $R(I-A) = X$, immagine dell'operatore $I - A$. Se X è riflessivo, allora $\overline{D(A)} = X$.*

Dimostrazione. 1.4.6 del [Paz92] □

2.3 Generatori infinitesimali di semigruppi C_0 generali

Nelle precedenti due sezioni abbiamo dato due caratterizzazione differenti dei generatori infinitesimali di semigruppi C_0 di contrazioni. Abbiamo visto alla fine alla fine della sezione 2.1 che queste caratterizzazioni producono caratterizzazioni di generatori infinitesimali di semigruppi C_0 di operatori lineari $T(t)$ che soddisfano $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. Ora poniamo l'attenzione sulla caratterizzazione di generatori infinitesimali di semigruppi C_0 di operatori lineari limitati in generale. Per il Teorema 1.6 esistono costanti reali $M \geq 1$ e ω tali che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Usando argomentazioni simili a quelle già viste alla fine della sezione 2.1 mostriamo che per caratterizzare i generatori infinitesimali nel caso generale è sufficiente caratterizzare i generatori infinitesimali di semigruppi C_0 uniformemente limitati ($\omega = 0$). Questo verrà fatto cambiando la norma dello spazio di Banach X in modo che il semigruppo C_0 uniformemente limitato diventi, con la nuova norma, un semigruppo di contrazioni, permettendoci quindi di usare i risultati precedenti per caratterizzarne il generatore. Iniziamo con un Lemma che cambia la norma.

2.15 Lemma. *Sia A un operatore lineare per il quale $\rho(A) \supset]0, \infty[$. Se*

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n\| \leq M \qquad \textit{per } n = 1, 2, \ldots, \lambda > 0,$$

allora esiste una norma $|\cdot|$ su X che è equivalente alla norma originale $\|\cdot\|$ su X e soddisfa:

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\| \qquad \textit{per} \qquad x \in X$$

e

$$|\lambda R(\lambda : A)x| \leq |x| \qquad \textit{per} \qquad x \in X, \quad \lambda > 0.$$

Dimostrazione. Sia $\mu > 0$ e

$$\|x\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu : A)^n x\|.$$

Allora ovviamente,

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$$

e

$$\|\mu R(\mu : A)\|_\mu \leq 1.$$

Mostriamo che

$$\|\lambda R(\lambda : A)\|_\mu \leq 1 \qquad \text{per} \qquad 0 < \lambda \leq \mu.$$

Infatti, se $y = R(\lambda : A)x$ allora $y = R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y)$ e per disuguaglianza sopra,

$$\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu$$

dove $\lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ come mostrato. Dalle precedenti disuguaglianze segue che

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad \text{per } 0 < \lambda \leq \mu.$$

Prendendo il sup per $n \geq 0$ del membro sinistro di quella sopra si ha che $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ per $0 < \lambda \leq \mu$. Infine, definiamo

$$|x| = \lim_{\mu \to \infty} \|x\|_\mu.$$

Allora otteniamo la prima disuguaglianza cercata e per $n = 1$ nell'ultima disuguaglianza qui sopra otteniamo

$$\|\lambda R(\lambda : A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

ottenendo anche la seconda disuguaglianza cercata mandando $\mu \to \infty$. $\square$

2.16 Teorema. *Un operatore lineare A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$, che soddisfa $\|T(t)\| \leq M$ $(M \geq 1)$,* $\iff$

i) A è chiuso e $D(A)$ è denso in X.

ii) L'insieme risolvente $\rho(A)$ di A contiene $\mathbb{R}^+$ e

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq M/\lambda^n \quad \text{per } \lambda > 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Dimostrazione. Sia $T(t)$ un semigruppo C_0 su uno spazio di Banach X e sia A il suo generatore infinitesimale. Se la norma in X è sostituita da una norma equivalente, $T(t)$ rimane un semigruppo C_0 su X con la nuova norma. Il generatore infinitesimale A non cambia cosi come non cambia il fatto che A è chiuso e ha dominio denso quando passiamo alla norma equivalente su X. Queste sono proprietà topologiche che sono indipendenti dalla norma equivalente che diamo ad X.
$\Longrightarrow$ Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 che soddisfa $\|T(t)\| \leq M$. Definiamo,

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\|.$$

Allora
$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$$
e quindi $|\cdot|$ è norma su X che è equivalente alla norma originale $\|\cdot\|$ su X. Inoltre,
$$|T(t)x| = \sup_{s\geq 0} \|T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s\geq 0} \|T(s)x\| = |x|$$
e $T(t)$ è un semigruppo C_0 di contrazioni su X munito della norma $|\cdot|$. Segue dal Teorema di Hille-Yosida e dalla premessa fatta che A è chiuso e ha dominio denso in X e che $|R(\lambda : A)| \leq \lambda^{-1}$ per $\lambda > 0$. Quindi, per le disequazioni viste sopra, abbiamo che
$$\|R(\lambda : A)^n x\| \leq |R(\lambda : A)^n x| \leq \lambda^{-n}|x| \leq M\lambda^{-n}\|x\|$$
e le condizioni i) e ii) sono necessarie.
$\Longleftarrow$ Supponiamo che le condizioni i) e ii) siano soddisfatte. Per il Lemma 2.16 esiste una norma $|\cdot|$ su X che soddisfa le due disequazioni di tale Lemma. Considerando X con questa norma, A è operatore chiuso e ha dominio denso in X con $\rho(A) \supset]0, \infty[$ e $|R(\lambda : A)| \leq \lambda^{-1}$ per $\lambda > 0$. Quindi per il Teorema di Hille-Yosida, A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 di contrazioni su X munito della norma $|\cdot|$. Ritornando alla norma originale, A è ancora il generatore infinitesimale di $T(t)$ e
$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|$$
quindi $\|T(t)\| \leq M$ come richiesto. Le condizioni i) e ii) sono quindi anche sufficienti. $\square$

Se $T(t)$ è un semigruppo C_0 generale su X allora per il Teorema 1.6 esistono costanti $M \geq 1$ e ω tali che
$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$
Consideriamo il semigruppo C_0 $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, allora $\|S(t)\| \leq M$ e A è il generatore infinitesimale di $T(t) \Longleftrightarrow A - \omega I$ è il generatore infinitesimale di $S(t)$. Usando queste osservazioni insieme al Teorema 2.16 otteniamo:

2.17 Teorema. *Un operatore lineare A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$, che soddisfa $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $\Longleftrightarrow$*

i) A è chiuso e $D(A)$ è denso in X.

ii) L'insieme risolvente $\rho(A)$ di A contiene $]\omega, \infty[$ e
$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq M/(\lambda - \omega)^n \quad \text{per } \lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

2.18 Osservazione. La condizione per cui $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda > \omega$ stia in $\rho(A)$ messa assieme a $\|R(\lambda : A)^n\| \leq M/(\lambda - \omega)^n \quad$ per $\lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \ldots \quad$ implica che $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ sta in $\rho(A)$ e

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq M/(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n \quad \text{con } \operatorname{Re}\lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Dimostrazione. 1.5.4 del [Paz92]. □

Concludiamo la sezione estendendo la formula di rappresentazione del Corollario 2.5 al caso generale:

2.19 Teorema. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 su X. Se A_λ è l'approssimazione di Yosida di A, cioè $A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A)$, allora*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x$$

Dimostrazione. Iniziamo con il caso in cui $\|T(t)\| \leq M$. Nella dimostrazione del Teorema 2.16 abbiamo esibito una norma $|||\cdot|||$ su X che è equivalente alla norma originale $\|\cdot\|$ su X e per la quale $T(t)$ è un semigruppo C_0 di contrazioni. Dal Corollario 2.5 segue allora che $|||e^{tA_\lambda}x - T(t)x||| \to 0$ per $\lambda \to \infty \quad \forall x \in X$. Dal momento che $|||\cdot|||$ è equivalente a $\|\cdot\|$ si ottiene la tesi su X. Nel caso generale in cui $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ abbiamo per $\omega \leq 0, \|T(t)\| \leq M$ e quindi per quello che abbiamo già provato, la tesi vale. Rimane da provare il risultato per $\omega > 0$. Sia $\omega > 0$ e notiamo che $\lambda \to \left\|e^{tA_\lambda}\right\|$ è limitato per $\lambda > 2\omega$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}\right\| &= e^{-\lambda t}\left\|e^{\lambda^2 R(\lambda:A)t}\right\| \\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}t^k\left\|R(\lambda : A)^k\right\|}{k!} \leq Me^{(\lambda\omega/\lambda-\omega)t} \leq Me^{2\omega t}
\end{aligned}$$

Successivamente consideriamo il semigruppo uniformemente limitato $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ il cui generatore infinitesimale è $A - \omega I$. Dalla prima parte di dimostrazione abbiamo che

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t(A-\omega I)_\lambda + \omega t}x \quad \text{per} \quad x \in X.$$

Un semplice calcolo mostra che

$$(A - \omega I)_\lambda + \omega I = A_{\lambda+\omega} + H(\lambda)$$

dove

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= 2\omega I - \omega(\omega + 2\lambda)R(\lambda + \omega : A) \\
&= \omega[\omega R(\lambda + \omega : A) - 2AR(\lambda + \omega : A)]
\end{aligned}$$

