

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Bootstrap in meccanica quantistica

**Relatore**

Dr. Stefano Massai

**Laureanda**

Valentina Zonta

**ANNO ACCADEMICO 2022/2023**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Metodologia . . . . .	2
1.1.1	Algoritmo . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Analisi dei sistemi e risultati</b>	<b>5</b>
2.1	Oscillatore armonico . . . . .	5
2.1.1	Risultati per lo spettro di energia . . . . .	7
2.2	Atomo di idrogeno . . . . .	9
2.2.1	Risultati per lo spettro di energia . . . . .	10
2.3	Oscillatore anarmonico . . . . .	14
2.3.1	Risultati . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>21</b>
<b>A</b>	<b>Codici utilizzati</b>	<b>22</b>
A.1	Atomo di idrogeno . . . . .	22
A.2	Oscillatore anarmonico . . . . .	23

# 1. Introduzione

Nei sistemi quantistici sono poche le equazioni agli autovalori che si possono effettivamente risolvere analiticamente. Di recente è stato sperimentato un nuovo metodo, chiamato bootstrap, allo scopo di risolvere numericamente sistemi in meccanica quantistica [1, 3]. Questa tecnica è un riadattamento dell'omonimo metodo che ha avuto molto successo in CFT (teoria dei campi conforme) [4]. L'idea alla base è quella di assumere un'ipotesi iniziale su un set di dati e applicare ad esso dei controlli ricorsivi in modo da escludere alcune tra le ipotesi di partenza se non superano tali controlli. In questo modo si riduce la dimensione dello spazio dei dati indipendenti, che viene denotato con  $S$  (nel nostro caso sono inclusi gli autovalori dell'Hamiltoniana quantistica  $H$ ). Infine, l'insieme ridotto dei dati indipendenti è valutato sulla base di vincoli fisici come la positività della norma [2]. I controlli sopra menzionati derivano da alcune identità che possono essere derivate dalle seguenti relazioni, valide per gli autostati dell'energia, con  $\mathcal{O}$  un'osservabile generica:

$$\langle [H, \mathcal{O}] \rangle = 0, \quad \langle H\mathcal{O} \rangle = E\langle \mathcal{O} \rangle. \quad (1.1)$$

Il vincolo di positività è espresso come:

$$\langle \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} \rangle \geq 0. \quad (1.2)$$

Esistono altre metodologie che approssimano, sotto specifiche ipotesi, lo spettro di un sistema quantistico. Ad esempio la teoria perturbativa che, partendo da un sistema con spettro noto, considera una correzione al sistema iniziale. Sotto l'ipotesi perturbativa si possono espandere gli autovalori e autovettori di tale sistema perturbato e ottenere dei risultati approssimati per lo spettro di energia, lì dove le equazioni agli autovalori sarebbero difficilmente risolvibili in maniera esatta. Questo metodo, tuttavia, soffre di alcune importanti limitazioni, in particolare quella relativa al parametro perturbativo che deve essere piccolo. Il metodo di bootstrap, invece, non è limitato all'ipotesi di perturbazione molto piccola, ma consente di considerare anche valori del parametro di ordine uno, ottenendo risultati soddisfacenti.

In questa tesi inizialmente viene applicato il metodo di bootstrap ad alcuni sistemi quantistici semplici, ovvero l'oscillatore armonico e l'atomo di idrogeno (potenziale coulombiano), nei quali lo spazio dei dati indipendenti è ad una dimensione e quindi facilmente risolvibile. Di questi sistemi inoltre sappiamo con esattezza la soluzione dell'equazione agli autovalori per l'energia, ed è quindi possibile confrontare i risultati teorici con il metodo numerico approssimato per valutarne la validità. In seguito viene analizzato un sistema con dimensione dei dati indipendenti pari a due e senza soluzioni analitiche: l'oscillatore anarmonico. Si ottengono dei risultati sullo spettro di quest'ultimo e quindi si confrontano con un differente metodo di approssimazione. Dai risultati ottenuti si conclude che il metodo di bootstrap numerico applicato a problemi di meccanica quantistica risulta essere efficiente nel determinare lo spettro dei primi livelli energetici con una buona precisione, e può essere usato per studiare sistemi più complessi, come ad esempio alcuni modelli di matrici, arricchendo le tecniche numeriche note.

