UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

L'elettrodinamica classica delle p-brane

Relatore
Prof. Kurt Lechner

Laureando
Riccardo Ginelli

Anno Accademico 2023/2024

Indice

1. Introduzione

L'elettrodinamica classica è afflitta da due fondamentali divergenze. Da una parte è divergente l'autoforza, anche detta reazione di radiazione, ovvero la forza di cui risente una particella a causa dell'interazione col campo elettromagnetico da essa stessa generato. D'altra parte è divergente l'energia del campo all'interno di qualsiasi volume che contenga la particella.

Si ricorda che il sistema fondamentale delle equazioni accoppiate di Maxwell e di Lorentz, (2.2.1)-(2.2.3) di seguito, ha come soluzioni la linea di universo della particella $y^\mu(s)$ e il campo di Liènard-Wiechert $F^{\mu\nu}_{LW}$ generato dalla particella. Il campo $F^{\mu\nu}_{LW}(x)$ diverge per $x^\mu = y^\mu(s)$ come $F^{\mu\nu}_{LW}\big|_{DIV} \sim \frac{1}{|x-y(s)|^2}$, e dunque, posto $F^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}_{ext}(x) + F^{\mu\nu}_{LW}(x)$ con $F^{\mu\nu}_{ext}$ soluzione dell'equazione di Maxwell omogenea, si ha un termine di autoforza infinita all'interno dell'equazione di Lorentz (2.2.3) siccome ivi $x = y(s)$. Ignorare a priori la componente di campo di Liènard-Wiechert nell'equazione di Lorentz porterebbe alla formulazione di una teoria dell'elettrodinamica incompleta: in certi fenomeni naturali la reazione di radiazione ha un effetto non trascurabile ed è attribuibile solamente al termine divergente nell'equazione di Lorentz. Come esempio significativo si riporta l'effetto della reazione di radiazione sulla dinamica ultrarelativistica delle particelle cariche in un sincrotrone: le particelle in moto circolare, irraggiando, vengono frenate dalla reazione di radiazione il cui effetto cumulativo su un ciclo è quello di dissipare una quantità $\Delta\epsilon$ di energia per ciascuna particella. Dalla teoria dell'elettrodinamica si ha che $\Delta\epsilon = \frac{e^2}{3R}(\frac{\epsilon}{m})^4$ con R raggio dell'orbita del sincrotrone, ϵ energia della particella e m massa della particella. Ad esempio, il sincrotrone LEP, attivo presso il CERN dal 1989 al 2000, aveva un raggio $R = 4.3km$ e accelerava elettroni e positroni ad energie di $\epsilon = 100GeV$, pertanto una particella perdeva per ciclo un'energia di $\Delta\epsilon \approx 2GeV$, con $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2}$. Dunque, per mantenere in moto le particelle, il sincrotrone LEP disponeva di *cavità risonanti*, ovvero di campi elettrici acceleranti che compensavano la perdita di energia.

Siccome il tensore energia-impulso del campo $\theta^{\mu\nu}_{em}$ in (2.2.6) è quadratico in $F^{\mu\nu}$, anch'esso diverge quando è valutato sulla linea di universo della particella: $\theta^{\mu\nu}_{em}\big|_{DIV} \sim \frac{1}{|x-y|^4}$. Di conseguenza l'energia del campo elettromagnetico $E(V) = \int_V \theta^{00}_{em}(x)\mathrm{d}^3x$ è infinita in qualsiasi volume V che contenga la particella, e, indicato con $\theta_p^{\mu\nu}$ in (2.2.7) il tensore energia-impulso della particella, la legge di conservazione locale del quadrimomento, $\partial_\mu(\theta_{em}^{\mu\nu} + \theta_p^{\mu\nu}) = 0$, ha valore solo valore formale. Si conclude che la conservazione del quadrimomento non è garantita se la divergenza del tensore energia-impulso del campo non viene sanata.

Per una particella in $4D$ si può postulare l'equazione di Lorentz-Dirac (2.2.9) come equazione non divergente sostitutiva all'equazione di Lorentz. Una prima giustificazione dell'equazione di Lorentz-Dirac può essere fornita con diversi procedimenti euristici, si veda [3], tuttavia tali procedure sono in parte insoddisfacenti siccome non correggono la divergenza del tensore energia-impulso. Tralasciando gli aspetti problematici dell'equazione di Lorentz-Dirac, si evidenzia come questa restituisca risultati ben in accordo con i dati sperimentali, si veda [7],[8]. In [4] viene sviluppato un metodo che, al contrario, pone come primo obiettivo la costruzione di un tensore energia-impulso ben definito tramite un procedimento di rinormalizzazione. Un pregio di questo metodo è di fornire automaticamente l'equazione di Lorentz-Dirac come conseguenza della rinormalizzazione e dell'imposizione della conservazione del quadrimomento. Il procedimento di rinormalizzazione del tensore energia-impulso per una particella in $4D$ è esposto nei suoi punti fondamentali nel capitolo 3.

L'elettrodinamica classica di una particella in quattro dimensioni può essere generalizzata a una teoria dell'elettrodinamica in cui la "particella" carica diventa un oggetto relativistico esteso di dimensione spaziale pari a $'p-1'$ con p intero, ovvero una $(p-1)$-brana. La dimensione spazio-temporale della brana è dunque pari a p. La generalizzazione è naturale sia perchè mantiene formalmente l'apparato matematico delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica, sia perchè è determinata solo tramite i concetti basilari di invarianza per riparametrizzazione, invarianza di Lorentz, invarianza di gauge, principio variazionale e conservazione della corrente.

L'interesse nello studio delle brane è motivato anche dal loro ruolo nella teoria delle stringhe: in tale contesto, le brane compaiono come eccitazioni elementari della stringa: le brane sono soluzioni delle equazioni del moto della stringa a basse energie, ovvero ad energie inferiori alla scala di Planck $1.22 * 10^{28} eV$.

Divergenze concettualmente uguali a quelle discusse sopra - autoforza infinita ed energia divergente - affligono anche l'elettrodinamica delle brane immerse in uno spazio D dimensionale.

Tali divergenze si manifestano quando la differenza di dimensione tra la brana e lo spazio ambiente, ovvero la codimensione della brana $'D-p'$, è maggiore o uguale a due. Se la codimensione vale uno o zero, i campi sono localmente finiti su tutto lo spazio; si mostra questo fatto generale solo in un caso con ipotesi più stringenti nel capitolo 5.3.

Dopo aver richiamato nel capitolo 2 le equazioni alla base dell'elettrodinamica di una particella in quattro dimensioni, si costruiscono nel capitolo 4 gli oggetti alla base dell'elettrodinamica delle brane: corrente, campi elettromagnetici e azione. Si riscontra qualche differenza significativa con l'elettrodinamica di una particella: la corrente diventa un tensore multi-indice e l'equazione della cinematica non è più lineare nelle velocità. Nel capitolo 5 si generalizza ad una $(p-1)$-brana il metodo di rinormalizzazione del tensore energia-impulso. Anche in questo caso la rinormalizzazione del tensore energia-impulso fornisce automaticamente, in linea di principio, una nuova equazione di Lorentz non divergente per la brana. I risultati espliciti della rinormalizzazione sono derivati solo nel caso elementare di brana piatta, ovvero una brana con curvatura nulla che si muove di moto rettilineo uniforme, l'equivalente di una particella in moto con velocità costante. Nei casi più generali i calcoli sono proibitivi, dunque, ad oggi, la determinazione esplicita dell'espressione dell'autoforza finita per una brana in moto generico e la corrispondente conservazione del momento sono ancora problemi aperti.

2. Note preliminari

2.1. Notazione

- Si lavora in unità naturali, ovvero $c = 1$;
- metrica di Minkowski 'mostly negative' $\eta = diag(1, -1, -1...)$;
- $\mathbb{R}^4$ spazio di Minkowski di dimensione 3+1. Con spazio D dimensionale si intende sempre uno spazio di Minkowski $(D-1)+1$ dimensionale;
- indici greci $\mu = 0, 1, ..., D-1$ relativi allo spazio ambiente, indici latini $i, j = 0, 1, ..., p-1$ relativi al volume di universo della brana;

- $\int$ senza estremi di integrazione significa che l'integrazione è estesa su tutto lo spazio;
- *Lim* con lettera iniziale maiuscola intende il limite nella topologia dello spazio delle distribuzioni $S'(R^D)$, detto anche limite nel senso delle distribuzioni.

2.2. Equazioni dell'elettrodinamica di una particella in $D = 4$

Come riferimento per il proseguio della tesi, si riportano le equazioni in forma tensoriale dell'elettrodinamica di una particella in $\mathbb{R}^4$. Con $y^\mu(s)$ si indicano le coordinate della particella, con p^μ si indica il suo quadrimomento e con u^μ la quadrivelocità. Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica, ovvero l'equazione di Maxwell, l'identità di Bianchi e l'equazione di Lorentz, sono rispettivamente le seguenti

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x), \tag{2.2.1}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}\partial_\nu F_{\rho\alpha} = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}(y(s))u_\nu. \tag{2.2.3}$$

La quadricorrente $j^\mu(x)$ è data da

$$j^\mu(x) = e\int u^\mu \delta^4(x - y(s))\mathrm{d}s. \tag{2.2.4}$$

L'identità di Bianchi implica la seguente, dove A^μ è il quadripotenziale

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{2.2.5}$$

I tensori energia-impulso, rispettivamente del campo e della particella, sono dati da

$$\theta^{\mu\nu}_{em} = F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{2.2.6}$$

$$\theta^{\mu\nu}_p = m\int u^\mu u^\nu \delta^4(x - y(s))\mathrm{d}s. \tag{2.2.7}$$

La legge di continuità è dunque formalmente

$$\partial_\mu(\theta^{\mu\nu}_{em} + \theta^{\mu\nu}_p) = 0. \tag{2.2.8}$$

L'equazione di Lorentz-Dirac è

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e^2}{6\pi}(\frac{dw^\mu}{ds} + w^2 u^\mu) + eF^{\mu\nu}_{ext}(y(s))u_\nu. \tag{2.2.9}$$

dove w^μ è la quadriaccelerazione. L'azione dell'elettrodinamica è data da

$$S = -\frac{1}{4}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x - \int A^\mu j_\mu \mathrm{d}^4x - \int m\mathrm{d}s. \tag{2.2.10}$$

3. Rinormalizzazione del tensore energia-impulso per una particella in $D = 4$

L'enfasi di questa sezione è posta puramente sulle linee guida del metodo di rinormalizzazione e sui suoi risultati, pertanto vengono tralasciate le dimostrazioni.

La divergenza di $\theta^{\mu\nu}_{em}$ in $y(s)$ è strettamente legata al fatto che questo tensore non è una distribuzione. Infatti, se fosse una distribuzione, sarebbe localmente integrabile. Le problematiche principali legate alla divergenza sono:

- Non finitezza di $\int_V \theta^{00}_{em}\mathrm{d}^3x$, energia del campo elettromagnetico contenuto in un volume spaziale V, ogni volta che la particella appartiene a V.