È facile verificare che $\|H(\lambda)\| \leq 2\omega + (2\omega + \lambda^{-1}\omega^2)\, M$ e allora per $x \in D(A)$ $\|H(\lambda)x\| \leq M\lambda^{-1}\, (\omega^2\|x\| + 2\omega\|Ax\|) \to 0$ per $\lambda \to \infty$. Quindi $H(\lambda)x \to 0$ per $\lambda \to \infty$ $\forall x \in X$. Poichè

$$\left\| e^{tH(\lambda)}x - x \right\| \leq te^{t\|H(\lambda)\|}\|H(\lambda)x\|$$

abbiamo che

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tH(\lambda)}x = x \quad \text{per} \quad x \in X$$

Infine, poichè $H(\lambda)$ e $A_{\lambda+\omega}$ commutano abbiamo che

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - T(t)x \right\| \leq \left\| e^{tA_\lambda + tH(\lambda-\omega)}x - T(t)x \right\| + \left\| e^{tA_\lambda} \right\| \left\| e^{tH(\lambda-\omega)}x - x \right\|$$

Per $\lambda \to \infty$ il primo termine a destra tende a zero (per ciò che ci mostra il semplice calcolo sopra) mentre il secono termine tende a zero per la stima fatta ad inizio dimostrazione e per $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tH(\lambda)}x = x$ per $x \in X$. Quindi

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x \quad \text{per} \quad x \in X$$

come volevamo. □

Capitolo 3

Semigruppi analitici

Fino a questo punto abbiamo trattato semigruppi il cui dominio era $\mathbb{R}^+$ ($T(t),\ t \geq 0$). Ora consideriamo la possibilità di espandere tale dominio considerando una regione del piano complesso che contenga il semiasse reale positivo. È chiaro che, per presentare la struttura di semigruppo, il dominio nel quale varia il parametro complesso deve essere un semigruppo additivo di complessi. In questa sezione ci restringeremo a domini complessi molto speciali, chiamati angoli attorno all'asse reale delle ascisse positive.

3.1 Definizione. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ e per $z \in \Delta$ sia $T(z)$ un operatore lineare limitato. La famiglia $T(z),\ z \in \Delta$, è un **semigruppo analitico in** Δ se:

i) $z \mapsto T(z)$ è analitica in Δ;

ii) $T(0) = I \quad$ e $\quad \lim_{z \to 0} T(z)x = x \ \ \forall x \in X$;

iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)\, T(z_2) \qquad$ per $z_1, z_2 \in \Delta$.

Un semigruppo $T(t)$ sarà chiamato **analitico** se è analitico in qualche settore Δ contenente l'asse reale non negativo.

Chiaramente la restrizione di un semigruppo analitico all'asse reale è un semigruppo C_0. Di seguito ci interesseremo alla possibilità di estendere un dato semigruppo C_0 ad un semigruppo analitico in qualche settore Δ attorno all'asse reale non negativo. Poiché la moltiplicazione di un semigruppo C_0, $T(t)$, per $e^{\omega t}$ non influisce sulla possibilità o sull'impossibilità di estenderlo ad un semigruppo analitico in qualche settore Δ, ci limiteremo in molti dei risultati di questa sezione al caso dei semigruppi C_0 uniformemente limitati. I risultati per i semigruppi C_0 generali derivano dai risultati corrispondenti per i semigruppi C_0 uniformemente limitati in modo ovvio. Per comodità spesso assumeremo anche che $0 \in \rho(A)$ dove A è il generatore infinitesimale del semigruppo C_0. Questo può sempre essere ottenuto moltiplicando il semigruppo uniformemente limitato $T(t)$ per $e^{-\varepsilon t}$ con $\varepsilon > 0$.

3.2 Teorema. *Sia $T(t)$ un semigruppo C_0 uniformemente limitato. Sia A il generatore infinitesimale di $T(t)$ e supponiamo che $0 \in \rho(A)$. Le seguenti preposizioni sono equivalenti:*

a) $T(t)$ può essere esteso ad un semigruppo analitico in un settore $\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\}$ e $\|T(z)\|$ è uniformemente limitato in ogni sottosettore $\overline{\Delta}_{\delta'}$ di Δ_δ con $\delta' < \delta$.

b) Esiste una costante C tale che $\forall \sigma > 0,\ \tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

c) Esiste $0 < \delta < \pi/2$ e $M > 0$ tale che

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}$$

e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \qquad \textit{per } \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0.$$

d) $T(t)$ è differenziabile per $t > 0$ ed $\exists C$ costante tale che

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \qquad \textit{per } t > 0.$$

Dimostrazione.
a) $\Rightarrow$ b): Sia $0 < \delta' < \delta$ tale che $\|T(z)\| \leq C_1$ per $z \in \overline{\Delta}_{\delta'} = \{z : |\arg z| \leq \delta'\}$. Per $x \in X$ e $\sigma > 0$ abbiamo che

$$R(\sigma + i\tau : A)x = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t} T(t)x dt.$$

Dall'analiticità e dalla uniforme limitatezza di $T(z)$ in $\overline{\Delta}_{\delta'}$ segue che possiamo cambiare il cammino di integrazione dell'integrale sopra dall'asse reale positivo ad un qualiasi raggio $\rho e^{i\vartheta}$, $0 < \rho < \infty$ e $|\vartheta| \leq \delta'$. Per $\tau > 0$, cambiando il cammino d'integrazione al raggio $\rho e^{i\delta'}$ e stimando l'integrale che ne risulta, otteniamo

$$\begin{aligned}\|R(\sigma + i\tau : A)x\| &\leq \int_0^\infty e^{-\rho(\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta')} C_1 \|x\| d\rho \\ &\leq \frac{C_1\|x\|}{\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta'} \leq \frac{C}{\tau}\|x\|.\end{aligned}$$

In modo simile, per $\tau < 0$ cambiamo il cammino d'integrazione al raggio $\rho e^{-i\delta'}$ e otteniamo $\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq -C/\tau$ e quindi segue la tesi.

b) $\Rightarrow$ c): Dall'assunzione che A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 abbiamo che $\|R(\lambda : A\| \leq M_1/\operatorname{Re}\lambda$ per $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dal punto b) abbiamo che per $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\|R(\lambda : A)\| \leq C/|\operatorname{Im}\lambda|$ e quindi $\|R(\lambda : A)\| \leq C_1/|\lambda|$ per $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Sia $\sigma > 0$ e scriviamo l'espansione di Taylor per $R(\lambda : A)$ attorno $\lambda = \sigma + i\tau$

$$R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\sigma + i\tau : A)^{n+1}(\sigma + i\tau - \lambda)^n.$$

Questa serie converge in $B(X)$ per $\|R(\sigma + i\tau : A)\||\sigma + i\tau - \lambda| \leq k < 1$. Scegliendo $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\tau$ nella serie sopra e usando la stima in b), vediamo che la serie converge uniformemente in $B(X)$ per $|\sigma - \operatorname{Re}\lambda| \leq k|\tau|/C$ e poiché sia $\sigma > 0$ sia $k < 1$ sono arbitrari segue che $\rho(A)$ contiene l'insieme di tutti i λ con $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ che soddisfano $|\operatorname{Re}\lambda|/|\operatorname{Im}\lambda| < 1/C$ ed in particolare

$$\rho(A) \supset \left\{\lambda : |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\right\}$$

dove $\delta = k \arctan 1/C, 0 < k < 1$. Inoltre, in questa regione

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C}{1-k} \cdot \frac{1}{|\tau|} \leq \frac{\sqrt{C^2+1}}{(1-k)} \frac{1}{|\lambda|} = \frac{M}{|\lambda|}.$$

Dall'assunzione $0 \in \rho(A)$ segue che A soddisfa c).

c) $\Rightarrow$ d): Se A soddisfa c) segue dal Teorema 1.7.7 del [Paz92] che

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda$$

dove Γ è il cammino composto dai raggi $\rho e^{i\vartheta}$ e $\rho e^{-i\vartheta}, 0 < \rho < \infty$ e $\pi/2 < \vartheta < \pi/2 + \delta$. Γ è orientata in modo che $\operatorname{lm}\lambda$ aumenti lungo Γ. L'integrale sopra converge in $B(X)$ per $t > 0$. Derivandolo rispetto a t (a priori solo formalmente) otteniamo

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda.$$

Ma tale integrale converge in $B(X)$ $\forall t > 0$ poiché

$$\|T'(t)\| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} M e^{-\rho\cos\vartheta t} d\rho = \left(\frac{M}{\pi\cos\vartheta}\right) \frac{1}{t}.$$

