

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
Corso di Laurea in Matematica

**Teoria dell'omologia:  
esempi e applicazioni classiche**

**Relatore:**

**Prof. Maurizio Cailotto**

**Candidato:**

**Damiano Vinciarelli  
Matricola 1072094**

**23 Settembre 2016  
Anno Accademico 2015/16**



*Dedicata a chi crede  
nella vorticosa bellezza  
della mente umana*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>0 Preliminari algebrici</b>	<b>11</b>
0.1 $R$ -moduli e prodotti tensoriali . . . . .	11
0.1.1 Moduli su un anello $R$ . . . . .	11
0.1.2 Sequenze esatte e prodotti tensoriali di $R$ -moduli . . . . .	15
0.2 Il funtore Tor . . . . .	23
0.2.1 Risoluzioni libere di $R$ -moduli . . . . .	23
0.2.2 Il funtore Tor: definizione e proprietà . . . . .	27
<b>1 Definizione e proprietà di omologia singolare intera</b>	<b>31</b>
1.1 Gruppi di omologia di uno spazio topologico . . . . .	31
1.1.1 $n$ -cubi singolari . . . . .	31
1.1.2 Gruppi di omologia e relazione con le proprietà di connessione di $X$ . . . . .	33
1.2 Omomorfismi indotti da mappe continue . . . . .	37
1.2.1 Proprietà di omomorfismo di mappe indotte . . . . .	37
1.2.2 Proprietà di omotopia degli omomorfismi indotti . . . . .	39
1.3 Complessi di catene . . . . .	44
1.4 Equivalenza fra omologia singolare cubica e singolare simpliciale	48
1.4.1 Omologia singolare simpliciale . . . . .	48
1.4.2 Costruzioni algebriche . . . . .	50
1.4.3 Modelli aciclici . . . . .	52
1.4.4 Modelli per l'omologia e dimostrazione dell'equivalenza	54
<b>2 Strumenti di calcolo dei gruppi di omologia</b>	<b>57</b>
2.1 Omologia di una coppia . . . . .	57
2.1.1 Sequenza esatta di una coppia . . . . .	58
2.1.2 Il teorema di escissione . . . . .	63
2.2 La successione di Mayer-Vietoris . . . . .	66
2.3 Omologia del prodotto di spazi topologici . . . . .	69

---

2.3.1	Teorema di Eilenberg-Zilber . . . . .	69
2.3.2	Teorema di Künneth e formule per il prodotto di spazi . . . . .	71
2.4	Omologia a coefficienti in un gruppo abeliano . . . . .	74
2.4.1	Il teorema dei coefficienti universali . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Esempi</b> . . . . .	<b>85</b>
3.1	Omologia delle sfere . . . . .	85
3.2	Omologia delle superficie reali compatte . . . . .	88
3.3	Omologia di CW-complessi . . . . .	95
3.3.1	Invertire il problema . . . . .	103
3.4	Omologia a coefficienti in un campo . . . . .	107
3.5	Tabelle riassuntive . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Applicazioni classiche</b> . . . . .	<b>113</b>
4.1	Teorema di invarianza del dominio . . . . .	113
4.2	Teorema di pettinabilità . . . . .	114
4.3	Teorema del punto fisso . . . . .	115
4.4	Teorema di Borsuk-Ulam . . . . .	115
4.5	Teorema di separazione . . . . .	117
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>121</b>

# Introduzione

La teoria dell'omologia degli spazi topologici è usata in topologia algebrica per studiare problemi topologici o geometrici altrimenti irrisolvibili, o che comunque presentino difficoltà nell'elaborazione di una soluzione “diretta”.

Tramite l'omologia viene assegnata, ad un generico spazio topologico  $X$ , una successione di gruppi abeliani, che racchiudono in sé importanti proprietà topologiche di base di  $X$ . Per citarne alcune, tramite lo studio di quelli che saranno definiti “gruppi di omologia” è possibile capire se uno spazio è orientabile, se è discreto, se è connesso per archi, se ha “buchi” di qualsiasi dimensione.

In realtà, questo metodo di studio e soluzione di problemi non è un caso particolare in matematica ma anzi è la norma, e procedere “traducendo” un problema in un altro più semplice (che a prima vista sembra trattare oggetti “diversi”) ha un fondamento teorico rigoroso, seppur da un tempo relativamente breve.

A partire dai lavori di Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane negli anni '40 del secolo scorso, venne formulata una teoria alternativa e addirittura più generica della nota teoria degli insiemi, che aveva l'ambizione di costituire un nuovo fondamento astratto della matematica. La nuova teoria prese il nome di “Teoria delle categorie”: le “strutture” matematiche vengono ora classificate in “categorie” che non hanno altra definizione se non quella di essere collezioni arbitrarie di oggetti e morfismi fra oggetti, che soddisfino assiomi di base.

Esempi di categorie possono essere quella dei gruppi abeliani con i loro omomorfismi, quella degli spazi topologici con le funzioni continue, quella degli insiemi con le relazioni fra essi, e si potrebbe andare avanti per molto tempo, notando che ogni struttura matematica può essere pensata in una categoria.

Ciò che rende particolarmente appetibile questo approccio, è che permette di dare lucidamente e quasi “miracolosamente” una visione d'insieme dei

rapporti fra i vari oggetti di una categoria studiando i morfismi fra essi; ad esempio, nella categoria dei gruppi, studiare fra quali di essi c'è un isomorfismo è utile per capire quali si “comportano” allo stesso modo (e possono quindi essere confusi arbitrariamente, senza conseguenza alcuna).

Ora, la teoria delle categorie possiede un importante strumento, che è il concetto di “funttore”. Un funttore è una generalizzazione dell'idea di funzione, che stavolta agisce fra categorie diverse, mandando gli oggetti di una negli oggetti dell'altra, e così per i morfismi. Come abbiamo visto, i morfismi fra oggetti riescono a dare una chiara visione d'insieme di come sono in relazione le nostre strutture (gli oggetti della categoria), ma, questo, a patto che gli oggetti e i morfismi siano facili da calcolare.

Nel caso della categoria degli spazi topologici con le funzioni continue, accade esattamente il contrario: conoscendo la topologia di uno spazio, è molto difficile, senza usare altri strumenti, calcolare con quali spazi condivide certe proprietà, e come. Proprio per questo, conviene osservare il problema da un altro punto di vista: la speranza è quella di trovare un funttore che rifletta le relazioni fra spazi topologici in una categoria più semplice da studiare, e meno sfaccettata rispetto a quella degli spazi topologici. Si potrebbero perdere informazioni particolari, ma certamente questo aiuterebbe ad ottenere una visione generale chiara del problema.

È chiaro, allora, che l'omologia è un funttore che realizza quanto cercato, che associa ad ogni spazio topologico una successione di “oggetti” della categoria dei gruppi abeliani, e ad ogni mappa continua fra spazi topologici una successione di “morfismi” fra i gruppi assegnati. Studiare un gruppo abeliano (che in gran parte dei casi sarà libero) o un omomorfismo è molto più semplice che studiare la topologia di uno spazio, o una funzione continua; a partire quindi da alcune proprietà topologiche di base, o da una certa struttura di CW-complesso che possa essere data ad uno spazio, si otterrà con relativa facilità il corrispondente nella categoria dei gruppi.

In questa tesi verrà presentata, dunque, la teoria dell'omologia, utilizzando un approccio rigoroso ma intuitivo che permetta di applicare i risultati esposti il prima possibile, considerando di vitale importanza l'utilizzo di esempi molto variegati, e spesso basati su spazi topologici universalmente noti nel mondo della matematica (e non solo), per toccare con mano l'applicazione diretta della teoria.

Nel Capitolo 0 si espongono, in modo molto generale, alcuni risultati di algebra commutativa e algebra omologica, definendo le strutture di modulo su un anello con le loro proprietà, e concentrando l'attenzione sulle succes-

sioni esatte di moduli e omomorfismi fra essi.

Si darà inoltre la definizione di prodotto tensoriale di moduli, studiando le sue proprietà di esattezza, e definendo di conseguenza il funtore Tor, la cui presenza nella teoria è una naturale conseguenza dell'utilizzo del prodotto tensoriale.

I preliminari algebrici saranno il punto di partenza per lo sviluppo della teoria, e di frequente sarà fatto uso di proposizioni e teoremi enunciati (e talvolta dimostrati) nel Capitolo 0.

Il primo capitolo contiene la definizione del funtore omologia, elencando e spiegando tutti i passaggi necessari alla sua definizione, per mostrare come vengono associati, sia ad uno spazio topologico i suoi gruppi di omologia, che ad una mappa continua un omomorfismo di gruppi.

Nella terza sezione del capitolo si dà una traccia della generalizzazione della teoria dell'omologia, mostrando come sia sufficiente partire da un complesso di catene (di gruppi abeliani) per parlare di omologia. Ciò mostra come il concetto sia indipendente dalla topologia, nei confronti della quale rimane uno strumento utile, ma totalmente autonomo nella definizione.

Un ultimo risultato degno di nota, elaborato nell'ultima sezione, è l'equivalenza fra omologia singolare simpliciale e singolare cubica.

Il secondo capitolo, di natura più tecnica, presenta diversi metodi di calcolo dei gruppi di omologia di uno spazio, esponendo (e dimostrando) teoremi fondamentali della teoria. Per quanto possibile, i risultati sono enunciati in forma generale, al fine di fornire strumenti duttili e applicabili a situazioni anche molto diverse fra loro.

Il terzo capitolo è una raccolta di esempi di vario genere:

- nella prima sezione si dimostra la formula per l'omologia di sfere  $n$ -dimensionali in due modi diversi, ottenendo così uno strumento di base per il calcolo dell'omologia di molti spazi;
- nella seconda sezione si calcola l'omologia delle superfici reali compatte (con e senza bordo), sfruttando il noto teorema di classificazione;
- nella terza sezione, dopo un rapido elenco delle proprietà dei CW-complexi, si fornisce lo strumento atto a calcolarne l'omologia, per poi invertire il problema e cercare, a partire da gruppi fissati, spazi con struttura di CW-complesso che abbiano tale omologia;
- nella quarta sezione si mostrano esempi di utilizzo di coefficienti non interi per i gruppi di omologia;

- nell'ultima sezione sono raccolti in tabelle riepilogative gli esempi principali del capitolo.

L'ultimo capitolo, infine, raccoglie una serie di enunciati, con dimostrazione, riguardanti problemi classici di topologia algebrica, come il teorema del punto fisso di Brouwer o il teorema di Borsuk-Ulam.

Tornando a quanto detto sopra, la teoria dell'omologia è un ottimo esempio di applicazione della teoria delle categorie; è anzi, più in generale, un esempio elegante e potente di quanto le capacità di pensiero laterale siano in grado di tradurre problemi apparentemente impossibili in altri decisamente meno dispendiosi.

# Capitolo 0

## Preliminari algebrici

In questo capitolo saranno trattati alcuni concetti di base sui moduli su un anello commutativo  $R$  qualsiasi, passando in rassegna alcune proprietà basilari; si darà attenzione, poi, alla definizione di prodotto tensoriale di moduli, in particolare alle sue proprietà in rapporto alle sequenze esatte.

Sarà introdotto brevemente anche il funtore Tor (che agisce sulla categoria degli  $R$ -moduli), di fondamentale importanza nello studio delle proprietà di esattezza di sequenze tensorizzate con un  $R$ -modulo qualsiasi.

I prodotti tensoriali e il funtore Tor sono alla base dello studio dell'omologia del prodotto di spazi topologici e del calcolo omologico a coefficienti in un anello (eventualmente un campo) qualsiasi.

### 0.1 $R$ -moduli e prodotti tensoriali

#### 0.1.1 Moduli su un anello $R$

D'ora in poi  $R$  denota un anello commutativo qualsiasi.

**Definizione 0.1.1.**  $M$  è un  $R$ -modulo se è un gruppo abeliano (in notazione additiva) su cui  $R$  agisce linearmente, ossia tale che valgano, per  $r, s \in R$  e per  $x, y \in M$ :

- $r(x + y) = rx + ry$ ;
- $(r + s)x = rx + sx$ ;
- $(rs)x = r(sx)$ ;
- $1x = x$ .

*Osservazione 0.1.2.* Se  $R$  è un campo, allora  $M$  è un  $R$ -spazio vettoriale. Se  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M$  è un gruppo abeliano.

**Definizione 0.1.3.** Siano  $M, N$   $R$ -moduli; allora  $\phi : M \rightarrow N$  è omomorfismo di  $R$ -moduli se,  $\forall r \in R, x, y \in M$ :

- $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ ;
- $\phi(rx) = r\phi(x)$ .

Diciamo che  $\phi$  è l'*omomorfismo nullo* (o la *mappa nulla*) se  $\phi(x) = 0 \forall x \in M$ .

*Osservazione 0.1.4.* Se  $R$  è un campo,  $\phi$  è applicazione lineare di spazi vettoriali; se  $R = \mathbb{Z}$ ,  $\phi$  è omomorfismo di gruppi abeliani.

**Definizione 0.1.5.**  $\text{Hom}_R(M, N)$  è un  $R$ -modulo, definendo,  $\forall f, g \in \text{Hom}_R(M, N), r \in R$ :

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (rf)(x) &= rf(x).\end{aligned}$$

**Definizione 0.1.6.** Un *sottomodulo*  $M'$  di  $M$  è un sottogruppo di  $M$  chiuso per moltiplicazione per elementi di  $R$ ; dunque è un  $R$ -modulo, e la mappa  $i : M' \rightarrow M$  di inclusione è un omomorfismo di  $R$ -moduli.

*Osservazione 0.1.7.* Gli ideali di  $R$  sono sottomoduli di  $R$  come  $R$ -modulo.

*Osservazione 0.1.8.* Il quoziente  $M/M'$  eredita struttura di  $R$ -modulo in questo modo:

dati  $x, y \in M, r \in R$

$$r((x + M') + (y + M')) = r(x + y) + M'$$

inoltre la mappa quoziente  $p : M \rightarrow M/M'$  è un omomorfismo di  $R$ -moduli.

**Definizione 0.1.9.** Se  $f : M \rightarrow N \in \text{Hom}_R(M, N)$ , allora definiamo:

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \{x \in M : f(x) = 0_N\} \leq M \\ \text{Im}(f) &= \{y \in N : \exists x \in M \text{ t.c. } f(x) = y\} \leq N \\ \text{Coker}(f) &= N/\text{Im}(f)\end{aligned}$$

e vale  $M/\text{Ker}(f) \simeq \text{Im}(f)$ .

**Definizione 0.1.10.** L'insieme

$$T(M) = \{m \in M : rm = 0, \exists r \neq 0 \in R\}$$

è detto *sottomodulo di torsione* di  $M$ .

Dato un elemento  $m \in M$ , l'insieme

$$\text{Ann}(m) = \{r \in R : rm = 0 \forall m \in M\}$$

è detto *annullatore* di  $m$  in  $R$ .

*Osservazione 0.1.11.* Il quoziente  $M/T(M)$  è un  $R$ -modulo privo di elementi di torsione.

Se  $M$  è un  $R$ -modulo, e  $m \in M$ , l'insieme  $Rm = \{rm : r \in R\}$  è un sottomodulo di  $M$ , detto *sottomodulo ciclico generato da  $m$* . Se  $M = \bigoplus_{i \in I} R_{x_i}$ , gli  $x_i$  si dicono *generatori* di  $M$ . Se  $I$  è finito, si dice che  $M$  è *finitamente generato*.

**Definizione 0.1.12.** Sia  $M$  un  $R$  modulo,  $S \subseteq M$  insieme di generatori di  $M$ .

Se vale, presi comunque  $s_1, \dots, s_n \in S$  e  $r_1, \dots, r_n \in R$ :

$$r_1 s_1 + \dots + r_n s_n = 0 \implies s_i = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq n$$

allora  $S$  è detto *linearmente indipendente*, e si dice che  $S$  è una *base* per  $M$ .

È però importante notare che, in generale, possiamo non dare alcuna base per un modulo dato, e che un sistema minimale di generatori non è necessariamente né indipendente, né di cardinalità costante.

**Definizione 0.1.13.** La **somma diretta** di  $M$  e  $N$ , indicata con  $M \oplus N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ , è un  $R$ -modulo con:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ a(x, y) &= (ax, ay). \end{aligned}$$

Più in generale, se  $\{M_i\}_{i \in I}$  è famiglia di  $R$ -moduli, allora la somma diretta  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  è formata da famiglie  $(x_i)_{i \in I}$  tali che  $x_i \in M \forall i \in I$  e quasi ogni  $x_i = 0$ . Considerando tutti le possibili famiglie  $(x_i)_{i \in I}$ , e non solo quelle finite, otteniamo il **prodotto diretto**  $\prod_{i \in I} M_i$ .

Diciamo che un modulo  $M$  su  $R$  è *libero* se  $M \simeq \bigoplus_{i \in I} M_i$  ove  $M_i \simeq R$  (come  $R$ -modulo). Si usa anche la notazione  $M = R^{(I)}$ .

Ovviamente ogni modulo libero ammette una base; questo vuol dire che avere una base è una condizione *necessaria* (ma non sufficiente) perché  $M$  sia libero.

**Proposizione 0.1.14.** *Se  $R$  è PID (dominio a ideali principali, come  $\mathbb{Z}$  e  $K[x]$ ), i sottomoduli di moduli liberi sono anch'essi liberi.*

*Osservazione 0.1.15.* È possibile, invece, che in un anello  $R$  che non sia un PID esistano sottomoduli di moduli liberi che non siano liberi, ad esempio:

- Se  $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $R$  è libero come  $R$ -modulo, ovviamente, ma l'ideale  $I = ([2]_6)$ , che è un sottomodulo di  $R$ , non è libero: infatti nessuno dei suoi sottoinsiemi (nemmeno lui stesso), può essere una base, perché non sono linearmente indipendenti. Questo dipende dal fatto che  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  contiene divisori dello zero;
- Se consideriamo l'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti in un campo  $K$ , ossia  $R = K[x, y]$ , e consideriamo il suo ideale  $I = (x, y)$ , notiamo che  $I$  non è un  $R$ -modulo libero. Infatti non è possibile trovare un insieme di generatori di  $I$  in  $R$  che abbia cardinalità 1; d'altra parte, se consideriamo insiemi con più di un elemento di  $I$ , otteniamo un insieme non libero.

Diciamo che un  $R$ -modulo libero è finitamente generato se è isomorfo a  $\bigoplus_{i=1}^n R$ , e lo indichiamo con  $M = R^n$ .

Diciamo che  $n$  è il *rango* di  $M$ .

Vediamo quindi un'importante proprietà dei moduli finitamente generati.

**Proposizione 0.1.16.** *Sia  $M$  un  $R$ -modulo. Allora  $M$  è finitamente generato se e solo se  $M$  è isomorfo a un quoziente di  $R^n$  per qualche  $n > 0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  finitamente generato, con  $x_1, \dots, x_n$  generatori. Definiamo un omomorfismo di  $R$ -moduli  $\phi : R^n \rightarrow M$  con  $\phi(a_1, \dots, a_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ .

Allora  $\phi$  è un omomorfismo suriettivo, e quindi  $M \simeq R^n / \text{Ker}(\phi)$ .

Sia ora  $\phi$  omomorfismo suriettivo di  $R$ -moduli di  $R^n$  in  $M$ .

Se  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  con il numero 1 all' $i$ -esimo posto, allora gli  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  generano  $R^n$  e quindi  $\phi(e_i)$  generano  $M$ .  $\square$

**Teorema 0.1.17.** *Sia  $M$  un modulo finitamente generato su  $R$  PID.*

*Allora  $M$  è somma diretta di sottomoduli ciclici (ossia generati da un solo elemento).*

*Ossia,  $M$  è somma diretta di un modulo libero di rango finito e di una quantità finita di moduli ciclici non liberi.*

*Osservazione 0.1.18.* Nel caso in cui  $R = \mathbb{Z}$  e  $M = G$  sia un qualsiasi gruppo abeliano finitamente generato, otteniamo il teorema di classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati.

### 0.1.2 Sequenze esatte e prodotti tensoriali di $R$ -moduli

Una sequenza di  $R$ -moduli e omomorfismi fra essi

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

si dice *esatta all' $i$ -esimo passo* se  $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$ . La sequenza si dice *esatta* se è esatta ad ogni passo  $i$ . In particolare:

- $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M$  è esatta se e solo se  $f$  è iniettiva;
- $M \xrightarrow{g} M' \rightarrow 0$  è esatta se e solo se  $g$  è suriettiva;
- $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$  è esatta se e solo se:
  - $f$  è iniettiva,
  - $g$  è suriettiva,
  - $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ , ossia  $g$  induce un isomorfismo tra  $M''$  e  $\text{Coker}(f) = M/\text{Im}(f)$ , oppure un isomorfismo tra  $M'$  e  $\text{Ker}(g)$ .

Questi tipi di sequenze sono detti *sequenze corte*.

Una sequenza corta è *spezzante* se  $M \simeq M' \oplus M''$  (con isomorfismo canonico).

**Proposizione 0.1.19.** 1. *Sia*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$$

*sequenza di  $R$ -moduli e omomorfismi tra essi.*

*Allora tale sequenza è esatta se e solo se la sequenza*

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\circ v} \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\circ u} \text{Hom}_R(M', N)$$

*è esatta;*

2. Sia

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

sequenza di  $R$ -moduli e omomorfismi tra essi.

Allora tale sequenza è esatta se e solo se la sequenza

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{u^\circ} \text{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{v^\circ} \text{Hom}_R(N, M'')$$

è esatta.

*Dimostrazione.* Vedi M. F. Atiyah - I. G. Macdonald, *An introduction to commutative algebra*, pp. 22-23.  $\square$

**Proposizione 0.1.20.** *Sia*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramma commutativo, in cui le linee orizzontali sono esatte. Allora esiste una mappa  $d$  tale che la sequenza

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}(f') \xrightarrow{\bar{u}} \text{Ker}(f) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Ker}(f'') \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{d} \text{Coker}(f') \xrightarrow{\bar{u}'} \text{Coker}(f) \xrightarrow{\bar{v}'} \text{Coker}(f'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

è esatta.

In particolare,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  sono restrizioni di  $u$  e  $v$ , e  $\bar{u}'$  e  $\bar{v}'$  sono indotte da  $u'$  e  $v'$ .  $d$  è detto *morfismo di bordo*, ed è definito come segue:

Se  $x'' \in \text{Ker}(f'')$  allora, essendo  $v$  suriettiva,  $x'' = v(x)$  per qualche  $x \in M$ .

Inoltre  $v'(f(x)) = f''(v(x)) = 0$  essendo il diagramma commutativo e  $f(x) \in \text{Im}(u') = \text{Ker}(v')$ .

Allora  $f(x) = u'(y')$  per qualche  $y' \in N'$ .

Quindi  $d(x'')$  è definito come l'immagine di  $y'$  in  $\text{Coker}(f')$ .

Concentriamoci ora sulla definizione di prodotto tensoriale, osservando in particolare le sue proprietà in relazione all'esattezza di sequenze di moduli.

**Definizione 0.1.21.** Siano  $M, N, P$  degli  $R$ -moduli. Una mappa  $f : M \times N \rightarrow P$  è detta  *$R$ -bilineare* se  $\forall x \in M$  la funzione  $y \mapsto f(x, y)$  è  $R$ -lineare e  $\forall y \in N$  la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è  $R$ -lineare.

**Proposizione 0.1.22.** *Siano  $M$  e  $N$   $R$ -moduli. Esiste una coppia  $(T, g)$  formata da un  $R$ -modulo  $T$  e una mappa  $R$ -bilineare  $g : M \times N \rightarrow T$ , tale che valga la seguente proprietà universale:*

*Dato un  $R$ -modulo  $P$  e una mappa  $R$ -bilineare  $f : M \times N \rightarrow P$ ,  $\exists!$   $f' : T \rightarrow P$   $R$ -lineare tale che  $f = f' \circ g$ . Questo vuol dire che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & P \\ \downarrow g & \nearrow f' & \\ T & & \end{array}$$

*è commutativo, e quindi ogni mappa bilineare su  $M \times N$  fattorizza unicamente attraverso  $T$ . In particolare, se  $(T, g)$  e  $(T', g')$  soddisfano tale proprietà, allora esiste un unico isomorfismo  $j : T \rightarrow T'$  tale che  $j \circ g = g'$ .*

*Dimostrazione.* 1. *Unicità:* Sostituendo la coppia  $(P, f)$  con  $(T', g')$  otteniamo un unico  $j : T \rightarrow T'$  tale che  $g' = j \circ g$ . Scambiando  $T$  e  $T'$  otteniamo un unico  $j' : T' \rightarrow T$  tale che  $g = j' \circ g'$ . Ciascuna delle composizioni  $j \circ j'$  e  $j' \circ j$  deve essere l'identità, e quindi  $j$  è un isomorfismo.

2. *Esistenza:* Sia  $C$  il modulo libero  $R^{M \times N}$ . Gli elementi di  $C$  sono combinazioni lineari formali finite di elementi di  $M \times N$  a coefficienti in  $R$ , ossia espressioni del tipo  $\sum_{i=1}^n r_i(x_i, y_i)$ ,  $r_i \in R$ ,  $x_i \in M$ ,  $y_i \in N$ .

Sia ora  $D$  il sottomodulo di  $C$  generato da tutti gli elementi dei tipi seguenti:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (rx, y) - r(x, y) \\ (x, ry) - r(x, y) \end{aligned}$$

Sia  $T = C/D$ . Per ogni elemento di base  $(x, y)$  di  $C$ , denotiamo con  $x \otimes y$  la sua immagine nel quoziente  $T$ . Pertanto  $T$  è generato da elementi  $x \otimes y$ , e per la definizione di  $D$  si ha:

$$\begin{aligned} (x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y' \\ (rx) \otimes y &= r(x \otimes y) = x \otimes (ry). \end{aligned}$$

Definiamo infine la mappa:

$$g : M \times N \rightarrow T$$

$$g(x, y) = x \otimes y$$

che è  $R$ -bilineare.

Qualsiasi mappa  $f : M \times N \rightarrow P$  si estende per linearità ad un morfismo di  $R$ -moduli  $\bar{f} : C \rightarrow P$ . Sia in particolare  $f$   $R$ -bilineare.

Per la definizione di  $D$ ,  $\bar{f}$  si annulla su tutti i generatori di  $D$ , e quindi su tutto  $D$ ; pertanto induce un omomorfismo ben definito:

$$f' : T \rightarrow P$$

$$f'(x \otimes y) = f(x, y).$$

La mappa  $f'$  così definita è unica, e quindi la coppia  $(T, g)$  soddisfa le proprietà desiderate. □

*Osservazione 0.1.23.* •  $T$  è detto **prodotto tensoriale** di  $M$  e  $N$  e si indica con il simbolo  $M \otimes_R N$ . È generato dai “prodotti”  $x \otimes y$ . In particolare, se  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_j)_{j \in J}$  sono famiglie di generatori per  $M$  e  $N$  rispettivamente, allora  $(x_i \otimes y_j)_{i \in I, j \in J}$  è famiglia di generatori per  $T = M \otimes_R N$ ;

- La notazione  $x \otimes y$  è ambigua se non ci riferiamo al prodotto tensoriale di appartenenza.

*Osservazione 0.1.24.* Siano  $f : M \rightarrow M'$  e  $g : N \rightarrow N'$  omomorfismi di  $R$ -moduli.

La funzione  $h : M \times N \rightarrow M' \otimes_R N'$  definita da:

$$h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$$

è  $R$ -bilineare e induce quindi un omomorfismo

$$f \otimes g : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$$

tale che

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$$

Se ho due ulteriori omomorfismi di  $R$ -moduli,  $f' : M' \rightarrow M''$  e  $g' : N' \rightarrow N''$ , allora  $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$  e  $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$  coincidono sugli elementi del tipo  $x \otimes y$  in  $M \otimes_R N$ .

Quindi

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Sia  $f : M \times N \rightarrow P$  una funzione  $R$ -bilineare. Per ogni  $x \in M$  la mappa  $y \mapsto f(x, y)$  da  $N$  in  $P$  è  $R$ -lineare, quindi  $f$  dà origine alla mappa  $M \rightarrow \text{Hom}_R(N, P)$ , che è  $R$ -lineare essendo  $f$  lineare in  $x$ .

Viceversa, una mappa  $\phi : M \rightarrow \text{Hom}_R(N, P)$  definisce una mappa  $R$ -bilineare  $(x, y) \mapsto \phi(x)(y)$ .

Pertanto l'insieme  $\text{Bil}_R(M \times N, P)$  delle mappe bilineari da  $M \times N$  in  $P$  è in corrispondenza biunivoca con  $\text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P))$ , e con  $\text{Hom}_R(M \otimes N, P)$ .

Allora è dato un isomorfismo *canonico*

$$\text{Hom}_R(M \otimes N, P) \simeq \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P)) \simeq \text{Hom}_R(N, \text{Hom}_R(M, P))$$

*Esempio 0.1.25.* Se  $M'$  e  $N'$  sono sottomoduli di  $M$  e  $N$  rispettivamente, e  $x \in M'$ ,  $y \in N'$ , può verificarsi che  $x \otimes y$  sia zero in  $M \otimes_R N$  e sia non nullo in  $M' \otimes_R N'$ .

Sia infatti  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M = \mathbb{Z}$ ,  $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $M' = n\mathbb{Z}$ ,  $N' = N$ , e sia  $x = 1 \in N$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideriamo  $n \otimes x$ ; è zero come elemento di  $M \otimes_R N$ , essendo  $n \otimes x = 1 \otimes nx = 1 \otimes 0 = 0$ , mentre come elemento di  $M' \otimes_R N'$  è non nullo (in questo caso il termine in  $M'$  non ha coefficiente in  $R$  che si possa scambiare con l'altro).