- Validità solo formale dell'equazione di continuità $\partial_\mu(\theta^{\mu\nu}_{em} + \theta^{\mu\nu}_p)$=0, siccome $\theta^{\mu\nu}_{em}$ non è una distribuzione e dunque le derivate distribuzionali $\partial_\alpha\theta^{\mu\nu}_{em}$ non sono definite.

L'idea è di introdurre un parametro di regolarizzazione ϵ tramite cui parametrizzare e isolare la parte divergente di $\theta^{\mu\nu}_{em}$, di sottrarre poi manualmente la parte divergente e di definire il risultato di questa operazione come il nuovo tensore energia-impulso. Per parametrizzare tale componente divergente si opera una regolarizzazione di $\theta^{\mu\nu}_{em}$. Si utilizza la seguente regolarizzazione

$$(x - y(s))^2 = \epsilon^2, \tag{3.0.1}$$

la quale rappresenta una modifica dell'usuale condizione di tempo ritardato imposta sul potenziale di Liènard-Wiechert: $(x - y(s))^2 = 0$. Dal punto di vista geometrico, questa regolarizzazione corrisponde all'approssimazione del cono luce futuro con una famiglia di iperboloidi. Dunque, imposta (3.0.1) invece di $(x - y(s))^2 = 0$, il tensore energia-impulso si trasforma nel tensore regolarizzato $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$. Si indica con $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ la componente divergente di $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ e con $T^{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso rinormalizzato del campo:

$$T^{\mu\nu} \coloneqq \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}(\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} - \hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}). \tag{3.0.2}$$

In particolare, il controtermine $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ deve essere tale per cui $\mathrm{Lim}_{\epsilon\to 0}\,\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ diverge, mentre $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}(x) = 0$ per $x \neq y(s)$. Infatti, siccome il tensore originario è ben definito al di fuori della traiettoria della particella, sicuramente il nuovo tensore energia-impulso deve coincidere con l'originale in questa regione di spazio. Si richiede che $T^{\mu\nu}$:

- sia una distribuzione;
- sia Lorentz covariante;
- sia tale che $\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}_p) = 0$ nel senso delle distribuzioni.

Parimenti, al controtermine $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ è richiesto:

- di essere un tensore sotto trasformazioni di Poincaré;
- di essere simmetrico e a traccia nulla, come $\theta^{\mu\nu}_{em}$;
- di avere supporto sulla traiettoria della particella.

Il calcolo tramite T^{00} dell'energia del campo contenuta in un volume spaziale V che non includa la particella restituisce l'usuale risultato ottenibile anche con il tensore energia-impulso non rinomarmalizzato. Se invece si considera, per semplicità di calcolo, la particella a riposo in $\vec{x} = 0$ e si calcola tramite T^{00} l'energia del campo all'interno di una sfera di raggio R centrata nell'origine degli assi, si ha

$$E(V) = \int_{r<R} T^{00}\mathrm{d}^3x = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \int_{r>R} \frac{1}{r^4}\mathrm{d}^3x = -\frac{e^2}{8\pi R}, \tag{3.0.3}$$

e l'energia del campo è dunque finita. Siccome il quadrimomento totale del campo è dato da $p^\mu = \int T^{0\mu}\mathrm{d}^3x$ e si ha che $T^{0i} = 0$, anche p^μ è nullo. Si può verificare che $\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}_p) = 0$; di fatto per la particella a riposo si ha separatamente che $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ e $\partial_\mu \theta^{\mu\nu}_p = 0$. Al contrario, per una particella *in moto generico* si dimostra la seguente

$$\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}_p) = \int \left(\frac{dp^\mu}{ds} - \frac{e^2}{6\pi}(\frac{dw^\mu}{ds} + w^2 u^\mu) - eF^{\mu\nu}_{ext}(y)u_\nu\right)\delta^4(x-y)\mathrm{d}s. \tag{3.0.4}$$

Al che la richiesta di conservazione del quadrimomento, ovvero di validità dell'equazione di continuità $\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}_p) = 0$, equivale all'imposizione dell'equazione di Lorentz-Dirac (2.2.9) come equazione che governi, al posto dell'equazione di Lorentz, la dinamica della particella carica.

Gli aspetti chiave di questo caso particolare, che si ritrovano anche nella sua generalizzazione alle brane, sono: le richieste matematiche su $T^{\mu\nu}$ e su $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$, la sottrazione "manuale" del termine divergente, la non divergenza dell'energia del campo e la comparsa automatica di un'equazione sostitutiva all'equazione di Lorentz.

4. Elettrodinamica delle $(p-1)$-brane in D dimensioni

Una $(p-1)$-brana è una varietà di dimensione p immersa in uno spazio ambiente di dimensione D. Come anticipato nell'introduzione, la dimensione dell'estensione spaziale della brana è $'p-1'$, la dimensione del volume di universo è p. La brana può essere compatta nello spazio, ad esempio una stringa chiusa, o infinitamente estesa. In entrambi i casi si considerano brane senza bordo.

Parametrizzazione della brana: A tempo t generico, si può parametrizzare la brana immersa in $\mathbb{R}^D$ come $y^\mu(t,\vec{\sigma}) = (t, \vec{y}(\vec{\sigma}))$, dove $\vec{\sigma}$ sono $'p-1'$ parametri e $\vec{y}$ sono le coordinate del profilo spaziale della brana. Tuttavia, per preservare l'invarianza relativistica della brana in maniera manifesta, conviene introdurre la parametrizzazione più generale $y^\mu(\sigma) = (y^0(\sigma), \vec{y}(\sigma))$ con $\sigma = (\sigma^0, \vec{\sigma})$. Si osserva che in generale il profilo della brana dipende anche dal parametro σ^0 che ne regola l'evoluzione temporale. Essendo la brana una $p-$varietà immersa in uno spazio ambiente (pseudo)euclideo, l'invarianza della brana sotto riparametrizzazioni $\sigma = \sigma(\sigma')$ è sempre garantita. Diversamente, nella costruzione della corrente e dell'azione, la richiesta di invarianza per riparametrizzazione è una vera limitazione sulla struttura matematica dell'oggetto.

Velocità della brana: Si definiscono le velocità generalizzate del punto sulla brana come

$$\frac{\partial y^\mu(\sigma)}{\partial \sigma^i} = U^\mu_i \qquad \text{con} \quad i = 0, ..., p-1. \tag{4.0.1}$$

La metrica indotta sulla brana dalla metrica $\eta_{\mu\nu}$ dello spazio ambiente è dunque

$$g_{ij} = U^\mu_i U^\nu_j \eta_{\mu\nu}. \tag{4.0.2}$$

Proiettori sulla brana: Si riportano i due proiettori rispettivamente sullo spazio tangente e sullo spazio ortogonale alla brana

$$P^{\mu\nu} = g^{ij} U_i^\mu U_j^\nu, \qquad\qquad Q^{\mu\nu} = P^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}. \tag{4.0.3}$$

4.1. Corrente ed equazioni dell'elettrodinamica generalizzate

La corrente ricopre un ruolo fondamentale, e delicato, nella generalizzazione dell'elettrodinamica di una particella: assunto che la struttura delle equazioni 2.2.1 e 2.2.3 rimanga la stessa nella loro generalizzazione, allora la dimensione del tensore corrente determina la dimensione del tensore di campo. A priori si impone che $j^{\mu\nu\dots}$ sia:

- un campo tensoriale sotto trasformazioni di Poincaré;
- non nulla solo sul volume di universo della brana;
- invariante per riparametrizzazioni;
- tale che $\partial_\mu j^{\mu\nu\dots} = 0$.

Un primo tentativo potrebbe essere:

$$j^\mu(x) = \int \sqrt{\hat{g}} \frac{dx^\mu}{ds} \delta^D(x - y(s, \vec{\sigma})) ds d^{p-1}\vec{\sigma}. \tag{4.1.1}$$

con $\hat{g} = (-)^p det(\hat{g}_{mn})$, $\hat{g}_{mn}$ metrica indotta sul profilo della brana e $(m, n) = 1, ..., p-1$. $j^\mu(x)$ così scritta avrebbe un'interpretazione simile all'usuale quadricorrente, tuttavia non sarebbe invariante per le riparametrizzazioni che mescolano s con $\vec{\sigma}$. Questo fatto, però, suggerisce che nella definizione della corrente debba comparire un polinomio di velocità generalizzate per garantire l'invarianza sotto riparametrizzazioni.

La seguente definizione di corrente soddisfa tutte le proprietà richieste

$$j^{\mu_1 \dots \mu_p}(x) = \int U_{j_1}^{\mu_1} \dots U_{j_p}^{\mu_p} \epsilon^{j_1 \dots j_p} \delta^D(x - y(\sigma)) d^p\sigma, \tag{4.1.2}$$

con $\epsilon^{j_1 \dots j_p}$ simbolo di Levi-Civita. Si osserva che $j^{\mu_1 \dots \mu_p}$ è un $p-$tensore completamente antisimmetrico. Si mostra l'invarianza della corrente sotto riparametrizzazioni $\sigma \to \sigma(\sigma')$.

Posto $\frac{\partial\sigma^i}{\partial\sigma'^j} = K^i{}_j$, si ha $\mathrm{d}^p\sigma = \left|det(\frac{\partial\sigma^i}{\partial\sigma'^j})\right|\mathrm{d}^p\sigma' = |det(K^i{}_j)|\mathrm{d}^p\sigma'$. Parallelamente, $U^\mu_j = \frac{\partial y^\mu}{\partial\sigma^j} = \frac{\partial\sigma'^i}{\partial\sigma^j}\frac{\partial y^\mu}{\partial\sigma'^i} = (K^{-1})^i{}_j U'^\mu_i$, dunque l'integrando della corrente trasforma come:

$$j^{\mu_1...\mu_p}(x) = \int U^{\mu_1}_{j_1}...U^{\mu_p}_{j_p}\epsilon^{j_1...j_p}\delta^D(x-y(\sigma))d^p\sigma \tag{4.1.3}$$

$$= \int (K^{-1})^{i_1}{}_{j_1}...(K^{-1})^{i_p}{}_{j_p}U'^{\mu_1}_{i_1}...U'^{\mu_p}_{i_p}\epsilon^{j_1...j_p}\delta^D(x-y'(\sigma'))|det(K^i{}_j)|\mathrm{d}^p\sigma' \tag{4.1.4}$$

$$= \int U'^{\mu_1}_{i_1}...U'^{\mu_p}_{i_p}\epsilon^{i_1...i_p}\delta^D(x-y'(\sigma'))\mathrm{d}^p\sigma' = j'^{\mu_1...\mu_p}(x), \tag{4.1.5}$$

dove si usa l'uguaglianza $(K^{-1})^{i_1}{}_{j_1}...(K^{-1})^{i_p}{}_{j_p}\epsilon^{j_1...j_p} = \frac{1}{det(K)}$. Si può anche dimostrare la validità della legge di continuità $\partial_{\mu_1}j^{\mu_1\mu_2\cdots} = 0$, purchè il volume di universo della brana sia privo di bordo.