Quindi la differenziazione formale di $T(t)$ è giustificata , $T(t)$ è differenziabile per $t > 0$ e

$$\|AT(t)\| = \|T'(t)\| \leq C/t \quad \text{per } t > 0.$$

d) $\Rightarrow$ a): Poichè $T(t)$ è differenziabile per $t > 0$, segue dal Lemma 2.4.5 del [Paz92] che $\left\|T^{(n)}(t)\right\| = \|T'(t/n)^n\| \leq \|T'(t/n)\|^n$. Usando questo fatto, l'ultima disequazione sopra e $n!e^n \geq n^n$, abbiamo che:

$$\frac{1}{n!}\left\|T^{(n)}(t)\right\| \leq \left(\frac{Ce}{t}\right)^n.$$

Consideriamo ora la serie di potenze

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n.$$

Questa serie converge uniformemente in $B(X)$ per $|z-t| \leq k(t/eC)$ $\forall k < 1$. Quindi $T(z)$ è analitico in $\Delta = \{z : |\arg z| < \arctan 1/Ce\}$. Poiché per valori reali di z, $T(z) = T(t)$, $T(z)$ estende $T(t)$ ad un settore Δ. Dall'analiticità di $T(z)$ segue che $T(z)$ soddisfa la proprietà dei semigruppi, e dalla serie sopra si vede che $T(z)x \to x$ per $z \to 0$ in Δ. Infine, riducendo il settore Δ ad ogni sottosettore chiuso $\overline{\Delta}_\varepsilon = \{z : |\arg z| \leq \arctan(1/Ce) - \varepsilon\}$, vediamo che $\|T(z)\|$ è uniformemente limitato in $\overline{\Delta}_\varepsilon$ e la dimostrazione è quindi completata. □

Ci sono diverse relazioni tra le diverse costanti che appaiono nell'enunciato del Teorema 3.2. Queste relazioni possono essere scoperte controllando attentamente i dettagli della dimostrazione. In particolare il δ in c) implica lo stesso δ in a) del teorema. Questo consegue facilmente controllando le regioni di convergenza dei primi due integrali che compaiono nella dimostrazione di c) $\Rightarrow$ d). Nell'implicazione d) $\Rightarrow$ a) del Teorema abbiamo visto che se $\|AT(t)\| \leq C/t$, allora $T(t)$ può essere esteso ad un semigruppo analitico in un settore intorno all'asse reale positivo. Se la costante C è piccola a sufficienza l'angolo di apertura del settore diventa più grande di 2π e $T(t)$ è analitico nell'intero piano e ciò implica, in particolare, che A è limitato. Più precisamente abbiamo:

3.3 Teorema. *Sia $T(t)$ un semigruppo C_0 differenziabile per $t > 0$. Sia A il generatore infinitesimale di $T(t)$. Se*

$$\limsup_{t\to 0} t\|AT(t)\| < \frac{1}{e}$$

allora A è un operatore limitato e $T(t)$ può essere esteso analiticamente all'intero piano complesso.

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{n} \frac{t}{n} T\left(\frac{t}{n}\right) < 1/e$$

e quindi la serie

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} T^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{t^n} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{t}{n} T\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

converge nella topologia uniforme dell'operatore, per $|z-t|/t < 1+\delta$ e per $\delta > 0$. Ma questo dominio contiene l'origine come punto interno. Quindi $\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0$ e, per Teorema 1.2, abbiamo che A è operatore lineare limitato. Ma un operatore lineare limitato genera chiaramente un semigruppo $T(t)$ che può essere esteso analiticamente all'intero piano. $\square$

La caratterizzazione del generatore infinitesimale A di un semigruppo C_0 riguarda, in generale, solo stime di $R(\lambda : A)$ per valori reali di λ, come abbiamo nei Teoremi 2.1 e 2.16 mentre la caratterizzazione del generatore infinitesimale di un semigruppo analitico che abbiamo usato nel Teorema 3.2 stima $R(\lambda : A)$ per valori complessi di λ. Il prossimo teorema ci dà una caratterizzazione del generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in termini di stime di $R(\lambda : A)$ per soli valori reali di λ.

3.4 Teorema. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 $T(t)$ che soddisfa $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Allora $T(t)$ è analitico $\Longleftrightarrow$ esistono costanti $C > 0$ e $\Lambda \geq 0$ tali che*

$$\left\|AR(\lambda : A)^{n+1}\right\| \leq \frac{C}{n\lambda^n} \qquad \textit{per } \lambda > n\Lambda \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Dimostrazione. 2.5.5 del [Paz92]. $\square$

Le caratterizzazioni dei semigruppi analitici dati finora sono basate sul generatore infinitesimale A del semigruppo oppure su condizioni sul risolvente $R(\lambda : A)$ di A. Nel prossimo Teorema vediamo una caratterizzazione differente basata sul comportamento di $T(t)$ vicino al suo raggio spettrale.

3.5 Teorema. *Sia $T(t)$ un semigruppo C_0 uniformemente limitato. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) $T(t)$ è analitico in un settore attorno all'asse reale non negativo.

b) $\forall \zeta \in \mathbb{C},\ \zeta \neq 1,\ |\zeta| \geq 1$ *esistono costanti positive* δ *e* K *tali che* $\zeta \in \rho(T(t))$ *e*

$$\|(\zeta I - T(t))^{-1}\| \leq K \quad \textit{per} \quad 0 < t < \delta$$

c) $\exists \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| = 1$ *ed esistono costanti positive* δ *e* K *tali che*

$$\|(\zeta I - T(t))x\| \geq \frac{1}{K}\|x\| \quad \textit{per ogni} \quad x \in X,\ 0 < t < \delta.$$

Dimostrazione. 2.5.6 del [Paz92]. □

3.6 Corollario. *Sia* $T(t)$ *un semigruppo* C_0*. Se*

$$\limsup_{t \downarrow 0} \|I - T(t)\| < 2$$

allora $T(t)$ *è analitico in un settore attorno all'asse reale non negativo.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che $\exists \delta > 0, \varepsilon > 0$ tali che

$$\|I - T(t)\| \leq 2 - \varepsilon \quad \text{per} \quad 0 < t < \delta.$$

Ma allora

$$\|(-I - T(t))x\| \geq 2\|x\| - \|(I - T(t))x\| \geq \varepsilon\|x\| \quad \text{per} \quad 0 < t < \delta$$

e questo implica, per c) del Teorema 3.5 con $\zeta = -1$, che $T(t)$ è analitico. □

3.7 Corollario. *Se* $T(t)$ *è un semigruppo analitico di contrazioni su* X*, spazio di Banach uniformemente convesso, allora*

$$\limsup_{t \downarrow 0} \|I - T(t)\| < 2$$

Dimostrazione. Se $T(t)$ è un semigruppo di contrazioni allora $\|I - T(t)\| \leq 2$. Se

$$\limsup_{t \downarrow 0} \|I - T(t)\| = 2$$

allora esistono successioni $\{x_n\}_{n \geq 1}$ e $\{t_n\}_{n \geq 1}$ tali che $\|x_n\| = 1,\ t_n \to 0$ e

$$\|(I - T(t_n))x_n\| \geq 2 - \frac{1}{n}.$$

Poichè $\|T(t_n)x_n\| \leq 1$, segue da sopra e dall'uniforme convessità di X che

$$\|(I + T(t_n))x_n\| \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Ma questo contraddice il punto b) del Teorema 3.5 e quindi deve valere la tesi. □

Capitolo 4

Problema di Cauchy astratto

4.1 Il problema omogeneo del dato iniziale

Sia X uno spazio di Banach e sia A un operatore lineare da $D(A) \subseteq X$ in X. Dato $x \in X$, il problema di Cauchy astratto per A con dato iniziale x consiste nel trovare una soluzione $u(t)$ al problema del dato iniziale

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0 \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{4.1}$$

dove per soluzione intendiamo una funzione a valori in X, $u(t)$, tale che $u(t)$ sia continua per $t \geq 0$, differenziabile con continuità, $u(t) \in D(A)$ per $t > 0$ e (4.1) è soddisfatto. Notiamo che, poiché $u(t) \in D(A)$ per $t > 0$ e u è continua in $t = 0$, (4.1) non può avere soluzione per $x \notin \overline{D(A)}$. Dai risultati dei precedenti capitoli è chiaro che se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$, il Problema di Cauchy astratto per A ha soluzione, chiamata $u(t) = T(t)x$, $x \in D(A)$ (per Teorema 1.8). Non è difficile mostrare che se $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ è l'unica soluzione di (4.1). In realtà, l'unicità della soluzione di (4.1) segue da ipotesi più deboli come vedremo nel Teorema 4.2.

4.1 Lemma. *Sia $u(t)$ una funzione continua a valori in X definita su $[0,T]$. Se*

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s) ds \right\| \leq M \qquad \textit{per} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

allora $u(t) \equiv 0$ su $[0,T]$.