## 1.1 Metodologia

Il metodo di bootstrap utilizzato in questa tesi è un metodo numerico che si basa sul calcolo di formule ricorsive per una sequenza di momenti (per momenti si intende il valor medio di potenze dell'operatore posizione). In generale, si prenda un sistema quantistico in una dimensione con operatore Hamiltoniano generico

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x), \quad (1.3)$$

dove si è posta la massa  $m = 1$ . Dato un qualsiasi operatore  $\mathcal{O}$ , per ogni autostato  $\psi$  di  $H$  con autovalore  $E$  vale

$$\langle [H, \mathcal{O}] \rangle = 0, \quad \langle H\mathcal{O} \rangle = E\langle \mathcal{O} \rangle. \quad (1.4)$$

Prendendo  $\mathcal{O} = x^s$  e ponendo  $\hbar = 1$  si trova:

$$\begin{aligned} \langle [H, x^s] \rangle &= \langle [\frac{p^2}{2} + V(x), x^s] \rangle = \\ &= \langle [\frac{p^2}{2}, x^s] \rangle + \overbrace{\langle [V(x), x^s] \rangle}^{=0} \\ &= \frac{1}{2} \langle p[p, x^s] + [p, x^s]p \rangle = 0. \end{aligned}$$

Usando l'identità

$$[x^n, p] = inx^{n-1} \quad (1.5)$$

segue che

$$-i(sp x^{s-1} - s x^{s-1} p) - is(x^{s-1} p - [x^{s-1} p] + x^{s-1} p) = 0$$

e quindi, riutilizzando (1.5), otteniamo la relazione

$$s \langle x^{s-1} p \rangle = \frac{i}{2} s(s-1) \langle x^{s-2} \rangle. \quad (1.6)$$

Scegliendo in modo adeguato altri osservabili  $\mathcal{O}$  è possibile generare ricorsioni simili e combinarle in modo da togliere la dipendenza del momento  $p$  nei valori medi. In particolare usando  $\mathcal{O} = x^m p$  si ha:

$$\langle [H, x^m p] \rangle = \langle [\frac{p^2}{2}, x^m p] \rangle + \langle [V(x), x^m p] \rangle = \quad (1.7)$$

$$= \frac{i}{2} \langle m(m-1)x^{m-2} p + 2mx^{m-1} p^2 \rangle + \langle ix^m V'(x) \rangle, \quad (1.8)$$

dove la prima parte dell'espressione precedente è stata ottenuta usando in  $a$  la relazione (1.5):

$$\begin{aligned} [p^2, x^m p] &= [p^2, x^m] p + x^m [p^2, p] \\ &= p[p, x^m] p + [p, x^m] p^2 \\ &\stackrel{a}{=} -im(px^{m-1} p + x^{m-1} p^2) \\ &= -im((x^{m-1} p - [x^{m-1}, p])p + x^{m-1} p^2) \\ &= -2imx^{m-1} p^2 - m(m-1)x^{m-2} p. \end{aligned}$$

Usando (1.6) e prendendo i valori medi è possibile riscrivere l'ultima espressione come:

$$-2mi\langle x^{m-1}p^2 \rangle - \frac{i}{2}m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle. \quad (1.9)$$

Prendendo invece la seconda relazione di (1.4) ed utilizzando l'operatore  $\mathcal{O} = x^{m-1}$  si ha:

$$E\langle x^{m-1} \rangle = \frac{1}{2}\langle x^{m-1}p^2 \rangle + \langle x^{m-1}V(x) \rangle. \quad (1.10)$$

Si riscrive la (1.8) utilizzando i precedenti risultati e la relazione (1.10) come:

$$0 = 2mE\langle x^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle - \langle x^m \frac{dV}{dx} \rangle - 2m\langle x^{m-1}V(x) \rangle. \quad (1.11)$$

Per ogni ricorsione sono necessari dei parametri di inizializzazione, che corrispondono all'insieme dei dati indipendenti menzionati nell'introduzione, dei quali il numero e i valori dipendono dal sistema da analizzare. In tutti i casi si normalizza ponendo  $\langle x^0 \rangle = 1$ . Per esempio, nei casi che si andranno a studiare

- $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$  ,  $S = \{E\}$
- $H = \frac{p^2}{2} + \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{1}{r}$  ,  $S = \{E\}$
- $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + gx^4$  ,  $S = \{\langle x^2 \rangle, E\}$  .

Fissati questi parametri di inizializzazione, per ognuno di questi insiemi di dati di partenza si ottiene una successione di momenti  $\langle x^1 \rangle, \langle x^2 \rangle, \dots, \langle x^n \rangle$ . Per determinare quali dei valori di energie sono accettabili fisicamente si utilizza la positività della norma. Dato un operatore  $\mathcal{O}$  della forma  $\mathcal{O} = \sum_n c_n x^n$ , si pone

$$0 \leq \langle \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} \rangle = \sum_{ij} c_i^* \langle x^{i+j} \rangle c_j \equiv \sum_{ij} c_i^* M_{ij} c_j. \quad (1.12)$$

Questo implica che la matrice  $M$  (simmetrica per costruzione) deve essere semidefinita positiva,  $M \succeq 0$ . Questa matrice è chiamata anche matrice di Hankel.