Si postulano dunque le equazioni di Bianchi e di Maxwell generalizzate

$$\partial_{[\mu}F_{\mu_1...\mu_{p+1}]} = 0, \tag{4.1.6}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\mu_1...\mu_p} = j^{\mu_1...\mu_p}, \tag{4.1.7}$$

dove le parentesi quadre indicano un'anti-simmetrizzazione sugli indici. Ora $F^{\mu_1...\mu_{p+1}}$ è un tensore completamente antisimmetrico di rango $'p+1'$ dalle cui componenti si definiscono i tensori spaziali completamente antisimmetrici di campo elettrico e di campo magnetico: posto l'indice $\bar{\mu} = (1, ..., D-1)$ che assume solo valori spaziali in $\mathbb{R}^D$, si ha

$$F^{\bar{\mu}_1...\bar{\mu}_p 0} \equiv E^{\bar{\mu}_1...\bar{\mu}_p}, \tag{4.1.8}$$

$$F^{\bar{\mu}_1...\bar{\mu}_{p+1}} \equiv B^{\bar{\mu}_1...\bar{\mu}_{p+1}}. \tag{4.1.9}$$

Le equazioni (4.1.6),(4.1.7) si riducono a (2.2.2),(2.2.1) per $p = 1$. L'equazione (4.1.6), riformulata in termini di forme differenziali, implica che la $(p+1)-$forma associata al campo elettromagnetico è esatta. Pertanto, in $\mathbb{R}^D$ esiste un potenziale tensore p-dimensionale $A^{\mu_1...\mu_p}$ completamente antisimmetrico negli indici per cui

$$F^{\mu_1...\mu_{p+1}} = (p+1)\partial^{[\mu_1}A^{\mu_2...\mu_{p+1}]}. \tag{4.1.10}$$

Tale potenziale è determinato modulo trasformazioni di gauge della forma

$$\tilde{A}^{\mu_1...\mu_p} = A^{\mu_1...\mu_p} + p\partial^{[\mu_1}\Lambda^{\mu_2...\mu_p]}, \tag{4.1.11}$$

dove $\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p}$ è un arbitrario tensore $(p-1)$-dimensionale anch'esso completamente antisimmetrico negli indici. Si può imporre una gauge che generalizzi l'usuale gauge di Lorenz per il quadri-potenziale, che si ricorda essere $\partial_\mu A^\mu = 0$, nel modo seguente

$$\partial_\alpha A^{\alpha\mu_2\cdots\cdot\mu_p} = 0. \tag{4.1.12}$$

Infatti, dal calcolo della divergenza di $\tilde{A}^{\mu_1\cdots\mu_p}$ in (4.1.11) si ottiene il seguente risultato

$$\partial_\alpha \tilde{A}^{\alpha\cdots\mu_p} = \partial_\alpha A^{\alpha\cdots\mu_p} + \Box\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p} - (p-1)\partial_\alpha\partial^{[\mu_2}\Lambda^{\hat{\alpha}\mu_3\cdots\mu_p]},$$

dove con $\hat{\alpha}$ si intende che tale indice non è incluso nell'antisimmetrizzazione. Si osserva facilmente che scegliendo una $\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p}$ tale per cui $\Box\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p} = -\partial_\alpha A^{\alpha\cdots\mu_p}$ si ha anche che $\partial_\alpha\Lambda^{\alpha\mu_3\cdots\mu_p} = 0$ [1]. Dunque, tramite questa scelta di $\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p}$ si impone la gauge di Lorenz generalizzata (4.1.12) e da (4.1.10)-(4.1.7) si ottiene

$$\Box A^{\mu_1\cdots\mu_p} = j^{\mu_1\cdots\mu_p}. \tag{4.1.13}$$

4.2. Azione della brana libera

Si ricorda l'azione relativistica di una particella libera: $S = -m\int \mathrm{d}s$. L'interpretazione geometrica di questa azione come lunghezza della linea di universo suggerisce la naturale definizione dell'azione di una $(p-1)$-brana libera:

$$S = -M\int \sqrt{g}\,\mathrm{d}^p\sigma, \tag{4.2.1}$$

dove M, detta "tensione della brana", è una massa per unità di volume del profilo della brana e $g = (-1)^{p-1}det(g_{ij})$. L'integrale $\int \sqrt{g}\mathrm{d}^p\sigma$ rappresenta, infatti, il volume di universo della brana. L'azione S è invariante per riparametrizzazioni e si riduce all'azione della particella libera per $p = 1$. Infatti, per $p = 1$, si può parametrizzare la linea di universo $y^\mu(s)$ della brana in termini di s intervallo spazio-temporale: $g = \frac{dy^\mu}{ds}\frac{dy_\mu}{ds} \to 1$ e $M \to m$ massa della particella.

[1]Infatti la soluzione particolare di $\Box\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p} = -\partial_\alpha A^{\alpha\cdots\mu_p}$ è data da $\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p} = G * \partial_\alpha A^{\alpha\cdots\mu_p}$ con G una qualche funzione di Green. Dunque $\partial_{\mu_2}\Lambda^{\mu_2\cdots\mu_p} = \partial_{\alpha\mu_2}A^{\alpha\mu_2\cdots\mu_p} = 0$ per antisimmetria di $A^{\alpha\mu_2\cdots\mu_p}$.

Equazione del moto della brana libera: Si valuta la risposta dell'azione (4.2.1) a variazioni arbitrarie δy^μ nulle sugli estremi di integrazione e si ottiene la seguente

$$\delta S = M \int \frac{\partial}{\partial \sigma^i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial y^\mu}{\partial \sigma^j}) \delta y_\mu \mathrm{d}^p \sigma. \tag{4.2.2}$$

Dunque l'equazione di moto della brana libera è:

$$M \frac{\partial}{\partial \sigma^i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial y^\mu}{\partial \sigma^j}) = 0. \tag{4.2.3}$$

Si osserva, come anticipato, che tale equazione non è lineare nelle velocità $U^\mu_j = \frac{\partial y^\mu}{\partial \sigma^j}$. Si introduce la derivata covariante

$$D_i U^{\mu j} = \partial_i U^{\mu j} + \Gamma^j{}_{ki} U^{\mu k}, \tag{4.2.4}$$

con $\Gamma^j{}_{ki}$ simboli di Christoffel della brana costruiti con g_{ij}. Tramite questa derivata covariante si riscrive (4.2.3) come

$$M \sqrt{g} D_i U^{\mu i} = 0. \tag{4.2.5}$$

Infatti si ha $\Gamma^i{}_{ki} = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_k g_{il} - \partial_l g_{ki} + \partial_i g_{lk}) = \frac{1}{2} g^{il} \partial_k g_{il} = \frac{1}{2g} \partial_k g$. Dunque $D_i U^{\mu i} = \partial_i U^{\mu i} + \frac{1}{2g} U^{\mu k} \partial_k g$. Ma, d'altra parte, $\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \sigma^i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial y^\mu}{\partial \sigma^j}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} U^{\mu i}) = \partial_i U^{\mu i} + \frac{1}{2g} U^{\mu i} \partial_i g$.

4.3. Azione totale dell'elettrodinamica e tensore energia-impulso

L'azione totale dell'elettrodinamica della brana è l'immediata generalizzazione di (2.2.10).

$$S = \frac{(-1)^p}{p!} \int \left(\frac{1}{2(p+1)} F^{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} F_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} + A_{\mu_1 \ldots \mu_p} j^{\mu_1 \ldots \mu_p} \right) \mathrm{d}^D x - M \int \sqrt{g} \mathrm{d}^p \sigma. \tag{4.3.1}$$

In cui $1/p!$ è convenzionale, $(-1)^p$ porta ad avere energia definita positiva per ogni p, e $1/(2(p+1))$ è necessario per la validità dell'equazione del moto (4.3.2). Da (4.3.1) discende (4.1.7) e si ricava anche l'equazione di Lorentz generalizzata per la dinamica della brana:

$$M \frac{\partial}{\partial \sigma^i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial y^\mu}{\partial \sigma^j}) = (-1)^p e F^\mu{}_{\mu_1 \ldots \mu_p} U_0^{\mu_1} \ldots U_{p-1}^{\mu_p}. \tag{4.3.2}$$

Tramite il teorema di Nöther, dall'azione (4.3.1) si ricava il tensore energia impulso simmetrico $\theta^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu}_{em} + \theta^{\mu\nu}_p$ con

$$\theta^{\mu\nu}_{em}(x) = \frac{(-1)^p}{p!} \left(F^{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} F^\nu{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} - \frac{1}{2(p+1)} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} \right), \tag{4.3.3}$$

$$\theta^{\mu\nu}_p(x) = M \int \sqrt{g} g^{ij} U^\mu_i U^\nu_j \delta^D(x - y(\sigma)) \mathrm{d}^p \sigma, \tag{4.3.4}$$

$$\partial_\mu (\theta^{\mu\nu}_{em} + \theta^{\mu\nu}_p) = 0. \tag{4.3.5}$$

Per ottenere la (4.3.5) si usano le equazioni (4.1.6), (4.1.7), (4.3.2) come nel caso della particella in $D = 4$.

5. Rinormalizzazione del tensore energia-impulso

5.1. Discussione generale

Segue un'esposizione in termini generali della procedura proposta in [6] per rinormalizzare il tensore energia-impulso di una brana in moto generico. I calcoli vengono esplicitamente svolti nei capitoli 5.3.1 e 5.3.2.