**Corollario 0.1.26.** *Siano  $(x_i)_{i \in I} \in M$  e  $(y_j)_{j \in J} \in N$  tale che  $\sum x_i \otimes y_j = 0$  in  $M \otimes_R N$ . Allora esistono  $M_0 \leq M$  e  $N_0 \leq N$  finitamente generati tali che  $\sum x_i \otimes y_j = 0$  in  $M_0 \otimes_R N_0$ .*

Il prodotto tensoriale definito per due  $R$ -moduli può essere esteso ad una collezione finita di  $R$  moduli:

**Proposizione 0.1.27.** *Siano  $M_1, \dots, M_n$   $R$ -moduli. Esiste una coppia  $(T, g)$  formata da un  $R$ -modulo  $T$  e una mappa  $g : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow T$  multilineare tale che valga la seguente proprietà universale:*

*Dato un qualsiasi  $R$ -modulo  $P$  e una qualsiasi mappa multilineare  $f : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow P$  esiste un unico omomorfismo  $f' : T \rightarrow P$  tale che  $f' \circ g = f$ , ossia ogni mappa multilineare da  $M_1 \times \dots \times M_n$  in  $P$  fattorizza unicamente attraverso  $T$ . Inoltre se  $(T, g)$  e  $(T', g')$  sono coppie che verificano tale proprietà, allora  $\exists ! j' : T \rightarrow T'$  isomorfismo tale che  $j' \circ g = g'$ .*

*Dimostrazione.* La prova si ottiene per induzione a partire dalla dimostrazione della **Proposizione 0.1.22**.  $\square$

**Proposizione 0.1.28.** *Siano  $M, N, P$   $R$ -moduli. Esistono isomorfismi canonici:*

1.  $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$
2.  $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$
3.  $(M \oplus N) \otimes_R P \simeq (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$
4.  $(R \otimes_R M) \simeq M$

tali che rispettivamente:

- i.  $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$ ;
- ii.  $(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z) \longmapsto x \otimes y \otimes z$ ;
- iii.  $(x, y) \otimes z \longmapsto (x \otimes z, y \otimes z)$ ;
- iv.  $r \otimes x \longmapsto rx$ .

*Dimostrazione.* Vedi M. F. Atiyah - I. G. Macdonald, *An introduction to commutative algebra*, p. 26.  $\square$

**Proposizione 0.1.29.** *Sia*

$$E : M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

una sequenza esatta di  $R$ -moduli e omomorfismi, e sia  $N$  un  $R$ -modulo. Allora la sequenza

$$E \otimes N : M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \rightarrow 0$$

è esatta.

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un  $R$ -modulo.

Sfruttando gli isomorfismi canonici di cui sopra, e la **Proposizione 0.1.19** notiamo che, essendo  $E$  esatta,  $\text{Hom}_R(E, \text{Hom}_R(N, P))$  è esatta. Allora anche  $\text{Hom}_R(E \otimes N, P)$  è esatta, e quindi anche

$$E \otimes N$$

è esatta.  $\square$

*Osservazione 0.1.30.* 1. Se  $T(M) = M \otimes N$  e  $U(P) = \text{Hom}_R(N, P)$ , allora  $\text{Hom}_R(T(M), P) \simeq \text{Hom}_R(M, U(P))$ .

Ossia  $T$  e  $U$  sono funtori dalla categoria degli  $R$ -moduli in sé, e  $T$  è aggiunto sinistro di  $U$ .

2. Non è vero in generale che data una sequenza esatta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

la sequenza

$$0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$$

sia esatta per un qualunque  $R$ -modulo  $N$ .

*Esempio 0.1.31.* Sia  $R = \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; consideriamo

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

ove  $f(x) = nx \forall x \in \mathbb{Z}$ . Tensorizzando la sequenza con  $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , otteniamo una sequenza non esatta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes N.$$

Infatti si ha, per ogni  $x \otimes y$  in  $\mathbb{Z} \otimes N$ :

$$(f \otimes 1)(x \otimes y) = nx \otimes y = x \otimes ny = x \otimes 0 = 0.$$

Allora  $f \otimes 1$  è la mappa nulla, ma  $\mathbb{Z} \otimes N \neq 0$ .

**Definizione 0.1.32.** Sia  $N$  un  $R$ -modulo. Se, per ogni  $E$  sequenza esatta di  $R$ -moduli e omomorfismi,  $E \otimes N$  è esatta, allora  $N$  è detto  $R$ -modulo *piatto*.

*Osservazione 0.1.33.* Ogni modulo  $M$  libero è piatto: infatti

$$\left( \bigoplus_{\gamma} R \right) \otimes_R M = \bigoplus_{\gamma} M$$

In generale non vale il viceversa, ma solo che ogni modulo piatto è privo di torsione; abbiamo bisogno di condizioni più forti sull'anello  $R$  per avere risultati migliori.

Vediamo un importante risultato per domini a ideali principali:

**Proposizione 0.1.34.** *Sia  $R$  un PID,  $M$  un  $R$ -modulo. Allora:*

$$M \text{ è piatto} \iff T(M) = \{0\}$$

*Dimostrazione.* La prima implicazione è valida su un dominio qualsiasi: supponiamo che  $M$  sia piatto, e sia  $r \in R$ .

Definiamo la mappa  $\psi_r : R \rightarrow R$  come  $\psi_r(a) = ra$ .

$\psi_r$  è un omomorfismo di  $R$ -moduli, ed è iniettivo, essendo  $R$  un dominio.

Essendo  $M$  piatto, la mappa:

$$1 \otimes \psi_r : M \otimes_R R \rightarrow M \otimes_R R$$

è iniettiva. Supponiamo ora che  $mr = 0$  con  $m \in M$  e  $0 \neq r \in R$ .

In  $M \otimes_R R$  si ha  $m \otimes r = 0 \otimes r$ , e quindi  $(1 \otimes \psi_r)(m \otimes 1) = (1 \otimes \psi_r)(0 \otimes 1)$ .

Essendo la mappa iniettiva, abbiamo  $(m \otimes 1) = (0 \otimes 1)$ . Ricordiamo infine che, visto che  $M \otimes_R R \simeq M$  con la mappa moltiplicativa  $m \otimes r \mapsto mr$ , si ha  $m = 0$ , quindi  $M$  è privo di torsione.

Viceversa, sia  $M$  un  $R$ -modulo privo di torsione, e  $R$  un dominio a ideali principali. Sia  $I \subseteq R$  ideale non nullo,  $I = (r)$  con  $0 \neq r \in R$ .

Consideriamo la mappa  $\Theta_r : M \rightarrow M$  definita da  $\Theta_r(m) = rm$ : è un omomorfismo di  $R$ -moduli, e inoltre ha nucleo banale, essendo  $M$  privo di torsione (in particolare è iniettiva).

Consideriamo dunque la mappa  $\rho : R \rightarrow I$  data da  $\rho(x) = rx$ ; è un omomorfismo di  $R$ -moduli.

Si ottiene facilmente che è suriettivo, e, in particolare, essendo  $R$  un dominio, è iniettiva.

Allora è un isomorfismo di  $R$ -moduli. Ovviamente anche l'omomorfismo  $1 \otimes \rho : M \otimes_R R \rightarrow M \otimes_R I$  è un isomorfismo.

Ricordiamo poi che  $M \simeq M \otimes_R R$  tramite gli isomorfismi canonici:

$$\iota : M \rightarrow M \otimes_R R$$

e

$$\tau : M \otimes_R R \rightarrow M$$

definiti da:

$$\iota(m) = m \otimes 1 \quad \tau(m \otimes r) = mr.$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} (\tau \circ (1 \otimes \iota) \circ (1 \otimes \rho) \circ \iota)(m) &= \tau((1 \otimes \iota)((1 \otimes \rho)(m \otimes 1))) = \\ &= \tau((1 \otimes \iota)(m \otimes r)) = \tau(m \otimes r) = mr = \Theta_r(m). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\tau \circ (1 \otimes \iota) \circ (1 \otimes \rho) \circ \iota = \Theta_r$$

e quindi:

$$1 \otimes \iota = \tau^{-1} \circ \Theta_r \circ \iota^{-1} \circ (1 \otimes \rho).$$

Allora  $1 \otimes \iota$  è iniettiva, e per la proposizione seguente, si conclude che  $M$  è piatto.  $\square$

*Esempio 0.1.35.* Forniamo subito un esempio di come un modulo piatto non finitamente generato su un  $PID$  non sia necessariamente libero (se fosse finitamente generato e senza torsione, per il teorema di struttura avremmo che  $M$  sarebbe libero).

Sia  $R = \mathbb{Z}$ , allora  $\mathbb{Q}$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo, piatto poiché non ha elementi di torsione e  $\mathbb{Z}$  è  $PID$ .

Notiamo però che  $\mathbb{Q}$  non è libero: altrimenti, dovrebbe ammettere una base. Ovviamente se una tale base avesse cardinalità 1, non potrebbe essere un insieme di generatori per  $\mathbb{Q}$ .

Se avesse più di un elemento, invece, non sarebbe un insieme linearmente indipendente: se  $a, b \in \mathbb{Q}$ , esistono sempre due interi  $m$  e  $n$  in  $\mathbb{Z}$  tali che  $an + bm = 0$ .

Allora  $\mathbb{Q}$  non è libero.

**Proposizione 0.1.36.** *Le seguenti affermazioni sono equivalenti per ogni  $R$ -modulo  $N$ :*

1.  $N$  è piatto.
2.  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  è sequenza esatta  $\Rightarrow$   
 $0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$  è esatta.
3.  $f : M' \rightarrow M$  è iniettiva  $\Rightarrow$   
 $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$  è iniettiva.
4.  $f : M' \rightarrow M$  è iniettiva, e  $M, M'$  sono finitamente generati  $\Rightarrow$   
 $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$  è iniettiva.

*Dimostrazione.* Vedi M. F. Atiyah - I. G. Macdonald, *An introduction to commutative algebra*, p. 29.  $\square$

## 0.2 Il funtore Tor

### 0.2.1 Risoluzioni libere di $R$ -moduli

Prima di definire il funtore Tor elenchiamo alcuni fatti sulle risoluzioni libere di moduli su anelli commutativi.

**Definizione 0.2.1.** Sia  $M$  un  $R$ -modulo e  $M_0$  un suo sottoinsieme.  $M_0$  è detto *linearmente indipendente* se per ogni collezione finita di elementi  $x_1, \dots, x_n$  di  $M_0$  si ha:

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$$

$M_0$  è detto *base* per  $M$  se è un insieme linearmente indipendente di generatori per  $M$ .

*Osservazione 0.2.2.* Se consideriamo l' $R$ -modulo libero  $R^{(I)}$ , esso ammette sempre una base, detta base canonica, formata da elementi

$$e_j = (\delta_{i,j})_{i \in I}$$

ove  $\delta_{i,j}$  è il delta di Kronecker.

**Definizione 0.2.3.** Si dice *risoluzione sinistra* di un  $R$ -modulo  $M$  una sequenza esatta:

$$\dots \rightarrow F_{i+1} \rightarrow F_i \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

ove gli  $F_j$  sono  $R$ -moduli. Tale risoluzione è detta *libera* se ogni  $R$ -modulo  $F_j$  è libero, *finita* se esiste un indice  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $F_j = 0 \forall j \geq n$ .

**Proposizione 0.2.4.** Ogni  $R$ -modulo  $M$  ammette una risoluzione libera.

*Dimostrazione.* Sia  $\{x_i\}_{i \in I_0}$  una collezione di generatori per  $M$ . Consideriamo l'omomorfismo di  $R$ -moduli:

$$f_0 : R^{(I_0)} \rightarrow M$$

$$e_i \longmapsto x_i$$

così definito sugli elementi di base, ed esteso per linearità; è chiaramente suriettivo. Sia  $F_0 = \text{Ker}(f_0)$ ; si può applicare nuovamente il procedimento ottenendo due sequenze esatte:

$$R^{(I_1)} \rightarrow F_0 \rightarrow 0 \qquad R^{(I_0)} \rightarrow M \rightarrow 0$$

e dunque la sequenza:

$$R^{(I_1)} \rightarrow R^{(I_0)} \rightarrow M \rightarrow 0$$

è esatta. Iterando il procedimento si ottiene la sequenza esatta ricercata.  $\square$

Vogliamo ora capire in quali casi un modulo ammette risoluzione libera finita; per questo è necessario introdurre il concetto di modulo *proiettivo*.

**Definizione 0.2.5.** Un  $R$ -modulo  $M$  si dice *proiettivo* se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- Ogni successione esatta  $0 \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$  è spezzante, ossia  $N \simeq P \oplus M$ ;
- $M$  è addendo diretto di un  $R$ -modulo libero;
- $\text{Hom}(-, M)$  è un funtore esatto.

**N.B.:** In generale abbiamo la seguente catena di implicazioni, valida su ogni  $R$  anello commutativo e per ogni  $M$   $R$ -modulo:

$$M \text{ è libero} \implies M \text{ è proiettivo} \implies M \text{ è piatto} \implies M \text{ è senza-torsione}$$

Possiamo invertire l'ultima implicazione se  $R$  è un dominio di Dedekind, quindi anche se  $R$  è  $PID$ , come già visto nella sezione precedente.

Nel caso in cui  $R$  sia un anello locale (ovvero che abbia un unico ideale massimale) e  $M$  sia finitamente generato, allora le tre implicazioni diventano equivalenze.

Dimostriamo la seconda implicazione:

**Proposizione 0.2.6.**  $M$  è un  $R$ -modulo proiettivo  $\implies M$  è piatto.

*Dimostrazione.* Sia  $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$  con  $N_i$  modulo libero. Sia inoltre  $L \hookrightarrow L'$  mappa iniettiva di  $R$ -moduli.

Allora abbiamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_R \left( \bigoplus_{i \in I} N_i \right) & \longrightarrow & L' \otimes_R \left( \bigoplus_{i \in I} N_i \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i \in I} (L \otimes_R N_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} (L' \otimes_R N_i) \end{array}$$

ove la mappa in alto è iniettiva, essendo la somma diretta degli  $N_i$  un modulo libero.

Le linee verticali sono isomorfismi, quindi la mappa in basso è necessariamente iniettiva; questo vuol dire che è iniettiva anche la mappa

$$L \otimes_R N_i \hookrightarrow L' \otimes_R N_i$$

$$\forall i \in I$$

Allora  $M$  è piatto.  $\square$

*Esempio 0.2.7.* Mostriamo un esempio di un  $R$  modulo piatto non libero: Consideriamo l'anello  $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , che si decompone nella somma diretta:

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Allora  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  è proiettivo come  $R$ -modulo, quindi è piatto, ma non è libero (dovrebbe avere almeno 6 elementi).

**Definizione 0.2.8.** Un  $R$ -modulo  $M$  si dice *stabilmente libero* se esiste un modulo libero  $F$  finitamente generato tale che  $F \oplus M$  è libero e finitamente generato.

*Osservazione 0.2.9.* Si noti che un modulo stabilmente libero può essere visto come nucleo di un omomorfismo di moduli liberi e finitamente generati; infatti data la sequenza esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\phi) \rightarrow R^n \xrightarrow{\phi} R^m$$

questa è spezzante essendo  $R^m$  proiettivo; allora  $R^n \simeq \text{Ker}(\phi) \oplus R^m$ , e quindi  $\text{Ker}(\phi)$  è stabilmente libero.

**Teorema 0.2.10.** *Sia  $M$  un  $R$ -modulo proiettivo.*

*$M$  è stabilmente libero  $\iff M$  ammette una risoluzione libera finita*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $M$  sia stabilmente libero. Per definizione, esiste un  $R$ -modulo  $F$  libero tale che  $F \oplus M \simeq R^n$ .

Pertanto, la sequenza:

$$0 \rightarrow F \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

è una risoluzione libera di  $M$ .

Viceversa, supponiamo che  $M$  ammetta una risoluzione libera finita. Si procede per induzione sulla lunghezza  $n$  della risoluzione. Se  $n = 0$ , abbiamo la sequenza:

$$0 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

quindi  $M \simeq F_0$  e quindi è libero e finitamente generato: pertanto è anche stabilmente libero.

Sia ora data una risoluzione libera di  $M$  di lunghezza  $n$ :

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{g_n} F_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \dots \xrightarrow{g_1} F_0 \xrightarrow{g_0} M \rightarrow 0.$$

Sia  $K = \text{Ker}(g_0)$ ; possiamo considerare la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow K \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Essendo  $M$  proiettivo, la successione è spezzante, dunque  $F_0 \simeq M \oplus K$ . Allora  $K$  ammette risoluzione libera di lunghezza  $n - 1$ :

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{g_n} F_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \dots \xrightarrow{g_2} F_1 \xrightarrow{g_1} K \rightarrow 0.$$

Inoltre  $K$  è proiettivo, e finitamente generato, essendo addendo diretto di un modulo libero finitamente generato.

Per ipotesi induttiva,  $K$  è stabilmente libero. Esiste dunque un modulo libero finitamente generato  $E$  tale che  $K \oplus E \simeq R^n$ . Allora  $R^n \oplus M \simeq K \oplus E \oplus M \simeq F_0 \oplus E$ , che è libero e finitamente generato.

Quindi  $M$  è stabilmente libero.  $\square$

In particolare, nel caso di  $PID$ , un modulo stabilmente libero è libero, visto che, su quegli anelli, ogni sottomodulo di un modulo libero è libero. In tal caso, se  $M$  è stabilmente libero, ammette risoluzione libera di lunghezza 0, ossia esso stesso è libero.

Ricordiamo inoltre che ogni modulo finitamente generato è isomorfo a un quoziente di un modulo libero; pertanto abbiamo:

**Corollario 0.2.11.** *Se  $R$  è un  $PID$ , allora ogni  $R$ -modulo  $M$  finitamente generato ammette una risoluzione libera finita della forma*

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

## 0.2.2 Il funtore Tor: definizione e proprietà

**Definizione 0.2.12.** Siano  $M$  e  $N$   $R$ -moduli, e sia

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

una risoluzione libera di  $M$ ; allora

$$F_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1} F_0 \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow 0$$

è esatta.

Definiamo  $\text{Tor}_R(M, N) := \text{Ker}(f \otimes 1)$ .

Più in generale,  $\text{Tor}_R(-, N)$  è il primo funtore derivato sinistro del funtore  $(- \otimes_R N)$  della categoria degli  $R$ -moduli in sé. In questa tesi non saranno utilizzate queste nozioni; ci limiteremo alla definizione di Tor in situazioni molto semplici.

*Osservazione 0.2.13.* Si noti che se  $N$  è un  $R$ -modulo piatto, allora  $\text{Tor}_R(M, N) = 0$ , visto che la risoluzione libera di  $M$  tensorizzata con  $N$  rimane esatta, e quindi  $f \otimes 1$  è iniettiva.

Il funtore  $\text{Tor}$  soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\text{Tor}_R(M, N) \simeq \text{Tor}_R(N, M)$
2. Se  $M, N$  moduli privi di torsione,  $\text{Tor}_R(M, N) = 0$
3. Nel caso di somme dirette di moduli,

$$\text{Tor}_R\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \simeq \bigoplus_{i \in I} \text{Tor}_R(M_i, N)$$

4. Se  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  è una sequenza esatta, allora  $0 \rightarrow \text{Tor}_R(M', N) \rightarrow \text{Tor}_R(M, N) \rightarrow \text{Tor}_R(M'', N) \rightarrow M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M'' \otimes_R N \rightarrow 0$  è esatta.

*Dimostrazione.* Basta considerare le risoluzioni libere

$$0 \rightarrow F'_1 \otimes_R N \xrightarrow{f'} F'_0 \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow F_1 \otimes_R N \xrightarrow{f} F_0 \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow F''_1 \otimes_R N \xrightarrow{f''} F''_0 \otimes_R N \rightarrow M'' \otimes_R N \rightarrow 0$$

e il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F'_1 \otimes_R N & \longrightarrow & F_1 \otimes_R N & \longrightarrow & F''_1 \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' \otimes 1 & & \downarrow f \otimes 1 & & \downarrow f'' \otimes 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & F'_0 \otimes_R N & \longrightarrow & F_0 \otimes_R N & \longrightarrow & F''_0 \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e notare che:

- $\text{Ker}(f' \otimes 1) = \text{Tor}_R(M', N)$ ;
- $\text{Ker}(f \otimes 1) = \text{Tor}_R(M, N)$ ;
- $\text{Ker}(f'' \otimes 1) = \text{Tor}_R(M'', N)$ ;
- $\text{Coker}(f' \otimes 1) = M' \otimes_R N$ ;
- $\text{Coker}(f \otimes 1) = M \otimes_R N$ ;
- $\text{Coker}(f'' \otimes 1) = M'' \otimes_R N$ .

Applicando la **Proposizione 0.1.20** si conclude (il morfismo centrale è quello di bordo).  $\square$

Vediamo ora alcuni semplici esempi di calcolo del Tor di due  $R$ -moduli.

*Esempio 0.2.14.* Sia  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M = G$  un qualsiasi gruppo abeliano (omettiamo il pedice di  $\otimes$  e Tor). Allora  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) = \{x \in G : nx = 0\} = \text{Tor}_n(G)$ , ossia è la parte di  $n$ -torsione di  $G$ . Sia infatti  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$  la solita risoluzione libera di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Allora consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & \text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes G & \xrightarrow{n \otimes 1} & \mathbb{Z} \otimes G & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes G & \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Tor}_n(G) & \longrightarrow & G & \xrightarrow{n} & G & \longrightarrow & G/nG & \rightarrow 0
 \end{array}$$

ove le linee verticali sono isomorfismi. Allora  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \simeq \text{Ker}(n) = \text{Tor}_n(G)$ .

*Esempio 0.2.15.* Se di nuovo  $R = \mathbb{Z}$ , possiamo considerare  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ . Usando l'esercizio appena svolto, otteniamo che  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : nx = 0\} = \mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}$ , ove  $(m, n) = \text{MCD}(m, n)$ .

Se invece  $G$  è un gruppo abeliano,  $\text{Tor}(\mathbb{Z}, G) = 0$  poiché  $\mathbb{Z}$  è elemento neutro del prodotto tensore (in particolare è piatto).

Più in generale  $\text{Tor}_R(R^{(I)}, M) = 0 \ \forall MR$ -modulo. Questo perché tutti i moduli liberi sono piatti.

*Esempio 0.2.16.* Possiamo generalizzare il primo esempio, considerando  $M$  un  $R$ -modulo,  $r \in R$  elemento non divisore dello 0 in  $R$ .

Allora  $\text{Tor}_R(R/(r), M) = \{x \in M : rx = 0\}$  ossia è la parte di  $r$ -torsione di  $M$ . Ci si riconduce all'esercizio precedente considerando la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{r} R \rightarrow R/(r) \rightarrow 0$$

che è risoluzione libera di  $R/(r)$ .

Si noti che, se  $r$  fosse stato divisore dello 0 in  $R$ , la sequenza non sarebbe stata una risoluzione libera di  $R/(r)$ , perché la moltiplicazione per  $r$  non sarebbe stata una mappa iniettiva.



# Capitolo 1

## Definizione e proprietà di omologia singolare intera

Il calcolo omologico per spazi topologici associa ad uno spazio topologico  $X$  una successione di gruppi abeliani (se consideriamo l'omologia intera), e ad ogni mappa continua di spazi topologici  $f : X \rightarrow Y$  una successione di omomorfismi. I gruppi di omologia sono un invariante omotopico (ossia due spazi omotopicamente equivalenti hanno la stessa omologia) e quindi invarianti per omeomorfismi (ossia due spazi omeomorfi hanno la stessa omologia). Lo studio di tali gruppi permette, in modo relativamente semplice rispetto all'approccio diretto, di osservare diverse proprietà topologiche legate alla geometria dello spazio in questione, e trova applicazione nella dimostrazione di diversi risultati classici della matematica, come il teorema del punto fisso di Brouwer, il teorema di Borsuk-Ulam e il teorema di Jordan-Brouwer sull'invarianza del dominio.

### 1.1 Gruppi di omologia di uno spazio topologico

In questa sezione viene data la definizione dei gruppi di omologia intera di uno spazio topologico, e sono illustrati i primi risultati collegati alle loro informazioni sulle proprietà topologiche del suddetto spazio.

#### 1.1.1 $n$ -cubi singolari

D'ora in poi  $X$  denota uno spazio topologico qualsiasi.

**Definizione 1.1.1.** Un  $n$ -cubo singolare di  $X$  è una mappa continua

$$T : I^n \rightarrow X$$

ove  $I$  denota l'intervallo  $[0, 1]$  della retta reale.

**Definizione 1.1.2.** Un  $n$ -cubo singolare  $T$  è *degenere* se esiste un intero  $1 \leq i \leq n$  tale che  $T(x_1, \dots, x_n)$  non dipenda da  $x_i$ .

Notiamo subito che uno 0-cubo singolare non è mai degenere; un 1-cubo singolare è degenere se e solo se  $T$  è costante.

**Definizione 1.1.3.** • Si indica con  $Q_n(X)$  il gruppo abeliano libero generato dall'insieme di tutti gli  $n$ -cubi di  $X$ ;

- Si indica con  $D_n(X) \leq Q_n(X)$  il sottogruppo di  $Q_n(X)$  generato da tutti gli  $n$ -cubi degeneri di  $X$ ;
- Si indica con  $C_n(X)$  il gruppo quoziente  $Q_n(X)/D_n(X)$ ; questo gruppo viene detto **gruppo delle  $n$ -catene cubiche singolari**.

*Osservazione 1.1.4.* 1.  $Q_n(X)$ ,  $D_n(X)$  e  $C_n(X)$  sono gruppi abeliani liberi.

2. Se  $X = \{x_0\}$  è lo spazio composto da un solo punto, allora c'è un unico  $n$ -cubo singolare per ogni  $n \geq 0$ , e questo è degenere se  $n \geq 1$ . In questo caso  $C_0(X)$  è ciclico infinito, e  $C_n(X) = \{0\} \forall n \geq 1$ .
3. In ogni spazio  $X$ ,  $D_0(X) = \{0\}$ , quindi  $C_0(X) = Q_0(X)$ .
4. In ogni spazio  $X$ ,  $C_n(X)$  è gruppo abeliano libero generato dagli  $n$ -cubi singolari non degeneri di  $X$ .

Diamo ora alcune definizioni che permettano di costruire mappe fra i gruppi delle  $n$ -catene di  $X$ .

**Definizione 1.1.5.** Sia  $T : I^n \rightarrow X$  un  $n$ -cubo singolare. Per  $i = 0, 1, \dots, n$  definiamo gli  $(n - 1)$ -cubi singolari

$$A_i T, B_i T : I^{n-1} \rightarrow X$$

con le formule:

$$A_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

e

$$B_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

$A_i T$  è detto  $i$ -faccia anteriore di  $T$  e  $B_i T$  è detto  $i$ -faccia posteriore di  $T$ .

$A_i$  e  $B_i$  sono anche detti *operatori di faccia*.

Gli operatori di faccia appena definiti soddisfano le seguenti proprietà, per  $1 \leq i < j \leq n$ :

- $A_i A_j T = A_{j-1} A_i T$ ;
- $B_i B_j T = B_{j-1} B_i T$ ;
- $A_i B_j T = B_{j-1} A_i T$ ;
- $B_i A_j T = A_{j-1} B_i T$ .

Possiamo quindi dare la seguente definizione:

**Definizione 1.1.6.** La funzione  $\delta_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$  tale che

$$\delta_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i T - B_i T]$$

definita per ogni  $n \geq 1$  e per ogni  $T$   $n$ -cubo singolare, ed estesa per linearità, è detta **operatore di bordo**.

L'operatore di bordo  $\delta$  può essere visto come una mappa che manda un  $n$ -cubo singolare qualunque nel suo bordo orientato; valgono i seguenti fatti:

1.  $\delta_{n-1}(\delta_n(T)) = 0 \quad \forall n > 1$
2.  $\delta_n(D_n(X)) \subseteq D_{n-1}(X) \quad \forall n > 0$ .

Si noti in particolare che  $\delta_n$  induce un omomorfismo  $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  che denotiamo ancora con  $\delta_n$ ; ovviamente tale sequenza di omomorfismi verifica ancora il fatto 1.

Si ottiene, dunque, una sequenza di gruppi abeliani liberi e omomorfismi:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\delta_{n-1}} C_{n-2}(X) \xrightarrow{\delta_{n-2}} \dots$$

in cui la composizione di mappe consecutive è nulla; una sequenza di questo tipo è detta *complesso*.

### 1.1.2 Gruppi di omologia e relazione con le proprietà di connessione di $X$

Siamo ora in possesso degli strumenti necessari a dare la definizione di gruppo di omologia.

**Definizione 1.1.7.** Sia  $\delta_n$  operatore di bordo sulle  $n$ -catene cubiche singolari di  $X$ . Definiamo, per  $n > 0$ :

$$Z_n(X) = \text{Ker}(\delta_n) = \{u \in C_n(X) : \delta_n(u) = 0\} \leq C_n(X)$$

e, per  $n \geq 0$ :

$$B_n(X) = \text{Im}(\delta_{n+1}) = \delta_{n+1}(C_{n+1}(X)) \leq C_n(X).$$

Si noti che, per il fatto 1,  $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ . Possiamo quindi definire, per  $n > 0$ :

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X).$$

$H_n(X)$  è detto **gruppo di omologia singolare  $n$ -dimensionale** di  $X$ .

*Osservazione 1.1.8.* L'utilizzo del complesso delle  $n$ -catene cubiche singolari non degeneri di  $X$ , e quindi del quoziente di  $Q_n(X)$  rispetto ai cubi degeneri, è fondamentale per il calcolo dei gruppi di omologia. Vediamo come in un caso di per sé molto semplice è già evidente l'importanza di questa scelta: sia  $X = \{x_0\}$  lo spazio formato da un solo punto. Come fatto notare nell'*Osservazione 1.1.4*, abbiamo  $C_0(X) = \mathbb{Z}$  e  $C_k(X) = \{0\}$  per ogni  $k > 0$ , mentre  $Q_k(X) = \mathbb{Z}$  per ogni  $k \geq 0$ .

Utilizzando i gruppi di catene non degeneri, abbiamo, banalmente, gruppi di omologia tutti nulli, tranne per lo 0-esimo che è ciclico infinito.

Considerando ora i gruppi  $Q_k(X)$ , notiamo che sono generati ciascuno da un solo  $k$ -cubo, degenerare per  $k > 0$ .

Le mappe di bordo non possono essere altro che nulle, proprio perché nella somma, ogni faccia viene cancellata da quella opposta; il calcolo fornisce allora  $H_k(X) = \mathbb{Z}$  per ogni  $k \geq 0$ .

È evidente, dunque, che calcolare l'omologia singolare cubica di uno spazio necessita dell'operazione fatta nell'ultimo punto della **Definizione 1.1.3**, per ottenere, per spazi banali come  $X$ , gruppi di omologia banali; così non facendo, otterremmo gruppi che non esplicitano alcuna informazione geometrica rilevante sugli spazi oggetto di studio.