### 1.1.1 Algoritmo

Data l'Hamiltoniana  $H$  con un potenziale generico  $V(x)$  si inizia creando delle ricorsioni i cui valori dipendono dalle condizioni iniziali. Sia  $S$  lo spazio che contiene il più piccolo insieme di condizioni iniziali  $p = \{E, \langle x \rangle, \dots\}$ , formato dall'energia e da alcuni momenti. La dimensione dello spazio dipende dal potenziale analizzato. Si crea un grande set di punti  $p \in S$  da testare. Si applica quindi un algoritmo per valutare quali tra questi punti siano accettabili:

- Per prima cosa si utilizza la ricorsione (1.11) per un punto  $p \in S$ . Si ottiene una successione di momenti  $\langle x^n \rangle$  associata al punto  $p$ .
- Si costruisce una matrice di Hankel  $M$  di dimensione  $K \times K$ , con  $K$  arbitrario. Più grande è la matrice più precise saranno le soluzioni dell'algoritmo. La matrice è definita come  $M_{ij} = \langle x^{i+j} \rangle$ , ovvero:

$$M = \begin{pmatrix} \langle x^0 \rangle & \langle x^1 \rangle & \langle x^2 \rangle & \dots \\ \langle x^1 \rangle & \langle x^2 \rangle & \langle x^3 \rangle & \dots \\ \langle x^2 \rangle & \langle x^3 \rangle & \langle x^4 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

- Si controlla quindi la semi-positività della matrice  $M$ : se è semidefinita positiva il punto  $p \in S$  è tra le soluzioni accettate, in caso contrario il punto è rigettato.
- Si ripete il procedimento per tutto il set di  $p \in S$  e si identifica l'insieme di soluzioni come tutti i punti  $p$  accettati.

Per  $K \rightarrow \infty$  ci si aspetta che le energie convergano allo spettro esatto del sistema. Per valori di  $K$  piccoli si ottengono poche condizioni per accettare o rigettare il valore di energia.

L'algoritmo è stato implementato attraverso dei programmi in Python per cui si rimanda all'appendice A.

## 2. Analisi dei sistemi e risultati

Di seguito sono stati analizzati due sistemi per cui è possibile trovare una soluzione analitica, e quindi sono risolvibili in maniera esatta. E' stato possibile confrontare i risultati teorici dei due sistemi con le soluzioni dell'algoritmo per valutarne l'efficienza.

### 2.1 Oscillatore armonico

Il primo sistema esaminato è, seguendo la referenza [1], l'oscillatore armonico unidimensionale. L'equazione agli autovalori è in questo caso risolvibile analiticamente; ci sono quindi note le soluzioni esatte.

L'Hamiltoniana ha la forma :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (2.1)$$

Le autofunzioni sono  $\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} H_n$ , con  $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$ , dove  $H_n$  sono i polinomi di Hermite.

Lo spettro di energia è dato da:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.2)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

Sostituendo in (1.11) il potenziale armonico, e ponendo  $m = 1$ ,  $\hbar = 1$  e  $\omega = 1$ , si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= 2mE\langle x^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle - \langle x^m kx \rangle - 2m\langle x^{m-1} \frac{kx^2}{2} \rangle = \\ &= 2mE\langle x^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle - k\langle x^{m+1} \rangle - km\langle x^{m+1} \rangle, \end{aligned}$$

e sostituendo  $m \equiv s - 1$ :

$$0 = 2(s-1)E\langle x^{s-2} \rangle + \frac{1}{4}(s-1)(s-2)(s-3)\langle x^{s-4} \rangle - ks\langle x^s \rangle.$$

Si trova quindi la ricorsione per l'oscillatore armonico:

$$m\langle x^m \rangle = 2E(m-1)\langle x^{m-2} \rangle + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\langle x^{m-4} \rangle}{4}. \quad (2.3)$$

In questo caso sono necessari quattro valori per le condizioni iniziali. Normalizziamo con  $\langle x^0 \rangle = 1$ , poniamo  $\langle x^2 \rangle = E$  e  $\langle x \rangle = \langle x^3 \rangle = 0$  per parità.