Si sceglie di nuovo la regolarizzazione $(x - y(\sigma))^2 = \epsilon^2$ e si introduce il tensore energia-impulso regolarizzato $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$. Su $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$, componente divergente di $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ come definita nel capitolo 3, sono imposte le stesse proprietà matematiche riportate nell'elenco puntato del capitolo 3. In particolare, siccome $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ deve avere supporto sul volume di universo della brana, si ha in generale che

$$\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = \int \sqrt{g} R^{\mu\nu}_{\epsilon} \delta^D(x - y(\sigma)) \mathrm{d}^p\sigma, \tag{5.1.1}$$

con $R^{\mu\nu}_{\epsilon}(\sigma)$ tensore simmetrico definito sul volume di universo della brana e divergente per $\epsilon \to 0$. Si definisce $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ come

$$\widetilde{T}^{\mu\nu} = \operatorname*{Lim}_{\epsilon \to 0} (\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} - \hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}). \tag{5.1.2}$$

Si impone che $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ rispetti le stesse proprietà matematiche imposte sul tesore $T^{\mu\nu}$ definito nel capitolo 3. Siccome per $x \neq y(\sigma)$ si ha che la divergenza $\partial_\mu(\theta^{\mu\nu}_{em}(x) + \theta^{\mu\nu}_{p}(x))$ è ben definita e pari a zero, si veda (5.1.4), e anche che $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}(x)$ converge puntualmente a $\theta^{\mu\nu}_{em}(x)$ per $\epsilon \to 0$, allora $\partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu}$ deve avere supporto sulla brana, ovvero

$$\partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu} = - \int \sqrt{g} \tilde{f}^\nu \delta^D(x - y(\sigma)) \mathrm{d}^p\sigma \tag{5.1.3}$$

con $\tilde{f}^\nu$ vettore in $\mathbb{R}^D$. La divergenza di $\theta^{\mu\nu}_{p}$ è data da

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu}_{p} = M \int \sqrt{g} D_i U^{\nu i} \delta^D(x - y(\sigma)) \mathrm{d}^p\sigma, \tag{5.1.4}$$

per cui, dalla precedente e da (5.1.3), segue

$$\partial_\mu(\widetilde{T}^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}_{p}) = \int \sqrt{g}(M D_i U^{\nu i} - \tilde{f}^\nu) \delta^D(x - y(\sigma)) \mathrm{d}^p\sigma. \tag{5.1.5}$$

Ora si vorrebbe imporre l'equazione di continuità tramite una ridefinizione dell'equazione di Lorentz in

$$MD_iU^{\nu i} = \tilde{f}^{\nu}. \tag{5.1.6}$$

Tuttavia, non è garantito che $\tilde{f}^{\nu}$ sia "algebrico", ovvero che sia un tensore sul volume di universo della brana, ma potrebbe essere un termine "operatoriale": potrebbe contenere delle derivate che agiscono su $\delta^D(x-y(\sigma))$. In questo caso sarebbe impossibile imporre l'annullamento della $D-$divergenza in (5.1.5) attraverso l'equazione (5.1.6). Però, è possibile ridefinire nuovamente il tensore energia-impulso (5.1.2) aggiungendovi un termine finito. La libertà di aggiungere termini finiti a $\widetilde{T}^{\mu\nu}$, soggetti ai vincoli esposti di seguito, è una conseguenza di aver ridefinito $\theta^{\mu\nu}_{em}$ sottraendo manualmente un termine *divergente*: intuitivamente, si potrebbe dire che la sottrazione di un termine divergente a supporto sulla brana è definita modulo termini finiti a supporto sulla brana. Pertanto, si ridefinisce il tensore energia-impulso come

$$T^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu} + D^{\mu\nu}, \tag{5.1.7}$$

$$D^{\mu\nu} = \int \sqrt{g}\Delta^{\mu\nu}\delta^D(x-y(\sigma))\mathrm{d}^p\sigma, \tag{5.1.8}$$

con $\Delta^{\mu\nu}(\sigma)$ simmetrico negli indici e definito sulla brana, richiedendo che valga

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\int \sqrt{g}(\tilde{f}^{\nu} - \Delta^{\mu\nu}\partial_\mu)\delta^D(x-y(\sigma))\mathrm{d}^p\sigma = -\int \sqrt{g} f^{\nu}\delta^D(x-y(\sigma))\mathrm{d}^p\sigma, \tag{5.1.9}$$

con f^{ν} algebrico. Di conseguenza, l'equazione di Lorentz diventerebbe

$$MD_iU^{\nu i} = f^{\nu}. \tag{5.1.10}$$

Negli esempi trattati si riesce sempre a definire univocamente un tale $\Delta^{\mu\nu}$, tuttavia è ancora un problema aperto capire se esista sempre in casi generici.

È inoltre richiesto che f^{ν} soddisfi $U_{\nu i}f^{\nu} = 0$ per ogni i. Infatti, si mostra di seguito che il membro di sinistra di (5.1.10) soddisfa $U_{\nu i}D_jU^{\nu j} = 0$, pertanto è necessario che $U_{\nu i}f^{\nu} = 0$. Si ha che $U_{\nu i}D_jU^{\nu j} = D_j(U_{\nu i}U^{\nu j}) - U^{\nu j}D_jU_{\nu i}$. Si valutano singolarmente questi ultimi due termini. Siccome valgono

$$D_jU_{\nu i} = \partial_j\partial_i y_\nu + \Gamma^k{}_{ji}U^\mu_k = D_iU_{\nu j}, \tag{5.1.11}$$

$$U_{\nu i}U^{\nu j} = U^\mu_i\eta_{\mu\nu}U^\nu_k g^{jk} = g_{ik}g^{jk} = \delta^j_i, \tag{5.1.12}$$

si ha che i due termini si eliminano separatamente: $D_j(U_{\nu i}U^{\nu j}) = D_j\delta^i_j = 0$ e anche $U^{\nu j}D_jU_{\nu i} = U^{\nu j}D_iU_{\nu j} = \frac{1}{2}D_i(U^{\nu j}U_{\nu j}) = 0$, dunque il vincolo è rispettato. In particolare, si evidenzia l'equazione (5.1.12) che esprime l'ortogonalità delle velocità generalizzate rispetto alla metrica Minkowskiana dello spazio ambiente.

5.2. Unicità del tensore energia-impulso rinormalizzato e della nuova legge di forza

I tensori $T^{\mu\nu}$ e f^ν definiti in (5.1.7) e (5.1.9) potrebbero a priori non essere unici perchè $D^{\mu\nu}$ in equazione (5.1.8) non è univocamente determinato. Infatti, per la stessa argomentazione che giustifica l'introduzione del termine $D^{\mu\nu}$, bisogna ammettere la possibilità di aggiungere in (5.1.7) *molteplici termini arbitrari non divergenti* definiti sulla brana. Indicando con $L^{\mu\nu}$ un termine finito generico definito sulla brana, si ha

$$
\begin{aligned}
L^{\mu\nu} &= -\int \sqrt{g}\, l^{\mu\nu}(\sigma)\delta^D(x-y(\sigma))\mathrm{d}^p\sigma, \\
\widetilde{T}^{\mu\nu} + D^{\mu\nu} \to \overline{T}^{\mu\nu} &= \widetilde{T}^{\mu\nu} + D^{\mu\nu} + L^{\mu\nu}, \\
\partial_\mu \overline{T}^{\mu\nu} &= -\int \sqrt{g}[f^\nu + l^{\mu\nu}\partial_\mu]\delta^D(x-y(\sigma))\mathrm{d}^p\sigma,
\end{aligned}
\tag{5.2.1}
$$

dove $l^{\mu\nu}(\sigma)$ è un tensore a supporto sulla brana. Si hanno necessariamente due vincoli su $L^{\mu\nu}$. Il primo è che la quantità tra parentesi quadre si possa ricondurre a una nuova quadriforza $\bar{f}^\nu$ algebrica, il secondo è che valga ancora $U_{\nu i}\bar{f}^\nu = 0$. Inoltre, $L^{\mu\nu}$ deve avere la stessa dimensione di $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$. Si analizza ora il caso più semplice di una particella in $D = 4$ e, osservato che non esistono $L^{\mu\nu}$ tali da compromettere l'unicità di $T^{\mu\nu}$ e f^ν, si congettura che questo valga in generale anche per una $(p-1)-$brana. Nel caso di una particella in $D = 4$, si ha da [4] che la componente divergente del tensore energia-impulso è proporzionale tramite costanti numeriche a

$$
\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} \propto \frac{e^2}{\epsilon}\int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x-y(s))\mathrm{d}s.
$$

Da questa si conclude che $L^{\mu\nu}$ deve avere dimensioni di $\frac{[\text{Carica}]^2}{[\text{Lunghezza}]}$. Dunque le uniche forme possibili per $L^{\mu\nu}$ sono le seguenti

$$ke^2 \int u^{(\mu} w^{\nu)} \delta^4(x - y(s)) \mathrm{d}s, \tag{5.2.2}$$

$$ke^2 \int u^{(\mu} \partial^{\nu)} \delta^4(x - y(s)) \mathrm{d}s, \tag{5.2.3}$$

con k costante adimensionale. Si vede direttamente che la divergenza di (5.2.3) è operatoriale e dunque la forza $\bar{f}^\nu$ che ne discende è operatoriale e inaccettabile. Anche l'espressione (5.2.2), pur essendo algebrica, presenta una divergenza operatoriale: $\partial_\mu L^{\mu\nu} = -ke^2 \int \frac{dw^\nu}{ds} \delta^4(x - y(s))\mathrm{d}s + ke^2 \int u^\nu w^\mu \partial_\mu \delta^4(x - y(s))\mathrm{d}s$, in cui l'ultimo termine è operatoriale, dunque l'intera espressione è da rigettare. Queste due espressioni esauriscono le forme di $L^{\mu\nu}$ in accordo con i vincoli, e dunque l'unicità di $T^{\mu\nu}$ e f^ν è garantita. Si congettura che lo stesso valga anche nel caso più generale di una $(p-1)$-brana.

5.3. Brane piatte

Una brana si dice piatta se

$$D_i U_j^\mu = 0. \tag{5.3.1}$$

Questo implica che $(D_i D_j - D_j D_i) U_k^\mu = R^n_{ijk} U_n^\mu = 0 \implies 0 = R^l_{ijk} U_l^\mu U_\mu^m = R^l_{ijk} \delta_l^m \implies R^l_{ijk} = 0$. Si considerano solo brane piatte infinitamente estese.

Parametrizzazione della brana piatta e poteziale generato: siccome $R^l_{ijk} = 0$ e il tensore torsione è nullo, esiste una parametrizzazione $y^\mu(\sigma)$ tale che ${\Gamma^k}_{ij} = 0$ e dunque $0 = D_i U_j^\mu = \frac{\partial U_j^\mu}{\partial \sigma^i} + {\Gamma^k}_{ij} U_k^\mu = \frac{\partial U_j^\mu}{\partial \sigma^i}$. Allora le velocità generalizzate sono costanti in σ. Ciò implica che $y^\mu(\sigma) = U_i^\mu \sigma^i$. Si ricorda che, dall'equazione (5.1.12), le velocità generalizzate sono vettori ortonormali nella metrica Mikowskiana dello spazio ambiente. Pertanto, tramite una trasformazione di Lorentz dello spazio ambiente, si possono disporre le velocità sui primi p vettori della base dello spazio ambiente, di fatto disponendo la brana piatta sulle prime p dimensioni dello spazio. Allora, in questo sistema di riferimento

$$U_j^i = \delta_j^i \qquad\qquad U_j^a = 0 \tag{5.3.2}$$

dove gli indici $i, j = (0, ..., p-1)$ sono usati per le coordinate della brana, e gli indici $a, b = (1, ..., n)$ con $n = D - p$ sono riservati per le coordinate dello spazio ambiente normali alla brana. La parametrizzazione della brana è data dunque da

$$y^\mu(\sigma) = U^\mu_i \sigma^i = (\sigma^0, ..., \sigma^{p-1}, 0, ..., 0), \tag{5.3.3}$$

e le coordinate dello spazio ambiente sono espresse come

$$x^\mu = (\sigma^0, ..., \sigma^{p-1}, r^1, ..., r^n). \tag{5.3.4}$$

Si dà il nome di *coordinate statiche* a questo sistema di coordinate. Da qui in avanti si usa r^a per indicare le coordinate normali alla brana. La norma quadra r^2 è intesa rispetto alla metrica euclidea, ovvero $r^2 = \sum_{a=1}^n r^a r^a$.