**Definizione 1.1.9.** In dimensione 0 affermiamo che

$$H_0(X) = C_0(X)/B_0(X)$$

visto che  $Z_0(X) = \text{Ker}(\delta_0) = C_0(X)$ .

Per quanto riguarda la definizione di  $H_0(X)$ , si può procedere in un altro modo: possiamo definire, per ogni  $n < 0$ ,  $C_n(X) = \{0\}$ , e  $\delta_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  come la mappa nulla per  $n \leq 0$ . Allora  $H_0(X) = C_0(X)/B_0(X)$ , e  $H_n(X) = \{0\}$  per  $n < 0$ .

**Definizione 1.1.10.** Definiamo un omomorfismo  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , detto *omomorfismo di aumentazione*.

Essendo  $C_0(X)$  abeliano libero, è sufficiente definire  $\varepsilon$  su una sua base (ossia sugli 0-cubi di  $X$ ) e poi estenderlo per linearità. Sia quindi  $\varepsilon(T) = 1 \ \forall T$  0-cubo di  $X$ .

Quindi

$$u = \sum_{i=1}^m n_i T_i \in C_0(X) \implies \varepsilon(T) = \sum_{i=1}^m n_i$$

è la somma dei coefficienti. Ovviamente,  $\varepsilon \circ \delta_1 = 0$ .

Sia  $\tilde{Z}_0(X) = \text{Ker}(\varepsilon)$ ; allora, per quanto appena visto,  $B_0(X) \subset \tilde{Z}_0(X)$ .

Indichiamo quindi con  $\tilde{H}_0(X) = \tilde{Z}_0(X)/B_0(X)$  il **gruppo di omologia 0-dimensionale ridotto di  $X$** . Per  $n > 0$ , invece,  $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ .

*Osservazione 1.1.11.*  $\tilde{Z}_0(X) \leq Z_0(X) = C_0(X)$ , allora  $\tilde{H}_0(X) \leq H_0(X)$ .

Indichiamo con  $\zeta : \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X)$  il morfismo di inclusione.

Essendo:

$$\varepsilon(B_0(X)) = 0$$

$\varepsilon$  induce un omomorfismo:

$$\varepsilon_* : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

**Proposizione 1.1.12.** *La sequenza di gruppi e omomorfismi:*

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\zeta} H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

è esatta, quindi

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(X) &\simeq \text{Ker}(\varepsilon_*) \\ H_0(X) &\simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vediamo ora alcuni risultati che legano le proprietà di connessione di  $X$  al suo gruppo di omologia 0-dimensionale.

**Proposizione 1.1.13.** *Sia  $X$  connesso per archi.*

Allora  $\varepsilon_* : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  è isomorfismo, e  $\tilde{H}_0(X) = 0$ .

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  è suriettivo, e che  $\text{Ker}(\varepsilon) = B_0(X)$ .

$B_0(X) \subseteq \text{Ker}(\varepsilon)$ , mostriamo l'altro verso dell'inclusione.

Sia  $u = \sum_{i=1}^m n_i T_i \in \text{Ker}(\varepsilon)$ ; allora  $\sum_{i=1}^m n_i = 0$ .

Scegliamo  $T_0 = x_0$  0-cubo singolare di  $X$  (è il punto  $x_0$ ).

Scegliamo ora un cammino  $S_i : I \rightarrow X$  tale che  $S_i(0) = x_0 = T_0$  e  $S_i(1) = T_i$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ .

Notiamo che allora  $\delta_1(\sum_{i=1}^m n_i S_i) = \sum_{i=1}^m n_i T_i - \sum_{i=1}^m n_i T_0 = \sum_{i=1}^m n_i T_i = u$  essendo

$$\sum_{i=1}^m n_i = 0.$$

Allora  $u \in B_0(X)$ .

Il morfismo, se  $X \neq \emptyset$  è banalmente suriettivo; allora, per il teorema di isomorfismo, si conclude.  $\square$

**Proposizione 1.1.14.** *Siano  $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  componenti connesse per archi di  $X$ . Allora  $H_n(X) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_n(X_\gamma)$ .*

*Dimostrazione.* Essendo  $T : I^n \rightarrow X$  mappe continue, ogni  $n$ -cubo singolare giace completamente in una componente connessa per archi  $X_\gamma$  di  $X$ .

Pertanto

$$Q_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} Q_n(X_\gamma)$$

si spezza naturalmente in una somma diretta, e così anche

$$D_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} D_n(X_\gamma).$$

Passando ai quozienti, si ottiene

$$C_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_n(X_\gamma).$$

Ovviamente, se un  $n$ -cubo singolare è contenuto interamente in  $X_\gamma$ , anche le sue facce lo sono;

quindi gli operatori di bordo sono ben definiti su ogni componente connessa per archi, vale a dire

$$\delta_n : C_n(X_\gamma) \rightarrow C_{n-1}(X_\gamma).$$

Allora abbiamo due ulteriori decomposizioni in somma diretta:

$$Z_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} Z_n(X_\gamma)$$

$$B_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_n(X_\gamma).$$

Passando ai quozienti otteniamo il risultato desiderato:

$$H_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_n(X_\gamma).$$

□

**Corollario 1.1.15.** *Per un qualsiasi spazio topologico  $X$ ,  $H_0(X)$  è somma diretta di gruppi ciclici infiniti con un addendo per ogni componente connessa per archi di  $X$ , ossia  $H_0(X)$  è abeliano libero di rango uguale al numero di componenti connesse per archi di  $X$ .*

*Osservazione 1.1.16.* Il gruppo di omologia 0-dimensionale ridotto  $\tilde{H}_0(X)$  ha in genere rango minore di uno rispetto al gruppo non ridotto; ciò rende possibile, per gli spazi connessi per archi e dotati di omologia banale, avere gruppi di omologia ridotta tutti nulli, e di avere quindi una presentazione più geometricamente precisa delle loro proprietà omologiche.

## 1.2 Omomorfismi indotti da mappe continue

In questa sezione si illustra la proprietà functoriale dell'omologia: data  $f : X \rightarrow Y$  funzione continua fra spazi topologici,  $f$  induce un omomorfismo tra i gruppi di omologia.

Ossia, l'omologia è un funtore dalla categoria  $Top$  che ha per oggetti gli spazi topologici e per morfismi le funzioni continue, nella categoria  $Ab$  dei gruppi abeliani con gli omomorfismi fra essi.

### 1.2.1 Proprietà di omomorfismo di mappe indotte

**Definizione 1.2.1.** Data  $f : X \rightarrow Y$  funzione continua fra spazi topologici, è definita la mappa

$$f_{\#} : Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y)$$

tale che,  $\forall T$   $n$ -cubo singolare:

$$f_{\#}(T) = f \circ T$$

La mappa  $f_{\#}$  soddisfa le seguenti proprietà:

1. Se  $T$  è degenere,  $f_{\#}(T)$  è degenere.

Allora  $f_{\#}(D_n(X)) \subseteq D_n(Y)$ , e quindi  $f_{\#}$  induce un omomorfismo

$$f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y).$$

2.  $f_{\#}(A_i T) = A_i f_{\#}(T)$  e  $f_{\#}(B_i T) = B_i f_{\#}(T)$ ;  
allora il seguente diagramma è commutativo per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$\begin{array}{ccc} Q_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & Q_n(Y) \\ \downarrow \delta_n & & \downarrow \delta_n \\ Q_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & Q_{n-1}(Y) \end{array}$$

Quindi si ha  $f_{\#} \circ \delta_n = \delta_n \circ f_{\#}$ .

Il diagramma resta commutativo sostituendo  $Q_n$  con  $C_n$ ; in particolare, visto che  $f_{\#}$  commuta con  $\delta_n$ , si ha:

$$f_{\#}(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y)$$

e

$$f_{\#}(B_n(X)) \subseteq B_n(Y).$$

Viene quindi indotto un omomorfismo fra i gruppi di omologia:

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

3. Anche il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_0(X) & & \mathbb{Z} \\ \downarrow f_{\#} & \searrow \varepsilon & \\ C_0(Y) & \nearrow \varepsilon & \end{array}$$

Allora  $f_{\#}$  mappa  $\tilde{Z}_0(X)$  in  $\tilde{Z}_0(Y)$ , e quindi induce un omomorfismo tra i gruppi di omologia ridotta  $f_* : \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)$ .

Inoltre anche i seguenti diagrammi sono commutativi:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_0(X) & \xrightarrow{\zeta} & H_0(X) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_0(Y) & \xrightarrow{\zeta} & H_0(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{H}_0(X) & & \mathbb{Z} \\ \downarrow f_* & \searrow \varepsilon_* & \\ \tilde{H}_0(Y) & \nearrow \varepsilon_* & \end{array}$$

4. Se  $f : X \rightarrow X$  è la funzione identità, tutti i seguenti sono omomorfismi identici:

- $f_{\#} : Q_n(X) \rightarrow Q_n(X)$ ;
- $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ ;
- $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$ ;
- $f_* : \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$ .

5. Siano  $X, Y, Z$  spazi topologici, e  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  funzioni continue.

$fg : X \rightarrow Z$  denoti la composizione; allora abbiamo,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , gli omomorfismi

$$f_*g_*, (fg)_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Z).$$

Affermiamo che  $f_*g_* = (fg)_*$ .

6. Se  $f$  è biettiva o suriettiva, non segue necessariamente che  $f_*$  lo sia; se  $f$  è iniettiva invece, lo è anche  $f_*$ .

Ad esempio, la mappa  $p : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  definita da  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  è una funzione continua di spazi topologici, ma l'omomorfismo indotto  $p_* : H_1(I) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1)$  non lo è (vedi **Sezione 3.1**).

Se consideriamo invece la stessa mappa ma sostituiamo  $I$  con  $I \setminus \{0\}$  otteniamo una funzione continua biettiva che non induce un isomorfismo in omologia.

## 1.2.2 Proprietà di omotopia degli omomorfismi indotti

**Definizione 1.2.2.** Due mappe continue  $f, g : X \rightarrow Y$  si dicono *omotope* se esiste una mappa continua

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

tale che:

- $F(x, 0) = f(x) \forall x \in X$ ;
- $F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ .

La relazione di omotopia fra funzioni continue è una relazione di equivalenza, e le classi di equivalenza vengono dette *classi di omotopia*.

**Teorema 1.2.3.** *Siano  $X, Y$  spazi topologici,  $f, g : X \rightarrow Y$  funzioni continue.*

*Se  $f$  e  $g$  sono omotope, allora gli omomorfismi indotti*

$$f_*, g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

*e*

$$f_*, g_* : \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)$$

*sono uguali.*

*Dimostrazione.* Sia  $F : X \times I \rightarrow Y$  omotopia fra  $f$  e  $g$ .

Vorremmo costruire, per  $n = 0, 1, 2, \dots$ , una sequenza di omomorfismi:

$$\varphi_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$$

tali che, per  $n = 0, 1, 2, \dots$ , valga la relazione:

$$-f_{\#} + g_{\#} = \delta_{n+1}\varphi_n + \varphi_{n-1}\delta_n.$$

Una volta ottenuta una tale equazione, l'asserto del teorema segue facilmente: consideriamo infatti  $u \in H_n(X)$ , e scegliamo un rappresentante  $u' \in C_n(X)$ . Essendo  $\delta_n(u') = 0$ , segue dall'equazione che

$$-f_{\#}(u') + g_{\#}(u') = \delta_{n+1}(\varphi_n(u')).$$

Quindi  $-f_{\#}(u') + g_{\#}(u') \in B_n(Y)$  e quindi  $f_*(u) = g_*(u)$ .

Rimane ora da costruire la sequenza di omomorfismi  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Costruiamo dapprima, per  $n = 0, 1, 2, \dots$ , omomorfismi:

$$\phi_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n+1}(Y)$$

come segue. Sia dato un qualsiasi  $n$ -cubo singolare  $T : I^n \rightarrow X$ , definiamo

$$(\phi_n T)(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(x_1, T(x_2, \dots, x_{n+1})).$$

Intuitivamente, dato un  $n$ -cubo in  $X$ , consideriamo le due immagini in  $Y$  tramite  $f$  e  $g$  e trasportiamo una sull'altra tramite l'omotopia fra le mappe. Considerando tutto il "tragitto" percorso otteniamo un  $(n+1)$ -cubo singolare in  $Y$ .

Osserviamo le seguenti proprietà:

- $A_1\phi_n(T) = f_{\#}(T)$ ;
- $B_1\phi_n(T) = g_{\#}(T)$ ;

- $A_i\phi_n(T) = \phi_{n-1}A_{i-1}(T)$  per  $2 \leq i \leq n+1$ ;
- $B_i\phi_n(T) = \phi_{n-1}B_{i-1}(T)$  per  $2 \leq i \leq n+1$ .

Possiamo quindi calcolare l'operatore di bordo  $\delta_{n+1}$  su  $\phi_n$ .

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1}(\phi_n(T)) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (A_i\phi_n(T) - B_i\phi_n(T)) \\
&= -(f_{\#}(T) - g_{\#}(T)) + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i \phi_{n-1}(A_{i-1}(T) - B_{i-1}(T)) \\
&= -f_{\#}(T) + g_{\#}(T) + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \phi_{n-1}(A_j(T) - B_j(T)) \\
&= -f_{\#}(T) + g_{\#}(T) - \phi_{n-1}\delta_n(T).
\end{aligned}$$

Allora, per ogni  $u \in Q_n(X)$  vale:

$$-f_{\#}(u) + g_{\#}(u) = \delta_{n+1}\phi_n(u) + \phi_{n-1}\delta_n(u).$$

Se  $T$  è  $n$ -cubo degenero, inoltre,  $\phi_n(T)$  è un  $(n+1)$ -cubo degenero. Allora  $\phi_n$  induce un omomorfismo fra i quozienti:

$$\varphi_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$$

che verifica le proprietà desiderate. □

*Osservazione 1.2.4.* Diciamo che la sequenza di morfismi  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è un'omotopia di morfismi di catene (vedi **Definizione 1.3.7**).

In particolare, la differenza fra  $f_{\#}$  e  $g_{\#}$  permette in modo intuitivo di dare una definizione di omotopia fra morfismi di catene a partire da un'omotopia di mappe continue e considerando gli omomorfismi da esse indotti.

Nella definizione sopracitata si generalizza il concetto a morfismi di catene che prescindano da mappe continue di spazi topologici.

**Definizione 1.2.5.** Due spazi  $X, Y$  sono dello stesso *tipo di omotopia* se esistono due mappe continue  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  tali che:

- $gf$  è omotopa all'identità di  $X$ ;
- $fg$  è omotopa all'identità di  $Y$ .

Due mappe che verificano queste proprietà vengono dette *equivalenze omotopiche*

*Osservazione 1.2.6.* Se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi, allora esistono due mappe  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  biettive e continue tali che  $g = f^{-1}$ .

Allora le composizioni sono esattamente le identità dei due spazi, e quindi  $X$  e  $Y$  hanno lo stesso tipo di omotopia.

In particolare, ogni omeomorfismo è equivalenza omotopica di spazi topologici.

**Teorema 1.2.7.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  è un'equivalenza omotopica di spazi topologici, allora, per  $n = 0, 1, 2, \dots$ :*

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

e

$$f_* : \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)$$

sono isomorfismi.

*Dimostrazione.* Essendo  $f$  equivalenza omotopica, esiste  $g : Y \rightarrow X$  tale che  $gf$  è omotopa all'identità di  $X$  e  $fg$  è omotopa all'identità di  $Y$ .

In particolare, per il **Teorema 1.2.3**, otteniamo che gli omomorfismi indotti

$$(gf)_*, id_{X*} : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

sono gli stessi. Per la proprietà 5, si ha che  $(gf)_* = g_*f_*$ . Lo stesso vale per  $(fg)_*$  e  $id_{Y*}$ ; otteniamo pertanto:

$$f_*g_* = id_{Y*}$$

e

$$g_*f_* = id_{X*}.$$

Allora  $f_*$  è omomorfismo di gruppi iniettivo e suriettivo, ossia è isomorfismo di gruppi. □

**Definizione 1.2.8.** Uno spazio  $X$  si dice *contraibile a un punto*  $x_0$  se esiste una funzione continua

$$F : X \times I \rightarrow X$$

tale che:

- $F(x, 0) = x \forall x \in X$ ;
- $F(x, 1) = x_0 \forall x \in X$ .

*Osservazione 1.2.9.* Ogni sottoinsieme stellato di  $\mathbb{R}^n$  è contraibile a un punto (il centro di stellatura); in particolare, ogni sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^n$  è contraibile.

*Osservazione 1.2.10.* Se uno spazio è contraibile a un punto, allora ha lo stesso tipo di omotopia dello spazio costituito da un solo punto; in particolare la mappa di equivalenza omotopica è la mappa costante da  $X$  in  $\{x_0\}$  e i suoi gruppi di omologia, per  $n \in \mathbb{N}$ , sono i seguenti:

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \quad \tilde{H}_0(X) = \{0\}$$

$$H_n(X) = \{0\}.$$

**Definizione 1.2.11.** Un sottoinsieme  $A$  di  $X$  è detto **retrato di deformazione forte** di  $X$  se esistono due mappe continue

$$r : X \rightarrow A$$

e

$$F : X \times I \rightarrow X$$

tali che:

- $r(a) = a \quad \forall a \in A$ ;
- $F(x, 0) = x \quad \forall x \in X$ ;
- $F(x, 1) = r(x) \quad \forall x \in X$ .

**Proposizione 1.2.12.** Se  $A$  è retratto di deformazione di  $X$ , la mappa di inclusione  $i : A \rightarrow X$  è equivalenza omotopica di spazi topologici, e quindi, per  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$$

e

$$i_* : \tilde{H}_0(A) \rightarrow \tilde{H}_0(X)$$

sono isomorfismi.

*Dimostrazione.* Mostriamo che la mappa  $X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{i} X$  è omotopa all'identità relativamente ad  $A$ ; consideriamo

$$F : X \times I \rightarrow X$$

tale che

$$(t, x) \mapsto x(1 - t) + t(i \circ r)(x)$$

è ovvio che coincidono su  $A$ , e

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= id(x) \\ F(x, 1) &= (i \circ r)(x) \end{aligned}$$

Quindi  $i \circ r$  è omotopa all'identità di  $X$ ; Invece  $r \circ i$  è esattamente l'identità di  $A$ . Allora le mappe  $r : X \rightarrow A$  e  $i : A \rightarrow X$  sono equivalenze omotopiche; per il **Teorema 1.2.7**  $X$  e  $A$  hanno gli stessi gruppi di omologia.  $\square$

### 1.3 Complessi di catene

**Definizione 1.3.1.** Un complesso di catene  $K = \{K_n, \delta_n\}$  è una sequenza di gruppi abeliani  $K_n$ ,  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  e omomorfismi  $\delta_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$  che verificano la proprietà seguente  $\forall n$ :

$$\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0.$$

**Definizione 1.3.2.** Per ogni complesso di catene possiamo definire:

$$Z_n(K) = \text{Ker}(\delta_n)$$

e

$$B_n(K) = \text{Im}(\delta_{n+1}).$$

Allora abbiamo, per la definizione precedente,

$$B_n(K) \subseteq Z_n(K)$$

e possiamo quindi definire:

$$H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$$

l' $n$ -esimo gruppo di omologia di  $K$ .

*Osservazione 1.3.3.* Nella sezione 1.1 abbiamo già definito, per ogni spazio topologico  $X$ , alcuni complessi di catene:

- $Q(X) = \{Q_n(X), \delta_n\}$ ;
- $D(X) = \{D_n(X), \delta_n\}$ ;
- $C(X) = \{C_n(X), \delta_n\}$ .

Nella sezione 2.1 si dà, per ogni coppia  $(X, A)$ , il complesso di catene:

$$- C(X, A) = \{C_n(X, A), \delta_n\}.$$

**Definizione 1.3.4.** Siano  $K = \{K_n, \delta_n\}$  e  $K' = \{K'_n, \delta'_n\}$  complessi di catene.

Un *morfismo di catene*  $f : K \rightarrow K'$  consiste in una sequenza di omomorfismi:

$$f_n : K_n \rightarrow K'_n$$

tali che,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , valga la condizione di commutatività:

$$f_{n-1} \circ \delta_n = \delta'_n \circ f_n$$

*Osservazione 1.3.5.* Dati due morfismi di catene  $f, g : K \rightarrow K'$ , anche  $f + g : K \rightarrow K'$  è morfismo di catene.

*Osservazione 1.3.6.* Nella sezione 1.2 abbiamo definito, data una funzione  $\varphi : X \rightarrow Y$  gli omomorfismi indotti:

- $\varphi_{\#} : Q(X) \rightarrow Q(Y)$ ;
- $\varphi_{\#} : D(X) \rightarrow D(Y)$ ;
- $\varphi_{\#} : C(X) \rightarrow C(Y)$ .

che sono morfismi di catene.

*Osservazione 1.3.7.* Per la condizione di commutatività,  $f(Z_n(K)) \subseteq Z_n(K')$  e  $f(B_n(K)) \subseteq B_n(K')$ .

È ben definito, quindi, il morfismo indotto da  $f$  sui gruppi di omologia del complesso:

$$f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K').$$

Abbiamo di nuovo una proprietà functoriale: l'omologia associa (per ogni  $n$ ) ad ogni complesso  $K$  un gruppo abeliano  $H_n(K)$ , e ad ogni morfismo di catene  $f$  un omomorfismo di gruppi  $f_*$ .

In particolare è un funtore additivo, ossia, dati due morfismi di catene  $f, g : K \rightarrow K'$ , si ha:

$$(f + g)_* = f_* + g_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K').$$

Vediamo ora alcune importanti proprietà degli omomorfismi indotti.

**Definizione 1.3.8.** Siano  $f, g : K \rightarrow K'$  morfismi di catene.

Un'omotopia fra i morfismi di catene  $f$  e  $g$ :

$$D : K \rightarrow K'$$

è una sequenza di omomorfismi:

$$D_n : K_n \rightarrow K'_{n+1}$$

tali che,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ :

$$f_n - g_n = \delta'_{n+1} D_n + D_{n-1} \delta_n$$

Due morfismi di catene sono detti *omotopi* se esiste una tale mappa  $D$ .

*Osservazione 1.3.9.* Di nuovo, osserviamo che le definizioni relative ai complessi di catene sono una generalizzazione di quelle date nelle due sezioni precedenti: se infatti  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  sono due mappe continue di spazi topologici omotope, ogni omotopia fra esse induce un'omotopia fra le mappe  $\varphi_{0\#}$  e  $\varphi_{1\#}$  fra i complessi di catene cubiche singolari.

*Osservazione 1.3.10.* L'omotopia fra morfismi di complessi di catene è una relazione d'equivalenza.

**Proposizione 1.3.11.** *Siano  $f, g : K \rightarrow K'$  morfismi di complessi di catene. Se  $f$  e  $g$  sono omotopi, allora inducono lo stesso omomorfismo sui gruppi di omologia di  $K$  e  $K'$ :*

$$f_*, g_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K').$$

*Dimostrazione.* Utilizzando la dimostrazione del **Teorema 1.2.3** si conclude; infatti, una volta costruita un'omotopia fra morfismi di catene, si ottengono gli stessi omomorfismi indotti fra gruppi di omologia dei complessi.  $\square$

**Definizione 1.3.12.** Un morfismo di catene  $f : K \rightarrow K'$  è detto *equivalenza omotopica di complessi di catene* se e solo se esiste  $g : K' \rightarrow K$  tale che:

$$fg \text{ omotopo a } id_{K'} \quad \text{e} \quad gf \text{ omotopo a } id_K.$$

**Teorema 1.3.13.** *Siano  $K = \{K_n, \delta_n\}$  e  $K' = \{K'_n, \delta'_n\}$  complessi di catene tali che  $K_n$  e  $K'_n$  siano abeliani liberi  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .*

*Allora un morfismo di catene  $f : K \rightarrow K'$  è un'equivalenza omotopica di catene  $\iff f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$  è isomorfismo di gruppi abeliani  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $f$  è equivalenza omotopica di catene, esiste un morfismo di catene  $g : K' \rightarrow K$  tale che  $fg$  è omotopo all'identità di  $K'$  e  $gf$  è omotopo all'identità di  $K$ .

Allora gli omomorfismi indotti fra i gruppi di omologia,  $f_*$  e  $g_*$  verificano:

$$f_* g_* = id_{K'_*} \quad \text{e} \quad g_* f_* = id_{K_*}.$$

Quindi  $f_*$  è isomorfismo di gruppi.  $\square$

**Definizione 1.3.14.** Una sequenza di complessi di catene e morfismi di catene:

$$\dots \rightarrow K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} K'' \rightarrow \dots$$

è esatta se,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  la sequenza di gruppi abeliani e omomorfismi:

$$\dots \rightarrow K'_n \xrightarrow{f_n} K_n \xrightarrow{g_n} K''_n \rightarrow \dots$$

è esatta.

Nel caso in cui la sequenza esatta sia corta, ossia del tipo

$$E : 0 \rightarrow K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} K'' \rightarrow 0$$

possiamo definire, per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , un **morfismo di connessione** (o operatore di bordo):

$$\delta_E : H_n(K'') \rightarrow H_{n-1}(K')$$

e provare che la sequenza lunga:

$$\dots \xrightarrow{\delta_E} H_n(K') \xrightarrow{f_*} H_n(K) \xrightarrow{g_*} H_n(K'') \xrightarrow{\delta_E} H_{n-1}(K') \rightarrow \dots$$

è esatta.

La procedura è analoga al calcolo dell'operatore di bordo nella sequenza esatta di una coppia di spazi, che viene mostrato nella sezione 2.1.

Infine,  $\delta_E$  ha la seguente proprietà di naturalità:

Sia:

$$\begin{array}{ccccccc} E : 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{f} & K & \xrightarrow{g} & K'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \omega & & \\ F : 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{h} & L & \xrightarrow{k} & L'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramma commutativo di complessi di catene e morfismi di catene, con  $F$  ed  $E$  sequenze esatte corte.

Allora il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(K'') & \xrightarrow{\delta_E} & H_{n-1}(K') \\ \downarrow \omega_* & & \downarrow \varphi_* \\ H_n(L'') & \xrightarrow{\delta_F} & H_n(L) \end{array}$$

è commutativo  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

## 1.4 Equivalenza fra omologia singolare cubica e singolare simpliciale

In questo capitolo sono stati definiti i gruppi di omologia di un complesso di catene, e in particolare quelli di uno spazio topologico una volta associato ad esso il complesso delle catene cubiche singolari.

Nel definire tale complesso, sono stati utilizzati gli  $n$ -cubi singolari, ossia mappe continue  $T : I^n \rightarrow X$ .

Invece di cubi si può parlare di  $n$ -simplessi singolari di uno spazio, e di conseguenza definire il complesso delle catene simpliciali per poi calcolarne l'omologia.

In questa sezione dimostreremo che i due tipi di omologia sono equivalenti, utilizzando il teorema dei modelli aciclici (Eilenberg e Mac Lane).

### 1.4.1 Omologia singolare simpliciale

**Definizione 1.4.1.** Definiamo l' $n$ -simpleso standard  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  in questo modo:

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0\}.$$

Si dice che una mappa continua:

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X$$

è un  $n$ -simpleso singolare di  $X$ .

Si può dunque considerare il *complesso simpliciale*  $\Delta X = (\Delta_n X, (\delta_j), (e_i))$  ove  $\Delta_n X$  è l'insieme degli  $n$ -simplessi di  $X$ , con la mappa di faccia:

$$\delta_i : \Delta_{n+1} X \rightarrow \Delta_n X$$

definita dalla restrizione di  $\sigma$  all' $i$ -esima faccia del simpleso standard, ossia

$$\delta_i \sigma = \sigma|_{\{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n : x_i = 0\}}$$

precomponendo con l'identificazione canonica di una  $i$ -esima faccia qualsiasi dell' $n$ -simpleso standard con l' $(n-1)$ -simpleso standard (in modo da ottenere un  $(n-1)$ -simpleso singolare ben definito).

Denotiamo con  $S_n(X)$  il gruppo abeliano libero generato dagli  $n$ -simplessi singolari di  $X$ .

Denotiamo con  $S_n^N(X)$  il gruppo abeliano libero normalizzato, ossia il quoziente di  $S_n(X)$  rispetto ai simplessi degeneri (analogamente a quanto definito

per i cubi).

Definiamo il *morfismo di bordo*:

$$\begin{aligned} \delta_n : S_n(X) &\rightarrow S_{n-1}(X) \\ \sigma &\mapsto (-1)^i \sum_i \delta_i(\sigma). \end{aligned}$$

Considerando  $\delta_n$  fra i gruppi normalizzati, otteniamo la proprietà di nullocomposizione:  $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ .

Otteniamo in questo modo due complessi di catene  $S(X)$  e  $S^N(X)$ . Indichiamo infine con  $S : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  e con  $S^N : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  i funtori, dalla categoria degli spazi topologici a quella dei complessi di catene, che associano ad uno spazio  $X$  rispettivamente il primo e il secondo (normalizzato) complesso di catene.

*Osservazione 1.4.2.* La teoria dell'omologia singolare nacque utilizzando i semplici, come appena definito; fu il matematico Serre il primo a sviluppare la teoria a partire dagli  $n$ -cubi anziché dagli  $n$ -semplici.

Un primo svantaggio che potrebbe far pendere la bilancia a favore della teoria simpliciale è il fatto che, mentre per quest'ultima normalizzando i gruppi di catene o meno si ottengono gli stessi complessi, per quella singolare non solo i complessi sarebbero diversi, ma, come mostrato nella **Sezione 1.1**, considerare solo i cubi non degeneri è fondamentale per ottenere risultati geometricamente significativi. Il problema di dover preventivamente fare questa operazione di quoziente, e anche il fatto che il numero di facce di un  $n$ -cubo è  $n!$ , mentre quello del corrispondente semplice è  $n$ , rendono le definizioni iniziali più elaborate rispetto a quelle della teoria simpliciale.

La teoria cubica, d'altra parte, permette uno studio molto più diretto ed intuitivo di alcuni aspetti fondamentali dell'omologia, come il calcolo dei gruppi di omologia del prodotto di spazi e lo studio delle proprietà di omotopia.