Dimostrazione. Sia $x^* \in X^*$ e detta $\varphi(t) = \langle x^*, u(t)\rangle$ allora φ è chiaramente continua su $[0,T]$ e

$$\left|\int_0^T e^{ns}\varphi(s)ds\right| = \left|\left\langle x^*, \int_0^T e^{ns}u(s)ds\right\rangle\right| \le \|x^*\|\cdot M = M_1 \quad \text{per} \quad n = 1, 2, \dots$$

Vediamo che tale disuguaglianza implica che $\varphi(t) \equiv 0$ su $[0,T]$ e poichè $x^* \in X^*$ è arbitrario segue che $u(t) \equiv 0$ su $[0,T]$. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn\tau} = 1 - \exp\left\{-e^{n\tau}\right\}.$$

Questa serie converge uniformemente in τ sugli intervalli limitati. Quindi,

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)}\varphi(s)ds\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)} \left|\int_0^T e^{kns}\varphi(s)ds\right| \le M_1\left(\exp\left\{e^{n(t-T)}\right\} - 1\right) \end{aligned}$$

Per $t < T$ il membro a destra tende a zero per $n \to \infty$. D'altra parte abbiamo

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)}\varphi(s)ds = \int_0^T \left(1 - \exp\left\{-e^{n(t-T+s)}\right\}\right)\varphi(s)ds$$

Usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue vediamo che il membro a destra qui sopra converge a $\int_{T-t}^T \varphi(s)ds$ per $n \to \infty$. Combinando questo più quello visto poco sopra troviamo che, per $0 \le t < T$, $\int_{T-t}^T \varphi(s)ds = 0$ e ciò implica che $\varphi(t) \equiv 0$ su $[0,T]$. □

4.2 Teorema. *Sia A un operatore lineare con dominio denso in X. Se $R(\lambda : A)$ esiste $\forall\lambda \ge \lambda_0$, λ reale e*

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \log \|R(\lambda : A)\| \le 0,$$

allora (4.1) *ha al più una soluzione $\forall x \in X$.*

Dimostrazione. Notiamo prima di tutto che $u(t)$ è una soluzione di (4.1) $\Longleftrightarrow$ $e^{zt}u(t)$ è soluzione del problema del dato iniziale

$$\frac{dv}{dt} = (A + zI)v, \quad v(0) = x$$

Quindi possiamo traslare A di zA, con z costante, e supporre che $R(\lambda : A)$ esista per ogni reale λ, $\lambda \geq 0$ e quindi l'ipotesi è soddisfatta. Sia $u(t)$ una soluzione di (4.1) che soddisfa $u(0) = 0$. Proviamo che $u(t) \equiv 0$. Per arrivare a tale conclusione consideriamo la funzione $t \mapsto R(\lambda : A)u(t)$ per $\lambda > 0$. Poichè $u(t)$ è soluzione di $(4, 1)$, abbiamo che

$$\frac{d}{dt}R(\lambda : A)u(t) = R(\lambda : A)Au(t) = \lambda R(\lambda : A)u(t) - u(t)$$

che implica

$$R(\lambda : A)u(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(\tau)d\tau.$$

Dall'ipotesi segue che $\forall \sigma > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\sigma\lambda}\|R(\lambda : A)\| = 0$$

e quindi segue dalla penultima equazione sopra che

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)d\tau = 0.$$

Dal lemma 4.1 deduciamo che $u(\tau) \equiv 0$ per $0 \leq \tau \leq t - \sigma$. Dall'arbitrarietà di t e τ segue che $u(t) \equiv 0$ per $t \geq 0$. $\square$

Dal Teorema 4.2 segue che per ottenere l'unicità della soluzione del problema del dato iniziale (4.1) non è necessario assumere che A sia il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 o, equivalentemente, che per qualche $\omega \in \mathbb{R}$, $\rho(a) \supset]\omega, \infty[$ e $\|(\lambda-\omega)^n R(\lambda : A)^n\| \leq M$ per $\lambda > \omega$, ma è sufficiente molto meno per avere l'unicità. Anche per ottenere l'esistenza di soluzioni di (4.1) per alcuni sottoinsiemi densi D di valori iniziali non è necessario assumere che A sia generatore infinitesimale di un semigruppo C_0. A seconda dell'insieme D, i risultati di esistenza si possono ottenere sotto assunzioni più deboli. Tuttavia per ottenere esistenza ed unicità $\forall x \in D(A)$, così come la differenziabilità della soluzione in $[0, \infty[$ si deve assumere che A sia il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0. Questo è il contesto del prossimo Teorema.

4.3 Teorema. *Sia A un operatore lineare con dominio denso in X e con $\rho(A) \neq \emptyset$. Il problema del dato iniziale* (4.1) *ha un'unica soluzione $u(t)$, che è differenziabile con continuità su* $[0, \infty[$, $\forall x \in D(A)$ *dato iniziale* $\iff A$ *è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 $T(t)$.*

Dimostrazione. 4.1.3 del [Paz92] $\square$

Il nostro prossimo Teorema descrive una situazione in cui il problema del dato iniziale (4.1) ha soluzione unica $\forall x \in X$.

4.4 Teorema. *Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo differenziabile allora* (4.1) *ha soluzione unica* $\forall x \in X$.

Dimostrazione. L'unicità segue dal Teorema 4.2. Se $x \in D(A)$, l'esistenza segue dal Teorema 4.3. Se $x \in X$, segue dalla differenziabilità di $T(t)x$ e dai risultati della sezione 2.2.4 di [Paz92] che $\forall x \in X$ $(d/dt)T(t)x = AT(t)x$ per $t > 0$ e $AT(t)$ è Lipschitziana per $t > 0$ e quindi $T(t)x$ è la soluzione di (4.1). □

4.5 Corollario. *Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico allora* $\forall x \in X$ *allora* (4.1) *ha un'unica soluzione.*

Quindi se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0 che non è differenziabile allora, in generale, se $x \notin D(A)$ (4.1) non ha soluzione. La funzione $t \mapsto T(t)x$ è quindi una "soluzione generalizzata" di (4.1) che chiameremo **soluzione mild**. Ci sono vari modi per definire soluzioni generalizzate di (4.1), uno di questi è il seguente:
una funzione continua u su $]0,\infty[$ è soluzione generalizzata se $\exists\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq D(A)$ tale che $x_n \to u(0)$ per $n \to \infty$ e $T(t)x_n \to u(t)$ uniformemente sugli intervalli limitati. È ovvio che tale soluzione generalizzata è indipendente da $\{x_n\}_{n\geq 1}$, è unica e se $u(0) \in D(A)$ ci dà la soluzione di (4.1). Chiaramente, con questa definizione di soluzione generalizzata, (4.1) ha soluzione generalizzata $\forall x \in X$ e tale soluzione è $T(t)x$.

4.2 Il problema non omogeneo del dato iniziale

Ora consideriamo il problema non omogeneo del dato iniziale

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{4.2}$$

dove $f\colon [0,T[\to X$. In questa sezione supporremo che A sia il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$ in modo che l'equazione omogenea associata, cioè quella con $f \equiv 0$, abbia un'unica soluzione $\forall x \in D(A)$ dato iniziale.

4.6 Definizione. Una funzione $u\colon [0,T[\to X$ è una **soluzione (classica)** di (4.2) su $[0,T[$ se è continua su $[0,T[$, differenziabile con continuità su $]0,T[$, $u(t) \in D(A)$ per $0 < t < T$ e (4.2) è soddisfatta su $[0,T[$.

Sia $T(t)$ un semigruppo C_0 generato da A e sia u una soluzione di (4.2). Allora la funzione a valori in X, $g(s) = T(t-s)u(s)$ è differenziabile per $0 < s < t$ e

$$\begin{aligned}\frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s)\\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s)\\ &= T(t-s)f(s)\end{aligned}$$

Se $f \in L^1(0,T:X)$, allora $T(t-s)f(s)$ è integrabile ed integrando sopra da 0 a t si ottiene

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Di conseguenza abbiamo:

4.7 Corollario. *Se $f \in L^1(0,T:X)$, allora $\forall x \in X$ il problema del dato iniziale* (4.2) *ha al più una soluzione. Se ha soluzione, essa è data da*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Per ogni $f \in L^1(0,T:X)$ il membro a destra di tale soluzione, qui sopra, è una funzione continua su $[0,T]$. È naturale considerarla come una soluzione generalizzata di (4.2), anche se non è differenziabile e non soddisfa rigorosamente l'equazione nel senso della Definizione 4.6. Quindi definiamo:

4.8 Definizione. Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$. Sia $x \in X$ e $f \in L^1(0,T:X)$. La funzione $u \in C([0,T]:X)$ data da

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \le t \le T,$$

è la **soluzione mild** del problema del valore iniziale (4.2) su $[0,T]$.

Tale definizione di soluzione mild di (4.2) coincide quando $f \equiv 0$ con la definizione di $T(t)x$ come soluzione mild della corrispondente equazione omogenea. È chiaro quindi che non tutte le soluzioni mild di (4.2) sono infatti anche soluzioni (classiche) nel caso di $f \equiv 0$. Per $f \in L^1(0,T:X)$ il problema (4.2) ha un'unica soluzione mild in base alla Definizione 4.8.

Ci interessiamo ora alle condizioni da imporre a f per fare in modo che, per $x \in D(A)$, la soluzione mild diventi una soluzione (classica), in modo da provare, quindi, sotto queste condizioni, l'esistenza di soluzioni di (4.2) per $x \in D(A)$. Iniziamo mostrando che la continuità di f, in generale, non è sufficiente per assicurare l'esistenza di soluzioni di (4.2) per $x \in D(A)$. Infatti, sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$ e sia $x \in X$ tale che $T(t)x \notin D(A)$ per nessun $t \geq 0$. Sia $f(s) = T(s)x$. Allora $f(s)$ è continua per $s \geq 0$. Consideriamo il problema del dato iniziale

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + T(t)x \\ \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Dimostriamo che non ha soluzione anche se $u(0) = 0 \in D(A)$. Infatti, la soluzione mild di tale problema è

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)x \; ds = tT(t)x$$

ma $tT(t)x$ non è differenziabile per $t > 0$ e quindi non può essere soluzione di tale problema del dato iniziale.
Quindi, per provare l'esistenza di soluzioni per (4.2), dobbiamo richiedere di più rispetto alla sola continuità di f. Iniziamo con un criterio per l'esistenza di soluzioni di (4.2).