Di seguito si cerca il potenziale ritardato soluzione di (4.1.13) nel caso di brana piatta. L'usuale soluzione di (4.1.13) vedrebbe l'introduzione della funzione di Green dell'operatore di d'Alembert D dimensionale e fornirebbe il potenziale $A^{\mu_1 \cdots \mu_p}(x)$ come convoluzione di tale funzione di Green con la corrente. Però, siccome si intende ottenere un tensore energia-impulso regolarizzato così come definito nelle prime righe del capitolo 5.1, è conveniente determinare la funzione di Green imponendo in principio la codizione di tempo ritardato modificata $(x - y(\sigma))^2 = \epsilon^2$. Conseguentemente, dalla convoluzione di tale funzione di Green regolarizzata con la corrente, si ottiene un potenziale $A_\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_p}(x)$ regolarizzato. Questo si riduce all'usuale potenziale ponendo $\epsilon = 0$ e per $\epsilon \neq 0$ non diverge quando calcolato sulla brana. Il tensore energia-impulso regolarizzato che ne discende è uguale a quello introdotto nel capitolo 5.1. Di seguito si riporta la funzione di Green ritardata $G(x)$ dell'operatore di d'Alembert D dimensionale e in fianco la sua forma *regolarizzata*. La funzione di Green in D dimensioni è ricavata in [1]. Si osserva come la funzione di Green abbia espressioni diverse a seconda che D sia pari o dispari, in particolare, per D dispari, $G(x)$ non ha supporto sul cono luce, ma dipende da tutti i punti all'interno del cono luce futuro tramite $\theta(x^2)$, la funzione di Heaviside.

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x^0)}{2\pi^{N+1}} \left(\dfrac{d}{dx^2}\right)^N \delta(x^2) \longrightarrow \dfrac{\theta(x^0)}{2\pi^{N+1}} \left(-\dfrac{d}{d\epsilon^2}\right)^N \delta(x^2 - \epsilon^2), & \text{per} \quad D = 2N + 4 \\ \dfrac{\theta(x^0)}{2\pi^{N+1}} \left(\dfrac{d}{dx^2}\right)^N \dfrac{\theta(x^2)}{\sqrt{x^2}} \longrightarrow \dfrac{\theta(x^0)}{2\pi^{N+1}} \left(-\dfrac{d}{d\epsilon^2}\right)^N \dfrac{\theta(x^2 - \epsilon^2)}{\sqrt{x^2 - \epsilon^2}}, & \text{per} \quad D = 2N + 3 \end{cases} \tag{5.3.5}$$

con $N \geq 0$ intero. Il potenziale ritardato regolarizzato è dato dalla convoluzione di tale funzione di Green regolarizzata con la corrente.

$$A_\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p} = G_\epsilon * j^{\mu_1 \dots \mu_p} = e \int \sqrt{g} W^{\mu_1 \dots \mu_p}(\sigma) G_\epsilon(x - y(\sigma)) \mathrm{d}^p\sigma = e W^{\mu_1 \dots \mu_p} \int G_\epsilon(x - U \cdot \sigma) \mathrm{d}^p\sigma, \tag{5.3.6}$$

con $W^{\mu_1 \dots \mu_p} = U^{\mu_1}_{j_1} \dots U^{\mu_p}_{j_p} \epsilon^{j_1 \dots j_p}$. Nella seconda uguaglianza si sceglie una parametrizzazione in coordinate piatte per la brana e si usa che, per una brana piatta, $W^{\mu_1 \dots \mu_p}$ è costante e che $g = 1$. In (5.3.11) si riporta l'espressione del potenziale in dimensione generica, mentre di seguito si mostra come ricavarlo solo in dimensione pari.

Definendo $I_\epsilon(x) = \int G_\epsilon(x - U \cdot \sigma) \mathrm{d}^p\sigma$ e utilizzando la funzione di Green per $D = 2N + 4$, si ha

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \frac{1}{2\pi^{N+1}} \left(-\frac{d}{d\epsilon^2} \right)^N \int \theta(x^0 - U^0_i \sigma^i) \delta((x - U \cdot \sigma)^2 - \epsilon^2) \mathrm{d}^p\sigma, \\ &= \frac{1}{2\pi^{N+1}} \left(-\frac{d}{d\epsilon^2} \right)^N \int \theta(x^0 - \sigma^0) \delta((x^0 - \sigma^0)^2 - |\vec{x} - \vec{\sigma}|^2 - r^2 - \epsilon^2) \mathrm{d}^p\sigma, \end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza si passa in coordinate statiche e con $\vec{x}$ si intendono le prime $p - 1$ coordinate spaziali. Integrando su σ^0 e traslando $\vec{\sigma} \to \vec{\sigma} + \vec{x}$, si ha

$$I_\epsilon = \frac{1}{4\pi^{N+1}} \left(-\frac{d}{d\epsilon^2} \right)^N \int \frac{\mathrm{d}^{p-1}\sigma}{\sqrt{|\vec{\sigma}|^2 + r^2 + \epsilon^2}}, \tag{5.3.7}$$

$$= \frac{1}{4\pi^{N+1}} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2N-1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^{p-1}\sigma}{(|\vec{\sigma}|^2 + r^2 + \epsilon^2)^{N+1/2}}. \tag{5.3.8}$$

L'andamento asintotico dell'integrando per $|\sigma| \to \infty$ è $\frac{1}{r^{D-p-1}}$, dunque se $(D-p) > 2$ l'integrale converge, ma se $(D - p) = 2$ è necessario operare un cut-off sulla variabile d'integrazione. Si ricorda che $n = D - p$ è la codimensione della brana. Nel primo caso si risolve l'integrale elementare:

$$I_\epsilon = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{4\pi^{n/2}(r^2 + \epsilon^2)^{n/2-1}}, \qquad D - p > 2. \tag{5.3.9}$$

Nel secondo caso, introdotto il cut-off Λ nell'integrale (5.3.8), si calcola l'integrale sul dominio $|\vec{\sigma}| < \Lambda$. Per $\Lambda \to \infty$ si ottiene

$$I_\epsilon \to -\frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{r^2 + \epsilon^2}{\Lambda^2} \right) + c + O\left(\frac{1}{\Lambda} \right), \qquad D - p = 2. \tag{5.3.10}$$

con c costante. Ora, da (5.3.6),(5.3.9),(5.3.10), si ottiene il potenziale regolarizzato generato da una brana statica. Di fatto, la forma analitica del potenziale è uguale alla seguente anche in dimensione D dispari.

$$A_\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}(x)=\begin{cases}\dfrac{eW^{\mu_1\cdots\mu_p}}{4\pi^{n/2}}\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{(Q_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+\epsilon^2)^{n/2-1}}, & \text{per}\quad n>2,\\ -\dfrac{eW^{\mu_1\cdots\mu_p}}{4\pi}\log(Q_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+\epsilon^2), & \text{per}\quad n=2,\end{cases} \tag{5.3.11}$$

dove $Q_{\mu\nu}$ è dato in (4.0.3). Si osserva che il potenziale dipende solo dalle componenti di x normali alla brana siccome $Q_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = r^2$. Da (4.1.10) e (5.3.11) si ricava l'espressione del campo regolarizzato. La forma analitica del campo è uguale per $n=2$ e $n>2$:

$$F_\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}(x)=-\frac{e(p+1)}{\Omega_n}\frac{W^{[\mu_1\cdots\mu_p}Q^{\mu_{p+1}]\nu}x_\nu}{(Q_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+\epsilon^2)^{n/2}}, \tag{5.3.12}$$

con $\Omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ angolo solido n-dimensionale. Per $\epsilon=0$, il campo vicino alla brana diverge come $F\sim\frac{1}{r^{n-1}}=\frac{1}{r^{D-p-1}}$. Infine, dal campo regolarizzato e da (4.3.3) si ricava l'espressione regolarizzata del tensore energia-impulso del campo.

$$\theta_{\epsilon,em}^{\mu\nu}(x)=-\left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2\frac{Q^{\mu\alpha}Q^{\nu\beta}x_\alpha x_\beta+(\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}-P^{\mu\nu})Q_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}{(Q_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+\epsilon^2)^n} \tag{5.3.13}$$

Il tensore energia-impulso regolarizzato non diverge sulla brana se $\epsilon\neq 0$ e si annulla all'infinito, pertanto è una distribuzione. Da (5.1.4), per una brana piatta, vale $\partial_\mu\theta_p^{\mu\nu} = M\int\sqrt{g}D_iU^{\nu i}\delta^D(x-x(\sigma))\mathrm{d}^p\sigma = 0$, dunque il tensore energia-impulso della brana è conservato separatamente e ci si aspetta che il tensore energia-impulso del campo si conservi altresì separatamente come $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$. Questo è in accordo, per l'equazione (5.1.5), con la caratteristica delle brane piatte di essere "a riposo", ovvero $MD_iU^{\nu i}=0=f^\nu$.

Nel caso particolare di brane piatte si può vedere quanto anticipato nell'introduzione, ovvero che il campo generato dalla brana non diverge quando la codimensione n è uguale a 0 o 1. Infatti, posto $\epsilon=0$, per $n=0$ in (5.3.12) chiaramente non si ha alcuna divergenza, e per $n=1$ la dipendenza da r al denominatore si cancella con quella al numeratore.

Infine, nella sezione 5.3.3 si dimostra che, per brane piatte, $\tilde{f}^\mu$ è direttamente nulla se la codimensione è dispari. Diversamente, se la codimensione è pari, $\tilde{f}^\mu$ è puramente operatoriale, e il termine $D^{\mu\nu}$, introdotto per eliminare la componente operatoriale della forza, di fatto azzera completamente la divergenza di $T^{\mu\nu}$, si veda (5.1.9).

5.3.1. Particella in $D = 6$

Si esplicita il metodo di rinormalizzazione del tensore energia-impulso per una particella statica in 6 dimensioni. La linea di universo è parametrizzata dal parametro s. Per quanto detto sopra, ci si aspetta $D^{\mu\nu} = 0$ siccome la codimensione è dispari. Nell'equazione del potenziale (5.3.11) si pone $W^{\mu_1 \cdots \mu_p} \to u^\mu = \frac{dy^\mu}{ds}$ che in coordinate statiche diventa $u^\mu = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Per cui $Q^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = u^\mu u^\nu x_\mu x_\nu = \sum_{j=1}^{D-1} (x^j)^2 = r^2$.

$$A^\mu_\epsilon = \frac{e}{8\pi^2} \frac{u^\mu}{(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}}. \tag{5.3.14}$$

Si ricava l'espressione per il tensore di Maxwell regolarizzato $F^{\mu\nu}_\epsilon$ direttamente da (5.3.14) e si può verificare che il risultato è lo stesso che si ottiene semplificando la formula generale (5.3.13). Per comodità di scrittura, si usa $r^\mu = (0, \vec{r})$, ma r^2 è comunque inteso come quadrato della norma euclidea sulle componenti spaziali.