Per quanto riguarda i prodotti di spazi, se  $T : I^n \rightarrow X$  e  $S : I^m \rightarrow Y$  sono rispettivamente un  $n$ -cubo singolare di  $X$  e un  $m$ -cubo singolare di  $Y$ , il prodotto  $T \times S : I^{n+m} \rightarrow X \times Y$  è un  $(n+m)$ -cubo singolare del prodotto (vedi **Sezione 2.3**); ciò non accade, invece, per un prodotto di semplici.

Anche nello studio delle proprietà di omotopia la teoria cubica risulta più immediata di quella simpliciale: se  $F : I \times X \rightarrow Y$  è un'omotopia fra due spazi topologici, e  $T : I^n \rightarrow X$  è un  $n$ -cubo di  $X$ , la sua immagine tramite  $F$ , ossia  $F \circ (\text{id}_I \times T)$  è un  $(n + 1)$ -cubo di  $Y$ :

$$\begin{array}{ccc} I \times X & \xrightarrow{F} & Y \\ \text{id}_I \times T \uparrow & \nearrow & \\ I \times I^n & & \end{array} \quad F \circ (\text{id}_I \times T)$$

### 1.4.2 Costruzioni algebriche

**Definizione 1.4.3.** Dati  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtori, una *trasformazione naturale*  $\eta : F \rightarrow G$  è una collezione di morfismi di  $\mathcal{D}$   $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$  indicizzata sugli oggetti di  $\mathcal{C}$  tale che per ogni morfismo  $\alpha : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  si abbia:

$$\eta_Y \circ F(\alpha) = G(\alpha) \circ \eta_X.$$

Diciamo che  $\eta_X$  è la *componente di  $\eta$  su  $X$*

**Definizione 1.4.4.** Data una categoria  $\mathcal{C}$ , definiamo, per ogni  $Y$  oggetto di  $\mathcal{C}$ , il funtore:

$$\begin{aligned} h_Y &: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set} \\ h_Y(X) &= \text{hom}(Y, X). \end{aligned}$$

Dato un qualsiasi funtore  $T : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ , si dice che  $T$  è rappresentabile se è isomorfo ad un funtore  $h_Y$ ,  $\exists Y \in \mathcal{C}$ .

**Lemma di Yoneda.** Denotiamo con  $\check{\mathcal{C}}$  la categoria che ha per oggetti i funtori  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  e per morfismi le trasformazioni naturali fra essi; allora, per ogni  $Y$  oggetto di  $\mathcal{C}$  e ogni  $F$  oggetto di  $\check{\mathcal{C}}$ , si ha:

$$\text{hom}_{\check{\mathcal{C}}}(h_Y, F) \simeq F(Y).$$

*Dimostrazione.* Vedi S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, p. 61.  $\square$

**Definizione 1.4.5.** Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{M}$  rispettivamente una categoria e una sua sottocategoria arbitraria detta “di oggetti modello”, e sia  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  un funtore (ove  $\mathcal{A}$  è la categoria dei gruppi abeliani). Definiamo il *funtore tilde* di  $T$ , scritto  $\tilde{T}$ , come segue.

Per ogni oggetto  $X$  in  $\mathcal{C}$ , il gruppo  $\tilde{T}(X)$  è abeliano libero generato da tutte le coppie  $(\phi, m)$ , ove  $\phi : M \rightarrow X$  è una mappa in  $\mathcal{C}$ ,  $M \in \mathcal{M}$ ,  $m \in T(M)$ . Ossia,  $\tilde{T}(X)$  è un gruppo abeliano libero che ha per base:

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} \text{hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \times F(T(M))$$

ove  $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  è il funtore dimenticante.

Per quanto riguarda l'azione sui morfismi, definiamo  $\tilde{T}(\alpha)(\phi, m) = (\alpha\phi, m)$ . Definiamo infine una trasformazione naturale  $\Psi : \tilde{T} \rightarrow T$  definendo la sua  $X$ -componente come:

$$\Psi_X(\phi, m) = T(\phi)m.$$

**Definizione 1.4.6.** Siano  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{M}$  e  $T$  come sopra. Siano  $\tilde{T}, \Psi$  come nella definizione precedente. Si dice che  $T$  ha un *ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile* se esiste una trasformazione naturale  $\Theta : T \rightarrow \tilde{T}$  tale che  $\Psi\Theta : T \rightarrow T$  è l'identità, ossia se  $\Psi$  è invertibile a destra.

$\Theta$  è detto *rappresentazione* di  $T$ .

Sia  $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  un funtore verso la categoria dei complessi di catene. Per ogni  $A$  oggetto in  $\mathcal{C}$ ,  $K(A)$  è un complesso di catene  $K(A) = (K_q(A), \delta_q)$  con  $\delta_q : K_q(A) \rightarrow K_{q-1}(A)$ . Allora ogni  $K_q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  è un funtore, con trasformazioni naturali  $\delta_q : K_q \rightarrow K_{q-1}$  tali che  $\delta_{q-1}\delta_q = 0$ .

Nella sezione precedente sono stati definiti i concetti di morfismo di catene e omotopia fra morfismi di catene; vogliamo estendere questi concetti a due funtori fissati nella categoria dei complessi di catene, e a due trasformazioni naturali fissate fra tali funtori.

**Definizione 1.4.7.** Siano  $K, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  funtori. Un *morfismo di catene*  $f : K \rightarrow L$  è una sequenza di trasformazioni naturali  $f_n : K_n \rightarrow L_n$  tali che:

$$\delta_n f_n = f_{n-1} \delta_n.$$

Se  $f_n$  è definita e soddisfa la **Definizione 1.4.5** per  $n \leq q$  diciamo che  $f$  è un morfismo di catene in dimensione  $\leq q$ .

**Definizione 1.4.8.** Siano  $K, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  funtori, e  $f, g : K \rightarrow L$  morfismi di catene fra essi. Un'omotopia di morfismi di catene  $D : f \simeq g$  è una sequenza di trasformazioni naturali  $D_n : K_n \rightarrow L_{n+1}$  tale che:

$$\delta_{n+1} D_n + D_{n-1} \delta_n = g_n - f_n$$

Se  $D_n$  è definita e soddisfa la **Definizione 1.4.6** per  $n \leq q$ , diciamo che  $D_n$  è un'omotopia in dimensioni  $\leq q$ .

Siamo in grado di dimostrare:

**Proposizione 1.4.9.** *Siano  $f, g : K \rightarrow L$  morfismi di catene, sia  $D : f \simeq g$  omotopia di morfismi di catene, e sia  $X$  un oggetto di  $\mathcal{C}$ . Allora  $K(X), L(X)$  sono complessi di catene,  $f, g$  inducono morfismi di catene usuali  $f_X, g_X : K(X) \rightarrow L(X)$  e  $D$  induce un'omotopia di morfismi di catene usuale  $D_X : f_X \simeq g_X$ .*

*Dimostrazione.* Essendo  $f$  una sequenza di trasformazioni naturali  $f_n : K_n \rightarrow L_n$ , possiamo considerare la sequenza  $f_{nX}$ ; definiamo dunque  $f_X : K(X) \rightarrow L(X)$  come la sequenza di omomorfismi  $f_{nX} : K_n(X) \rightarrow L_n(X)$ , e  $g_X$  allo stesso modo.

Inoltre, essendo  $D : f \simeq g$  sequenza di trasformazioni naturali  $D_n : K_n \rightarrow L_{n+1}$ , possiamo considerare la sequenza  $D_{nX}$ ; definiamo dunque  $D_X : f_X \simeq g_X$  come la sequenza di omomorfismi  $D_{nX} : K_n(X) \rightarrow L_{n+1}(X)$ .

È chiaro quindi che  $f_X, g_X$  sono morfismi di catene usuali, e  $D_X$  è un'omotopia fra di essi nel senso usuale.  $\square$

### 1.4.3 Modelli aciclici

**Teorema 1.4.10.** *Siano  $K, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_A$  funtori, e sia  $f : K \rightarrow L$  morfismo di catene in dimensioni  $< q$ . Se  $K_n$  ha un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile per ogni  $n \geq q$  e se  $H_{q-1}(L(M)) = 0$  per tutti i modelli  $M \in \mathcal{M}$ , allora  $f$  si estende ad un morfismo di catene  $K \rightarrow L$  in dimensioni  $\leq q$ .*

*Dimostrazione.* Occorre definire una trasformazione naturale  $f_q : K_q \rightarrow L_q$  tale che  $\delta_q f_q = f_{q-1} \delta_q$ .

Per ogni  $m \in K_q(M)$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , si ha che  $f_{q-1} \delta_q m \in L_{q-1}(M)$ . Essendo  $\delta_{q-1}(f_{q-1} \delta_q) = f_{q-1} \delta_{q-1} \delta_q = 0$ , segue che  $f_{q-1} \delta_q m$  è un ciclo  $(q-1)$ -dimensionale in  $L(M)$ .

Visto che  $H_{q-1}(L(M)) = 0$ , si ha che  $\text{Ker}(\delta_{q-1}) \simeq \text{Im}(\delta_q)$  in  $L(M)$ , e quindi esiste  $d(m) \in L_q(M)$  con  $\delta_q d(m) = f_{q-1} \delta_q m$ .

Consideriamo il funtore tilde  $\tilde{K}_q$  associato a  $K_q$ . Definiamo una trasformazione naturale  $\Lambda : \tilde{K}_q \rightarrow K_q$  definendola sulle componenti  $\Lambda$ , con  $\Lambda(\phi, m) = L_q(\phi) d(m)$ . Sia  $\Psi : \tilde{K}_q \rightarrow K_q$  la trasformazione naturale definita nella

**Definizione 1.4.7.** Si ha:

$$\begin{aligned} \delta_q \Lambda(\phi, m) &= \delta_q L_q(\phi) d(m) = L_{q-1}(\phi) \delta_q d(m) = \\ &= L_{q-1} f_{q-1} \delta_q m = f_{q-1} \delta_q K_q(\phi) m = f_{q-1} \delta_q \Psi_X(\phi, m). \end{aligned}$$

Allora  $\delta_q \Lambda = f_{q-1} \Psi$ . Sia ora  $\Theta : K_q \rightarrow \tilde{K}_q$  una rappresentazione di  $K_q$ , e sia definita  $f_q = \Lambda \Theta : K_q \rightarrow L_q$ .

Quindi  $\delta_q f_q = \delta_q \Lambda \Theta = f_{q-1} \delta_q \Psi \Theta = f_{q-1} \delta_q$ , come desiderato.  $\square$

**Teorema 1.4.11.** *Siano  $K, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_A$  funtori, e siano  $f, g : K \rightarrow L$  morfismi di catene in dimensioni  $< q$ , e  $D : f \simeq g$  un'omotopia di morfismi di catene in dimensioni  $< q$ . Se  $K_q$  ha un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile e se  $H_q(L(M)) = 0$  per tutti i modelli  $M \in \mathcal{M}$ , allora  $D$  ammette un'estensione a un'omotopia di morfismi di catene  $f \simeq g$  in dimensioni  $\leq q$ .*

*Dimostrazione.* Occorre definire una trasformazione naturale  $D_q : K_q \rightarrow L_{q+1}$  tale che  $\delta_{q+1}D_q + D_{q-1}\delta_q = g_q - f_q$ . Per ogni  $m \in K_q(M)$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , abbiamo  $(g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)m \in L_q(M)$ . Inoltre, essendo:

$$\begin{aligned} \delta_q(g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q) &= \delta_q g_q - \delta_q f_q - (\delta_q D_{q-1})\delta_q = \\ &= g_{q-1}\delta_q - f_{q-1}\delta_q - (g_{q-1} - f_{q-1} - D_{q-2}\delta_{q-1})\delta_q = 0 \end{aligned}$$

segue che  $(g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)m$  è un  $q$ -ciclo in  $L(M)$ . Essendo poi  $H_q(L(M)) = 0$ , esiste un  $e(m) \in L_{q+1}(M)$  con  $\delta_{q+1}e(m) = (g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)m$ .

Definiamo  $\Gamma : \tilde{K}_q \rightarrow L_{q+1}$  definendo la componente  $\Gamma_X(\phi, m) = L_{q+1}(\phi)e(m)$ . Sia  $\Psi : \tilde{K}_q \rightarrow K_q$  la trasformazione naturale come in **Definizione 1.4.5**. Si ha:

$$\begin{aligned} \delta_{q+1}\Gamma_X(\phi, m) &= \delta_{q+1}L_{q+1}(\phi)e(m) = L_q(\phi)\delta_{q+1}e(m) = L_q(\phi)(g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)m = \\ &= (g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)K_q(\phi)m = (g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)\Psi_X(\phi, m). \end{aligned}$$

Perciò  $\delta_{q+1}\Gamma = (g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)\Psi$ . Sia  $\Theta : K_q \rightarrow \tilde{K}_q$  una rappresentazione di  $K_q$ , e definiamo  $D_q = \Gamma\Theta : K_q \rightarrow L_{q+1}$ . Allora:

$$\delta_{q+1}D_q = (g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q)\Psi\Theta = g_q - f_q - D_{q-1}\delta_q$$

□

**Teorema 1.4.12.** *Siano  $K, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_A$  funtori, e sia  $f : K \rightarrow L$  morfismo di catene in dimensioni  $< q$ . Se  $K_n$  ha un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile per ogni  $n \geq q$ , e se  $H_n(L(M)) = 0$  per ogni  $n \geq q - 1$  e per tutti i modelli  $M \in \mathcal{M}$ , allora  $f$  si estende a un morfismo  $f' : K \rightarrow L$  in tutte le dimensioni. Se  $f', f'' : K \rightarrow L$  sono due tali estensioni di  $f$ , allora esiste un'omotopia di morfismi di catene  $D : f' \simeq f''$  con  $D_n = 0$  per ogni  $n < q$ .*

**Corollario 1.4.13.** *Siano  $K, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_A$  funtori, con  $K = L$  in dimensioni  $< q$ . Se  $K_n, L_n$  hanno un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile per ogni  $n$ , e se  $H_n(K(M)) = 0$ ,  $H_n(L(M)) = 0$  per ogni modello  $M \in \mathcal{M}$ , allora esistono morfismi di catene  $f : K \rightarrow L$  e  $g : L \rightarrow K$  con  $gf \simeq id_K$  e  $fg \simeq id_L$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $\check{f}, \check{g}$  le funzioni "identità"  $K \rightarrow L$  e  $L \rightarrow K$ ;  $\check{g}\check{f}$  e  $\check{f}\check{g}$  sono propriamente identità in dimensioni  $< q$ . Notiamo che si hanno omotopie banali  $\check{g}\check{f} \simeq \text{id}_K$  e  $\check{f}\check{g} \simeq \text{id}_L$  in dimensioni  $< q$ . Questi si estendono a  $f, g, gf$  e  $fg$  con le proprietà e le omotopie desiderate.  $\square$

**Teorema 1.4.14.** *Siano  $K, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_A$  funtori, con  $K = L$  in dimensioni  $< q$ . Se  $K_n, L_n$  hanno un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile per ogni  $n$ , e se  $H_n(K(M)) = 0, H_n(L(M)) = 0$  per ogni modello  $M \in \mathcal{M}$ , allora, per ogni oggetto  $X$  in  $\mathcal{C}$ , e per ogni  $n \geq 0$ :*

$$H_n(K(X)) \simeq H_n(L(X)).$$

*Dimostrazione.* Per il **Corollario 1.4.15**, abbiamo che  $f : K \rightarrow L$  è un'equivaleza omotopica di catene. Per la **Proposizione 1.4.11** questo induce l'equivaleza omotopica di catene  $f_X : K(X) \rightarrow L(X)$  per ogni oggetto  $X$  di  $\mathcal{C}$ , che implica un isomorfismo fra i gruppi di omologia dei complessi.  $\square$

#### 1.4.4 Modelli per l'omologia e dimostrazione dell'equivaleza

Scegliamo come modello  $\mathcal{M}$  per la categoria  $\mathcal{T}$  degli spazi topologici, l'insieme degli spazi contraibili.

**Proposizione 1.4.15.** *Per un qualsiasi modello  $\mathcal{M}$  si ha:*

$$H_n(S(M)) = H_n(S^N(M)) = 0$$

*Dimostrazione.* Sia  $M$  contraibile a un punto  $p$ . Allora  $H : I \times M \rightarrow M$  è tale che  $H(0, x) = x, H(1, x) = p$  per ogni  $x \in M$ . Dato un  $n$ -simplesso singolare  $\sigma$ , definiamo  $h_n(\sigma)$  come:

$$\begin{cases} h_n\sigma(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) = H(\lambda_0, \sigma(k\lambda_1, \dots, k\lambda_{n+1})) & \text{se } \lambda_0 \neq 1 \\ h_n\sigma(1, 0, \dots, 0) = p \end{cases}$$

ove  $k = 1/(1 - \lambda_0)$ .

Per  $n > 0$  abbiamo  $\delta_0 h_n = \text{id}_{S_n(M)}, \delta_i h_n = h_n \delta_{i-1}$  se  $i > 0$ .

Per  $n = 0$  abbiamo  $\delta_0 h_1 = \text{id}_{S_1(M)}, \delta_1 h_0 = h_0(1)$ .

Queste relazioni implicano che  $\delta_{n+1} h_{n+1} + h_n \delta_n = \text{id}_{S_n(M)}$  come desiderato.  $\square$

**Proposizione 1.4.16.** *I funtori  $S_n$  e  $S_n^N$  hanno un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile per ogni  $n$ .*

*Dimostrazione.* Notiamo subito che, data una mappa  $\alpha : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{T}$ , il funtore  $S_n$  manda un  $n$ -simpleso  $\sigma$  di  $X$  in un  $n$ -simpleso  $\alpha \circ \sigma$  di  $Y$ .

Consideriamo, per ogni  $n$ , il modello  $M_n = \Delta^n$  dell' $n$ -simpleso standard. Sia  $e^n = \text{id}_{M_n}$ . Definiamo una trasformazione naturale  $\Theta : S_n \rightarrow \tilde{S}_n$  definendo ogni componente  $\Theta_\Lambda : \sigma \mapsto (\sigma, e^n)$ . Chiaramente  $\Psi\Theta$  è la trasformazione identica di  $S_n$ ; perciò  $S_n$  ha un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile. La seconda parte della dimostrazione si può trovare in [4].  $\square$

**Teorema 1.4.17.** *Sia  $f : S \rightarrow S^N$  la trasformazione naturale quoziente. Esiste allora una trasformazione  $g : S^N \rightarrow S$  tale che  $gf \simeq \text{id}_S$  e  $fg \simeq \text{id}_{S^N}$ .*

Ricordiamo ora che, dato uno spazio  $X$ , abbiamo definito il complesso di catene cubiche singolari  $Q(X)$  e il suo quoziente (o normalizzato, utilizzando la nozione analoga per i semplici)  $C(X) = Q^N(X)$ . Considerando il funtore  $Q^N : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}_A$  possiamo dare i seguenti risultati:

**Proposizione 1.4.18.** *Per ogni modello  $M \in \mathcal{M}$  si ha:*

$$H_n(Q^N(M)) = 0.$$

*Dimostrazione.* La prova dell'asserto segue immediatamente dal fatto che  $M$  è contraibile.  $\square$

**Proposizione 1.4.19.** *I funtori  $Q_n^N$  hanno un ricoprimento  $\mathcal{M}$ -rappresentabile per ogni  $n$ .*

*Dimostrazione.* Vedi S. Eilenberg, S. Mac Lane, *Acyclic models*, pp. 189-199.  $\square$

Siamo ora in possesso di tutti gli strumenti per enunciare il seguente teorema:

**Teorema 1.4.20.** *Esistono trasformazioni  $f : S^N \rightarrow Q^N$  e  $g : Q^N \rightarrow S^N$  e omotopie  $H : gf \simeq \text{id}_{S^N}$  e  $G : fg \simeq \text{id}_{Q^N}$  tali che  $f$  e  $g$  siano l'identità in dimensione  $< 2$  e  $H, G$  siano nulle in dimensioni  $< 2$ .*

*Dimostrazione.* Vedi S. Eilenberg, S. Mac Lane, *Acyclic models*, pp. 189-199.  $\square$

Combinato con gli altri risultati fornisce lo strumento cercato:

**Teorema 1.4.21.** *Sia  $X$  uno spazio topologico. Per ogni  $n$ , si ha:*

$$H_n(S(X)) \simeq H_n(Q^N(X)).$$

*Ossia l'omologia singolare simpliciale non normalizzata, e l'omologia singolare cubica normalizzata forniscono gruppi isomorfi in tutte le dimensioni.*



## Capitolo 2

# Strumenti di calcolo dei gruppi di omologia

In questo capitolo vengono discussi i principali metodi di calcolo dei gruppi di omologia di uno spazio qualsiasi  $X$ .

Il principale strumento utilizzato è il calcolo dei gruppi di omologia di una coppia di spazio-sottospazio, detti anche gruppi di omologia relativi, che forniscono informazioni fondamentali sull'omologia dell'intero spazio  $X$ .

Un altro oggetto di studio di base per la teoria è la successione di Mayer-Vietoris, che è un analogo in omologia del teorema di Seifert-Van Kampen sul calcolo dei gruppi fondamentali.

Si dà poi una generalizzazione della teoria con i gruppi di omologia a coefficienti in gruppi abeliani, tramite l'utilizzo di tecniche sviluppate nel Capitolo 0.

L'ultima sezione tratta del calcolo dei gruppi di omologia del prodotto di spazi topologici, a partire dalla conoscenza dei gruppi di omologia di ciascun fattore.

Esempi sistematici di applicazione di questi metodi saranno riscontrabili nel capitolo successivo.

### 2.1 Omologia di una coppia

Sia  $A$  un sottospazio topologico di  $X$ , e  $i : A \rightarrow X$  la mappa di inclusione. Essendo  $i$  iniettiva,  $i_{\#} : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$  è morfismo iniettivo: possiamo quindi considerare  $C_n(A)$  come un sottogruppo di  $C_n(X)$ . Questo è il sottogruppo di  $C_n(X)$  generato da tutti gli  $n$ -cubi singolari non degeneri che hanno immagine contenuta in  $A$ .

**Definizione 2.1.1.** Denotiamo con  $C_n(X, A)$  il gruppo quoziente  $C_n(X)/C_n(A)$ . Tale quoziente è detto **gruppo delle catene  $n$ -dimensionali della coppia**  $(X, A)$ .

Visto che  $\delta_n(C_n(A)) \subseteq C_{n-1}(A)$ , l'operatore di bordo induce un omomorfismo sui quozienti, che denotiamo con  $\delta'_n$ :

$$\delta'_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$$

Definiamo inoltre il gruppo dei **cicli  $n$ -dimensionali della coppia**  $(X, A)$ :

$$Z_n(X, A) = \text{Ker}(\delta'_n) = \{u \in C_n(X, A) : \delta'_n(u) = 0\}$$

e il gruppo dei **bordi  $n$ -dimensionali della coppia**  $(X, A)$ :

$$B_n(X, A) = \text{Im}(\delta'_{n+1}) = \delta'_{n+1}(C_{n+1}(X, A)).$$

Come per i gruppi di omologia di uno spazio,  $\delta'^2 = 0$ , essendo indotto da  $\delta$ , pertanto

$$B_n(X, A) \subseteq Z_n(X, A)$$

e possiamo infine definire il **gruppo di omologia  $n$ -dimensionale della coppia**  $(X, A)$

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A)/B_n(X, A).$$

La nozione di gruppo di omologia di una coppia è intuitiva: informalmente, la definizione è la stessa di quella dei gruppi di omologia standard, tranne per il fatto che gli  $n$ -cubi singolari contenuti in  $A$  vengono trascurati.

### 2.1.1 Sequenza esatta di una coppia

È utile mostrare i gruppi di catene  $C_n(X)$ ,  $C_n(A)$  e  $C_n(X, A)$  in un diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \end{array} \\
 C_{n+1}(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_{n+1}(X, A) \\
 \downarrow \delta_{n+1} & & \downarrow \delta_{n+1} & & \downarrow \delta'_{n+1} \\
 C_n(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_n(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_n(X, A) \\
 \downarrow \delta_n & & \downarrow \delta_n & & \downarrow \delta'_n \\
 C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_{n-1}(X, A) \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \end{array}
 \end{array}$$

Ove le linee verticali sono gli operatori di bordo,  $i_{\sharp}$  è il solito morfismo di inclusione e  $j_{\sharp}$  è il naturale omomorfismo suriettivo da  $C_n(X)$  nel quoziente  $C_n(X, A)$ .

Il diagramma è commutativo; per  $n < 0$  definiamo  $C_n(X) = C_n(A) = C_n(X, A) = \{0\}$ .

Gli omomorfismi  $i_{\sharp}$  e  $j_{\sharp}$  inducono omomorfismi  $i_*$  e  $j_*$  fra i gruppi di omologia; definiamo quindi, per ogni  $n$ , un omomorfismo di bordo

$$\delta_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

con la seguente procedura (si ragiona applicando al caso presente la dimostrazione della **Proposizione 0.1.17**):

Sia  $u \in H_n(X, A)$ ; consideriamo un rappresentante  $u'$  di  $u$  in  $C_n(X, A)$ . Essendo  $j_{\sharp}$  suriettivo, possiamo scegliere  $u'' \in C_n(X)$  tale che  $j_{\sharp}(u'') = u'$ .

Consideriamo ora la catena  $\delta_n(u'') \in C_{n-1}(X)$ ; per la commutatività del diagramma si ha  $j_{\sharp}(\delta_n(u'')) = 0$ , infatti  $j_{\sharp}(\delta_n(u'')) = \delta'_n(j_{\sharp}(u'')) = \delta'_n(u') = 0$  essendo  $u' \in Z_n(X, A) = \text{Ker}(\delta'_n)$ .

Essendo  $j_{\sharp}(\delta_n(u'')) = 0$ , di conseguenza  $\delta_n(u'') \in \text{Ker}(j_{\sharp}) = C_{n-1}(A)$ ; definiamo  $\delta_*(u)$  come la classe di omologia di  $\delta_n(u'')$  in  $C_{n-1}(A)$ , che è ben definita in  $H_{n-1}(A)$ .

Chiamiamo  $\delta_*$  **operatore di bordo della coppia**  $(X, A)$ .

È naturale allora considerare la sequenza di gruppi e omomorfismi:

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \dots$$

Tale sequenza è detta **sequenza di omologia della coppia**  $(X, A)$ .

**Teorema 2.1.2.** *La sequenza di omologia di una qualsiasi coppia  $(X, A)$  è esatta.*

*Dimostrazione.* Verifichiamo le uguaglianze fra nuclei e immagini con doppie inclusioni:

- $\text{Im}(i_*) \subseteq \text{Ker}(j_*)$  segue immediatamente dal fatto che  $ji = 0$ ;
- $\text{Im}(j_*) \subseteq \text{Ker}(\delta_*)$  poiché  $\delta j(u) = 0 \quad u \in H_n(X)$  per la definizione di  $\delta$ ;
- $\text{Im}(\delta_*) \subseteq \text{Ker}(i_*)$ , infatti se  $u \in H_n(X, A)$ , poiché  $\delta_*(u)$  è definita come la classe di omologia del bordo dell'antimmagine tramite  $j$  di  $u$ , l'inclusione in  $X$  manda  $\delta_*(u)$  in un bordo, ossia nella classe di omologia della catena nulla in  $X$ ;
- $\text{Ker}(j_*) \subseteq \text{Im}(i_*)$ : una classe di omologia  $u$  in  $\text{Ker}(j_*)$  è rappresentata da un ciclo  $u'$  in  $C_n(X)$ , con  $j(u')$  bordo, così che  $j(u') = \delta_{n+1}(u'')$  per

qualche  $u'' \in C_{n+1}(X, A)$ .

Essendo  $j$  suriettiva,  $u'' = j(v)$  per qualche  $v$  in  $C_{n+1}(X)$ . Si ha allora  $j(u' - \delta_{n+1}(v)) = (j(u') - j(\delta_{n+1}(v))) = j(u') - \delta_{n+1}(j(v)) = 0$  essendo  $\delta_{n+1}(j(v)) = \delta_{n+1}(u'') = j(u')$ .

Allora  $u' - \delta_{n+1}(v) = i(w)$  per qualche  $w \in C_n(A)$ . Tale  $w$  è un ciclo, visto che  $i(\delta_n(w)) = \delta_n(i(w)) = \delta_n(u' - \delta_{n+1}(v)) = \delta_n(u') = 0$ , e  $i$  è iniettiva.

Pertanto  $i_*([w]) = [u' - \delta_{n+1}(v)] = [u'] = u$ , che mostra quanto desiderato;

- $\text{Ker}(\delta_*) \subseteq \text{Im}(j_*)$  utilizzando la notazione della definizione di  $\delta_*$  e chiamando  $\delta(u'') = v \in C_{n-1}(A)$ , sia  $u$  classe di omologia in  $\text{Ker}(\delta_*)$ , allora  $v = \delta_n(v')$  per qualche  $v' \in C_n(A)$ .

L'elemento  $u'' - i(v')$  è un ciclo, visto che  $\delta_n(u'' - i(v')) = \delta_n(u'') - \delta_n(i(v')) = \delta_n(u'') - i(\delta_n(v')) = \delta_n(u'') - i(v) = 0$ .

Inoltre,  $j(u'' - i(v')) = j(u'') - ji(v') = j(u'') = u' = [u]$  così che  $j$  mappa la classe di omologia di  $u'' - i(v')$  in  $u$ ;

- $\text{Ker}(i_*) \subseteq \text{Im}(\delta_*)$ : sia dato un ciclo  $a \in C_{n-1}(A)$  tale che  $i(a) = \delta_n(u)$  per qualche  $u \in C_n(X)$ ; allora  $j(u)$  è un ciclo visto che  $\delta_n(j(u)) = j(\delta_n(u)) = j(i(a)) = 0$ , e quindi  $\delta_*[j(u)] = [a]$ .

□

**Proposizione 2.1.3.** *Sia  $(X, A)$  una coppia, con  $A \neq \emptyset$ .*

*Allora l'operatore di bordo:*

$$\delta_* : H_1(X, A) \rightarrow H_0(A)$$

*è tale che:*

$$\delta_*(H_1(X, A)) \subseteq \tilde{H}_0(A) \leq H_0(A)$$

*e la sequenza*

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_0(X, A) \rightarrow 0$$

*è esatta.*

*Dimostrazione.* Vedi W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, p. 172. □

*Osservazione 2.1.4.* La proposizione precedente implica che, in una coppia  $(X, A)$ ,  $A \neq \emptyset$ , possiamo sostituire i gruppi di omologia con quelli di omologia ridotta nella sequenza di omologia della coppia, mantenendo inalterate le proprietà di esattezza.