4.9 Teorema. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$, $f \in L^1(0, T : X)$ continua su $]0, T]$ e sia*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) \; ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Allora il Problema di Cauchy (4.2) ha soluzione u su $[0, T[$ $\forall x \in D(A)$ se una delle seguenti è soddisfatta:

i) $v(t)$ è differenziabile con continuità su $]0, T[$.

ii) $v(t) \in D(A)$ per $0 < t < T$ e $Av(t)$ è continua su $]0, T[$.

Se (4.2) ha soluzione u su $[0, T[$ per qualche $x \in D(A)$, allora v soddisfa entrambe i) e ii).

Dimostrazione. Se (4.2) ha soluzione u per qualche $x \in D(A)$ allora tale soluzione è data da $u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$. Di conseguenza $v(t) =$

$u(t) - T(t)x$ è differenziabile per $t > 0$ in quanto differenza di due funzioni differenziabili e $v(t) = u(t) - T(t)$ è ovviamente continua su $]0, T[$. Quindi i) è soddisfatta. Inoltre se $x \in D(A)$ $T(t)x \in D(A)$ per $t \geq 0$, quindi $v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$ per $t > 0$ e $Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$ è continua su $]0, T[$. Quindi anche (ii) è soddisfatta. D'altra parte, è facile verificare che per $h > 0$ l'identità

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t + h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t + h - s) f(s) ds.$$

Dalla continuità di f è chiaro che il secondo termine a destra tende a $f(t)$ per $h \to 0$. Se $v(t)$ è continuamente differenziabile su $]0, T[$ allora segue dall'identità sopra che $v(t) \in D(A)$ per $0 < t < T$ e $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Poiché $v(0) = 0$, segue che $u(t) = T(t)x + v(t)$ è la soluzione di (4.2) per $x \in D(A)$. Se $v(t) \in D(A)$, segue dall'identità sopra che $v(t)$ è differenziabile da destra per t e la derivata destra $D^+v(t)$ di v soddisfa $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$. Poiché $D^+v(t)$ è continua, $v(t)$ è differenziabile con continuità e $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Poichè $v(0) = 0$, si ha che $u(t) = T(t)x + v(t)$ è soluzione di (4.2) per $x \in D(A)$ e quindi la dimostrazione è completata. □

Dal teorema 4.9 ricaviamo due utili corollari.

4.10 Corollario. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$. Se $f(s)$ è differenziabile con continuità su $[0, T]$ allora il problema di Cauchy* (4.2) *ha soluzione u su $[0, T[$, $\forall x \in D(A)$.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$v(t) = \int_0^t T(t - s) f(s)\, ds = \int_0^t T(s) f(t - s)\, ds.$$

È chiaro che $v(t)$ è differenziabile per $t > 0$ e che la sua derivata

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(s) f'(t - s)\, ds = T(t)f(0) + \int_0^t T(t - s) f'(s)\, ds$$

è continua su $]0, T[$. Il risultato quindi segue dal punto i) del Teorema 4.9 □

4.11 Corollario. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$. Sia $f \in L^1(0, T : X)$ continua su $]0, T[$. Se $f(s) \in D(A)$ per $0 < s < T$ e $Af(s) \in L^1(0, T : X)$ allora $\forall x \in D(A)$ il problema di Cauchy* (4.2) *ha soluzione su $[0, T[$.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che per $s > 0$, $T(t-s)f(s) \in D(A)$ e che $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ è integrabile. Quindi $v(t)$ definita nel Teorema 4.9 è tale che $v(t) \in D(A)$ per $t > 0$ e

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)\ ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)\ ds$$

è continua. Il risultato segue quindi dal punto ii) del Teorema 4.9. □

Come conseguenza di risultati precedenti possiamo provare,

4.12 Teorema. *Sia $f \in L^1(0,T:X)$. Se u è la soluzione lieve di* (4.2) *su* $[0,T]$*, allora $\forall T' < T$, u è il limite uniforme di soluzioni di* (4.2) *su* $[0,T']$.

Dimostrazione. 4.2.7 del [Paz92]. □

Concludiamo questa sezione con un paio di osservazioni riguardanti un'altra nozione di soluzione del problema del dato iniziale (4.2) che chiameremo soluzione forte.

4.13 Definizione. Una funzione u differenziabile q.o. su $[0,T]$ tale che $u' \in L^1(0,T:X)$ è detta **soluzione forte** del problema di Cauchy (4.2) se $u(0) = x$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ q.o. su $[0,T]$.

Notiamo che se $A = 0$ e $f \in L^1(0,T:X)$ il problema di Cauchy (4.2) non ha soluzioni generalmente se f non è continua. Ha tuttavia sempre una soluzione forte data da $u(t) = u(0) + \int_0^t f(s)ds$. È facile mostrare che se u è una soluzione forte del problema di Cauchy (4.2) e $f \in L^1(0,T:X)$ allora la u è data da $u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$ e quindi è una soluzione mild di (4.2) ed è l'unica soluzione forte del problema (4.2). Un problema naturale è determinare quando una soluzione mild è una soluzione forte. Con una dimostrazione simile del Teorema 4.9 si può mostrare:

4.14 Teorema. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$, $f \in L^1(0,T:X)$ e sia*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\ ds, \quad 0 \le t \le T.$$

Allora il problema di Cauchy (4.2) *ha soluzione forte u su* $[0,T]$ $\forall x \in D(A)$ *se una delle seguenti è soddisfatta:*

i) $v(t)$ è differenziabile q.o. su $[0,T]$ e $v'(t) \in L^1(0,T:X)$.

ii) $v(t) \in D(A)$ q.o. su $[0,T]$ e $Av(t) \in L^1(0,T:X)$.

Se (4.2) *ha soluzione forte u su* $[0,T]$ *per qualche* $x \in D(A)$ *allora* v *soddisfa entrambe i) e ii).*

4.15 Corollario. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$. Se f è differenziabile q.o. su* $[0,T]$ *e* $f' \in L^1(0,T:X)$ *allora* $\forall x \in D(A)$ *il problema di Cauchy* (4.2) *ha un'unica soluzione forte su* $[0,T]$.

In generale, la Lipschitzianità di f su $[0,T]$ non è sufficiente per assicurare l'esistenza di una soluzione forte del Problema di Cauchy (4.2) per $x \in D(A)$. Tuttavia, se X è riflessivo e f è **Lipschitziana** su $[0,T]$, cioè

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \le C|t_1 - t_2| \quad \text{ per } t_1, t_2 \in [0,T]$$

allora per un risultato classico si ha che f è differenziabile q.o. e $f' \in L^1(0,T:X)$. Il corollario 4.15 implica quindi:

4.16 Corollario. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$, su X. Se f è Lipschitziana su* $[0,T]$ *allora* $\forall x \in D(A)$ *il problema di Cauchy* (4.2) *ha un'unica soluzione u su* $[0,T]$ *data da*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\ ds.$$

Dimostrazione. Dalle osservazioni precedenti è ovvio che (4.2) ha una soluzione forte. Quindi per Teorema 4.14, $v(t)$ del medesimo Teorema, è differenziabile q.o. su $[0,T]$ e

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\ ds = g(t).$$

È facile verificare che $g(t)$ è continua su $[0,T]$ e la tesi segue dal Teorema 4.9. □

4.3 Regolarità delle soluzioni mild per semigruppi analitici

Sia A il generatore di un semigruppo C_0, $T(t)$ e sia $f \in L^1(0,T:X)$. Nella precedente sezione abbiamo definito la soluzione mild del problema del dato iniziale

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{4.2}$$

come la funzione continua

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Abbiamo visto che se si impongono ulteriori condizioni su f, cioè che $f \in C^1([0,T] : X)$, allora la soluzione mild di (4.2) diventa una soluzione (classica), cioè una soluzione di (4.2) differenziabile con continuità. Se A è il generatore di un semigruppo analitico, abbiamo risultati più forti. Per esempio vedremo che se f è Hölderiana, allora la soluzione mild definita qui sopra è soluzione di (4.2), dove con **Hölderiana** di esponente ϑ, $0 < \vartheta < 1$ per $f\colon I \to X$, su I intervallo, si intende che esiste una costante L tale che

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L|t-s|^{\vartheta} \quad \text{per } s,t \in I.$$

Iniziamo con il seguente Teorema:

4.17 Teorema. *Sia A il generatore di un semigruppo analitico $T(t)$ e sia $f \in L^p(0,T : X)$ con $1 < p < \infty$. Se u è la soluzione mild di (4.2) allora u è Hölderiana con esponente $(p-1)/p$ su $[\varepsilon, T]$, $\forall \varepsilon > 0$. Se inoltre $x \in D(A)$ allora u è Hölderiana con lo stesso esponente su $[0,T]$*