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu}_\epsilon = \partial^\mu A^\nu_\epsilon - \partial^\nu A^\mu_\epsilon &= \frac{e}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^\mu u^\nu - \frac{3}{2}(r^2+\epsilon^2)^{1/2} u^\nu \partial^\mu r^2}{(r^2+\epsilon^2)^3} - \mu \leftrightarrow \nu \right) \\
&= \frac{e}{8\pi^2} \left(\frac{3(r^2+\epsilon^2)^{1/2} u^\nu r^\mu}{(r^2+\epsilon^2)^3} - \mu \leftrightarrow \nu \right) \\
&= \frac{3e}{8\pi^2} \frac{u^\nu r^\mu - u^\mu r^\nu}{(r^2+\epsilon^2)^{5/2}},
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

dove si usa, per staticità, $\partial_\mu u^\nu = 0$ e $\partial_\mu r^2 = 2Q_{\mu\beta} x^\beta = 2(u_\mu u_\beta x^\beta - x_\mu) = 2(0, -\vec{x}) = (0, -2\vec{r})$. Da (4.3.3), la prima componente di $\theta^{\mu\nu}$ è data da

$$\theta^{00}_{\epsilon,em} = F^{0\alpha} F_\alpha{}^0 + \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Da (5.3.15) segue

$$\begin{aligned}
F^{0\alpha} F_\alpha{}^0 &= \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{(r^0 u^\alpha - r^\alpha u^0)(-r^0 u_\alpha - r_\alpha u^0)}{(r^2+\epsilon^2)^5} = \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{-r^2}{(r^2+\epsilon^2)^5}, \\
F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= \left(\frac{3e}{4\pi^2}\right)^2 \frac{2r^2}{(r^2+\epsilon^2)^5}.
\end{aligned}$$

Dalla somma di questi due termini come in (4.3.3) si ricava $\theta^{00}_{\epsilon,em}$, analogamente si ottengono le altre componenti di $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$.

$$\begin{aligned}
\theta^{00}_{\epsilon,em} &= \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{r^2}{2(r^2+\epsilon^2)^5}, \\
\theta^{0a}_{\epsilon,em} &= 0, \\
\theta^{ab}_{\epsilon,em} &= \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{r^2\delta^{ab} - 2r^a r^b}{2(r^2+\epsilon^2)^5}.
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Si riconoscono in (5.3.16) le componenti di (5.3.13) nel caso di particella in $\mathbb{R}^6$. Per ottenere la parte divergente del tensore energia-impulso è sufficiente analizzare la componente divergente di

$$\frac{r^a r^b}{(r^2+\epsilon^2)^5}. \tag{5.3.17}$$

A tal fine, si applica questa distribuzione a una funzione di test.

$$\int \frac{r^a r^b \phi(\vec{r})}{(r^2+\epsilon^2)^5} \mathrm{d}^5 r = \frac{1}{\epsilon^3} \int \frac{r^a r^b \phi(\epsilon\vec{r})}{(r^2+1)^5} \mathrm{d}^5 r.$$

Per isolare la componente divergente si espande $\phi(\epsilon\vec{r})$ per ϵ piccoli fermandosi al grado più alto con contributo divergente, che di fatto è il secondo ordine per la presenza di $1/\epsilon^3$ a fattore. Dunque

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\epsilon^3} \int \frac{r^a r^b \phi(\epsilon\vec{r})}{(r^2+1)^5} \mathrm{d}^5 r\right)_{DIV} &= \frac{1}{\epsilon^3} \int \frac{r^a r^b}{(r^2+1)^5} \left(\phi|_{r=0} + \epsilon r^a \partial_a \phi|_{r=0} + \frac{1}{2}\epsilon^2 r^n r^m \partial_n \partial_m \phi|_{r=0}\right) \mathrm{d}^5 r = \\
&= \frac{\pi^3}{4\Gamma(5)} \left(\frac{1}{\epsilon^3}\delta^{ab}\phi|_{r=0} + \frac{1}{\epsilon}\left(\partial^a\partial^b + \frac{1}{2}\delta^{ab}\nabla^2\right)\phi|_{r=0}\right),
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

dove $\nabla^2 = \partial_a\partial_a$ e l'integrazione del termine di grado uno dell'espansione ha risultato nullo per antisimmetria dell'integrando su dominio di integrazione simmetrico. Da (5.3.16) e (5.3.18) si ricava la forma analitica del termine divergente per ciascun ingresso del tensore energia-impulso.

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}^{00}_{\epsilon,em} &= \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^3}{4\Gamma(5)} \int \left(\frac{5}{2\epsilon^3} + \frac{7}{4\epsilon}\nabla^2\right) \delta^6(x-us)\mathrm{d}s, \\
\hat{\theta}^{0a}_{\epsilon,em} &= 0, \\
\hat{\theta}^{ab}_{\epsilon,em} &= \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^3}{4\Gamma(5)} \int \left(\frac{3}{2\epsilon^3}\delta^{ab} + \frac{1}{\epsilon}\left(-\partial^a\partial^b + \frac{5}{4}\delta^{ab}\nabla^2\right)\right) \delta^6(x-us)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Le equazioni (5.3.19) possono essere riassunte nella seguente scrittura covariante

$$\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^3}{4\Gamma(5)} \int \left[\frac{1}{\epsilon^3}\left(-\frac{3}{2}\eta^{\mu\nu} + 4P^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{\epsilon}\left(\left(\frac{5}{4}\eta^{\mu\nu} - 3P^{\mu\nu}\right)\Box - \partial^\mu\partial^\nu\right)\right] \delta^6(x - us)\mathrm{d}s, \tag{5.3.20}$$

con $\Box = \partial_\alpha\partial^\alpha$. Tutti i termini all'interno dell'integrale, a meno della δ^6, sono indipendenti dalla coordinata s. Si osserva che (5.3.20) ha la corretta forma $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} \sim \int R^{\mu\nu}\delta^D(x - U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma$. Si procede come indicato in 5.1 definendo il tensore energia-impulso rinormalizzato

$$\widetilde{T}^{\mu\nu} = \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}(\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} - \hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}).$$

Si valuta la divergenza di $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ e si controlla se $\tilde{f}^\nu$ definita in (5.1.3) è algebrica o operatoriale. Di seguito si trova che $\tilde{f}^\nu$ è algebrica e dunque, siccome la brana è piatta, è necessariamente nulla. Siccome nello spazio delle distribuzioni il limite e la derivata commutano, si ha

$$\partial_\mu\widetilde{T}^{\mu\nu} = \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}\partial_\mu(\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} - \hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}). \tag{5.3.21}$$

Per il calcolo della divergenza di $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ si usa (5.3.16), per la divergenza di $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ si usa (5.3.20) assieme a $P^{\mu\nu}\partial_\mu = \delta^\nu_0\frac{\partial}{\partial s}$. Infatti, da quest'ultima equazione e dal fatto che nessun termine all'interno dell'integrale (5.3.20) dipende da s, coordinata della linea di universo, si ha che tutti i termini $P^{\mu\nu}\partial_\mu\delta^6(x - us)$ si annullano. Si ottiene

$$\partial_\mu\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = -\left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \partial^\nu\left[\frac{\epsilon^2}{2(r^2+\epsilon^2)^5}\right], \tag{5.3.22}$$

$$\partial_\mu\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^3}{8\Gamma(5)} \int \left(-\frac{3}{\epsilon^3} + \frac{1}{2\epsilon}\Box\right)\partial^\nu\delta^6(x - us)\mathrm{d}s. \tag{5.3.23}$$

Posto $\partial_\mu\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} - \partial_\mu\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = -\left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2\partial^\nu\Xi_\epsilon$, si valuta il seguente limite nel senso delle distribuzioni.

$$\operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}\Xi_\epsilon = \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\epsilon^2}{2(r^2+\epsilon^2)^5} + \frac{\pi^3}{8\Gamma(5)}\int\left(-\frac{3}{\epsilon^3} + \frac{1}{2\epsilon}\Box\right)\delta^6(x - us)\mathrm{d}s\right]. \tag{5.3.24}$$

Si mostra che la distribuzione Ξ_ϵ si annulla nel limite $\epsilon \to 0$. Si introduce la funzione di test $\phi(\vec{r})$ a dominio su $\mathbb{R}^5$ e si scrive $\Xi_\epsilon(\phi)$ come

$$\int \frac{\epsilon^2}{2(r^2+\epsilon^2)^5}\phi(\vec{r})\mathrm{d}^5r - \frac{3\pi^3}{8\Gamma[5]\epsilon^3}\int\phi(\vec{r})\delta^6(x - us)\mathrm{d}^6x + \frac{\pi^3}{16\Gamma[5]\epsilon}\int\phi(\vec{r})\Box\delta^6(x - us)\mathrm{d}^6x$$

Analizzando separatamente il primo integrale, lo si sviluppa in serie di ϵ fino ai termini finiti in $\epsilon \to 0$. Con il cambiamento di variabile di intregrazione in $y = (r/\epsilon)$, l'espansione fornisce

$$\frac{1}{2\epsilon^3}\left(\phi(0)\int \frac{1}{(y^2+1)^5}\mathrm{d}^5y + \epsilon\partial_i\phi(0)\int \frac{y^i}{(y^2+1)^5}\mathrm{d}^5y + \frac{\epsilon^2}{2}\partial_i\partial_j\phi(0)\int \frac{y^iy^j}{(y^2+1)^5}\mathrm{d}^5y\right) =$$
$$= \frac{\pi^3}{64\epsilon^3}\phi(0) + \frac{\pi^3}{16\Gamma[5]\epsilon}\nabla^2\phi(0). \tag{5.3.25}$$

D'altra parte, i due integrali con la δ forniscono direttamente la seguente espressione

$$-\frac{\pi^3}{64\epsilon^3}\phi(0) - \frac{\pi^3}{16\Gamma[5]\epsilon}\nabla^2\phi(0). \tag{5.3.26}$$

La somma di (5.3.25) e (5.3.26) è nulla, dunque $\partial_\mu\widetilde{T}^{\mu\nu} = 0$ e la forza $\tilde{f}^\nu$ è algebrica e nulla $\tilde{f}^\nu = 0$. Dunque $\widetilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$ e la legge di continuità è rispettata separatamente come $\partial_\mu\theta_p^{\mu\nu} = 0$ e $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

L'energia all'interno di qualsiasi volume finito che include una porzione di brana è ora non divergente. Come esempio, si riporta il calcolo dell'energia in un volume sferico di raggio R attorno alla particella. Si indica con χ_V la funzione indicatrice del volume V della sfera.

$$E(V) = \int T^{00}(\chi_V)\mathrm{d}^5r = \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}\int(\theta^{00}_{\epsilon,em} - \hat{\theta}^{00}_{\epsilon,em})(\chi_V)\mathrm{d}^5r =$$
$$= \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{r<R}\left(\frac{r^2}{2(r^2+\epsilon^2)^5} - \frac{5\pi^3}{8\Gamma(5)\epsilon^3}\delta^5(\vec{r})\right)\mathrm{d}^5r + \int\frac{7\pi^3}{16\Gamma(5)\epsilon}\chi_V\nabla^2\delta^5(\vec{r})\mathrm{d}^5r\right] \tag{5.3.27}$$