Vediamo ora come estendere le proprietà degli omomorfismi indotti nei gruppi di omologia da mappe continue agli omomorfismi indotti fra i gruppi di omologia relativi da un nuovo tipo di mappa:

**Definizione 2.1.5.** Siano  $(X, A)$ ,  $(Y, B)$  coppie formate da uno spazio topologico e un suo sottospazio.

Diciamo che una funzione continua  $f : X \rightarrow Y$  è una *mappa di coppia* di  $(X, A)$  in  $(Y, B)$  se  $f(A) \subseteq B$ .

Indichiamo tale funzione con  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

*Osservazione 2.1.6.* Ogni mappa  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  induce un omomorfismo  $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y) \forall n \in \mathbb{N}$ .

Essendo inoltre  $f(A) \subseteq B$ ,  $f_{\#}$  manda  $C_n(A)$  in  $C_n(B)$ .

C'è un omomorfismo indotto, allora, tra i gruppi quoziente  $C_n(X, A)$  e  $C_n(Y, B)$ , che indichiamo di nuovo con  $f_{\#}$ .

Questo omomorfismo commuta con l'operatore di bordo  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{ccc} C_n(X, A) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y, B) \\ \downarrow \delta_n & & \downarrow \delta_n \\ C_{n-1}(X, A) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y, B) \end{array}$$

è commutativo.

Allora  $f_{\#}$  induce un omomorfismo  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$

**Definizione 2.1.7.** Due mappe di coppia  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sono *omotope* se esiste una mappa continua

$$F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$$

tale che:

- $F(x, 0) = f(x) \forall x \in X$ ;
- $F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ ;
- $F(a, t) \in B \forall a \in A, t \in I$ .

**Teorema 2.1.8.** Siano  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mappe di coppia. Se  $f$  e  $g$  sono omotope, allora gli omomorfismi indotti

$$f_*, g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

sono uguali.

*Dimostrazione.* L'enunciato si prova utilizzando la stessa tecnica del **Teorema 1.2.3**, utilizzando mappe di coppie e gruppi di catene della coppia.  $\square$

**Definizione 2.1.9.** Due coppie  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  sono dello stesso *tipo di omotopia* come coppie se esistono due mappe di coppia  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  tali che:

- $fg$  è omotopa come mappa di coppia all'identità di  $(Y, B)$ ;
- $gf$  è omotopa come mappa di coppia all'identità di  $(X, A)$ .

Due tali mappe vengono dette *equivalenze omotopiche di coppie*.

**Teorema 2.1.10.** *Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  è equivalenza omotopica di coppie, allora gli omomorfismi indotti*

$$f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

e

$$f_* : \tilde{H}_0(X, A) \rightarrow \tilde{H}_0(Y, B)$$

sono isomorfismi  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Dimostrazione.* La prova segue direttamente dal **Teorema 2.1.8**, ed è analoga alla dimostrazione del **Teorema 1.2.7**.  $\square$

La proprietà più importante dell'omomorfismo indotto sui gruppi di omologia relativi da una mappa di coppia è certamente quanto asserisce la seguente:

**Proposizione 2.1.11.** *Sia  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mappa di coppie. Allora ogni quadrato del diagramma seguente è commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-1}(A) & \cdots \rightarrow \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\
 \cdots & \rightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-1}(B) & \cdots \rightarrow
 \end{array}$$

Per i primi due quadrati, segue dal fatto che  $(fg)_* = f_*g_*$ , mentre il terzo esprime una nuova proprietà specifica dell'omologia relativa.

### 2.1.2 Il teorema di escissione

**Teorema 2.1.12.** *Sia  $(X, A)$  una coppia,  $W \subset A$  tale che  $\overline{W} \subset A^\circ$ . Allora la mappa di inclusione  $i : (X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow (X, A)$  induce,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , un isomorfismo:*

$$H_n(X \setminus W, A \setminus W) \simeq H_n(X, A).$$

*ovvero sotto le ipotesi possiamo recidere l'insieme  $W$  senza alterare i gruppi di omologia relativi.*

La dimostrazione si basa sul fatto che possiamo scegliere  $n$ -cubi singolari arbitrariamente piccoli in  $X$ . Per dimostrare il teorema occorrono alcuni risultati preliminari.

**Definizione 2.1.13.** Sia  $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  tali che  $\mathcal{U}^\circ = \{U_\lambda^\circ : \lambda \in \Lambda\}$  sia ricoprimento aperto di  $X$ . Una tale famiglia di insiemi è detta *ricoprimento aperto generalizzato* di  $X$ .

Un  $n$ -cubo singolare  $T : I^n \rightarrow X$  è detto *piccolo di ordine  $\mathcal{U}$*  se esiste  $\lambda \in \Lambda$  tale che  $T(I^n) \subset U_\lambda$ .

Utilizzeremo la seguente notazione:

- $Q_n(X, \mathcal{U})$  è il sottogruppo di  $Q_n(X)$  generato dagli  $n$ -cubi di ordine  $\mathcal{U}$ ;
- $D_n(X, \mathcal{U}) = D_n(X) \cap Q_n(X, \mathcal{U})$ ;
- $C_n(X, \mathcal{U}) = Q_n(X, \mathcal{U})/D_n(X, \mathcal{U})$ ;
- Se  $A \subset X$ ,  $Q_n(A, \mathcal{U}) = Q_n(A) \cap Q_n(X, \mathcal{U})$ ;
- $C_n(X, A, \mathcal{U}) = C_n(X, \mathcal{U})/C_n(A, \mathcal{U})$ .

Ovviamente  $\delta_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$  induce i seguenti omomorfismi:

- $C_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow C_{n-1}(X, \mathcal{U})$ ;
- $C_n(A, \mathcal{U}) \rightarrow C_{n-1}(A, \mathcal{U})$ ;
- $C_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow C_{n-1}(X, A, \mathcal{U})$ .

Possiamo definire quindi  $Z_n(X, A, \mathcal{U})$  e  $B_n(X, A, \mathcal{U})$  nel solito modo, ottenendo infine  $H_n(X, A, \mathcal{U})$ .

Inoltre il fatto che  $Q_n(X, A, \mathcal{U}) \subset Q_n(X, A)$  induce,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , omomorfismi:

$$\sigma_n : C_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow C_n(X, A)$$

che sono iniettivi.

Il seguente diagramma è commutativo,

$$\begin{array}{ccc} C_n(X, A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{\sigma_n} & C_n(X, A) \\ \downarrow \delta_n & & \downarrow \delta_n \\ C_{n-1}(X, A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{\sigma_{n-1}} & C_{n-1}(X, A) \end{array}$$

ossia  $\sigma$  commuta con l'operatore di bordo nel modo ovvio.

Pertanto viene indotto un omomorfismo iniettivo:

$$\sigma_* : H_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X, A).$$

**Teorema 2.1.14.** *Sia  $\mathcal{U}$  collezione di sottoinsiemi di  $X$  che verifichi le ipotesi di cui sopra.*

*Allora l'omomorfismo:*

$$\sigma_* : H_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X, A)$$

*è un isomorfismo di gruppi.*

*Dimostrazione.* Vedi W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, pp. 178-185.  $\square$

Siamo ora in possesso di tutti gli strumenti necessari alla dimostrazione del teorema di escissione:

*Dimostrazione (Teorema di Escissione).* Siano  $(X, A)$  e  $W$  come sopra.

Notiamo subito che  $(X \setminus W) \cup A^\circ = X$ ; allora  $\mathcal{U} = \{X \setminus W, A^\circ\}$  è un ricoprimento aperto come nella **Definizione 2.1.13**.

Per ogni  $n \in N$ , vale  $C_n(X, \mathcal{U}) = C_n(A) + C_n(X \setminus W)$  (ossia  $C_n(X, \mathcal{U})$  è il più piccolo gruppo che li contiene entrambi).

Consideriamo il seguente diagramma per ogni  $n$ :

$$\begin{array}{ccc} C_n(X \setminus W, A \setminus W) & \xrightarrow{1} & C_n(X, A) \\ & \searrow 2 & \uparrow \sigma_n \\ & & C_n(X, A, \mathcal{U}) \end{array}$$

Ogni omomorfismo indicato è indotto da un'inclusione; otteniamo allora il diagramma commutativo fra gruppi di omologia:

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X \setminus W, A \setminus W) & \xrightarrow{3} & H_n(X, A) \\
 & \searrow 4 & \uparrow \sigma_* \\
 & & H_n(X, A, \mathcal{U})
 \end{array}$$

Vogliamo che 3 sia un isomorfismo; visto che  $\sigma_*$  è un isomorfismo per il **Teorema 2.1.14**, basta mostrare che 4 è un isomorfismo.

Consideriamo 2:

$$C_n(X \setminus W, A \setminus W) = C_n(X \setminus W) / C_n(A \setminus W) = \frac{C_n(X \setminus W)}{[C_n(X \setminus W) \cap C_n(A)]}$$

similmente,

$$C_n(X, A, \mathcal{U}) = C_n(X, \mathcal{U}) / C_n(A, \mathcal{U}) = \frac{[C_n(A) + C_n(X \setminus W)]}{C_n(A)}.$$

Di conseguenza, 2 è omomorfismo tra

$$\frac{C_n(X \setminus W)}{[C_n(X \setminus W) \cap C_n(A)]} \rightarrow \frac{[C_n(A) + C_n(X \setminus W)]}{C_n(A)}$$

indotto dalle relazioni di inclusione.

Usando la teoria dei gruppi, notiamo che 2 è isomorfismo.

Ma se 2 è isomorfismo, allora anche 4 è isomorfismo, e pertanto 3 è isomorfismo (per il diagramma di cui sopra), che è il risultato desiderato.  $\square$

Sia  $(X, A)$  una coppia di spazio-sottospazio. Un'importante conseguenza del teorema appena dimostrato è una proposizione che permette, sotto opportune ipotesi, di identificare il gruppo di omologia  $n$ -dimensionale relativo  $H_n(X, A)$  con il gruppo di omologia  $n$ -dimensionale dello spazio quoziente  $H_n(X/A)$ . Diamo la seguente definizione:

**Definizione 2.1.15.** Una coppia  $(X, A)$  è detta *buona coppia* se  $A$  è retrato di deformazione di un aperto di  $X$ .

**Proposizione 2.1.16.** *Sia  $(X, A)$  una buona coppia. Allora la mappa quoziente  $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  induce isomorfismi fra i gruppi di omologia  $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \simeq H_n(X/A)$  per ogni  $n$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un intorno aperto di  $A$  in  $X$  che si retrae su  $A$ . Si ottiene il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\
\downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\
H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A)
\end{array}$$

Visto che  $A$  è retracts di deformazione di  $V$ , c'è un'equivalenza omotopica fra le coppie  $(V, A)$  e  $(A, A)$ , quindi  $H_n(V, A) = H_n(A, A) = \{0\} \quad \forall n > 0$ . In particolare, considerando la sequenza esatta della tripla  $(X, V, A)$ , otteniamo che la mappa in alto a sinistra è un isomorfismo.

Per gli stessi motivi, anche la mappa in basso a sinistra è un isomorfismo. Per il teorema di escissione, le ulteriori due mappe orizzontali sono isomorfismi.

La mappa verticale  $q_*$  a destra è un isomorfismo, visto che  $q$  è omeomorfismo sul complementare di  $A$  in  $X$ : segue allora, per la commutatività del diagramma, che la mappa verticale  $q_*$  a sinistra è un isomorfismo.  $\square$

Diamo ora un ulteriore risultato dipendente dal teorema di escissione:

**Definizione 2.1.17.** Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff,  $x \in X$ . Il gruppo  $H_n(X, X \setminus \{x\})$  è detto *gruppo di omologia locale  $n$ -dimensionale* di  $X$  rispetto ad  $x$ .

Segue dal teorema di escissione, che, dato un qualsiasi  $U$  intorno aperto di  $x$ ,  $H_n(X, X \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\})$ ; allora il nome *locale* è pienamente giustificato dal fatto che il gruppo di omologia dipende solo dalle proprietà topologiche locali di  $X$  vicino a  $x$ .

## 2.2 La successione di Mayer-Vietoris

Sia  $X$  uno spazio topologico,  $A$  e  $B$  due sottospazi tali che

$$X = A \cup B$$

Vogliamo capire la relazione tra i gruppi di omologia  $H(A)$ ,  $H(B)$ ,  $H(A \cap B)$  e  $H(X)$ .

**Definizione 2.2.1.** Siano:

$$- i_* : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A);$$

- $j_* : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(B)$ ;
- $k_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ ;
- $l_* : H_n(B) \rightarrow H_n(X)$ .

omomorfismi indotti dalle inclusioni.

Definiamo

$$\varphi : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$$

e

$$\psi : H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X)$$

in questo modo:

- $\varphi(w) = (i_*(w), j_*(w)) \forall w \in H_n(A \cap B)$ ;
- $\psi(u, v) = k_*(u) - l_*(v) \forall u \in H_n(A), v \in H_n(B)$ .

**Teorema 2.2.2.** *Siano  $A$  e  $B$  due sottospazi topologici di  $X$  tali che  $X = A^\circ \cup B^\circ$ .*

*Allora è possibile definire,  $\forall n > 0$ , omomorfismi naturali*

$$\Delta : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$$

*tali che la sequenza:*

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} \dots$$

*risulti esatta.*

*Se  $A \cap B \neq \emptyset$ , la sequenza rimane esatta sostituendo i gruppi di omologia ridotta a quelli standard.*

Tale sequenza è detta **successione di Mayer-Vietoris**.

La definizione di  $\Delta$  è naturale, nel senso che se  $X' = A' \cap B'$ , e  $f : X \rightarrow X'$  continua tale che  $f(A) \subseteq A'$  e  $f(B) \subseteq B'$ , il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(A \cap B) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(X') & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(A' \cap B') \end{array}$$

*Dimostrazione.*  $\mathcal{U} = \{A, B\}$  è ricoprimento aperto generalizzato (**Definizione 2.1.13**), quindi per il **Teorema 2.1.14** il morfismo di catene  $\sigma : C(X, \mathcal{U}) \rightarrow C(U)$  induce isomorfismi fra i gruppi di omologia.

Notiamo che  $C_n(X, \mathcal{U}) = C_n(A) + C_n(B)$  ossia è il minimo sottogruppo di  $C_n(X)$  contenente entrambi.

Siano:

- $i_{\#} : C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A)$ ;
- $j_{\#} : C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(B)$ ;
- $k_{\#} : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$ ;
- $l_{\#} : C_n(B) \rightarrow C_n(X)$ .

morfismi indotti dalle inclusioni. Definiamo

$$\Phi : C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A) \oplus C_n(B)$$

$$\Phi(w) = (i_{\#}(w), j_{\#}(w))$$

e

$$\Psi : C_n(A) \oplus C_n(B) \rightarrow C_n(X, \mathcal{U})$$

$$\Psi(u, v) = k_{\#}(u) - l_{\#}(v).$$

$C(A \cap B)$ ,  $C(A) \oplus C(B)$  e  $C(X, \mathcal{U})$  sono complessi di catene con le usuali mappe di bordo definite nel Capitolo 1.

Consideriamo,  $\forall n > 0$ , la sequenza:

$$0 \rightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\Psi} C_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow 0$$

La sequenza è esatta per ogni  $n$ , infatti:

- $\Phi(w) = 0 \iff (i_{\#}(w), j_{\#}(w)) = (0, 0) \iff w = 0$  ossia  $\Phi$  è iniettiva;
- $\Psi$  è suriettiva per la definizione di  $C(X, \mathcal{U})$ ;
- $\text{Im}(\Phi) \subseteq \text{Ker}(\Psi)$ , infatti  $\Psi(\Phi(w)) = \Psi(i_{\#}(w), j_{\#}(w)) = k_{\#}(w) - l_{\#}(w) = 0$  essendo  $w \in C(A \cap B)$ ;
- $\text{Ker}(\Psi) \subseteq \text{Im}(\Phi)$ , infatti se  $(u, v) \in \text{Ker}(\Psi)$  allora  $u - v = 0 \implies u = v \implies (u, v) \in \Phi(C(A \cap B))$ .

Allora abbiamo una sequenza esatta di complessi di catene:

$$0 \rightarrow C(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{\Psi} C(X, \mathcal{U}) \rightarrow 0.$$

Possiamo allora passare ai gruppi di omologia e definire il morfismo di bordo,  $\Delta$ , in maniera del tutto analoga a quanto fatto per la sequenza esatta di una coppia:

$$\Delta : H_n(X, \mathcal{U}) \simeq H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B).$$

Otteniamo allora la sequenza esatta cercata.  $\square$

## 2.3 Omologia del prodotto di spazi topologici

L'obiettivo di questa sezione è dare un collegamento fra i complessi di catene di due spazi topologici  $X$  e  $Y$  e quelli del loro prodotto  $X \times Y$ . Verranno utilizzati strumenti introdotti nella sezione 0.1 e nella sezione 1.3.

### 2.3.1 Teorema di Eilenberg-Zilber

**Definizione 2.3.1.** Siano  $C' = \{C'_n, \delta'_n\}$  e  $C'' = \{C''_n, \delta''_n\}$  complessi di catene. Il loro *prodotto tensore*  $C = C' \otimes C''$  è così definito:

$$C_n = \bigoplus_{p+q=n} C'_p \otimes C''_q$$

e il morfismo:

$$\delta_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$$

è definito da:

$$\delta_n(u \otimes v) = \delta'_p(u) \otimes v + (-1)^p u \otimes \delta''_q(v)$$

sui generatori, e poi esteso per linearità.

Vogliamo definire una mappa  $\zeta : C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(X \times Y)$ .

Utilizziamo la seguente notazione:

se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  sono continue, allora

$$f \times g : A \times C \rightarrow B \times D$$

è la mappa definita da:

$$(f \times g)(a, c) = (f(a), g(c)).$$

Si ha un isomorfismo canonico:

$$I^m \times I^n \simeq I^{m+n}$$

ove  $I = [0, 1]$ ; scriveremo  $I^m \times I^n = I^{m+n}$  per semplicità.

Allora, se  $T : I^m \rightarrow X$  e  $S : I^n \rightarrow Y$  sono  $n$ -cubi singolari in  $X$  e  $Y$  rispettivamente:

$$T \times S : I^{m+n} \rightarrow X \times Y$$

è  $(n + m)$ -cubo singolare in  $X \times Y$ . Definiamo quindi un omomorfismo:

$$\zeta_{m,n} : Q_m(X) \otimes Q_n(Y) \rightarrow Q_{m+n}(X \times Y)$$

con la formula:

$$\zeta_{m,n}(T \otimes S) = T \times S.$$

Il morfismo  $\zeta_{m,n}$  definisce pertanto un morfismo di catene:

$$\zeta : Q(X) \otimes Q(Y) \rightarrow Q(X \times Y).$$

Occorre calcolare il morfismo  $\delta$  di bordo; sfruttiamo le formule di seguito:

- $A_i(T) \times S = A_i(T \times S)$ ;
- $B_i(T) \times S = B_i(T \times S)$ ;
- $T \times A_j(S) = A_{m+j}(T \times S)$ ;
- $T \times B_j(S) = B_{m+j}(T \times S)$ ;

per  $i \leq m$  e  $j \leq n$ .

Ovviamente, se  $T$  o  $S$  sono degeneri, così è anche  $T \times S$ . Perciò:

$$\zeta_{m,n}(Q_m(X) \otimes D_n(Y)) \subseteq D_{m+n}(X \times Y)$$

$$\zeta_{m,n}(D_m(X) \otimes Q_n(Y)) \subseteq D_{m+n}(X \times Y).$$

Allora  $\zeta$  induce omomorfismi sui quozienti:

$$\zeta_{m+n} : C_m(X) \otimes C_n(Y) \rightarrow C_{m+n}(X \times Y)$$

che definiscono, al variare di  $m$  e  $n$ , il morfismo di catene:

$$\zeta : C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(X \times Y).$$

Il morfismo  $\zeta$  soddisfa anche la proprietà di naturalità rispetto ai morfismi di catene; siano infatti  $f : X \rightarrow X'$  e  $g : Y \rightarrow Y'$  continue, allora:

$$\begin{array}{ccc}
 Q_m(X) \otimes Q_n(Y) & \xrightarrow{\zeta_{m,n}} & Q_{m+n}(X \times Y) \\
 \downarrow f_{\#} \otimes g_{\#} & & \downarrow (f \times g)_{\#} \\
 Q_m(X') \otimes Q_n(Y') & \xrightarrow{\zeta_{m,n}} & Q_{m+n}(X' \times Y')
 \end{array}$$

è un diagramma commutativo. Vista la proprietà di  $\zeta$  sui cubi singolari degeneri, possiamo passare ai quozienti:

$$\begin{array}{ccc}
 C_m(X) \otimes C_n(Y) & \xrightarrow{\zeta_{m,n}} & C_{m+n}(X \times Y) \\
 \downarrow f_{\#} \otimes g_{\#} & & \downarrow (f \times g)_{\#} \\
 C_m(X') \otimes C_n(Y') & \xrightarrow{\zeta_{m,n}} & C_{m+n}(X' \times Y')
 \end{array}$$

**Teorema di Eilenberg-Zilber.** *La mappa  $\zeta : C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(X \times Y)$  è un'equivalenza omotopica di complessi di catene, e quindi induce isomorfismi:*

$$\zeta_* : H_k(C(X) \otimes C(Y)) \rightarrow H_k(X \times Y)$$

*Dimostrazione.* Vedi W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, pp. 286-298.  $\square$

### 2.3.2 Teorema di Künneth e formule per il prodotto di spazi

Vogliamo ora studiare i gruppi di omologia del prodotto tensoriale di complessi di catene, in modo da interpretare il primo membro dell'isomorfismo nel teorema di Eilenberg-Zilber.

Definiamo, dati  $K$  e  $L$  complessi di catene, una mappa:

$$\alpha : H_m(K) \otimes H_n(L) \rightarrow H_{m+n}(K \otimes L)$$

in questo modo:

siano  $u \in H_m(K)$ ,  $v \in H_n(L)$ , e siano  $u' \in Z_m(K)$  e  $v' \in Z_n(L)$  rappresentanti rispettivamente di  $u$  e  $v$ .

$u' \otimes v' \in K_m \otimes L_n$  è un ciclo.

Indichiamo quindi con  $\alpha(u \otimes v)$  la classe di omologia del ciclo  $u' \otimes v'$  in  $K_m \otimes L_n$ .

Il morfismo  $\alpha$  è naturale:

infatti, siano  $f : K \rightarrow K'$  e  $g : L \rightarrow L'$  morfismi di catene; si ottiene subito che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_m(K) \otimes H_n(L) & \xrightarrow{\alpha} & H_{m+n}(K \otimes L) \\ \downarrow f_* \otimes g_* & & \downarrow (f \times g)_* \\ H_m(K') \otimes H_n(L') & \xrightarrow{\alpha} & H_{m+n}(K' \otimes L') \end{array}$$

è commutativo.

Inoltre, se:

$$E : 0 \rightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} K'' \rightarrow 0$$

è esatta, e  $L$  complesso di catene tale che:

$$E \otimes L : 0 \rightarrow K' \otimes L \xrightarrow{i \otimes 1} K \otimes L \xrightarrow{j \otimes 1} K'' \otimes L \rightarrow 0$$

è esatta, allora il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_m(K'') \otimes H_n(L) & \xrightarrow{\alpha} & H_{m+n}(K'' \otimes L) \\ \downarrow \delta_{E \otimes 1} & & \downarrow \delta_{E \otimes L} \\ H_{m-1}(K') \otimes H_n(L) & \xrightarrow{\alpha} & H_{m+n-1}(K' \otimes L) \end{array}$$

è commutativo.

**Teorema di Künneth.** *Siano  $K$  e  $L$  complessi di catene, di cui almeno uno consista di soli gruppi abeliani liberi.*

*Allora esiste una sequenza esatta spezzante:*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(K) \otimes H_j(L) \xrightarrow{\alpha} H_n(K \otimes L) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i+j=n} \text{Tor}(H_i(K), H_j(L)) \rightarrow 0.$$

*Dimostrazione.* Vedi S. Mac Lane, *Homology*, Capitolo V, § 10. □

Combiniamo ora i due risultati ottenuti, il teorema di Künneth e quello di Eilenberg-Zilber per ottenere informazioni complete sui gruppi di omologia del prodotto di due spazi topologici  $X$  e  $Y$ .

Otteniamo, se uno dei due spazi ha complesso di catene cubiche singolari abeliano libero, una sequenza esatta spezzante:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \xrightarrow{\alpha} H_n(X \times Y) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y)) \rightarrow 0.$$

La formula può essere generalizzata a gruppi di omologia relativi  $C(X, A) = C(X)/C(A)$ :

la sequenza di complessi di catene:

$$0 \rightarrow C(A) \rightarrow C(X) \rightarrow C(X, A) \rightarrow 0$$

è infatti esatta e spezzante.

C'è un isomorfismo naturale:

$$\frac{C(X)}{C(A)} \otimes \frac{C(Y)}{C(B)} \rightarrow \frac{C(X) \otimes C(Y)}{C(X) \otimes C(B) + C(Y) \otimes C(A)}.$$

Per la naturalità di  $\zeta$  rispetto alle mappe di inclusione  $i_{\#} : A \rightarrow X$  e  $j_{\#} : B \rightarrow Y$ , abbiamo un'equivalenza omotopica di catene:

$$\frac{C(X) \otimes C(Y)}{C(X) \otimes C(B) + C(Y) \otimes C(A)} \xrightarrow{\simeq} \frac{C(X \times Y)}{C(X \times B) + C(Y \times A)}.$$

Mostriamo un interessante risultato per coppie di sottospazi di  $X$  dette *escissive*:

**Definizione 2.3.2.** Siano  $X_1, X_2$  sottospazi di  $X$ .

Denotiamo con  $C(X_1) + C(X_2)$  il più piccolo sottogruppo di  $C(X_1 \cup X_2)$  che li contiene entrambi.

Si dice che la coppia  $\{X_1, X_2\}$  è *escissiva* se la mappa di catene:

$$C(X_1) + C(X_2) \rightarrow C(X_1 \cup X_2)$$

definita nel modo ovvio, induce isomorfismi fra i gruppi di omologia:

$$H_k(C(X_1) + C(X_2)) \simeq H_k(X_1 \cup X_2).$$

Condizioni sufficienti per essere una coppia escissiva sono:

- Se  $X_1 \cup X_2 = X_1^\circ \cup X_2^\circ$  nella topologia relativa, allora  $\{X_1, X_2\}$  è escissiva;
- Se  $X$  è un CW-complesso,  $X_1$  e  $X_2$  sottocomplessi di  $X$ , allora formano una coppia escissiva.

Se  $\{A \times Y, X \times B\}$  formano una coppia escissiva, allora la mappa di Eilenberg-Zilber:

$$C(X, A) \otimes C(Y, B) \rightarrow \frac{C(X \times Y)}{C(X \times B) + C(A \times Y)}$$

composta con il morfismo di catene:

$$\frac{C(X \times Y)}{C(X \times B) + C(A \times Y)} \rightarrow \frac{C(X \times Y)}{C((X \times B) \cup (A \times Y))}$$

induce un isomorfismo tra i gruppi di omologia:

$$H_k(C(X, A) \otimes C(Y, B)) \simeq H_k(X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

Vale il seguente:

**Teorema 2.3.3.** *Siano  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  coppie spazio-sottospazio, tali che  $\{A \times Y, X \times B\}$  sia una coppia escissiva in  $X \times Y$ .*

*Esiste allora una sequenza esatta spezzante:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X, A) \otimes H_q(Y, B) \xrightarrow{\alpha} H_n(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}(H_p(X, A), H_q(Y, B)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

## 2.4 Omologia a coefficienti in un gruppo abeliano

In tutti i risultati visti fin'ora, è sempre stato dato per scontato che i complessi di catene utilizzati per definire l'omologia di uno spazio  $X$  fossero gruppi abeliani liberi, ossia che in generale una  $n$ -catena di  $X$  fosse combinazione lineare finita a coefficienti in  $\mathbb{Z}$  di  $n$ -cubi singolari non degeneri di  $X$ .

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la definizione di omologia permettendo che i coefficienti possano variare in qualsiasi gruppo abeliano

(ossia uno  $\mathbb{Z}$ -modulo) mostrando poi come generalizzare ulteriormente a qualsiasi  $R$ -modulo  $M$ , per un arbitrario anello commutativo  $R$ .

Saranno ampiamente sfruttati i concetti e i risultati espressi nel Capitolo 0.

(Una nota per il simbolo di prodotto tensoriale: se non è indicato l'anello su cui si tensorizza, è sottinteso che si tratti di  $\mathbb{Z}$ ).

**Definizione 2.4.1.** Sia  $K = \{K_n, \delta_n\}$  complesso di catene e  $G$  gruppo abeliano.

$K \otimes G$  denota il complesso di catene:

$$\{K_n \otimes G, \delta_n \otimes 1_G\}$$

ove  $1_G$  è l'identità di  $G$ .

Se  $f : K \rightarrow K'$ ,  $f = \{f_n\}$  è un morfismo di catene, allora denotiamo con:

$$f \otimes 1_G : K \otimes G \rightarrow K' \otimes G$$

il morfismo  $\{f_n \otimes 1_G\}$ .

Infine, se  $D : K \rightarrow K'$  è omotopia di morfismi di catene fra  $f, g : K \rightarrow K'$ , allora:

$$D \otimes 1_G : K \otimes G \rightarrow K' \otimes G$$

denota l'omotopia di morfismi di catene  $\{D_n \otimes 1_G\}$  fra  $f \otimes 1_G$  e  $g \otimes 1_G$ .

Si nota subito che, data una sequenza esatta di complessi di catene:

$$0 \rightarrow K' \rightarrow K \rightarrow K'' \rightarrow 0$$

tensorizzando con  $G$  potremmo perdere l'iniettività della prima mappa, e quindi l'esattezza a sinistra.

Studiamo allora i casi in cui l'esattezza viene mantenuta invariata dal prodotto tensore con  $G$ .