Dimostrazione. Sia $\|T(t)\| \leq M$ su $[0,T]$. Poiché $T(t)$ è analitico esiste una costante C tale che $\|AT(t)\| \leq Ct^{-1}$ su $]0,T]$ (Per il punto (b) del Teorema 3.2). Questo implica che $T(t)x$ è Lipschitziana su $[\varepsilon, T]$ $\forall \varepsilon > 0$. Se $x \in D(A), T(t)x$ è Lipschitziana su $[0,T]$. È sufficiente quindi provare che se $f \in L^p(0,T : X)$, $1 < p < \infty$ allora $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$ è Hölderiana con esponente $(p-1)/p$ su $[0,T]$. Per $h > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} v(t+h) - v(t) = &\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\ &+ \int_0^t (T(t+h-s) - T(t-s))f(s)ds = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Stimiamo I_1 e I_2 separatamente. Per I_1 usiamo la disuguaglianza di Hölder ottenendo

$$\|I_1\| \leq M \int_t^{t+h} \|f(s)\|\, ds \leq Mh^{(p-1)/p} \left(\int_t^{t+h} \|f(s)\|^p \, ds \right)^{1/p} \leq M|f|_p h^{(p-1)/p}$$

dove $|f|_p = \left(\int_0^T \|f(s)\|^p ds \right)^{1/p}$ è la norma di f in $L^p(0,T : X)$. Per stimare I_2 notiamo che per $h > 0$

$$\|T(t+h) - T(t)\| \leq 2M \quad \text{per } t, t+h \in [0,T]$$

e

$$\|T(t+h) - T(t)\| \leq C\frac{h}{t} \qquad \text{per } t, t+h \in]0, T]$$

Quindi,

$$\|T(t+h) - T(t)\| \leq C_1\mu(h,t) = C_1 \min\left(1, \frac{h}{t}\right) \qquad \text{per } t, t+h \in [0, T]$$

dove C_1 è una costante che soddisfa $C_1 \geq \max(2M, C)$. Usando l'ultima stima e la disequazione di Hölder troviamo

$$\|I_2\| \leq C_1 \int_0^t \mu(h, t-s)\|f(s)\|ds \leq C_1|f|_p \left(\int_0^t \mu(h, t-s)^{p/(p-1)}ds\right)^{(p-1)/p}.$$

Ma poichè $\mu \geq 0$ abbiamo

$$\int_0^t \mu(h, t-s)^{p/(p-1)}ds = \int_0^t \mu(h,\tau)^{p/(p-1)}d\tau \leq \int_0^\infty \mu(h,\tau)^{p/(p-1)}d\tau = ph$$

e combinando la stima fatta di I_2 con l'ultima disequazione qui sopra troviamo $\|I_2\| \leq \text{const} \cdot h^{(p-1)/p}$. □

Ora poniamo l'attenzione sulle condizioni su f che assicurano che la soluzione mild di (4.2) è una soluzione forte.

4.18 Teorema. *Sia A il generatore di un semigruppo analitico $T(t)$. Sia $f \in L^1(0, T : X)$ e supponiamo che per ogni $0 < t < T$ esista un $\delta_t > 0$ ed una funzione continua a valori reali $W_t(\tau)$: $[0, \infty[\to [0, \infty[$ tale che*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq W_t(|t-s|)$$

e

$$\int_0^{\delta_t} \frac{W_t(\tau)}{\tau} d\tau < \infty.$$

Allora $\forall x \in X$ la soluzione mild del problema di Cauchy di (4.2) è una soluzione classica.

Dimostrazione. Poichè $T(t)$ è un semigruppo analitico, $T(t)x$ è la soluzione dell'equazione omogenea con dato iniziale x $\forall x \in X$. Per dimostrare il Teorema è quindi sufficiente, per il Teorema 4.9, mostrare che $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \in D(A)$ per $0 < t < T$ e che $Av(t)$ è continua su questo intervallo. Per arrivare a ciò scriviamo

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ &= \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_0^t T(t-s)f(t)ds \end{aligned}$$

Dal punto b) del Teorema 1.8 segue che $v_2(t) \in D(A)$ e che $Av_2(t) = (T(t) - I)f(t)$. Poichè le ipotesi del nostro Teorema implicano che f è continua su $]0, T[$ segue che $Av_2(t)$ è continua su $]0, T[$. Per provare la stessa conclusione per v_1 definiamo

$$v_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s) - f(t))ds \quad \text{per } t \geq \varepsilon$$

e

$$v_{1.\varepsilon}(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < \varepsilon.$$

Da questa definizione è chiaro che $v_{1,\varepsilon}(t) \to v_1(t)$ per $\varepsilon \to 0$. È chiaro inoltre che $v_{1,\varepsilon} \in D(A)$ e per $t \geq \varepsilon$

$$Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s) - f(t))ds$$

Dalle ipotesi del Teorema segue che per $t > 0$ $Av_{1,\varepsilon}$ converge per $\varepsilon \to 0$ e che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds$$

La chiusura di A implica che $v_1(t) \in D(A)$ per $t > 0$ e

$$Av_1(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che $Av_1(t)$ è continua su $]0, T[$. Per $0 < \delta < t$ abbiamo

$$Av_1(t) = \int_0^\delta AT(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_\delta^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds$$

Per $\delta > 0$ fissato il secondo integrale a destra è una funzione continua di t mentre il primo integrale è $O(\delta)$ uniformemente in t. Quindi $Av_1(t)$ è continua e la dimostrazione è completa. $\square$

Una funzione $f \colon I \to X$ si dice **localmente Hölderiana** se $\forall t \in I$ esiste un suo intorno in cui f è Hölderiana. È facile verificare che se I è compatto allora f è Hölderiana su I se è localmente Hölderiana. Denotiamo la famiglia di tutte le funzioni Hölderiane con esponente ϑ su I con $C^\vartheta(I : X)$.

4.19 Corollario. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico $T(t)$. Se $f \in L^1(0, T : X)$ è localmente Hölderiana su $]0, T]$ allora $\forall x \in X$ il problema di Cauchy* (4.2) *ha un'unica soluzione u.*

Si può dire di più sulla regolarità della soluzione u sotto le ipotesi del Corollario 4.19 come vedremo nel Teorema 4.21, la cui dimostrazione richiede il seguente Lemma:

4.20 Lemma. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico $T(t)$ e sia $f \in C^{\vartheta}([0,T]:X)$. Se*

$$v_1(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))\, ds$$

allora $v_1(t) \in D(A)$ per $0 \leq t \leq T$ e $Av_1(t) \in C^{\vartheta}([0,T]:X)$.

Dimostrazione. 4.3.4 del [Paz92]. □

Il principale risultato di regolarità per il caso in cui A genera un semigruppo analitico e f è Hölderiana è il seguente:

4.21 Teorema. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico $T(t)$ e sia $f \in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$. Se u è la soluzione del problema di Cauchy* (4.2) *su* $[0,T]$ *allora:*

i) Per ogni $\delta > 0$, $Au \in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$ e $du/dt \in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$.

ii) Se $x \in D(A)$ allora Au e du/dt sono continue su $[0,T]$.

iii) Se $x = 0$ e $f(0) = 0$ allora $Au,\ du/dt \in C^{\vartheta}([0,T]:X)$.

Dimostrazione. i) Abbiamo,

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds = T(t)x + v(t).$$

Dalla dimostrazione del Lemma 4.20 abbiamo che $AT(t)x$ è Lipschitziana su $\delta \leq t \leq T \quad \forall \delta > 0$, quindi è sufficiente provare che $Av(t) \in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$. Per fare ciò decomponiamo v come fatto prima

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int_0^t T(t-s)f(t)ds.$$

Dal Lemma 4.20 segue che $Av_1(t) \in C^{\vartheta}([0,T]:X)$. Rimane da mostrare solo che $Av_2(t) \in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$ $\forall \delta > 0$. Ma $Av_2(t) = (T(t)-I)f(t)$ e poichè $f \in C^{\vartheta}([0,T]:X)$ dobbiamo solo mostrare che $T(t)f(t) \in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$ $\forall \delta > 0$. Sia $t \geq \delta$ e $h > 0$. Allora

$$\begin{aligned}
&\|T(t+h)f(t+h) - T(t)f(t)\| \\
&\quad \leq \|T(t+h)\|\|f(t+h)-f(t)\| + \|T(t+h)-T(t)\|\|f(t)\| \\
&\quad \leq MLh^{\vartheta} + \frac{C}{\delta}h\|f\|_{\infty} \leq C_1 h^{\vartheta}
\end{aligned}$$

dove qui abbiamo usato un ragionamento già visto nella dimostrazione del Teorema 4.17, la definizione di funzione Hölderiana e abbiamo denotato $\|f\|_\infty = \max_{0\leq t\leq T} \|f(t)\|$.

ii) Notiamo innanzitutto che se $x \in D(A)$ allora $AT(t)x \in C([0,T] : X)$. Dal Lemma 4.20 $Av_1(t) \in C^\vartheta([0,T] : X)$ e poichè f è continua su $[0,T]$, rimane solo da mostrare che $T(t)f(t)$ è continua su $[0,T]$. Dal punto i) è chiaro che $T(t)f(t)$ è continua su $]0,T]$. La continuità in $t = 0$ segue facilmente da

$$\|T(t)f(t) - f(0)\| \leq \|T(t)f(0) - f(0)\| + M\|f(t) - f(0)\|.$$

iii) Dobbiamo solo mostrare che in questo caso $T(t)f(t) \in C^\vartheta([0,T] : X)$ e questo segue da
$\|T(t+h)f(t+h) - T(t)f(t)\|$

$$\leq \|T(t+h)\|\|f(t+h) - f(t)\| + \|(T(t+h) - T(t))f(t)\|$$

$$\leq MLh^\vartheta + \left\|\int_t^{t+h} AT(\tau)f(t)d\tau\right\|$$

$$\leq MLh^\vartheta + \int_t^{t+h} \|AT(\tau)(f(t) - f(0))\|d\tau$$

$$\leq MLh^\vartheta + CL\int_t^{t+h} \tau^{-1}t^\vartheta d\tau \leq MLh^\vartheta + CL\int_t^{t+h} \tau^{\vartheta-1}d\tau \leq Ch^\vartheta.$$

□

Concludiamo questa sezione con un risultato analogo al Teorema 4.18, dove la condizione di continuità sul modulo di f è sostituita da un'altra condizione di regolarità.