Siccome χ_V è costante in un intorno dell'origine, l'ultimo integrale si annulla quando si porta la derivazione su χ_V. Utilizzando $\int_0^\infty \frac{r^2}{2(r^2+\epsilon^2)^5}\mathrm{d}^5r = \frac{5\pi^3}{8\Gamma(5)\epsilon^3}$, si ha

$$E(V) = \left(\frac{3e}{8\pi^2}\right)^2\lim_{\epsilon\to 0}\left[-\int_{r>R}\frac{r^2}{2(r^2+\epsilon^2)^5}\mathrm{d}^5r + \frac{5\pi^3}{8\Gamma(5)\epsilon^3} - \frac{5\pi^3}{8\Gamma(5)\epsilon^3}\right],$$

e dunque si ottiene l'energia finita

$$E(V) = -\frac{e^2}{16\pi^2R^3}. \tag{5.3.28}$$

5.3.2. Stringa in $D = 4$

La stringa piatta parametrizzata in coordinate statiche viene "distesa" lungo l'asse spaziale x. La parametrizzazione della stringa è dunque $x^\mu(t,x) = (t,x,0,0)$ e un punto generico dello spazio è espresso come $x^\mu = (t, x, r^1, r^2)$. Come sopra, gli indici (i, j) sono riservati per le coordinate sulla brana, gli indici (a, b) sono riservati per le coordinate normali alla brana; con $\vec{\sigma}$ si indica la coppia di parametri (t, x). Si ricava il tensore energia-impulso regolarizzato da (5.3.13), il risultato è

$$\begin{aligned}
\theta^{ij}_{\epsilon,em} &= \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{r^2\eta^{ij}}{(r^2+\epsilon^2)^2},\\
\theta^{ia}_{\epsilon,em} &= 0,\\
\theta^{ab}_{\epsilon,em} &= \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{r^2\delta^{ab}-2r^ar^b}{(r^2+\epsilon^2)^2}.
\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

Si isola la parte divergente di questa distribuzione analizzando la sua azione su una funzione di test, ottenendo

$$\left(\frac{r^a r^b}{(r^2+\epsilon^2)^2}\right)_{DIV} = -\int \pi \log(\frac{\epsilon}{l})\delta^{ab}\delta^4(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^2\sigma. \tag{5.3.30}$$

Di seguito si esprimono le componenti della parte divergente di $\theta^{\mu\nu}_\epsilon$ e nell'ultima equazione se ne dà la forma covariante.

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}^{ij}_{\epsilon,em} &= -\int \frac{e^2}{4\pi}\log(\frac{\epsilon}{l})\eta^{ij}\delta^4(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^2\sigma,\\
\hat{\theta}^{ia}_{\epsilon,em} &= 0,\\
\hat{\theta}^{ab}_{\epsilon,em} &= 0,\\
\Longrightarrow\ \hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} &= -\int \frac{e^2}{4\pi}\log(\frac{\epsilon}{l})P^{\mu\nu}\delta^4(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^2\sigma.
\end{aligned} \tag{5.3.31}$$

Si osserva un fatto significativo: siccome il parametro ϵ ha le dimensioni di una lunghezza, per garantire la buona definizione del logaritmo bisogna dividere ϵ per un parametro l che abbia a sua volta dimensioni di una lunghezza. Nel prossimo paragrafo si mostra come il parametro l compaia ogni volta che la codimensione è pari e come sia sistematicamente riassorbito o in una ridefinizione della tensione della stringa M o in un'usuale ridefinizione di $T^{\mu\nu}$ come $T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \partial_\rho\phi^{\rho\mu\nu}$ con $\phi^{\rho\mu\nu} = -\phi^{\mu\rho\nu}$.

Si valuta la divergenza di $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ come in (5.3.21).

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} &= -\frac{e^2}{8\pi^2}\partial^\nu\left[\frac{\epsilon^2}{(r^2+\epsilon^2)^2}\right],\\
\partial_\mu\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} &= 0,\\
\Longrightarrow\ \partial_\mu\widetilde{T}^{\mu\nu} = \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to0}\partial_\mu(\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}-\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}) &= \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to0}\partial_\mu\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = -\frac{e^2}{8\pi}\int\partial^\nu\delta^4(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^2\sigma.
\end{aligned} \tag{5.3.32}$$

In particolare, per la divergenza di $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ si ha $\partial_\mu \theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} \propto \int U^\mu_i U^{\nu i} \partial_\mu \delta(x^0 - t)\delta(x^1 - x)\delta^2(\vec{r})\mathrm{d}t\mathrm{d}x = U^{\nu i} \int \frac{d}{d\sigma^i} \delta(x^0 - t)\delta(x^1 - x)\delta^2(\vec{r})\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0$. Da (5.3.32) si ha che $\tilde{f}^\nu = \frac{e^2}{8\pi}\partial^\nu$ e dunque, come previsto siccome la codimensione è pari, $\tilde{f}^\nu$ è puramente operatoriale. Il controtermine finito che annulla la parte operatoriale di $\tilde{f}^\nu$ e che dunque, si veda (5.1.7)-(5.1.9), annulla tutta $\tilde{f}^\nu$ è

$$D^{\mu\nu} = \frac{e^2}{8\pi} \int \eta^{\mu\nu} \delta^4(x - U \cdot \sigma)\mathrm{d}^2\sigma. \tag{5.3.33}$$

Pertanto, si ha $\partial_\mu(\widetilde{T}^{\mu\nu} + D^{\mu\nu}) = 0$ e quindi $f^\nu = 0$. In definitiva, il tensore energia-impulso rinormalizzato di una stringa in quattro dimensioni è:

$$T^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu} + D^{\mu\nu} = \operatorname*{Lim}_{\epsilon \to 0} \left[\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} + \frac{e^2}{4\pi} \int \left(\log(\frac{\epsilon}{l}) P^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \right) \delta^4(x - U \cdot \sigma)\mathrm{d}^2\sigma \right]. \tag{5.3.34}$$

Si riporta il risultato del calcolo dell'energia del campo contenuta in un volume che include una parte di brana. In questo caso si considera un cilindro di raggio R e lunghezza L concentrico con l'asse su cui giace la stringa.

$$E(V) = \frac{e^2 L}{4\pi} \log(\frac{R}{l}). \tag{5.3.35}$$

5.3.3. Caso generale

Il metodo di rinormalizzazione, fin qui esplicitamente esposto solo nei casi specifici dei capitoli 5.3.1 e 5.3.2, viene ora presentato nel caso più generale di una $(p-1)-$brana piatta in uno spazio D dimensionale. Le brana è data in coordinate statiche

$$y(\sigma) = (\sigma^0, ..., \sigma^{p-1}, 0, ..., 0),$$

e le coordinate dello spazio ambiente sono dunque espresse come

$$x = (\sigma^0, ..., \sigma^{p-1}, r^1, ..., r^n).$$

Si ha che per una generica brana piatta la componente divergente di $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ in (5.3.13) è data da una somma di un numero finito di termini divergenti:

$$\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = -\left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pari}}}^{n-2} \int A_{\epsilon,j,n} O^{\mu\nu}_{j,n} \delta^D(x - U \cdot \sigma)\mathrm{d}^p\sigma \tag{5.3.36}$$

dove $\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ è l'angolo solido n-dimensionale come definito in (5.3.12), $O^{\mu\nu}_{j,n}$ è un operatore di derivate che agisce su δ^D, $A_{\epsilon,j,n}$ è un coefficiente numerico che contiene un polo in ϵ e il pendice (j,n) indica una dipendenza sia da j sia dalla codimensione n. Si evidenzia che la somma corre solo sui j pari. La componente divergente $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ si ricava applicando $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon}$ a una funzione di test esattamente come in (5.3.18). In questo caso generale i calcoli sono un po' più articolati, dunque non si riportano. Di seguito si esprime la forma analitica di $A_{\epsilon,j,n}$ e $O^{\mu\nu}_{j,n}$.

$$A_{\epsilon,j,n} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{j/2}\pi^{n/2}\Gamma(\frac{n-j}{2}-1)}{2^{j+1}\Gamma(n)\Gamma(\frac{j}{2}+1)}\dfrac{1}{\epsilon^{n-j-2}}, & \text{per} \quad j < n-2, \\ \dfrac{(-1)^{n/2}\pi^{n/2}}{2^{n-2}\Gamma(n)\Gamma(\frac{n}{2})}\log(\dfrac{\epsilon}{l}), & \text{per} \quad j = n-2, \end{cases} \tag{5.3.37}$$

$$O^{\mu\nu}_{j,n} = \left[Q^{\mu\nu} - (n+j)\left(P^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)\right]\Box^{j/2} - j\partial^\mu\partial^\nu\Box^{j/2-1}. \tag{5.3.38}$$

Tutti i termini all'interno degli integrali in (5.3.36), a meno della δ^D, sono indipendenti da σ. Si nota che il primo temine della somma ($j=0$), proporzionale a $1/\epsilon^{n-2}$, porta la divergenza dominante, e pertanto lo si indica con $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$. Si vede che

$$\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV} \propto \int \left[(1-n)P^{\mu\nu} + (n/2-1)\eta^{\mu\nu}\right]\delta^D(x - U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma.$$

Per n pari, l'ultimo termine della somma, relativo a $j = n-2$, ha una divergenza logaritmica. Come visto nel capitolo 5.3.2, per motivi dimensionali occorre introdurre una lunghezza l nel logaritmo. Il termine con $j = n-2$ è l'unico a contenere una divergenza logaritmica e dunque un parametro l; pertanto, se n è dispari, visto che j è pari, non compare alcun termine in cui sia necessario inserire il parametro l. Tale divergenza logaritmica non proviene da un polo in ϵ ma discende da un integrale divergente che viene calcolato operando un cut-off sulla variabile di integrazione.

Da (5.3.38) si nota come solo il termine con la divergenza dominante $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$ non contenga derivate che agiscono su δ^D. In particolare, dall'espressione di $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$ riportata nelle righe sopra, si osserva come in $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$ compaia solo una somma del proiettore $P^{\mu\nu}$ e della metrica $\eta^{\mu\nu}$. Ricordando dall'equazione (4.3.4) la forma del tensore energia-impulso della brana $\theta^{\mu\nu}_p$, si nota come i termini divergenti proporzionali a $\int P^{\mu\nu}\delta^D(x - U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma$ possano essere elimitati ricorrendo ad una "ridefinizione", o, per meglio dire, ad una rinormalizzazione della tensione M della brana. Pertanto, la parte di $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$ contentente $P^{\mu\nu}$ può essere sempre riassorbita in M. Nel caso specifico di $n=2$, si vede che $\eta^{\mu\nu}$ scompare da $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$, pertanto, solo in tal caso, $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$ può essere *interamente* riassorbito in una ridefinizione di M. La discussione di queste peculiarità porta ad un'osservazione più significativa: in generale, tutti i termini della somma al di fuori di una parte di $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}\big|_{DIV}$ non possono essere eliminati rinormalizzando un parametro della teoria, ovvero, nel caso presente, rinormalizzando M.