**Lemma 2.4.2.** *Se la sequenza:*

$$0 \rightarrow K' \rightarrow K \rightarrow K'' \rightarrow 0$$

*è esatta e spezzante, allora lo stesso vale per:*

$$0 \rightarrow K' \otimes G \rightarrow K \otimes G \rightarrow K'' \otimes G \rightarrow 0.$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che richiedere che una sequenza esatta corta di gruppi e omomorfismi

$$0 \rightarrow (K')^n \xrightarrow{j_n} K^n \xrightarrow{p_n} (K'')^n \rightarrow 0$$

sia spezzante, equivale a chiedere che esista un morfismo  $s_n : (K'')^n \rightarrow K^n$  (detto *morfismo spezzante*) tale che  $p_n s_n = id_{(K'')^n}$  e tale che  $\delta_n \circ s_n = s_{n-1} \circ \delta_n''$ .

Il lemma segue subito dal fatto che, se  $s_n : (K'')^n \rightarrow K^n$  è successione di morfismi spezzanti per la sequenza iniziale,  $s_n \otimes 1 : (K'')^n \otimes G \rightarrow K^n \otimes G$  è successione di morfismi spezzanti per la sequenza tensorizzata.  $\square$

**Lemma 2.4.3.** *Se la sequenza:*

$$0 \rightarrow K' \rightarrow K \rightarrow K'' \rightarrow 0$$

*è esatta, e  $K''$  è complesso di catene di gruppi abeliani liberi, allora la sequenza è spezzante.*

*Dimostrazione.* Proviamo che, per ogni  $n$ , la sequenza

$$0 \rightarrow (K')^n \xrightarrow{j_n} K^n \xrightarrow{p_n} (K'')^n \rightarrow 0$$

è spezzante.

Costruiamo un morfismo spezzante  $f_n : (K'')^n \rightarrow K^n$  in questo modo: sia  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  base di  $(K'')^n$ ;  $f_n(x_\alpha)$  viene mandato in un qualsiasi elemento di  $K^n$  che sia preimmagine di  $x_\alpha$ .

Tale elemento esiste per la suriettività di  $p_n$ .

Allora  $f_n$  verifica la proprietà del morfismo spezzante, da cui si conclude la dimostrazione.  $\square$

*Osservazione 2.4.4.* Dato un qualsiasi spazio topologico  $X$  abbiamo la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow D(X) \rightarrow Q(X) \rightarrow C(X) \rightarrow 0$$

spezzante, essendo  $C(X)$  abeliano libero.

Allora, tensorizzando con un arbitrario  $G$ , otteniamo ancora una sequenza esatta:

$$0 \rightarrow D(X) \otimes G \rightarrow Q(X) \otimes G \rightarrow C(X) \otimes G \rightarrow 0$$

e definiamo:

- $D(X; G) = D(X) \otimes G$ ;
- $Q(X; G) = Q(X) \otimes G$ ;

$$- C(X; G) = C(X) \otimes G.$$

*Osservazione 2.4.5.* Se  $A$  è sottospazio di  $X$ , sappiamo che la sequenza di complessi:

$$0 \rightarrow C(A) \xrightarrow{i_{\sharp}} C(X) \xrightarrow{j_{\sharp}} C(X, A) \rightarrow 0$$

è esatta. Possiamo quindi anche qui considerare il complesso di catene della coppia a coefficienti in  $G$ :

$$C(X, A; G) = C(X, A) \otimes G$$

e quindi la sequenza:

$$0 \rightarrow C(A; G) \xrightarrow{i_{\sharp} \otimes 1_G} C(X; G) \xrightarrow{j_{\sharp} \otimes 1_G} C(X, A; G) \rightarrow 0$$

è ancora esatta (essendo  $C(X, A)$  abeliano libero).

Denotiamo con  $H_n(X, A; G) = H_n(C(X, A; G))$  il gruppo di omologia della coppia  $(X, A)$  a coefficienti in  $G$ .

Inoltre se  $\varphi : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  è mappa di coppie continua, allora induce omomorfismi  $\varphi_{\sharp} : C(X, A) \rightarrow C(Y, B)$  e  $\varphi_{\sharp} \otimes 1_G : C(X, A; G) \rightarrow C(Y, B; G)$ . Abbiamo quindi un omomorfismo indotto sui gruppi di omologia:

$$\varphi_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_n(Y, B; G).$$

In generale, cambiando i coefficienti, le proprietà dell'omologia rimangono le stesse; ad esempio valgono ancora tutte le proprietà di omotopia, come il fatto che due mappe continue (di coppia o meno) che siano omotope inducono gli stessi omomorfismi fra i gruppi di omologia, e che un'equivalenza omotopica induce isomorfismi in omologia.

Il lemma seguente illustra molto bene questa invarianza delle proprietà rispetto al cambio dei coefficienti:

**Lemma 2.4.6.** *Siano  $K$  e  $K'$  complessi di catene (di gruppi abeliani) e  $f : K \rightarrow K'$  morfismo di catene tale che:*

$$f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$$

*indotto sia un isomorfismo  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .*

*Allora, per ogni  $G$  gruppo di coefficienti, abbiamo che:*

$$f \otimes 1_G : K \otimes G \rightarrow K' \otimes G$$

*induce,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , isomorfismi:*

$$(f \otimes 1_G)_* : H_n(K \otimes G) \rightarrow H_n(K' \otimes G).$$

*Dimostrazione.* Segue subito dal fatto che, per le ipotesi,  $f$  è equivalenza omotopica di catene, e quindi anche  $f \otimes 1_G$  lo è.  $\square$

*Esempio 2.4.7.* Questo lemma permette quindi di estendere i risultati sulle omotopie anche alla teoria a coefficienti arbitrari, ma ha un campo di applicazione più vasto, come nel caso del teorema di escissione:

supponiamo che  $X$ ,  $A$  e  $W$  siano una terna di spazi topologici che verifichi le ipotesi del teorema di escissione.

La mappa di inclusione  $(X \setminus W, A \setminus W) \hookrightarrow (X, A)$  induce,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , un isomorfismo:

$$H_n(X \setminus W, A \setminus W) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A).$$

Allora, per ogni  $G$ , la mappa di inclusione sopra citata induce,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , isomorfismi:

$$H_n(X \setminus W, A \setminus W; G) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; G).$$

*Esempio 2.4.8.* Allo stesso modo, possiamo applicare il lemma ai teoremi sui ricoprimenti; sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto generalizzato di  $X$ : allora la mappa  $\sigma : C(X, \mathcal{U}) \rightarrow C(X)$  induce,  $\forall n$ , isomorfismi:

$$\sigma_* : H_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X).$$

Si può quindi utilizzare questo risultato per estendere i risultati sulla successione di Mayer-Vietoris a coefficienti arbitrari.

Consideriamo ora degli omomorfismi fra gruppi di coefficienti:

$$h : G_1 \rightarrow G_2$$

questi omomorfismi inducono,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $(X, A)$  coppia, una mappa:

$$1 \otimes h : C_n(X, A; G_1) \rightarrow C_n(X, A; G_2)$$

allora:

$$1 \otimes h : C(X, A; G_1) \rightarrow C(X, A; G_2)$$

è un morfismo di catene, e:

$$h_{\#} : H_n(X, A; G_1) \rightarrow H_n(X, A; G_2)$$

è l'omomorfismo indotto fra i gruppi di omologia.

Valgono le seguenti proprietà di naturalità degli omomorfismi di coefficienti:

- Per ogni mappa  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  di coppie continua, il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; G_1) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, B; G_1) \\ \downarrow h_{\#} & & \downarrow h_{\#} \\ H_n(X, A; G_2) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, B; G_2) \end{array}$$

è commutativo;

- Per ogni coppia  $(X, A)$ , il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; G_1) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-1}(A; G_1) \\ \downarrow h_{\#} & & \downarrow h_{\#} \\ H_n(X, A; G_2) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-1}(A; G_2) \end{array}$$

è commutativo.

Supponiamo ora che la sequenza di gruppi e omomorfismi di coefficienti:

$$0 \rightarrow G' \xrightarrow{h} G \xrightarrow{k} G'' \rightarrow 0$$

sia esatta.

Abbiamo allora, per ogni coppia  $(X, A)$  una sequenza:

$$0 \rightarrow C(X, A; G') \xrightarrow{1 \otimes h} C(X, A; G) \xrightarrow{1 \otimes k} C(X, A; G'') \rightarrow 0$$

che rimane esatta, poiché  $C(X, A)$  è abeliano libero, ossia è un modulo libero, e quindi è piatto.

Otteniamo una sequenza omologica lunga esatta:

$$\dots \xrightarrow{\beta} H_n(X, A; G') \xrightarrow{h_{\#}} H_n(X, A; G) \xrightarrow{k_{\#}} H_n(X, A; G'') \xrightarrow{\beta} H_{n-1}(X, A; G') \xrightarrow{h_{\#}} \dots$$

definendo un morfismo di connessione  $\beta$  detto **operatore di Bockstein**.

### 2.4.1 Il teorema dei coefficienti universali

Sia  $K = \{K_n, \delta_n\}$  un complesso di catene.

Si può definire un omomorfismo naturale:

$$\alpha : H_n(K) \otimes G \rightarrow H_n(K \otimes G)$$

in questo modo:

sia  $u \in H_n(K)$ ,  $x \in G$ . Sia  $u'$  rappresentante di  $u$  in  $Z_n(K)$ . Allora  $u' \otimes x \in K_n \otimes G$  è un ciclo; pertanto definiamo  $\alpha(u \otimes x)$  come la classe di omologia di  $u' \otimes x$ .

Il morfismo  $\alpha$  verifica le seguenti proprietà di naturalità:

- Se  $f : K \rightarrow K'$  è morfismo di catene, il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(K) \otimes G & \xrightarrow{\alpha} & H_n(K \otimes G) \\ \downarrow f_* \otimes 1_G & & \downarrow (f \otimes 1_G)_* \\ H_n(K') \otimes G & \xrightarrow{\alpha'} & H_n(K' \otimes G) \end{array}$$

è commutativo;

- Se  $E : 0 \rightarrow K' \rightarrow K \rightarrow K'' \rightarrow 0$  è sequenza esatta e spezzante, il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(K'') \otimes G & \xrightarrow{\alpha''} & H_n(K'' \otimes G) \\ \downarrow \delta_E \otimes 1_G & & \downarrow \delta_{E \otimes G} \\ H_n(K') \otimes G & \xrightarrow{\alpha'} & H_n(K' \otimes G) \end{array}$$

è commutativo;

- Se  $h : G_1 \rightarrow G_2$  è omomorfismo di coefficienti, il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(K) \otimes G_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & H_n(K \otimes G_1) \\ \downarrow 1 \otimes h & & \downarrow h_{\#} \\ H_n(K) \otimes G_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & H_n(K \otimes G_2) \end{array}$$

è commutativo.

Saremo interessati al morfismo  $\alpha$  appena definito nel caso in cui il complesso  $K$  è il complesso  $C(X, A)$  delle catene cubiche singolari di una coppia; in questo caso l'omomorfismo è:

$$\alpha : H_n(X, A) \otimes G \rightarrow H_n(X, A; G).$$

La situazione, come si è avuto modo di osservare in altri casi, si semplifica molto nel caso in cui si tratti di gruppi abeliani liberi.

**Lemma 2.4.9.** *Se  $G$  è abeliano libero, l'omomorfismo:*

$$\alpha : H_n(K) \otimes G \rightarrow H_n(K \otimes G)$$

*è un isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Si consideri dapprima il caso in cui  $G = \mathbb{Z}$ . Essendo  $\mathbb{Z}$  elemento neutro per il prodotto tensoriale  $\otimes_{\mathbb{Z}}$ , il lemma segue immediatamente. Se  $G$  è abeliano libero,  $G$  è somma diretta di gruppi ciclici infiniti (isomorfi a  $\mathbb{Z}$ ) e, visto che  $\alpha$  rispetta la decomposizione in somma diretta (è una conseguenza dell'ultimo diagramma rappresentato sopra), è un isomorfismo.  $\square$

**Teorema dei coefficienti universali.** *Sia  $K$  complesso di catene di gruppi abeliani liberi; sia  $G$  un gruppo abeliano.*

*Allora esiste una sequenza esatta corta spezzante:*

$$0 \rightarrow H_n(K) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(K \otimes G) \xrightarrow{\beta} \text{Tor}(H_{n-1}(K), G) \rightarrow 0$$

*ove il morfismo  $\beta$  è naturale rispetto ai morfismi di catene e agli omomorfismi di coefficienti.*

*Dimostrazione.* Il gruppo  $G$  ammette una risoluzione libera della forma:

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{h} F_0 \xrightarrow{k} G \rightarrow 0$$

Consideriamo quindi il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(K \otimes F_1) & \xrightarrow{h_{\#}} & H_n(K \otimes F_0) & \xrightarrow{k_{\#}} & H_n(K \otimes G) & \xrightarrow{\beta_0} & H_{n-1}(K \otimes F_1) \\ \uparrow \alpha_1 & & \uparrow \alpha_0 & & \uparrow \alpha & & \\ H_n(K) \otimes F_1 & \xrightarrow{1 \otimes h} & H_n(K) \otimes F_0 & \xrightarrow{1 \otimes k} & H_n(K) \otimes G & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La linea orizzontale in alto è parte della sequenza lunga corrispondente alla

sequenza esatta corta di coefficienti con l'operatore di Bockstein.

La linea in basso è esatta, per le proprietà del prodotto tensoriale, e  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  sono isomorfismi per il **Lemma 2.4.9**.

In particolare segue che  $\alpha$  è un omomorfismo iniettivo, e  $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(k_{\sharp}) = \text{Ker}(\beta_0)$ . Ora consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(K), G) & \rightarrow & H_{n-1}(K) \otimes F_1 & \xrightarrow{1 \otimes h} & H_{n-1}(K) \otimes F_0 & \xrightarrow{1 \otimes k} & H_{n-1}(K) \otimes G & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \\
 & & H_{n-1}(K \otimes F_1) & \xrightarrow{h_{\sharp}} & H_{n-1}(K \otimes F_0) & \xrightarrow{k_{\sharp}} & H_{n-1}(K \otimes G) & & \\
 & \xrightarrow{\beta_0} & & & & & & & 
 \end{array}$$

La linea orizzontale in alto è esatta per le proprietà del funtore  $\text{Tor}$ ;  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  sono isomorfismi, e il diagramma è commutativo.

Segue che esiste un unico omomorfismo:

$$\beta : H_n(K \otimes G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(K), G)$$

che rende il quadrato a sinistra del diagramma commutativo, e in particolare è un morfismo suriettivo, e  $\text{Ker}(\beta) = \text{Ker}(\beta_0)$ .

Allora la sequenza nell'enunciato è esatta; proviamo che è spezzante.

Consideriamo il complesso di catene di gruppi abeliani  $\{H_n(K)\}$  con morfismi di bordo tutti nulli; denotiamo questo complesso con  $H(K)$ . Segue dalla definizione che i suoi gruppi di omologia coincidono con i gruppi di catene e quindi con l'omologia di  $K$ .

Affermiamo dunque che esiste un morfismo di catene  $f : K \rightarrow H(K)$  tale che l'omomorfismo indotto  $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(H(K))$  sia l'identità.

Per dimostrare questa affermazione, notiamo che l'ipotesi che  $K_n$  sia libero per ogni  $n$  implica che  $Z_n(K)$  è un addendo diretto di  $K_n$ .

Possiamo quindi scegliere,  $\forall n$ , una decomposizione in somma diretta:

$$K_n = Z_n(K) \oplus L_n.$$

Sia  $f_n : K_n \rightarrow H_n(K)$  così definita:

$f_n|_{Z_n(K)}$  sia l'omomorfismo naturale di  $Z_n(K)$  in  $H_n(K)$ , e  $f_n|_{L_n} = 0$ . In questo modo, la sequenza di omomorfismi  $\{f_n\}$  è un morfismo di catene che verifica le proprietà desiderate (la definizione di  $f$  dipende dalla scelta della decomposizione).

Per le proprietà di naturalità di  $\alpha$ , abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(K) \otimes G & \xrightarrow{\alpha} & H_n(K \otimes G) \\
 \downarrow f_* \otimes 1_G & & \downarrow (f \otimes 1_G)_* \\
 H_n(H(K)) \otimes G & \xrightarrow{\alpha'} & H_n(H(K) \otimes G)
 \end{array}$$

Si osservi che  $H_n(H(K)) \otimes G = H_n(K) \otimes G = H_n(H(K) \otimes G)$  e che  $f_* \otimes 1_G$  e  $\alpha'$  sono mappe identiche.

Segue dalla commutatività che  $\text{Im}(\alpha)$  è addendo diretto di  $H_n(K \otimes G)$ , come richiesto; in particolare,  $\alpha$  è un omomorfismo iniettivo.

Questo è sufficiente affinché la sequenza sia spezzante.  $\square$

**Corollario 2.4.10.** *Per ogni coppia  $(X, A)$  e ogni gruppo  $G$  abeliano, esiste una sequenza esatta corta spezzante:*

$$0 \rightarrow H_n(X, A) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(X, A; G) \xrightarrow{\beta} \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow 0$$

$\alpha$  e  $\beta$  sono naturali rispetto agli omomorfismi indotti da mappe continue di coppie e da omomorfismi di coefficienti.

**N.B.:** Tutti i risultati di questa sezione sono stati enunciati per gruppi abeliani e complessi di catene di gruppi abeliani, ossia sono stati utilizzati coefficienti solo in  $\mathbb{Z}$ -moduli.

La teoria può essere generalizzata, mantenendo tutti i risultati mostrati, semplicemente considerando  $R$ -moduli anziché gruppi abeliani, per un generico anello commutativo  $R$ , e complessi di catene di  $R$  moduli, che hanno definizione identica a quella di complessi di catene di gruppi abeliani.

Le ipotesi che richiedono che un gruppo sia abeliano libero si traducono, con questa tecnica, nel richiedere che un  $R$ -modulo sia libero.

Possiamo quindi cercare gruppi di omologia a coefficienti in un campo  $K$ , e allora i gruppi di omologia diventano per definizione  $K$ -moduli, ossia  $K$ -spazi vettoriali, e tutti i morfismi indotti si traducono in applicazioni lineari, per le quali si possono applicare tutti i risultati di algebra lineare.

I casi più interessanti saranno lo studio dei gruppi di omologia a coefficienti in un campo  $K$  con caratteristica  $p \neq 0$  (ad esempio  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ), e in un campo  $K$  con caratteristica 0 (ad esempio  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{Q}$ ).



# Capitolo 3

## Esempi

### 3.1 Omologia delle sfere

In questa sezione utilizzeremo sia la sequenza omologica esatta di una coppia che la successione di Mayer-Vietoris per calcolare tutti i gruppi di omologia della sfera.

Verranno poi sfruttati i risultati ottenuti per la dimostrazione di risultati classici in topologia.

Per  $n \in \mathbb{N}$ , indichiamo con  $\mathbb{S}^n$  la sfera  $n$ -dimensionale immersa in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ossia:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Allora abbiamo, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) &= \begin{cases} \{0\}, & \text{se } k \neq n \\ \mathbb{Z}, & \text{se } k = n \end{cases} \\ H_0(\mathbb{S}^n) &= \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n \neq 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo l'asserto per induzione su  $n$ .

*Base induttiva:* Se  $n = 0$  è vero, infatti  $\mathbb{S}^0$  è uno spazio formato da due punti, e quindi  $H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  e  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$ .

*Passo induttivo:* Supponiamo di aver dimostrato l'enunciato per  $\mathbb{S}^n$ , vediamo per  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

Denotiamo con  $\mathbb{S}^n$  l'equatore di  $\mathbb{S}^{n+1}$ , ossia l'insieme  $\{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} : x_{n+2} = 0\}$ .

Consideriamo inoltre i sottoinsiemi di  $\mathbb{S}^{n+1}$ :

$$E_-^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} : x_{n+2} \leq 0\}$$

e

$$E_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} : x_{n+2} \geq 0\}$$

ossia gli emisferi superiore e inferiore, che si intersecano nell'equatore  $\mathbb{S}^n$ . I due emisferi sono omeomorfi al disco unitario  $(n+1)$ -dimensionale nell'iperpiano  $\{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x_{n+2} = 0\}$  di  $\mathbb{R}^{n+2}$ , ossia all'insieme:

$$E^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : |x| \leq 1 \text{ e } x_{n+2} = 0\}.$$

Si hanno due mappe di inclusione di coppie:

$$\begin{aligned} l : (E_-^{n+1}, \mathbb{S}^n) &\hookrightarrow (\mathbb{S}^{n+1}, E_+^{n+1}) \\ j : (\mathbb{S}^{n+1}, \emptyset) &\hookrightarrow (\mathbb{S}^{n+1}, E_+^{n+1}). \end{aligned}$$

Possiamo allora considerare le mappe:

$$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) \xleftarrow{\delta_*} H_{k+1}(E_-^{n+1}, \mathbb{S}^n) \xrightarrow{l_*} H_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}, E_+^{n+1}) \xleftarrow{j_*} \tilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^{n+1})$$

le mappe  $j_*$  e  $l_*$  sono indotte dalle mappe di inclusione.

La mappa  $\delta_*$  è il morfismo di bordo nella sequenza della coppia  $(E_-^{n+1}, \mathbb{S}^n)$ . Notiamo che  $\delta_*$  è un isomorfismo:  $E_-^{n+1}$  è, infatti, contraibile a un punto, e quindi dotato di omologia banale.

Per lo stesso motivo, anche  $j_*$  è un isomorfismo, essendo  $E_+^{n+1}$  contraibile a un punto.

Mostrando che  $l_*$  è un isomorfismo, si ottiene il risultato desiderato.

La coppia  $(E_-^{n+1}, \mathbb{S}^n)$  si ottiene dalla coppia  $(\mathbb{S}^{n+1}, E_+^{n+1})$  recidendo  $E_+^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ . Non si può però applicare il teorema di escissione utilizzando questo sottoinsieme, poiché la chiusura di  $E_+^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$  non è contenuta nell'interno di  $E_+^{n+1}$ . Possiamo però considerare un altro sottoinsieme  $W = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} : x_{n+2} \geq \frac{1}{4}\}$ . Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_{k+1}(E_-^{n+1}, \mathbb{S}^n) & \xrightarrow{l_*} & H_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}, E_+^{n+1}) \\ & \searrow h_* & \nearrow e_* \\ & H_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1} \setminus W, E_+^{n+1} \setminus W) & \end{array}$$

Le mappe  $e_*$  e  $h_*$  sono indotte da mappe di inclusione; in particolare,  $e_*$  è un isomorfismo per il teorema di escissione (adesso infatti la chiusura di  $W$  è contenuta nell'interno di  $E_+^{n+1}$ ).

Anche  $h_*$  è un isomorfismo; infatti la coppia  $(\mathbb{S}^{n+1} \setminus W, E_+^{n+1} \setminus W)$  si retrae sulla coppia  $(E_-^{n+1}, \mathbb{S}^n)$ . Allora, per quanto visto nella sezione 1.2,  $h$  è

un'equivalenza omotopica di coppie, e pertanto l'omomorfismo indotto è un isomorfismo: segue che anche  $k_*$  è un isomorfismo.  $\square$

Vediamo ora una dimostrazione alternativa, tramite la successione di Mayer-Vietoris:

con questo strumento la situazione si semplifica molto, e bastano pochi passaggi per ottenere l'enunciato.

*Dimostrazione.* Consideriamo la sfera  $\mathbb{S}^{n+1}$  e il suo equatore  $\mathbb{S}^n$  definiti come sopra.

Siano inoltre:

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{S}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \\ B &= \mathbb{S}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}. \end{aligned}$$

I due insiemi sono due aperti che ricoprono  $\mathbb{S}^{n+1}$ .  $A$  e  $B$  sono omeomorfi a  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e quindi hanno omologia banale;  $A \cap B$  si retrae invece sulla sfera  $\mathbb{S}^n$ . Sia  $k > 0$ , consideriamo la successione di Mayer-Vietoris dei gruppi di omologia ridotti:

$$\dots \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_{k+1}(A) \oplus \tilde{H}_{k+1}(B) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_k(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_k(A) \oplus \tilde{H}_k(B) \xrightarrow{\psi} \dots$$

Visto che  $A$  e  $B$  sono contraibili,  $H_k(A) = H_k(B) = 0 \quad \forall k > 0$ .

Segue che  $\Delta$  è isomorfismo per ogni  $k$ , ossia  $\tilde{H}_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \simeq \tilde{H}_k(\mathbb{S}^n)$ . Possiamo quindi usare la successione di Mayer-Vietoris per il passo induttivo della dimostrazione precedente.  $\square$

Grazie a questo risultato è possibile dare la seguente definizione:

**Definizione 3.1.1.** Sia  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  continua; consideriamo la mappa indotta:

$$f_* : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n).$$

Essendo un endomorfismo di un gruppo ciclico infinito, esiste un unico  $d \in \mathbb{Z}$  tale che  $f_*(u) = du \quad \forall u \in \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ . Tale  $d$  è detto **grado** di  $f$ .

Il grado di una mappa continua fra sfere soddisfa le seguenti proprietà:

- Il grado dell'identità è 1, poiché la mappa indotta è anch'essa la mappa identica;
- Se  $f$  non è suriettiva, il suo grado è 0: scegliendo  $x_0 \in \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^n)$ , possiamo fattorizzare la mappa  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$  ottenendo la mappa nulla visto che  $H_n(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}) = \{0\}$ ;

- Se  $f$  e  $g$  sono mappe omotope, allora hanno lo stesso grado, visto che inducono lo stesso omomorfismo (vale anche il viceversa dimostrato da Hopf nel 1925);
- $\deg(fg) = \deg(f)\deg(g)$  visto che  $(fg)_* = f_*g_*$ ;
- Ogni riflessione di  $\mathbb{S}^n$  rispetto ad un iperpiano di  $\mathbb{R}^{n+1}$  ha grado -1;
- La mappa antipodale  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  tale che  $\alpha(x) = -x$  ha grado  $(-1)^{n+1}$ , essendo composizione di  $n + 1$  riflessioni;
- Se  $f$  non ha punti fissi, allora  $f$  è omotopa alla mappa antipodale, e quindi ha lo stesso grado.

Vediamo ora alcuni risultati strettamente dipendenti dal calcolo dei gruppi di omologia delle sfere.

*Esempio 3.1.2.* Calcoliamo il gruppo di omologia locale di  $\mathbb{R}^n$  attorno ad un suo punto.

Se consideriamo la sequenza della coppia  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , otteniamo:

$$\dots \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H_{q-1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dots$$

e allora

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq H_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

essendo  $\mathbb{R}^n$  contraibile, e  $\mathbb{S}^{n-1}$  retracts di deformazione di  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Allora, per  $q = n$ , otteniamo che  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$ .

## 3.2 Omologia delle superficie reali compatte

In questa sezione si dà un esempio di calcolo di gruppi di omologia di spazi noti e relativamente semplici, che sono le superficie compatte (con bordo o meno), utilizzando la costruzione tramite quoziente di poligoni rispetto all'identificazione di lati opportuni.

- **Toro:**

Il toro può essere costruito mediante l'identificazione dei lati opposti di un quadrato, mantenendo l'orientamento, come nella **Figura 3.1**.

Il risultato ottenuto è la nota superficie compatta, che denotiamo con  $\mathbb{T}$ .

Calcoliamo i gruppi di omologia del toro sfruttando un opportuno ricoprimento formato da due aperti, e utilizzando poi la successione di

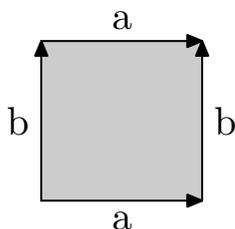


Figura 3.1: Rappresentazione poligonale del toro

Mayer-Vietoris:

Siano  $U$  e  $V$  rispettivamente l'interno del quadrato e il quadrato a cui è tolto il centro. Ovviamente,  $U$  e  $V$  sono aperti e ricoprono tutto  $\mathbb{T}$ ; in particolare,  $U$  è contraibile e ha quindi omologia banale, mentre  $V$  si retrae sul bordo del quadrato, e  $U \cap V$  si retrae a un cerchio.

Consideriamo la successione:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(X) \rightarrow 0.$$

Per quanto detto sopra, e poiché il bordo del quadrato dopo l'identificazione viene mappato in due cerchi, possiamo sostituire nella sequenza:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

La prima  $\varphi$  deve essere la mappa nulla: infatti l'inclusione in  $H_1(U)$  è nulla essendo quello il gruppo banale; l'inclusione in  $H_1(V)$  è nulla, poiché il ciclo che genera  $H_1(U \cap V)$ , tramite l'immersione in  $H_1(V)$  ha immagine  $a + b - a - b = 0$ .

Allora  $\varphi$  è la mappa nulla: per l'esattezza della successione, segue che  $\Delta$  è isomorfismo, e quindi  $H_2(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}$ .

Consideriamo ora la seconda parte della sequenza.

Qui,  $\Delta : H_1(\mathbb{T}) \rightarrow H_0(U \cap V)$  è la mappa nulla: infatti la mappa  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  è ovviamente iniettiva, e quindi, per l'esattezza,  $\Delta$  è la mappa nulla: allora  $H_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**N.B.** Quando troviamo, in una successione esatta, delle mappe nulle, abbiamo sempre che la successiva è un mappa iniettiva, e la precedente è suriettiva; possiamo allora spezzare successioni esatte lunghe in successioni esatte più brevi. Nel caso appena visto, possiamo spezzare:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{T}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

• **Piano proiettivo reale:**

Il piano proiettivo è una superficie reale compatta non orientabile; è un primo esempio di come i gruppi di omologia possano dare informazioni geometriche precise, non solo riguardo al numero di "buchi" di uno spazio, ma anche, come vediamo in questo caso, all'orientabilità di una varietà reale.

Il piano proiettivo reale è ottenuto prendendo un disco modulo antipodia del bordo; per ottenere la superficie si passa al quoziente rispetto all'identificazione dei due lati come in figura:

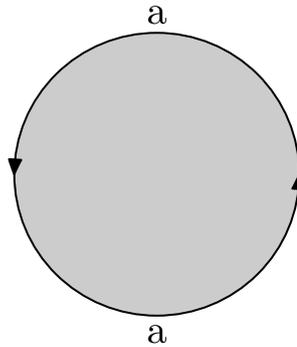


Figura 3.2: Rappresentazione poligonale del piano proiettivo

con l'identificazione si ottiene il piano proiettivo reale, che denotiamo con  $\mathbb{P}^2$

Consideriamo di nuovo un ricoprimento aperto formato da due insiemi  $U$  e  $V$  tali che  $U$  sia il cerchio senza bordo, e  $V$  sia il cerchio senza il centro. Di nuovo,  $U$  è contraibile,  $V$  si retrae sul bordo e  $U \cap V$  si retrae a un cerchio.