4.22 Teorema. *Sia A il generatore di un semigruppo analitico $T(t)$ e sia $0 \in \rho(A)$. Se $f(s)$ è continua, $f(s) \in D((-A)^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ e $\|(-A)^\alpha f(s)\|$ è limitato, allora $\forall x \in X$ la soluzione mild di* (4.2) *è una soluzione classica.*

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema 4.18 è sufficiente mostrare che $v(t) \in D(A)$ per $t > 0$ e che $Av(t)$ è continua per $t > 0$. Poichè $T(t)$ è analitico $T(t-s)f(s) \in D(A)$ per $t > s$ e per Teorema 2.6.13 punto c) nel [Paz92]

$$\begin{aligned}\|AT(t-s)f(s)\| &= \left\|(-A)^{1-\alpha}T(t-s)(-A)^\alpha f(s)\right\| \\ &\leq C|t-s|^{\alpha-1}\left\|(-A)^\alpha f(s)\right\|\end{aligned}$$

Quindi $AT(t-s)f(s)$ è integrabile e $v(t) \in D(A)$ così come

$$Av(t) = \int_0^t AT(t-s)f(s)ds$$

La continuità di $Av(t)$ per $t > 0$ di dimostra esattamente come si è mostrata quella di $A_1 v(t)$ nel Teorema 4.18. $\square$

4.4 Andamento asintotico delle soluzioni

In questa sezione vogliamo studiare il comportamento asintotico delle soluzioni del problema del dato iniziale

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{4.2}$$

Iniziamo con le soluzioni del problema omogeneo associato e vediamo quali condizioni garantiscono il loro decadimento esponenziale.

4.23 Teorema. *Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo C_0, $T(t)$. Se per qualche p, $1 \leq p < \infty$*

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt < \infty \quad \forall x \in X$$

allora esistono costanti $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tali che $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$.

Dimostrazione. 4.4.1 del [Paz92]. $\square$

Questo teorema mostra che se $T(t)x \in L^p(\mathbb{R}^+ : X)$ $\forall x \in X$ allora $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$ per qualche $M \geq 1$ e $\mu > 0$. Vediamo ora quali devono essere le condizioni sul generatore infinitesimale A di $T(t)$ per ottenere un simile andamento. Per uno spazio di Banach di dimensione finita è noto che $\|T(t)\|$ decade esponenzialmente se $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$, dove con $\sigma(A)$ intendiamo lo spettro dell'operatore A. Questo comportamento è una conseguenza del fatto che gli operatori lineari in spazi di Banach finiti hanno solo spettro puntuale, cioè composto da tutti e soli gli autovalori. Ciò non è più vero in generale negli spazi di Banach infiniti. Quindi per ottenere tale andamento si devono aggiungere ulteriori condizioni su $T(t)$ o su A. Ci sono diverse assunzioni possibili che implicano tale risultato e noi assumiamo che A sia il generatore di un semigruppo analitico.

4.24 Teorema. *Sia A il generatore di un semigruppo analitico $T(t)$. Se*

$$\sigma = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$$

allora esistono costanti $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tali che $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$.

Dimostrazione. Dai risultati del Capitolo 3 segue facilmente che esistono costanti $\omega > 0,\ M \geq 1,\ \delta > 0$ ed un intorno U di $\lambda = \omega$ tali che

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup U$$

e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad \text{per} \qquad \lambda \in \Sigma.$$

Inoltre,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A)d\lambda$$

dove Γ è formata da due raggi $\Gamma_1 = \left\{\lambda = \rho e^{i\vartheta} + \omega : \rho \geq 0, \pi/2 < \vartheta < \pi/2 + \delta\right\}$ e $\Gamma_2 = \left\{\lambda = \rho e^{-i\vartheta} + \omega : \rho \geq 0, \pi/2 < \vartheta < \pi/2 + \delta\right\}$ ed è orientata tale che $\operatorname{Im}\lambda$ aumenti lungo Γ. La convergenza dell'integrale qua sopra per $t > 0$ è nella topologia uniforme dell'operatore. Dalle nostre ipotesi $R(\lambda : A)$ è analitico in un intorno del triangolo

$$\Delta = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \sigma_1, |\arg(\lambda - \omega)| \geq \vartheta\}$$

dove $0 > \sigma_1 > \sigma$. Dal Teorema di Cauchy segue che Γ nell'integrale sopra può essere sostiuita, senza cambiare il valore dell'integrale, dal cammino Γ' dove Γ' è composto da

$$\begin{aligned}
\Gamma_1' &= \left\{\lambda = \rho e^{i\vartheta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|\cos\vartheta|}\right\}, \\
\Gamma_2' &= \{\operatorname{Re}\lambda = \sigma_1 : |\operatorname{Im}\lambda| \leq (\omega - \sigma_1)\,|\tan\vartheta|\}, \\
\Gamma_3' &= \left\{\lambda = \rho e^{-i\vartheta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|\cos\vartheta|}\right\}
\end{aligned}$$

ed è orientato in modo che $\operatorname{Im}\lambda$ cresca lungo Γ'. Quindi

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t} R(\lambda : A)d\lambda.$$

Stimando $\|T(t)\|$, su $\Gamma_i',\ i = 1, 2, 3$, si trova facilmente che per $t \geq 1$ ed una costante M_1, $\|T(t)\| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$. Poichè $\|T(t)\| \leq M_2$ per $0 \leq t \leq 1$, abbiamo $\|T(t)\| \leq Me^{\sigma_1 t}$ per $t \geq 0$ e ciò completa la dimostrazione. $\square$

Diamo ora alcuni semplici risultati sull'andamento asintotico delle soluzioni mild del problema di Cauchy non omogeneo (4.2).

4.25 Teorema. *Sia* $\mu > 0$ *e sia* A *il generatore di un semigruppo* C_0 $T(t)$ *che soddisfa* $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$. *Sia* f *limitata e misurabile su* $[0, \infty[$. *Se*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = f_0$$

allora, $u(t)$*, la soluzione mild di* (4.2) *soddisfa*

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = -A^{-1} f_0.$$

Dimostrazione. Poichè $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$ segue che $0 \in \rho(A)$ (per il Teorema 2.17) e $\|T(t)x\| \to 0$ per $t \to \infty$. Ora

$$\begin{aligned} v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s) ds &= \int_0^t T(t-s) \left[f(s) - f_0 \right] ds \\ &+ \int_0^t T(t-s) f_0 ds = v_1(t) + v_2(t) \end{aligned}$$

Chiaramente, (dalla dimostrazione del Teorema di Hille-Yosida 2.1),

$$\lim_{t \to \infty} v_2(t) = \int_0^\infty T(t) f_0 dt = R(0 : A) f_0 = -A^{-1} f_0$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che $v_1(t) \to 0$ per $t \to \infty$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo t_0 tale che per $t > t_0$

$$\|f(t) - f_0\| < \frac{\varepsilon \mu}{2M}$$

Allora, ponendo $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$ abbiamo,

$$\begin{aligned} \|v_1(t)\| \leq & \int_0^{t_0} \|T(t-s)\| \, \|f(s) - f_0\| \, ds \\ & + \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| \, \|f(s) - f_0\| \, ds \leq 2\|f\|_\infty M \mu^{-1} e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Scegliendo $t > t_0$ sufficientemente grande, il primo termine a destra diventa più piccolo di $\varepsilon/2$, quindi per t sufficientemente grande $\|v_1(t)\| < \varepsilon$ e la dimostrazione è completata. $\square$

Un risultato simile è il seguente:

4.26 Teorema. *Sia* $\mu > 0$ *e sia* A *il generatore di un semigruppo* C_0 $T(t)$ *che soddisfa* $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$. *Sia* f *continua e limitata su* $[0, \infty[$. *Se* $u_\varepsilon(t)$ *è la soluzione mild di*

$$\varepsilon \frac{du_\varepsilon(t)}{dt} = Au_\varepsilon(t) + f(t), \quad u_\varepsilon(0) = x, \quad \varepsilon > 0$$

allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = -A^{-1} f(t)$$

ed il limite è uniforme su ogni intervallo $[\delta, T]$ *dove* $0 < \delta < T$.

Dimostrazione. 4.4.5 del [Paz92]. □

1 Osservazione. Nel Teorema 4.26 se $x \in D(A)$ e f è differenziabile con continuità su $]0, \infty[$ allora non è difficile mostrare che

$$\frac{du_\varepsilon(t)}{dt} \to -A^{-1} f'(t) \quad \text{per } \varepsilon \to 0$$

ed il limite è uniforme sui sottoinsiemi compatti di $]0, T[$.