Si introduce $\widetilde{T}^{\mu\nu} := \mathrm{Lim}_{\epsilon\to 0}(\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} - \hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em})$ come in equazione (5.1.7) e si valuta $\partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu} = \mathrm{Lim}_{\epsilon\to 0}(\partial_\mu\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} - \partial_\mu\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em})$. Si valutano separatamente le divergenze di $\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ in (5.3.13) e di $\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em}$ in (5.3.36).

$$\partial_\mu\theta^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = -\left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2 \partial^\nu \frac{\epsilon^2}{2(Q_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \epsilon^2)^n}, \tag{5.3.39}$$

$$\partial_\mu\hat{\theta}^{\mu\nu}_{\epsilon,em} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pari}}}^{n-2} \int (n-j-2) A_{\epsilon,j,n}\partial^\nu \Box^{j/2}\delta^D(x - U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma. \tag{5.3.40}$$

Si deve valutare il limite della differenza tra (5.3.39) e (5.3.40):

$$\operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}\partial^\nu \Xi_\epsilon = \operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}\partial^\nu \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2 \frac{\epsilon^2}{(r^2+\epsilon^2)^n} + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pari}}}^{n-2} \int (n-j-2) A_{\epsilon,j,n}\Box^{j/2}\delta^D(x - U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma \right), \tag{5.3.41}$$

in cui il primo termine è stato scritto in coordinate statiche. Prima si fornisce il risultato di tale limite e lo si commenta, successivamente lo si deriva esplicitamente.

$$\partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu} = \begin{cases} \left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2 \frac{(-1)^{n/2}\pi^{n/2}}{2^{n-1}\Gamma(n)\Gamma(\frac{n}{2})} \int \partial^\nu \Box^{n/2-1}\delta^D(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma, & \text{per } n \text{ pari,} \\ 0, & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases} \tag{5.3.42}$$

L'equazione (5.3.42) dimostra quanto anticipato nelle ultime righe dell'introduzione generale del capitolo 5.3, ovvero che $\tilde{f}^\nu$ è direttamente algebrica e nulla se la codimensione è dispari, e diversamente, che $\tilde{f}^\nu$ è puramente operatoriale se la codimensione è pari. In riferimento a (5.1.7), si sceglie un $D^{\mu\nu}$ con la seguente forma analitica

$$D^{\mu\nu} = \begin{cases} -\left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2 \frac{(-1)^{n/2}\pi^{n/2}}{2^{n-1}\Gamma(n)\Gamma(\frac{n}{2})} \int \eta^{\mu\nu} \Box^{n/2-1}\delta^D(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma, & \text{per } n \text{ pari,} \\ 0, & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases} \tag{5.3.43}$$

Posto un tale $D^{\mu\nu}$, si conclude, in riferimento a (5.1.9), che anche la forza puramente in operatoriale in (5.3.42) viene azzerata.

In definitiva il tensore energia-impulso rinormalizzato è dato da

$$T^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu} + D^{\mu\nu}, \tag{5.3.44}$$

e si ha che

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \qquad\qquad f^\nu = 0. \tag{5.3.45}$$

Ora si valuta esplicitamente il limite in (5.3.41). La derivata ∂^ν si raccoglie a fattore e viene tralasciata nei seguenti calcoli, così come viene tralasciato il fattore $\frac{1}{2}(\frac{e}{\Omega_n})^2$. I termini $A_{\epsilon,j,n}$ sono già sviluppati in serie di potenze di ϵ. Invece, si applica $\frac{\epsilon^2}{(r^2+\epsilon^2)^n}$, che è una distribuzione in $S'(\mathbb{R}^n)$, su una funzione di test per isolarne i termini divergenti.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\epsilon^2}{(r^2+\epsilon^2)^n}\right)(\phi) &= \epsilon^2 \int \frac{\phi(\vec{r})}{(r^2+\epsilon^2)^n} \mathrm{d}^n r = \\ &= \frac{1}{\epsilon^{n-2}} \sum_{\substack{j=0 \\ \text{j pari}}}^{n-2} \frac{\epsilon^j}{j!} \left(\int \frac{1}{(r^2+1)^n} r^{a_1} ... r^{a_j} \mathrm{d}^n r \right) \partial_{a_1} ... \partial_{a_j} \phi(0) + o(\epsilon),\end{aligned} \tag{5.3.46}$$

dove la serie è troncata al termine di grado 0 in ϵ e la somma corre solo su j pari siccome i termini in j dispari, contenendo l'integrazione di una funzione dispari su un dominio pari, sono nulli. Passando in coordinate sferiche $r^a = rn^a$, $(n^a)^2 = 1$, $\mathrm{d}^n r = r^{n-1} \mathrm{d}r \Omega_{\mathrm{n}}$, si valutano gli integrali elementari in (5.3.46)

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{r^{j+n-1}}{(r^2+1)^n} \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{j+n}{2})\Gamma(\frac{n-j}{2})}{\Gamma(n)}, \\ &\int n^{a_1} ... n^{a_j} \mathrm{d}\Omega_n = \Omega_n \frac{1 \cdot 3 ... (j-1)}{n(n+2)...(n+j-2)} \delta^{(a_1 a_2} ... \delta^{a_{j-1} a_j)}.\end{aligned}$$

Per cui l'espressione in (5.3.46) diventa

$$\left(\frac{\epsilon^2}{(r^2+\epsilon^2)^n}\right)(\phi) = \sum_{\substack{j=0 \\ \text{j pari}}}^{n-2} B_{\epsilon,j,n} \Box^{j/2} \phi(0) + o(\epsilon), \tag{5.3.47}$$

dove

$$B_{\epsilon,j,n} = \frac{(-1)^{j/2} \pi^{n/2} \Gamma(\frac{n-j}{2})}{2^j \Gamma(n) \Gamma(\frac{j}{2}+1)} \frac{1}{\epsilon^{n-j-2}}. \tag{5.3.48}$$

Dunque

$$\Xi_\epsilon(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=0\\ \text{j pari}}}^{n-2}[(n-j-2)A_{\epsilon,j,n} - B_{\epsilon,j,n}]\Box^{j/2}\phi(0). \tag{5.3.49}$$

Confrontando (5.3.48) con (5.3.37), si vede che $(n-j-2)A_{\epsilon,j,n} = B_{\epsilon,j,n}$ per tutti i j pari tranne che per $j = n-2$, presente nella serie (5.3.46) solo se la codimensione n è pari. Pertanto solo il termine $B_{\epsilon,n-2,n}$ sopravvive all'interno della sommatoria e si ha

$$\operatorname*{Lim}_{\epsilon\to 0}\Xi_\epsilon = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{(-1)^{n/2}\pi^{n/2}}{2^{n-1}\Gamma(n)\Gamma(\frac{n}{2})}\Box^{n/2-1}\delta^D(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma, & \text{per } n \text{ pari,}\\ 0, & \text{per } n \text{ dispari.}\end{cases} \tag{5.3.50}$$

Inserendo (5.3.50) in (5.3.41) si ottiene il risultato in (5.3.42).

Ci si domanda se l'introduzione del parametro arbitrario l abbia conseguenze sulla fisica descritta. La comparsa di l è strettamente legata alla presenza di una divergenza logaritmica e quindi al termine $j = n-2$ nella somma (5.3.36). Estraendo l dal logaritmo, si isola il contributo di l al tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$, e si indica tale contributo con $T^{\mu\nu}_l$.

$$T^{\mu\nu}_l = \left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2\frac{(-1)^{n/2}\pi^{n/2}\log(l)}{2^{n-2}\Gamma(n)\Gamma(\frac{n}{2})}\int[(2n-3)P^{\mu\nu}\Box + (2-n)(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)]\,\Box^{n/2-2}\delta^D(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma. \tag{5.3.51}$$

Si osserva che, per $n=2$, si ha $T^{\mu\nu}_l \propto P^{\mu\nu}\delta^2$ e dunque, per quanto detto in precedenza, $T^{\mu\nu}_l$ può essere riassorbito in M. Per $n \geq 4$, si osserva che $T^{\mu\nu}_l = \partial_\rho V^{\rho\mu\nu}$, dove

$$\begin{aligned} V^{\rho\mu\nu} = \left(\frac{e}{\Omega_n}\right)^2\frac{(-1)^{n/2}\pi^{n/2}\log(l)}{2^{n-2}\Gamma(n)\Gamma(\frac{n}{2})}\int &[(2n-3)(\partial^\rho P^{\mu\nu} - \partial^\mu P^{\rho\nu}) +\\ &+ (2-n)(\eta^{\mu\nu}\partial^\rho - \eta^{\rho\nu}\partial^\mu)]\Box^{n/2-2}\delta^D(x-U\cdot\sigma)\mathrm{d}^p\sigma, \end{aligned} \tag{5.3.52}$$

con V antisimmetrica nei primi due indici. Dunque $T^{\mu\nu}_l$ può essere ricondotto ad un'usuale ridefinizione non fisica del tensore energia-impulso. A questo punto è forse più convincente riformulare l'argomentazione all'indietro: per introdurre un parametro l che compensi la dimensione di ϵ nel logaritmo si può, a seconda dei casi, estrarre l da M oppure utilizzare le proprietà di ridefinizione del tensore energia-impulso. Entrambe queste procedure non hanno alcun effetto sulle quantità fisiche.

Si fornisce, saltando i passaggi di calcolo, la forma analitica dell'energia finita del campo contenuta in un intorno tubolare del profilo della brana la cui proiezione sul profilo brana è un ipercubo di dimensione $p-1$ e lato L. L'intorno tubolare si estende per un raggio R nelle direzioni spaziali ortogonali al profilo della brana.

$$E(V) = \int_V T^{00} \mathrm{d}^{D-1}x = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{2(n-2)\Omega_n} \dfrac{L^{p-1}}{R^{n-2}}, & \text{per } n > 2, \\ \dfrac{e^2 L^{p-1}}{4\pi} \log(\dfrac{R}{l}) & \text{per } n = 2. \end{cases} \tag{5.3.53}$$

6. Bibliografia

1. R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*, Wiley, New York (1962).

2. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications, Part I*, Springer, New York (1984).

3. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (second edition), Wiley, New York (1975).

4. K. Lechner, P.A. Marchetti, *Variational principle and energy-momentum tensor for relativistic electrodynamics of point charges*, Ann. Phys. 322 (2007) 1162, [arXiv:hep-th/0602224].

5. K. Lechner, *Elettrodinamica Classica*, Springer-Verlag, Milano (2014).

6. K. Lechner, *Ultraviolet singularities in classical brane theory*, JHEP 1012:063 2010, arXiv:1011.3746 [hep-th].

7. C.F. Nielsen et al, *Experimental verification of the Landau–Lifshitz equation*, 2021 New J. Phys. 23 085001.

8. A. di Piazza, T.N. Wistisen, U.I. Uggerhoj, *Investigation of classical radiation reaction with aligned crystals*, Phys. Lett. B 765, 1 (2017), [arXiv:1503.05717v3 [physics.plasm-ph]].