Consideriamo di nuovo la sequenza:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(\mathbb{P}^2) \rightarrow 0.$$

In questo caso, tutti gli insiemi in considerazione sono connessi, anzi connessi per archi, e, visto che dopo l'identificazione il bordo della figura diventa un cerchio (percorso due volte), otteniamo:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Essendo la mappa  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  iniettiva, la seconda mappa  $\Delta$  è la mappa nulla, e possiamo quindi spezzare in due sequenze. Ci concentriamo sulla prima:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{P}^2) \rightarrow 0.$$

Notiamo che la mappa  $\varphi$ , visto che il bordo, con l'identificazione, si "arrotola" due volte su un cerchio, è un mappa del tipo  $\varphi(x) = (0, 2a)$ . Allora è iniettiva; per l'esattezza, segue che  $\Delta$  è nulla ed iniettiva, e quindi  $H_2(\mathbb{P}^2) = \{0\}$ . Otteniamo dunque una sequenza esatta corta, ove  $H_1(\mathbb{P}^2) = \text{Coker}(\varphi)$ ; allora  $H_1(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

In questo caso vediamo come il piano proiettivo difetti completamente del gruppo di omologia 2-dimensionale; non è un caso: è una caratteristica di tutte le superfici non orientabili.

È interessante anche notare che per la prima volta abbiamo ottenuto un gruppo con torsione come gruppo di omologia (anche in questo caso, per superfici reali compatte, è una caratteristica delle superfici non orientabili).

- **Otre di Klein:**

L'otre di Klein è una superficie reale compatta non orientabile, che ha l'interessante caratteristica di non poter essere immersa in  $\mathbb{R}^3$  senza autointersezioni.

Poligonalmente, è realizzata dal quadrato in cui identifichiamo i lati come in figura:

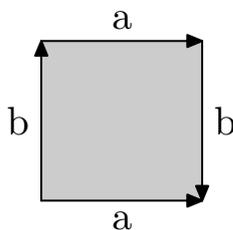


Figura 3.3: Rappresentazione poligonale dell'otre di Klein

ottenendo così l'otre di Klein, che denotiamo con  $\mathbb{K}$ .

Utilizziamo un procedimento identico a quanto fatto sopra, scegliendo gli stessi aperti di ricoprimento di  $\mathbb{K}$ ; la sequenza che analizzeremo sarà del tipo:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_2(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

In questo caso infatti il bordo del quadrato, dopo l'identificazione, è mandato in due cerchi (di cui uno percorso due volte). La mappa  $\varphi : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$  è così definita:  $\varphi(x) = (0, a + c + -a + c) = (0, 2c)$ . Allora è iniettiva, e per l'esattezza abbiamo, come nel caso di  $\mathbb{P}^2$ , che  $H_2(\mathbb{K}) = \{0\}$ .

La sequenza può essere spezzata come sopra, essendo la seconda mappa  $\varphi$  iniettiva, e quindi otteniamo la sequenza:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{K}) \rightarrow 0$$

in cui  $H_1(\mathbb{K}) = \text{Coker}(\varphi) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

- **Superfici reali compatte di genere  $g$ :**

Per il teorema di classificazione delle superfici reali compatte, una superficie reale compatta di genere  $g > 0$  può essere vista come somma connessa di  $g$  tori se orientabile, e come somma connessa di  $g$  piani proiettivi altrimenti.

Nel secondo caso, se  $g$  è pari può essere vista come somma connessa di un otre di Klein e una superficie orientabile, mentre se  $g$  è dispari, come somma connessa di un piano proiettivo e una superficie orientabile.

- Supponiamo che  $X$  sia una superficie compatta, reale, orientabile di genere  $g$ .

Allora  $X$  può essere vista come quoziente di un poligono con  $4g$  lati rispetto all'identificazione rappresentata in **Figura 3.4**.

Dopo l'identificazione, il bordo diventa un bouquet di  $2g$  cerchi che si intersecano tutti in un punto. Utilizzando nuovamente un ricoprimento analogo ai precedenti, l'unica questione non banale diventa la sequenza:

$$0 \rightarrow H_2(X) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\psi} H_1(X) \rightarrow 0.$$

Riconosciamo che di nuovo la mappa  $\varphi$  è la mappa nulla, poiché  $\varphi(x) = (0, a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_g + b_g - a_g - b_g) = (0, 0)$ . Allora  $H_2(X) = \mathbb{Z}$  e  $H_1(X) = \mathbb{Z}^{2g}$ .

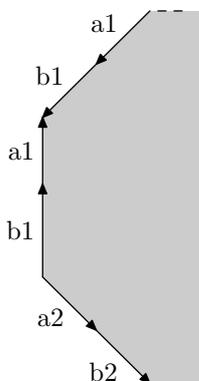


Figura 3.4: Rappresentazione poligonale di  $X$  orientabile

- Sia invece  $X$  una superficie reale, compatta, non orientabile di genere  $g$ .  
La sua rappresentazione poligonale, con le identificazioni rappresentate, è rappresentata in figura:

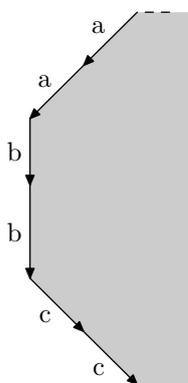


Figura 3.5: Rappresentazione poligonale di  $X$  non orientabile come somma connessa di  $\mathbb{P}^2$

Dopo l'identificazione dei lati, il bordo viene mappato in un bouquet di  $g$  cerchi, tutti percorsi due volte (si può vedere allo stesso modo pensando  $X$  come CW-complesso e calcolando le mappe di attaccamento); lo stesso accade sia per  $g$  pari che dispari.

Nella sequenza:

$$0 \rightarrow H_2(X) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z}^g \xrightarrow{\psi} H_1(X) \rightarrow 0$$

la mappa  $\varphi$  è quindi iniettiva, come nel caso del piano proiettivo. Otteniamo nuovamente che  $H_2(X) = \{0\}$ , mentre il primo gruppo di omologia è  $H_1(X) = \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (abbiamo scelto come base di  $\mathbb{Z}^g$  la base canonica in cui l'ultimo elemento è sostituito da  $(1, \dots, 1)$ ).

• **Superficie reali compatte con bordo:**

Una superficie reale, compatta, con bordo,  $X$ , è una varietà topologica di Hausdorff, compatta, e tale che ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  oppure al semipiano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ .

Vediamo ora alcuni esempi molto noti, e calcoliamo i loro gruppi di omologia:

- **Striscia di Möbius:** è una superficie non orientabile, che si può ottenere da un quadrato identificando due lati opposti ribaltando la figura:

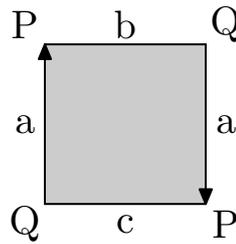


Figura 3.6: Rappresentazione poligonale della striscia di Möbius

Possiamo assegnare alla striscia di Möbius una struttura di CW-complesso, formata da una 2-cella, tre 1-celle e due 0-celle. Otteniamo quindi un complesso di catene:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

La mappa  $d_2$ , che si calcola facilmente osservando la rappresentazione poligonale, mappa:

$$d_2(x) = b + c + 2a$$

essendoci una sola 2-cella, ha immagine  $\mathbb{Z}$ , inoltre è iniettiva, e quindi  $H_2(X) = \{0\}$ .

Notiamo poi che la mappa  $d_1$  agisce in questo modo sulle 1-celle:

$$d_1(a) = P - Q$$

$$d_1(b) = P - Q$$

$$d_1(c) = Q - P$$

a meno di un intero, la mappa ha lo stesso valore per ogni 1-cellula, ossia ha immagine  $\mathbb{Z}$ .

Allora  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ ; il nucleo di  $d_1$  deve avere rango 2, e quindi è  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , pertanto  $H_1(X) = \mathbb{Z}$ .

- **Cilindro:** è una superficie orientabile, che si può ottenere da un quadrato identificando due lati opposti: allo stesso modo di prima, otteniamo una struttura con una 2-cellula, tre 1-celle e due 0-celle. Otteniamo di nuovo un complesso di catene:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

La mappa  $d_2$ , che si calcola facilmente osservando la rappresentazione poligonale, ha immagine  $\mathbb{Z}$ ; in particolare è iniettiva, e quindi  $H_2(X) = \{0\}$ . Notiamo poi che la mappa  $d_1$  manda le 1-catene, analogamente al caso precedente, nella stessa 0-catena a meno di interi, ossia ha immagine  $\mathbb{Z}$  e nucleo  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Allora il cilindro ha gli stessi gruppi di omologia della striscia di Möbius.

- **Disco:** è una superficie con bordo, ma ha omologia banale; è infatti contraibile a un punto, quindi ha tutti i gruppi di omologia nulli tranne  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ , essendo connesso per archi.

### 3.3 Omologia di CW-complessi

In questa sezione ci concentriamo sul calcolo dei gruppi di omologia di questi spazi, dando poi una soluzione al problema inverso: quello di determinare una struttura di CW-complesso che abbia gruppi di omologia stabiliti a priori.

#### Notazione:

Indichiamo con  $E^n$  il disco unitario  $n$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^n$ , vale a dire l'insieme:

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

mentre indichiamo con  $D^n$  l'interno di tale insieme, ossia:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

Diamo inoltre la seguente definizione preliminare:

**Definizione 3.3.1.** Dato  $X$  spazio topologico, una  $n$ -cella  $e_\alpha^n$  di  $X$  è un sottoinsieme aperto di  $X$  tale che esista una funzione:

$$f_\alpha : E^n \rightarrow \bar{e}_\alpha^n$$

con  $f_\alpha : U^n \rightarrow e_\alpha^n$  omeomorfismo, e  $f(\mathbb{S}^{n-1}) = \bar{e}_\alpha^n \setminus e_\alpha^n$ .

$f_\alpha$  è detta *mappa caratteristica* della cella  $e_\alpha^n$ , e la sua restrizione alla sfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  è detta *mappa di attaccamento* della cella  $e_\alpha^n$ .

Ricordiamo la definizione di CW-complesso:

**Definizione 3.3.2.** Una struttura di CW-complesso è data ad uno spazio di Hausdorff  $X$  con l'assegnazione di una catena ascendente di sottospazi chiusi:

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq \dots$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

- $X^0$  ha la topologia discreta;
- Dato  $n > 0$ ,  $X^n$  è ottenuto da  $X^{n-1}$  incollando una collezione di  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}$  tramite la mappa caratteristica  $f_\lambda : E^n \rightarrow e_\lambda^n$ , che mappa omeomorficamente l'interno del disco in  $e_\lambda^n$  e tale che il bordo  $\mathbb{S}^{n-1}$  sia mappato in  $X^{n-1}$ ;
- $X = \bigcup_{k \geq 0} X^k$ ;
- $X$  e i sottospazi  $X^k$  hanno la topologia debole indotta dalle inclusioni delle  $k$ -celle:  $A \subset X$  è chiuso se e solo se  $A \cap e^n$  è chiuso per ogni  $n$ -cella  $e^n$ .

I punti di  $X^0$  vengono detti *punti* o *0-celle* di  $X$ .

$X^n$  è detto  *$n$ -scheletro* di  $X$ .

Un CW-complesso si dice *finito* o *infinito* a seconda del numero di celle; si dice *finito dimensionale* se  $X = X^n$  per qualche  $n$ ; il più piccolo intero  $n$  per cui ciò è vero, è detto *dimensione* di  $X$ .

Enunciamo ora alcuni risultati che caratterizzano i gruppi di omologia di CW-complessi:

**Teorema 3.3.3.** *Sia  $X^*$  uno spazio ottenuto incollando  $n$ -celle ad uno spazio  $X$  come definito sopra:*

*Allora  $H_q(X^*, X) = 0 \forall q \neq n$ ;*

*inoltre, per ogni  $\lambda$ ,  $f_\lambda$  induce omomorfismi iniettivi  $f_{\lambda*} : H_n(E^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_n(X^*, X)$ , e  $H_n(X^*, X)$  è somma diretta dei sottogruppi immagine.*

*Allora  $H_n(X^*, X)$  è abeliano libero con base in corrispondenza con l'insieme delle  $n$ -celle incollate a  $X$ .*

*Dimostrazione.* Vedi W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, pp. 227-228.  $\square$

**Corollario 3.3.4.** *Se  $\{X^n : n = 0, 1, \dots\}$  è una struttura di CW-complesso su  $X$ , allora  $H_q(X^n, X^{n-1}) = 0 \forall q \neq n$  ed è abeliano libero con base in corrispondenza con le  $n$ -celle di  $X$  se  $q = n$ .*

**Lemma 3.3.5.**  $H_q(X^n) = 0 \forall q > n$ .

*Dimostrazione.* Si procede per induzione su  $n$ . Per  $n = 0$ , il lemma è banale, essendo  $K^0$  uno spazio discreto per definizione. Il passo induttivo si prova utilizzando la sequenza esatta della coppia  $(K^n, K^{n-1})$ .  $\square$

**Definizione 3.3.6.** Sia  $K = \{K^n : n = 0, 1, \dots\}$  struttura di CW-complesso. Definiamo allora  $C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$ .

Allora ogni CW-complesso ha gruppi di catene cubiche singolari  $n$ -dimensionali di rango uguale al numero di  $n$ -celle del complesso. Definiamo il morfismo di bordo per CW-complessi:

$$d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$$

è composizione di :

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$

Considerando i sottogruppi dei gruppi catene che costituiscono nucleo e immagine dei morfismi di bordo, possiamo definire i gruppi di omologia del complesso di catene appena costruito nel solito modo:

$$H_n(K) = \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1}).$$

Mostriamo che i gruppi di omologia di  $X$  coincidono con i gruppi di omologia del complesso di catene appena definito. Consideriamo:

$$H_n(X) \xleftarrow{k_n} H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$$

ove  $j_n$  e  $k_n$  sono indotti dalle inclusioni; allora vale:

**Teorema 3.3.7.** *Nel diagramma appena mostrato:*

- $k_n$  è omomorfismo suriettivo;
- $j_n$  è omomorfismo iniettivo;
- $\text{Im}(j_n) = Z_n(K)$ ;
- $\text{Ker}(k_n) = j_n^{-1}(B_n(K))$ .

Allora  $j_n \circ k_n^{-1}$  definisce un isomorfismo:

$$\Theta_n : H_n(X) \rightarrow H_n(K).$$

*Dimostrazione.* Vedi W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, pp. 233-235 □

Diamo ora una formula fondamentale per il calcolo dei morfismi di bordo:

**Proposizione 3.3.8.**  $d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$  ove  $d_{\alpha\beta}$  è il grado della mappa  $\mathbb{S}_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$  che è composizione della mappa di attaccamento di  $e_\alpha^n$  e della mappa quoziente che schiaccia  $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$  a un punto.

*Dimostrazione.* Consideriamo il diagramma seguente, ove le linee non etichettate sono isomorfismi:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(D_\alpha^n, \delta D_\alpha^n) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{H}_{n-1}(\delta D_\alpha^n) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta*}} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\beta^{n-1}) \\
 \downarrow \phi_{\alpha*} & & \downarrow \psi_{\alpha*} & & \uparrow q_{\beta*} \\
 H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\
 \searrow d_n & & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \\
 & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2})
 \end{array}$$

Si ha:

- $\phi_\alpha$  è la mappa caratteristica della cella  $e_\alpha^n$ , e  $\psi_\alpha$  la sua mappa di attaccamento;
- $q$  è la mappa quoziente;

- $q_\beta$  schiaccia il complementare della cella  $e_\beta^{n-1}$  ad un punto, con la sfera quoziente che ne risulta identificata con  $\mathbb{S}_\beta^{n-1} = D_\beta^{n-1}/\delta D_\beta^{n-1}$  con la mappa caratteristica  $\phi_\beta$ ;
- $\Delta_{\alpha\beta}$  è composizione di  $q_\beta q_\alpha \psi_\alpha$ , ossia la mappa di attaccamento della cella  $e_\alpha^n$  seguita dalla mappa quoziente che schiaccia il complementare di  $e_\beta^{n-1}$  ad un punto.

La mappa  $\phi_{\alpha*}$  prende un generatore  $u$  di  $H_n(D_\alpha^n, \delta D_\alpha^n)$  e lo manda in un generatore dell'addendo diretto di  $H_n(X^n, X^{n-1})$  che corrisponde a  $e_\alpha^n$ . Se denotiamo proprio con  $e_\alpha^n$  questo generatore, la commutatività della parte sinistra del diagramma comporta che  $d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \psi_{\alpha*} \delta(u)$ . In termini della base di  $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$  che corrisponde alle celle  $e_\beta^{n-1}$ , la mappa  $q_{\beta*}$  è la proiezione di  $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$  sul suo addendo diretto che corrisponde a  $e_\beta^{n-1}$ .

La commutatività del diagramma fornisce quindi la formula cercata.  $\square$

Spesso, pensare alcuni spazi come CW-complessi, può semplificare il calcolo dei gruppi di omologia: consideriamo il caso degli spazi proiettivi  $n$ -dimensionali, sia su  $\mathbb{R}$  che su  $\mathbb{C}$ .

*Esempio 3.3.9.* Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  può essere pensato come l'insieme di tutti i sottospazi 1-dimensionali di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; visto che tali sottospazi sono determinati a meno di moltiplicazione per scalari non nulli, possiamo restringerci a vettori di norma 1. Allora  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è ottenuto da  $\mathbb{S}^n$  modulo antipodia; se consideriamo solo l'emisfero superiore, che è omeomorfo al disco unitario  $n$ -dimensionale  $D^n$ , otteniamo che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è il quoziente di  $D^n$  con i punti antipodali del bordo identificati; ma essendo  $\delta D^n = \mathbb{S}^{n-1}$ , il bordo di  $D^n$  con i punti antipodali identificati non è altro che  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ . Allora  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è ottenuto da  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$  incollando una  $n$ -cella, con la mappa di attaccamento che sul bordo è esattamente la mappa quoziente  $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ .  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è, in definitiva, un CW-complesso  $n$ -dimensionale con una sola  $k$ -cella per ogni  $k \leq n$ : per quanto visto, allora, il complesso di catene associato a  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è formato da soli gruppi ciclici infiniti.

Calcolando i morfismi di bordo, otteniamo l'omologia di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

Visto che ogni cella si incolla ad una sola cella di dimensione inferiore, occorre solo calcolare il grado della mappa  $\mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$ . Notiamo che quella mappa, fuori da  $\mathbb{S}^{k-2}$ , è un omeomorfismo su tutte e due le componenti di  $\mathbb{S}^{k-1} \setminus \mathbb{S}^{k-2}$ ; ognuno dei due è ottenuto dall'altro precomponendo con la mappa antipodale di  $\mathbb{S}^{k-1}$ , che ha grado  $(-1)^k$ . Allora il grado della mappa è:

$$d = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2, & \text{se } k \text{ pari} \\ 0, & \text{se } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Abbiamo quindi il complesso di catene e morfismi:

$$\dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Pertanto l'omologia dello spazio proiettivo reale è:

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0 \text{ o se } k = n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{se } k \text{ dispari, } 0 < k < n \\ \{0\}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*Esempio 3.3.10.* Nei casi più semplici, per il calcolo dei gruppi di omologia di CW-complessi, le mappe di attaccamento delle celle sono mappe nulle; in tal caso, i gruppi di omologia  $n$ -dimensionali coincidono con i gruppi di  $n$ -catene, e sono quindi abeliani liberi di rango uguale al numero di  $n$ -celle del CW-complesso.

Un esempio degno di nota, specialmente in relazione al precedente, è quello dello spazio proiettivo complesso  $n$ -dimensionale,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

Lo spazio proiettivo complesso è definito, come nel caso reale, dall'insieme dei sottospazi di  $\mathbb{C}^{n+1}$  di dimensione 1; possiamo quindi considerare i vettori di  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  modulo moltiplicazione per scalari non nulli. Un modo per ottenere lo stesso risultato è considerare il quoziente della sfera unitaria  $(2n+1)$ -dimensionale di  $\mathbb{C}^{n+1}$  rispetto alla relazione  $v \sim \lambda v$  per  $|\lambda| = 1$ , che fornisce quindi un modello per lo spazio proiettivo complesso  $n$ -dimensionale. Un'ulteriore strada da percorrere è partire dal disco  $E^{2n}$  modulo la relazione d'equivalenza  $v \sim \lambda v$  per  $v \in \delta E^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1}$  e  $\lambda \neq 0$ . Perciò stavolta notiamo che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è ottenuto da  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  incollando un sola  $2n$ -cella.

In particolare,  $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$  è il  $2k$ -scheletro di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , ed è anche il  $(2k+1)$ -scheletro. Il complesso di catene che otteniamo ha la caratteristica che tutte le mappe di incollamento sono nulle, poiché non ci sono celle di dimensioni consecutive nella CW-struttura di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ :

$$\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$$

e allora i gruppi di omologia di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sono:

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } k > 2n \text{ o } k \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } k \leq 2n \text{ e } k \text{ pari.} \end{cases}$$

*Esempio 3.3.11.* Dopo aver considerato casi di dimensione arbitraria come i due esempi precedenti, è interessante vedere il calcolo dell'omologia del toro  $n$ -dimensionale.

Ricordiamo che, dati due spazi  $X$  e  $Y$ , abbiamo la seguente sequenza esatta

corta spezzante (se almeno uno dei due spazi ha complessi di catene cubiche singolari abeliani liberi):

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \xrightarrow{\alpha} H_n(X \times Y) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y)) \rightarrow 0.$$

Nella sezione precedente, abbiamo calcolato il gruppo di omologia di un toro bidimensionale mediante la successione di Mayer-Vietoris; lo stesso risultato poteva essere ottenuto considerando  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

Utilizziamo la formula sopra; visto che la successione esatta è spezzante, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{T}) &= (H_2(\mathbb{S}^1) \otimes H_0(\mathbb{S}^1)) \oplus (H_0(\mathbb{S}^1) \otimes H_2(\mathbb{S}^1)) \oplus (H_1(\mathbb{S}^1) \otimes H_1(\mathbb{S}^1)) = \\ &= \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H_1(\mathbb{T}) &= (H_1(\mathbb{S}^1) \otimes H_0(\mathbb{S}^1)) \oplus (H_0(\mathbb{S}^1) \otimes H_1(\mathbb{S}^1)) = (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = \\ &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque gli stessi risultati ottenuti nella sezione precedente.

Vediamo come estendere il calcolo a un toro  $n$ -dimensionale, che denotiamo con  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$   $n$  volte.

Notiamo innanzitutto che la formula può essere estesa per induzione al prodotto di  $n$  spazi topologici. Inoltre, visto che i gruppi di omologia del cerchio sono ciclici infiniti, ossia privi di torsione, il terzo elemento della sequenza non compare mai.

Si ha:

$$H_k(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{\sum i = k} \left( \bigotimes_{h=1}^n H_i(\mathbb{S}^1) \right)$$

Visto che  $H_i(\mathbb{S}^1) = \{0\}$  per ogni  $i \geq 2$ , considero solo i contributi in cui  $i$  varia fra 0 e 1, e allora  $H_i(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ . Per ogni  $k$  allora, visto che il prodotto tensore di  $n$  copie di  $\mathbb{Z}$  è uguale a  $\mathbb{Z}$ , ottengo che il  $k$ -esimo gruppo di omologia del toro  $n$ -dimensionale è un gruppo abeliano libero di rango uguale al numero di permutazioni possibili di  $n$  indici di cui esattamente  $k$  sono uguali a 1, e i restanti sono uguali a 0.

Si ottiene:

$$H_k(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}.$$

Un'applicazione immediata e particolarmente interessante di quanto appena mostrato è il calcolo, utilizzando la formula del prodotto, dell'omologia

del prodotto  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ;  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  è omeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ ; otteniamo allora uno spazio che ha come gruppi di omologia gli stessi del toro.

Questo ci dice subito che  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  non sono omeomorfi, anzi, non sono nemmeno omotopicamente equivalenti, perché altrimenti avrebbero la stessa omologia.

Addirittura, il fatto che  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sia una superficie compatta (prodotto di compatti) reale, che ha gruppo di omologia uguale a quello del toro (in particolare il gruppo  $H_1$  è libero), ci dice subito che è una superficie orientabile; allora è omeomorfa al toro per il teorema di classificazione delle superfici reali compatte.

*Esempio 3.3.12.* A qualsiasi superficie reale compatta di genere  $g$  può essere data struttura di CW-complesso, con una 2-cella, una 0-cella, e  $2g$  o  $g$  1-celle, nel caso in cui sia rispettivamente orientabile o non orientabile.

Nella **sezione 3.3** è mostrata la rappresentazione poligonale delle superfici compatte, che descrive molto bene anche la struttura di CW-complesso su di esse.

*Esempio 3.3.13.* Salendo di dimensione, possiamo considerare una 3-varietà, ossia uno spazio topologico Hausdorff tale che ogni punto abbia un intorno omeomorfo ad  $\mathbb{R}^3$ .

Un esempio intuitivo è il 3-otre di Klein: si può realizzare a partire da un cubo identificando due coppie di facce opposte in modo da mantenere l'orientamento, e la restante facendo ruotare una delle due facce di 180 gradi. Quella che otteniamo è una 3-varietà non orientabile.

Utilizziamo un ricoprimento di due aperti:  $U$  costituito dal cubo meno il bordo, e  $V$  costituito dal cubo meno il punto al centro.

$V$  si retrae sul bordo del cubo, che dopo l'identificazione è mandato in un bouquet di 3 sfere; pertanto abbiamo  $H_2(V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  e  $H_1(V) = \{0\}$ .

$U$  è uno spazio contraibile a un punto, quindi ha omologia banale.

$U \cap V$  si retrae a una sfera, e quindi ha omologia  $H_2(U \cap V) = \mathbb{Z}$  e  $H_1(U \cap V) = \{0\}$ . Consideriamo quindi la successione di Mayer-Vietoris relativa a questo ricoprimento:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_3(X) \xrightarrow{\Delta} H_2(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_2(U) \oplus H_2(V) \xrightarrow{\psi} H_2(X) \xrightarrow{\Delta} \\ \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(X) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

che può essere riscritta:

$$0 \rightarrow H_3(X) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_2(X) \xrightarrow{\Delta} 0 \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\psi} H_1(X) \rightarrow 0.$$

Abbiamo immediatamente che  $H_1(X) = \{0\}$ .

Possiamo considerare una sequenza più corta:

$$0 \rightarrow H_3(X) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_2(X) \rightarrow 0.$$

La mappa  $\varphi$ , che è indotta dalle inclusioni di  $U \cap V$  in  $U$  e in  $V$ , è così calcolata:  $\varphi(x) = (0, 0, 0, 2)$ , quindi è una mappa iniettiva; allora  $H_3(X) = \{0\}$ .

Rimane dunque una sequenza esatta corta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_2(X) \rightarrow 0.$$

Allora  $H_2(X) = \text{Coker}(\varphi) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

### 3.3.1 Invertire il problema

La struttura di CW-complesso è una costruzione topologica molto generica, tanto da essere utile per rappresentare molti tipi di spazi topologici generali e meno regolari dei più comunemente utilizzati.

Vista inoltre la buona proprietà di avere complessi di catene cubiche singolari in corrispondenza con le loro celle, ci si può porre la domanda se abbia senso invertire il calcolo, e se, data una sequenza di gruppi abeliani finitamente generati, quelli possano essere gruppi di omologia di un CW-complesso.

In generale vorremmo risalire, dai gruppi di omologia, ad un complesso di catene:

$$\mathbb{Z}^{k_n} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}^{k_{n-1}} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^{k_0}$$

che possa fornire il numero di celle e il modo in cui sono incollate fra loro per il CW che stiamo cercando.

Notiamo immediatamente che l' $n$ -esimo gruppo di omologia  $H_n(X)$  di un CW-complesso  $n$ -dimensionale è necessariamente abeliano libero, essendo nucleo della mappa  $d_n$  e quindi sottogruppo di un gruppo abeliano libero. Il gruppo  $H_0(X)$  invece può essere scelto essere semplicemente  $\mathbb{Z}$ , per ridurci al caso di spazi connessi per archi.

Cominciamo a dare una risposta per il caso più semplice, ossia quando tutti i gruppi di omologia di  $X$  sono abeliani liberi. Il modo più semplice per incollare le celle fra loro, è quello di incollare ogni cella all'unica 0-cella; quindi tutti i morfismi di attaccamento sono nulli, perché tutte le altre celle non sono incollate fra loro: possiamo trovare sempre spazi con struttura CW che abbiano tali mappe di attaccamento.

Il complesso di catene che otteniamo è dunque formato dai gruppi di omologia, e i morfismi di bordo sono proprio la mappa nulla, per ogni  $n$ .

*Esempio 3.3.14.* Un facile esempio 2-dimensionale, è trovare un CW-complesso che abbia gruppi di omologia:

$$H_2(X) = H_1(X) = H_0(X) = \mathbb{Z}.$$

In questo caso, procedendo come sopra, abbiamo solo la mappa nulla come morfismo di bordo.

Un CW-complesso compatibile con questa struttura è una somma puntata  $X = \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ .

In generale, per una prefissata omologia composta solo da gruppi abeliani liberi tale che  $H_k(X) = \mathbb{Z}^{h_k}$  per  $k = 0, 1, \dots, n$ , possiamo scegliere un CW-complesso che la realizzi, nel modo più semplice possibile:

$$X = \mathbb{S}_1^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}_{h_1}^1 \vee \mathbb{S}_1^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}_{h_2}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}_1^n \vee \dots \vee \mathbb{S}_{h_n}^n$$

ossia  $X$  è somma puntata di tante sfere quanto è la somma dei ranghi dei suoi gruppi di omologia (tranne quello 0-dimensionale) di cui tante  $k$ -dimensionali quanto è il rango del suo  $k$ -esimo gruppo di omologia.

Consideriamo ora il caso bidimensionale, nel quale però permettiamo che  $H_1(X)$  abbia elementi di torsione. Supponiamo pertanto di avere:

$$H_2(X) = \mathbb{Z}^{m_2} \quad H_1(X) = \mathbb{Z}^{m_1} \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}/p_i^{k_i} \mathbb{Z} \right) \quad H_0(X) = \mathbb{Z}$$

ove  $p_i \in \mathbb{N}$  è primo per ogni  $i$  e  $k_i \in \mathbb{N}$  (notare che non si richiede che, per  $i \neq j$ , si abbia che  $p_i^{k_i} \neq p_j^{k_j}$ ).