Capitolo 5

Applicazione della teoria dei semigruppi: PDE del secondo ordine parabolica

In questo capitolo vediamo come un'equazione alle derivate parziali (PDE) del secondo ordine parabolica può essere realizzata all'interno del contesto della teoria dei semigruppi. Iniziamo con delle definizioni preliminari che ci aiutano a capire in che contesto ci troviamo.

5.1 Definizione. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice. Diciamo che $v \in L^1_{loc}(U)$ è la **derivata parziale debole** $\alpha - esima$ di u e scriveremo

$$D^\alpha u = v,$$

se

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = -(1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

dove $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ ordine del multi-indice.

In altre parole se data u esiste una funzione v che soddisfa l'identità tra integrali qui sopra $\forall \phi$ diciamo che $D^\alpha u = v$ nel senso debole. Se tale funzione non esiste diremo che u non possiede una derivata parziale debole $\alpha - esima$.

5.2 Definizione. Fissati $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{Z}^+$, chiamiamo **spazio di Sobolev**, $W^{k,p}(U)$, lo spazio composto da tutte le funzioni localmente integrabili $u \colon U \to \mathbb{R}$ tali per cui per ciascun multi-indice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ esiste nel senso debole e sta in $L^p(U)$.

Per $p = 2$ scriveremo

$$W^{k,2}(U) = H^k(U) \quad k = 0, 1 \dots.$$

Notiamo che $H^0(U) = L^2(U)$.
Se $u \in W^{k,p}(U)$ definiamo la sua norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_U |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \sum_{|\alpha|\le k} \text{ess } \sup_U |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

Siano $\{u_m\}_{m\ge 1}, u \in W^{k,p}(U)$. Diciamo che u_m converge a u in $W^{k,p}(U)$, scritto

$$u_m \to u \quad \text{in } W^{k,p}(U)$$

se

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$$

Denotiamo con $W_0^{k,p}(U)$ la chiusura di $C_c^\infty(U)$ in $W^{k,p}(U)$. Quindi $u \in W_0^{k,p}(U) \iff$ esiste $\{u_m\}_{m\ge 1} \subset C_c^\infty(U)$ tale che $u_m \to u$ in $W^{k,p}(U)$.

5.3 Definizione. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, sia $T > 0$ e poniamo $U_T = U \times]0, T]$. Consideriamo il problema del valore iniziale

$$\begin{cases} u_t + Lu = f \text{ in } U_T \\ \qquad u = 0 \text{ in } \partial U \times [0, T] \\ \qquad u = g \text{ in } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

dove $f \colon U_T \to \mathbb{R}$ e $g \colon U \to \mathbb{R}$ sono date mentre $u \colon \overline{U}_T \to R$ è incognita, $u = u(x, t)$ e $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$. L denota, per $t \in]0, T]$, un operatore differenziale del secondo ordine che può essere in forma divergenza

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \left(a^{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \tag{5.0.1}$$

oppure può avere la forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

per dati coefficienti a^{ij}, b^i, c $(i, j = 1, \ldots, n)$ ed usando ancora la notazione $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.
D'ora in poi supporremo che $a^{ij} = a^{ji}$ $i, j = 1, \ldots, n$.
L'operatore differenziale $\frac{\partial}{\partial t} + L$ è (uniformemente) **parabolico** se esiste una costante $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2 \quad \forall (x,t) \in U_T, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Per $t \in [0,T]$ fissato l'operatore L è **uniformemente ellittico** nella variabile spaziale x, cioè esiste una costante $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad \text{per q.o. } x \in U \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

In termini matriciali, detta $A(x) = ((a^{ij}(x))$ la matrice $n \times n$ simmetrica associata all'operatore L, diciamo che L è uniformemente ellittico se $A(x)$ è definita positiva e con $\lambda_A \geq \theta$, $\forall \lambda_A$ autovalore di A e $\forall x \in U$.

Un noto esempio è rappresentato da $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$, $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$, per il quale abbiamo $L = -\Delta$, dove

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

è l'operatore Laplaciano e quindi la PDE $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0$ diventa

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textbf{equazione del calore}.$$

Vedremo infatti che le soluzioni delle generali PDE del secondo ordine paraboliche sono molto simili alle soluzioni dell'equazione del calore.
Nelle applicazioni fisiche le equazioni paraboliche del secondo ordine generali descrivono l'evoluzione nel tempo della densità di qualche quantità u, chiamata concentrazione chimica, all'interno della regione U. Il termine del secondo ordine $\sum_{i.j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j}$ descrive la diffusione, il termine del primo ordine $\sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}$ descrive il trasporto e il termine di ordine zero cu descrive la creazione o deplazione.

Consideriamo ora il problema

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0 \text{ in } U_T \\ \qquad u = 0 \text{ in } \partial U \times [0,T] \\ \qquad u = g \text{ in } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

nel quale assumiamo che L sia in forma divergenza (5.0.1), sia uniformemente ellittico, abbia coefficienti che non dipendono da t di classe C^∞. Supponiamo inoltre che l'insieme aperto e limitato U abbia bordo ∂U che può essere descritto localmente come zero di una funzione differenziabile, cioè supponiamo che ∂U sia una varietà differenziabile $n-1$ dimensionale. Quello che vogliamo fare ora è reinterpretare questo problema all'interno della teoria dei semigruppi. Per fare ciò poniamo

$$D(A) = H_0^1(U) \cap H^2(U)$$

e definiamo

$$Au = -Lu \quad \text{se } u \in D(A).$$

Chiaramente A è un operatore lineare su $X = L^2(U)$. Da (6.2.2) di [Eva10] abbiamo la stima dell'energia

$$\beta \|u\|^2_{H^1_0(U)} \leq B[u, u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$$

per costanti $\beta > 0, \gamma \geq 0$, dove $B[\ ,\ ]$ è la forma bilineare associata a L.

5.4 Teorema. *L'operatore A genera un semigruppo C_0 $S(t)$, $t \geq 0$, su $X = L^2(U)$ che soddisfa $\|S(t)\| \leq e^{\gamma t}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare le ipotesi del Corollario 2.7 di Hille-Yosida, dove $\omega = \gamma$. $D(A)$ definito come sopra è chiaramente denso in $L^2(U)$. Dimostriamo ora che A è operatore chiuso. Sia $\{u_k\}_{k\geq 1} \subset D(A)$ tale che

$$u_k \to u,\ Au_k \to f \quad \text{in } L^2(U).$$

In accordo con il Teorema di regolarità 4 in 6.3.2 di [Eva10] abbiamo

$$\|u_k - u_l\|_{H^2(U)} \leq C(\|Au_k - Au_l\|_{L^2(U)} + \|u_k - u_l\|_{L^2(U)}) \quad \forall k, l.$$

Si ha dunque che $\{u_k\}_{k\geq 1}$ è una successione di Cauchy in $H^2(U)$ (per convergenza di u_k e Au_k in $L^2(U)$) e quindi

$$u_k \to u \quad \text{in } H^2(U).$$

Quindi $u \in D(A)$ ed inoltre da sopra segue che $Au_k \to Au$ in $L^2(U)$ e dunque si ha $f = Au$.
Adesso controlliamo le condizioni sul risolvente di A, cioè che

$$]\gamma, \infty[\subset \rho(A) \quad \text{e} \quad \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \gamma} \text{ per } \lambda > \gamma.$$

Consideriamo il problema al bordo

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f \text{ in } U \\ \qquad u = 0 \text{ in } \partial U \end{cases}$$

In accordo con il Teorema 3 in 6.2.2 del [Eva10] per $\lambda \geq \gamma$, esso ha un'unica soluzione debole $u \in H^1_0(U)$ $\forall f \in L^2(U)$. Per la teoria della regolarità ellittica si ha infatti che $u \in H^2(U) \cap H^1_0(U)$ e quindi $u \in D(A)$. Riscrivendo tale problema sfruttando il fatto che $Au = -Lu$ se $u \in D(A)$ otteniamo

$$\lambda u - Au = f.$$

Quindi $(\lambda I - A)\colon D(A) \to X$ è invertibile per $\lambda \geq \gamma$ e dunque $\rho(A) \supset [\gamma, \infty[$. Considero ora la forma debole del medesimo problema al bordo

$$B[u,v] + \lambda(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

dove $(\ ,\ )$ è il prodotto scalare in $L^2(U)$. Poniamo $v = u$ e ricordando la stima dell'energia per calcolare, per $\lambda > \gamma$,

$$(\lambda - \gamma)\|u\|^2_{L^2(U)} \leq \|f\|_{L^2(U)}\|u\|_{L^2(U)}.$$

Quindi, poichè $u = R(\lambda : A)f$, abbiamo la stima

$$\|R(\lambda : A)f\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}\|f\|_{L^2(U)}.$$

Questo è valido $\forall f \in L^2(U)$ e quindi

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \gamma} \quad (\lambda > \gamma),$$

come richiesto. $\square$

Bibliografia

[Eva10] Lawrance C. Evans. *Partial Differential Equations, second edition*, volume 19. American Mathematical Society, 2010.

[Paz92] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Spinger, 1992.

[Sal19] Luigi Salce. *Note sulle matrici*. Edizione libreria Progetto Padova, 2019.