Un complesso di catene che realizzi quei gruppi di omologia è:

$$\mathbb{Z}^{m_2+n} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{m_1+n} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}$$

Ove  $d_1$  è la mappa nulla, e  $d_2$  è la mappa nulla sui primi  $m_2$  generatori di  $C_2(X)$ , e sugli ultimi  $n$  generatori vale  $d_2(e_{t+m_2}) = p_t^{k_t} f_t$  per ogni  $t = 1, \dots, n$ . **N.B.** Abbiamo denotato con  $\{e_t\}$  e con  $\{f_t\}$  le basi dei gruppi di catene rispettivamente bidimensionali e unidimensionali del CW-complesso.

*Esempio 3.3.15.* Nel caso delle superfici reali compatte non orientabili di genere qualsiasi, è particolarmente evidente la scelta di una mappa di questo tipo. Per il calcolo esplicito, si veda la **Sezione 3.3**.

*Esempio 3.3.16.* Cerchiamo un CW-complesso che abbia gruppi di omologia:

$$H_2(X) = H_0(X) = \mathbb{Z} \quad H_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Per la costruzione appena vista, otteniamo un complesso di catene:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}$$

ove indichiamo con  $e_1$  ed  $e_2$  gli elementi di base di  $C_2(X)$  e con  $f_1$  ed  $f_2$  gli elementi di base di  $C_1(X)$ .

Le mappe  $d_1$  e  $d_2$  sono così calcolate:

- $d_1(f_i) = 0$  per  $i = 1, 2$ ;
- $d_2(e_1) = 0$  e  $d_2(e_2) = 2f_1$ .

Abbiamo allora due 2-celle, due 1-celle e una 0-cella; per le mappe definite, e utilizzando la formula per i morfismi di attaccamento definita nella **Proposizione 3.3.8**, si ottiene una somma puntata di una sfera, un cerchio e un piano proiettivo, ossia  $X = \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{P}^2$ .

Generalizziamo a CW-complessi  $n$ -dimensionali. Vorremmo trovare una struttura di CW-complesso,  $X$ , tale che:

$$H_q(X) = \mathbb{Z}^{l_q} \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{m_q} \mathbb{Z}/p_{q_i}^{k_{q_i}} \mathbb{Z} \right)$$

per  $1 \leq q \leq n-1$ ,  $p_{q_i}$  primi (notare che non si richiede che, per  $i \neq j$ , si abbia che  $p_{q_i}^{k_{q_i}} \neq p_{q_j}^{k_{q_j}}$ ), e tale che  $H_0(X) = \mathbb{Z}$  e  $H_n(X) = \mathbb{Z}^{l_n}$ .

Definiamo un complesso di catene:

$$\begin{aligned} C_n(X) &= \mathbb{Z}^{l_n+m_{n-1}} \\ C_q(X) &= \mathbb{Z}^{l_q+m_q+m_{q-1}} \\ C_0(X) &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

per  $1 \leq q \leq n-1$ .

Definiamo inoltre i morfismi di bordo  $\delta_q$  tali che l'omologia del complesso sia quella desiderata, e che verifichino la proprietà  $\delta_{q-1}\delta_q = 0$ .

Denotando con  $\{e_t^q\}$  gli elementi di base del gruppo di catene  $q$ -dimensionale del complesso, otteniamo:

$$\delta_n(e_t^n) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq l_n$$

$$\delta_n(e_{t+l_n}^n) = p_{qt}^{k_{qt}} e_t^{n-1} \quad \text{per } 1 \leq t \leq m_{n-1}$$

ossia il morfismo nullo sui primi  $l_n$  elementi della base, e che per ognuno degli altri assume un valore preciso che determinerà il successivo gruppo di omologia. Definiamo il morfismo:

$$\delta_1(x) = 0 \quad \forall x \in C_1(X)$$

nel modo ovvio.

Rimangono da definire i morfismi intermedi:

$$\delta_i(e_t^q) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq l_q + m_q$$

$$\delta_i(e_{t+l_q+m_q}^q) = p_{qt}^{k_{qt}} e_t^{q-1} \quad \text{per } 1 \leq t \leq m_{q-1}.$$

La definizione dei morfismi di bordo fa sì che  $\text{Im}(\delta_q) \subset \text{Ker}(\delta_{q-1})$ .

Il complesso di catene così ottenuto dà le condizioni necessarie per determinare una struttura di CW-complesso (numero di celle e mappe di attaccamento) che abbia prefissati gruppi di omologia, nel modo seguente: utilizzando il **Teorema 3.3.3** e il **Teorema 3.3.7**, si ottiene un CW-complesso con tante  $k$ -celle quanto è il rango del  $k$ -esimo gruppo di catene ottenuto sopra; le mappe di attaccamento sopra descritte forniscono numeri interi, e il loro significato geometrico è spiegato dalla **Proposizione 3.3.8** utilizzando il fatto che ogni  $k$ -cella è omeomorfa ad un disco  $k$ -dimensionale, e il concetto di grado fra mappe di sfere.

*Esempio 3.3.17.* Cerchiamo ora un CW-complesso  $X$ , 3-dimensionale, che abbia gruppi di omologia:

$$H_3(X) = \mathbb{Z} \quad H_2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad H_1(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad H_0(X) = \mathbb{Z}$$

Otteniamo un complesso di catene:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}$$

ove indichiamo con  $e_1$  ed  $e_2$  gli elementi di base di  $C_3(X)$ , con  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  gli elementi di base di  $C_2(X)$  e con  $g_1$  l'elemento di base di  $C_1(X)$ .

I morfismi di bordo ottenuti sono così definiti sulle basi:

- $d_1(g_1) = 0$ ;
- $d_2(f_1) = d_2(f_2) = 0$  e  $d_2(f_3) = 2g_1$ ;
- $d_3(e_1) = 0$  e  $d_3(e_2) = 2f_3$ .

Un CW-complesso che verifichi queste proprietà è una somma puntata di una 3-sfera, una 2-sfera, un piano proiettivo e una 3-varietà non orientabile  $L$ , ossia:  $X = \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{P}^2 \vee L$ .

$L$  ha struttura di CW-complesso con una 3-cellula, una 2-cellula e una 0-cellula: il complesso di catene associato è

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$$

ove, denotando con  $x$  e  $y$  i generatori di  $C_3(L)$  e  $C_2(L)$  rispettivamente,  $d(x) = 2y$ .

### 3.4 Omologia a coefficienti in un campo

Utilizzare un modulo diverso da  $\mathbb{Z}$  come insieme di coefficienti può essere utile spesso per semplificare il calcolo dei gruppi di omologia, o per ottenere informazioni che altrimenti sarebbe impossibile visualizzare a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ . Ad esempio, calcolare l'omologia a coefficienti in un campo  $G$  di caratteristica 0 fa sparire la parte di torsione, e permette di ottenere un isomorfismo:

$$H_n(K) \otimes G \simeq H_n(K \otimes G)$$

grazie al teorema dei coefficienti universali.

Il calcolo in un campo di caratteristica non nulla può fornire, invece, informazioni in più: ad esempio, nel caso del piano proiettivo, permette di distinguere classi di omotopia di mappe fra il piano proiettivo e la sfera, come mostrato nell'esempio a seguire.

*Esempio 3.4.1.* Consideriamo dunque il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  e la sfera  $\mathbb{S}^2$ .

Normalmente non siamo in grado, utilizzando l'omologia intera, di distinguere diverse classi di omotopia a partire dagli omomorfismi indotti.

Notiamo infatti che, essendo  $H_2(\mathbb{P}^2) = \{0\}$ ,  $H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$  e  $H_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ , abbiamo che, data una mappa:

$$f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

il morfismo indotto  $f_*$  è nullo sui gruppi di omologia di dimensione positiva, ed è un isomorfismo fra i gruppi  $H_0$ . È quindi evidente come sia impossibile distinguere classi di omotopia diverse utilizzando omologia intera.

Ripetiamo il calcolo, stavolta per gruppi di omologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Consideriamo la struttura di CW-complesso di entrambi gli spazi, e la mappa

$$f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

che schiaccia l'1-scheletro di  $\mathbb{P}^2$  a un punto, e che sia un omeomorfismo fra le 2-celle dei due spazi.

L'unica questione non banale è il calcolo della mappa  $f_{\#} : C_2(\mathbb{P}^2) \rightarrow C_2(\mathbb{S}^2)$  fra gruppi di catene 2-dimensionali.

Siano  $K$  e  $L$  strutture di CW rispettivamente sul piano proiettivo e sulla sfera.

Sia  $g : (E^2, \mathbb{S}^1) \rightarrow (K^2, K^1)$  la mappa caratteristica della 2-cella di  $\mathbb{P}^2$ ; per la definizione di  $f$ , la mappa  $h = fg : (E^2, \mathbb{S}^1) \rightarrow (L^2, L^1)$  è la mappa caratteristica della 2-cella di  $\mathbb{S}^2$ .

Le mappe indotte  $g_*$  e  $h_*$  fra i gruppi di omologia dei complessi di catene sono isomorfismi per il **Teorema 3.2.2**; pertanto anche  $f_*$  lo è, e allora la mappa  $f_{\#} : C_2(\mathbb{P}^2) \rightarrow C_2(\mathbb{S}^2)$  è completamente determinata: tensorizzando con  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  e passando all'omologia, otteniamo che  $f_* : H_2(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  è un isomorfismo.

Se consideriamo invece la mappa costante:

$$\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

l'omomorfismo indotto fra i gruppi di omologia è l'omomorfismo nullo; pertanto  $f$  e  $\varphi$  appartengono a due classi di omotopia diverse.

Questo dimostra che con l'omologia modulo 2 abbiamo più informazioni, e in particolare è un esempio chiarificatore del fatto che la conoscenza degli omomorfismi indotti fra gruppi di omologia intera non è sufficiente a determinare quelli fra gruppi di omologia a coefficienti diversi.

*Esempio 3.4.2.* Se consideriamo lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , come fatto nell'**Esempio 3.2.7**, ricordando la sua struttura di CW-complesso con una  $k$ -cella per ogni  $k = 0, 1, \dots, n$ , otteniamo un complesso di catene:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Visto che i morfismi di bordo erano la mappa nulla o la moltiplicazione per 2, in questo caso diventano tutti la mappa nulla; pertanto abbiamo:

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

*Esempio 3.4.3.* Calcoliamo i gruppi di omologia della bottiglia di Klein  $\mathbb{K}$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $n > 0$ .

Ricordiamo che i gruppi di omologia intera di  $\mathbb{K}$  sono:

$$H_2(\mathbb{K}) = \{0\} \quad H_1(\mathbb{K}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad H_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}.$$

Pertanto, applicando il teorema dei coefficienti universali abbiamo:

$$H_2(\mathbb{K}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0 \oplus \mathbb{Z}/(n, 2)\mathbb{Z} = \begin{cases} \{0\} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Il primo gruppo di omologia invece:

$$H_1(\mathbb{K}) = \text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \begin{cases} \{0\} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Infine, essendo  $\mathbb{K}$  connesso per archi, abbiamo:

$$H_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

*Esempio 3.4.4.* Calcoliamo i gruppi di omologia delle sfere e degli spazi proiettivi reali e complessi a coefficienti in  $\mathbb{Q}$ ; ovviamente, essendo i gruppi di omologia moduli sull'anello dei coefficienti, tutti i gruppi che calcoleremo sono spazi vettoriali: saranno, pertanto, privi di torsione.

Per le sfere, utilizzando la struttura di CW-complesso abbiamo un complesso di catene:

$$\mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q}$$

e quindi, ovviamente,

$$H_k(\mathbb{S}^n; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } k = 0, n \\ \{0\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per gli spazi proiettivi complessi  $n$ -dimensionali abbiamo il complesso di catene:

$$\mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q}$$

e quindi, ancora banalmente,

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } k > 2n \text{ o } k \text{ dispari} \\ \mathbb{Q}, & \text{se } k \leq 2n \text{ e } k \text{ pari.} \end{cases}$$

Per gli spazi proiettivi reali  $n$ -dimensionali, infine, abbiamo il complesso di catene:

$$\mathbb{Q} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q}.$$

Questa volta, la moltiplicazione per 2 è un isomorfismo di  $\mathbb{Q}$  in sé; pertanto i gruppi di omologia sono:

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } k = 0 \text{ o } k = n \text{ pari} \\ \{0\}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

### 3.5 Tabelle riassuntive

Vengono di seguito presentate alcune tabelle riepilogative contenenti gli esempi principali presentati nel capitolo.

## Superfici reali compatte

Nome	Simbolo	Orientabile	$H_1(X)$	$H_2(X)$
Sfera	$S^2$	Sì	$\{0\}$	$\mathbb{Z}$
Toro	$\mathbb{T}$	Sì	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
Piano proiettivo	$\mathbb{P}^2$	No	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{0\}$
Otre di Klein	$\mathbb{K}$	No	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{0\}$
Sup. di genere $g$	-	Sì	$\mathbb{Z}^{2g}$	$\mathbb{Z}$
Sup. di genere $g$	-	No	$\mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{0\}$
Cilindro	$S^1 \times I$	Sì	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$
Disco	$D^2$	Sì	$\{0\}$	$\{0\}$
Striscia di Möbius	-	No	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$

Nome	Simbolo	Spazi di dimensione maggiore		$H_0(X)$
		$H_k(X)$	$H_k(X)$	
Sfera	$S^n$	$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } k \neq n \\ \mathbb{Z}, & \text{se } k = n \end{cases}$	$H_0(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n \neq 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \end{cases}$	$H_0(X)$
Toro	$T^n$	$H_k(T^n) = \mathbb{Z}^{\overline{k!(n-k)!}} = \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$		$\mathbb{Z}$
Spazio proiettivo reale	$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{se } k \text{ dispari}, 0 < k < n \\ \{0\}, & \text{altrimenti, } k \neq 0 \end{cases}$		$\mathbb{Z}$
Spazio proiettivo complesso	$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } k > 2n \text{ o } k \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } k \leq 2n \text{ e } k \text{ pari} \end{cases}$		$\mathbb{Z}$
3-Otre di Klein	-	$H_2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$	$H_1(X) = H_3(X) = \{0\}$	$\mathbb{Z}$

## Omologia a coefficienti in un campo

Nome	Simbolo	Campo dei coefficienti	Omologia
Sfera	$S^n$	$\mathbb{Q}$	$H_k(S^n; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } k = 0, n \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$
Spazio proiettivo complesso	$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	$\mathbb{Q}$	$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } k > 2n \text{ o } k \text{ dispari} \\ \mathbb{Q}, & \text{se } k \leq 2n \text{ e } k \text{ pari} \end{cases}$
Spazio proiettivo reale	$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	$\mathbb{Q}$	$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } k = 0 \text{ o } k = n \text{ pari} \\ \{0\}, & \text{altrimenti} \end{cases}$
Spazio proiettivo reale	$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$
Oltre di Klein	$\mathbb{K}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$H_2(\mathbb{K}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$ $H_1(\mathbb{K}) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$ $H_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

# Capitolo 4

## Applicazioni classiche

In questa sezione sono enunciati e dimostrati alcuni teoremi classici nell'ambito della topologia algebrica, utilizzando metodi di teoria dell'omologia nelle dimostrazioni.

### 4.1 Teorema di invarianza del dominio

**Proposizione 4.1.1.** *Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto,  $n, m \neq 0$ . Allora  $U$  è omeomorfo a  $V \implies m = n$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $U$  e  $V$  omeomorfi; supponiamo inoltre che  $x \in U$  e  $y \in V$  tali che l'omeomorfismo tra  $U$  e  $V$  mappi  $x$  in  $y$ .

Per quanto già visto, abbiamo  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$  e  $H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{y\}) \simeq \mathbb{Z}$ ; inoltre, per il teorema di escissione, essendo il complementare di  $U$  interamente contenuto in  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ , ed analogamente per  $V$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\}) \simeq H_n(V, V \setminus \{y\}) \simeq \\ &\simeq H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{y\}). \end{aligned}$$

Se l'ultimo gruppo è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , allora  $m = n$ . □

Un importante corollario di questa proposizione è il seguente:

**Corollario 4.1.2.** *Se  $m \neq n$ ,  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  non sono mai omeomorfi.*

## 4.2 Teorema di pettinabilità

Un altro risultato classico, talvolta chiamato "Teorema di pettinabilità", è il seguente:

**Teorema 4.2.1.**  $\mathbb{S}^n$  ammette un campo vettoriale tangente continuo e non degenere se e solo se  $n$  è dispari.

Ricordiamo che:

**Definizione 4.2.2.** Un campo vettoriale tangente continuo su  $\mathbb{S}^n$  è una funzione continua:

$$v : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

che associa ad ogni punto della sfera un vettore tangente, ossia tale che:

$$v(x) \perp x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n.$$

Tale campo è detto non degenere se  $v(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che sia  $n$  dispari: allora un campo vettoriale tangente e non degenere è dato da:

$$v(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{n+1}, x_n)$$

Per dimostrare l'altra implicazione, supponiamo che un tale campo  $v$  esista.

Per assurdo, sia  $n$  pari.

Definiamo una mappa  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  in questo modo:

$$f(x) = \frac{x + v(x)}{|x + v(x)|}$$

che non ha punti fissi, essendo  $v$  non degenere; allora  $\deg f = (-1)^{n+1}$ .

Però  $f$  è anche omotopa all'identità:

$$F : I \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$$

$$F(t, x) = \frac{x + tv(x)}{|x + tv(x)|}$$

è ovviamente un'omotopia.

Allora  $\deg f = \deg id = 1$ , ma  $\deg f = (-1)^{n+1} \neq 1$  se  $n$  pari.

Allora  $n$  è dispari. □

Viene detto di "non pettinabilità" perché in particolare si ottiene in questo modo che sulla sfera classica,  $\mathbb{S}^2$  non può esistere un campo vettoriale tangente continuo e non degenere; pertanto, se la testa umana fosse approssimabile ad una sfera, il teorema ci direbbe che non si può pettinare una persona senza mai staccare il pettine dalla testa.

### 4.3 Teorema del punto fisso

Un teorema topologico molto noto, sia per la variegata quantità di dimostrazioni che per la quantità di applicazioni, è il teorema del punto fisso di Brouwer, che dice:

**Teorema 4.3.1.** *Sia  $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ , e sia data una mappa qualsiasi  $f : E^n \rightarrow E^n$ .*

*Allora esiste  $x \in E^n$  tale che  $f(x) = x$ , ossia  $f$  ha almeno un punto fisso.*

*Dimostrazione.* Si procede per assurdo: ipotizziamo che  $f(x) \neq x \forall x \in E^n$ . Allora  $x$  e  $f(x)$  determinano sempre una semiretta, con origine in  $x$  e passante per  $f(x)$  che interseca il bordo di  $E^n$ , ossia  $\mathbb{S}^{n-1}$  in un punto. Chiamo  $v(x)$  quel punto; allora la mappa  $v : E^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  è una retrazione del disco sulla sfera. Questo è assurdo, perché altrimenti avrebbero gli stessi gruppi di omologia: sappiamo già che  $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \neq H_{n-1}(E^n) = \{0\}$ .

Rimane da mostrare che  $v$  è effettivamente una retrazione.

Se è continua, è banalmente omotopa all'identità di  $E^n$  relativamente ad  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Osserviamo facilmente che  $v$  è continua: è infatti composizione di  $f$ , che è continua, e della proiezione da  $x$  su  $\mathbb{S}^{n-1}$ , che è lineare e limitata, quindi è continua.

Essendo composizione di mappe continue, è continua, e questo conclude la dimostrazione. □

Una curiosità: una conseguenza del teorema è che, ad esempio, mescolando una tazzina di caffè, c'è sempre una particella, in ogni istante, che si trova nella stessa posizione che occupava prima della perturbazione. Si possono trovare tantissime altre applicazioni di questo tipo, data la grande quantità di oggetti reali che sono modellizzati da spazi omeomorfi al disco chiuso  $E^n$ .

### 4.4 Teorema di Borsuk-Ulam

**Teorema 4.4.1.** *Sia  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Allora esiste  $x \in \mathbb{S}^n$  tale che  $g(x) = g(-x)$ .*

Dimostreremo il risultato utilizzando la seguente proposizione:

**Proposizione 4.4.2.** *Una mappa  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  dispari, che verifichi  $f(x) = -f(-x)$  per ogni  $x$ , deve avere grado dispari.*

*Dimostrazione.* Per comodità, scriviamo  $\mathbb{P}^n$  in luogo di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

La dimostrazione di questo risultato utilizza gruppi di omologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , e il rivestimento con due fogli  $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ , che fornisce una sequenza esatta di complessi di catene:

$$0 \rightarrow C(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau} C(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_{\#}} C(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

La sequenza dà luogo ad una sequenza omologica lunga:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \\ \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow 0 \rightarrow H_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_{i-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow 0 \rightarrow H_1(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} \\ \xrightarrow{p_*} H_0(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La sequenza inizia con uno zero che corrisponde ad  $H_{n+1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$  essendo  $\mathbb{P}^n$  un CW-complesso  $n$ -dimensionale.

Visto che  $\tau_*$  e la mappa  $H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  sono isomorfismi, la mappa  $p_* : H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  è la mappa nulla.

Questo accade poiché, essendo tutti i gruppi non nulli nella sequenza isomorfi a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , gli omomorfismi sono necessariamente o isomorfismi o mappe nulle. Una mappa dispari  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  induce una mappa quoziente  $\bar{f} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ .

Queste due mappe inducono una mappa dalla sequenza di cui sopra in sé, e vogliamo che i quadrati del diagramma che ne risulta siano commutativi. Ciò segue dalla naturalità della sequenza omologica lunga associata ai complessi di catene, una volta verificata la commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{p_{\#}} & C_i(\mathbb{P}^n) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{f}_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow \bar{f}_{\#} \\ 0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{p_{\#}} & C_i(\mathbb{P}^n) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il quadrato a destra commuta poiché  $pf = \bar{f}p$ , essendo  $p$  mappa di rivestimento. Il quadrato a sinistra commuta perché per un  $n$ -cubo  $T : I^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  con rialzamenti  $\tilde{T}_1$  e  $\tilde{T}_2$ , i due rialzamenti di  $fT$  sono  $f\tilde{T}_1$  e  $f\tilde{T}_2$ , visto che  $f$  mappa punti antipodali in punti antipodali.

Per quanto appena visto, allora, tutte le mappe  $f_*$  e  $\bar{f}_*$  sono isomorfismi per induzione sulla dimensione, usando il dato che se tre mappe in un quadrato

commutativo sono isomorfismi, lo è anche la quarta.

In particolare si ottiene che  $f_* : H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  è un isomorfismo.

Questa mappa deve essere la moltiplicazione per il grado di  $f$  modulo 2: essendo un isomorfismo, è l'identità e quindi  $f$  ha grado dispari.  $\square$

Passiamo quindi alla dimostrazione del teorema di Borsuk-Ulam:

*Dimostrazione.* Sia  $f(x) = g(x) - g(-x)$ , in modo che  $f$  sia dispari. Vogliamo mostrare che, per qualche  $x$ ,  $f(x) = 0$ .

Se, per assurdo, così non fosse, potremmo sostituire  $f(x)$  con  $f(x)/|f(x)|$  per ottenere una mappa  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  che è ancora dispari.

La restrizione di  $f$  all'equatore  $\mathbb{S}^{n-1}$  di  $\mathbb{S}^n$  ha quindi grado dispari per la proposizione appena dimostrata. Ma tale restrizione è omotopa alla mappa nulla, tramite la restrizione di  $f$  a una delle semisfere di cui  $\mathbb{S}^{n-1}$  è bordo.  $\square$

Un'interessante conseguenza di questo fatto, di cui non si dà qui una dimostrazione, è il teorema del “panino al prosciutto” (o “Ham sandwich theroem” in inglese) che afferma:

**Teorema 4.4.3.** *Dati  $n$  sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  qualsiasi, esiste un iperpiano di  $\mathbb{R}^n$  in grado di bisecarli contemporaneamente.*

## 4.5 Teorema di separazione

Un ultimo teorema classico, quello di separazione di Jordan-Brouwer, richiede un procedimento più laborioso per venire provato.

Il teorema è una generalizzazione del classico teorema di Jordan sulle curve chiuse semplici in  $\mathbb{R}^2$ , che afferma che una curva semplice chiusa  $C$  nel piano è omeomorfa al cerchio, e che  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  è formato da due componenti connesse, e  $C$  è bordo di entrambe.

Elenchiamo dapprima due risultati che permetteranno la generalizzazione ad  $\mathbb{R}^n$ :

**Proposizione 4.5.1.** *Sia  $(X, A)$  una coppia; allora:*

1. *Dato  $u \in H_n(X, A)$  esiste una coppia compatta  $(C, D) \subset (X, A)$  e una classe di omologia  $u' \in H_n(C, D)$  tale che  $i_*(u') = u$ , ove  $i$  è la mappa di inclusione;*
2. *Sia  $(C, D)$  coppia compatta tale che  $(C, D) \subset (X, A)$  e  $v \in H_n(C, D)$  tale che  $i_*(v) = 0$ ; allora esiste  $(C', D')$  tale che  $(C, D) \subset (C', D') \subset (X, A)$  e  $j_*(v) = 0$  ove  $j : (C, D) \rightarrow (C', D')$  è l'inclusione.*

*Dimostrazione.* Vedi W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, p. 211.  $\square$

**Lemma 4.5.2.** *Sia  $Y \subset \mathbb{S}^n$ ,  $Y$  omeomorfo a  $I^k$ , con  $0 \leq k \leq n$ . Allora  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus Y) = \{0\} \quad \forall i$ .*

*Dimostrazione.* Vedi W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, pp. 211-214.  $\square$

Possiamo ora enunciare il teorema:

**Teorema 4.5.3.** *Sia  $A \subset \mathbb{S}^n$  con  $A$  omeomorfo a  $\mathbb{S}^k$ , con  $0 \leq k \leq n-1$ . Allora  $\tilde{H}_{n-k-1}(\mathbb{S}^n \setminus A) = \mathbb{Z}$ , e  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus A) = \{0\}$  per  $i \neq n-k-1$ .*

*Dimostrazione.* Si procede per induzione su  $k$ .

*Base d'induzione:* se  $k=0$ ,  $A$  è un insieme di due punti, e quindi  $\mathbb{S}^n \setminus A$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus (P, Q)$  ( $P, Q$  punti qualsiasi di  $\mathbb{R}^n$ ), e quindi  $\mathbb{S}^n \setminus A$  è omeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Passo induttivo:* Se  $A$  omeomorfo ad  $\mathbb{S}^k$ ,  $A = A_1 \cup A_2$  con  $A_1, A_2 \subset A$  omeomorfi a  $I^k$  e  $A_1 \cap A_2$  omeomorfo a  $\mathbb{S}^{k-1}$ .

Allora  $\mathbb{S}^n \setminus (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{S}^n \setminus A_1) \cup (\mathbb{S}^n \setminus A_2)$ .

Usiamo la successione di Mayer-Vietoris:

$$H_i(\mathbb{S}^n \setminus A_1) = \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus A_2) = \{0\}$$

per il lemma.

Segue quindi dall'esattezza della successione che:

$$\Delta : \tilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^n \setminus (A_1 \cap A_2)) \rightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus A)$$

è isomorfismo.

Essendo quindi  $(A_1 \cap A_2)$  omeomorfo a  $\mathbb{S}^{k-1}$ , è sufficiente per dimostrare l'enunciato.  $\square$

**Corollario 4.5.4.** *Sia  $A \subset \mathbb{S}^n$  tale che  $A$  omeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Allora  $\mathbb{S}^n \setminus A$  ha due componenti connesse.*

*Dimostrazione.* Basta applicare il teorema precedente con  $k = n-1$  e calcolando il gruppo di omologia  $H_0(\mathbb{S}^n \setminus A)$ .  $\square$

**Proposizione 4.5.5.** *Sia  $A \subset \mathbb{S}^n$  omeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Allora  $A$  è bordo di ciascuna delle due componenti connesse di  $\mathbb{S}^n \setminus A$ .*

*Dimostrazione.* Essendo  $\mathbb{S}^n \setminus A$  localmente connesso, ogni componente è un aperto di  $\mathbb{S}^n \setminus A$ , e quindi di  $\mathbb{S}^n$ .

Il bordo di ogni componente deve essere quindi un sottoinsieme di  $A$ .

Siano  $C_0$  e  $C_1$  le due componenti.

Sia  $a \in A$ ,  $N$  intorno di  $a$  in  $\mathbb{S}^n$ . Vogliamo che  $N \cap C_i \neq \emptyset$  per  $i = 0, 1$ .  $N \cap A$  è un intorno di  $a$  in  $A$ . Essendo  $A$  omeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , troviamo  $A = A_1 \cup A_2$ , come nel teorema precedente, omeomorfi a  $I^{n-1}$  e  $A_1 \cap A_2$  omeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-2}$ .

Segue che  $\mathbb{S}^n \setminus A_1$  è connesso per archi.

Siano allora  $P_0, P_1$  punti di  $C_0$  e  $C_1$  rispettivamente, e  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus A_1$  arco che li connette.

Abbiamo che  $f(I) \cap A \neq \emptyset$ , e quindi  $f(I) \cap A_2 \neq \emptyset$ .

Consideriamo  $f^{-1}(A_2) \subset I$ : è compatto e quindi ammette estremo inferiore  $t_0$  e superiore  $t_1$ .

Ovviamente  $t_0$  e  $t_1$  sono bordo di  $f^{-1}(A_2)$  e  $f^{-1}(N)$  è aperto di  $I$  che contiene  $t_0$  e  $t_1$ .

Segue che  $f^{-1}(N) \cap f^{-1}(C_0)$  e  $f^{-1}(N) \cap f^{-1}(C_1)$  sono non vuoti; pertanto,  $N \cap C_0 \neq \emptyset$  e  $N \cap C_1 \neq \emptyset$ .  $\square$



# Bibliografia

- [1] W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag GTM 127, 1993
- [2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2002
- [3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969
- [4] S. Eilenberg and S. Mac Lane, *Acyclic models*, American Journal of Mathematics 75(prima ediz.), 1953
- [5] S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, New York, 1963
- [6] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag GTM 5, 1971.