Creando delle matrici di Hankel  $M$  con i momenti dati dalla ricorsione, in funzione della grandezza della matrice avremo dei vincoli diversi, che si fanno sempre più stringenti man mano che le dimensioni di  $M$  aumentano. A titolo di esempio si riportata la matrice di Hankel per il potenziale armonico con dimensione  $K = 4$

$$M_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 6E^2) \\ E & 0 & \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 6E^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 6E^2) & 0 & \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 6E^2) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

La sua forma potrebbe far pensare che ci siano delle componenti superflue di soli zero, ma in realtà anche quelle portano a delle restrizioni aggiuntive.

Di seguito è descritto l'andamento delle soluzioni con matrici piccole, per mostrare in che modo si ottengono i diversi livelli energetici. Presa la matrice più piccola possibile avente condizioni sull'energia ( $K = 2$ ), essendo già diagonale, i suoi autovalori sono 1 ed  $E$ . Imponendo  $M_{2 \times 2}$  semidefinita positiva si ottiene che  $E \geq 0$ . Per  $K = 3$  si ottengono tre autovalori  $\{E, \frac{1}{2}(1.37 + 1.5E^2 - \sqrt{0.3969 + 2.11E^2 + 2.25E^4}), \frac{1}{2}(1.37 + 1.5E^2 + \sqrt{0.3969 + 2.11E^2 + 2.25E^4})\}$  e ponendoli positivi si ottiene sempre  $E \geq 0$ . L'evolvere delle restrizioni di  $E$  al crescere dei  $K$  è mostrato in modo grafico di seguito. Sia per  $M$  pari che dispari sono plottate le tangenti iperboliche dei determinanti in funzione dell'energia per diversi valori di  $K$ .

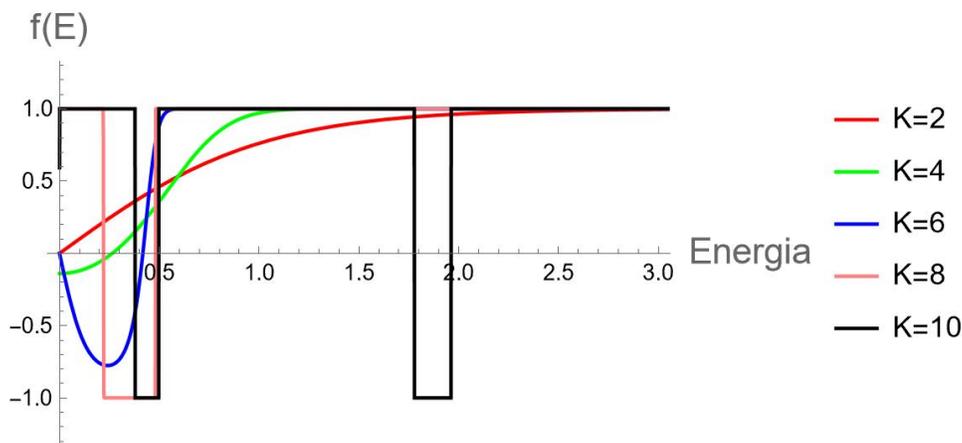


Figura 2.1: Tangenti iperboliche dei determinanti di matrici con  $K$  pari.

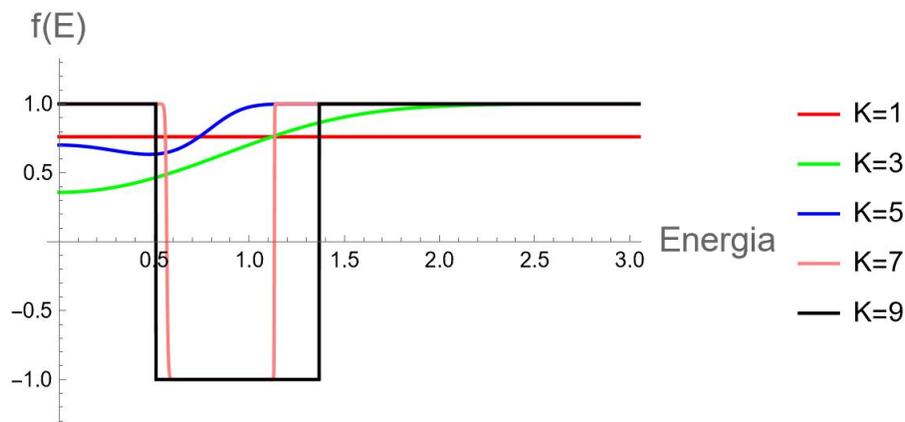


Figura 2.2: Tangenti iperboliche dei determinanti di matrici con  $K$  dispari.

In 2.1 sono graficati i determinanti delle tangenti iperboliche delle matrici di Hankel  $M_{K \times K}$  con  $K$  dimensione pari e in 2.2 per  $K$  dispari. Per  $K = 10$  si vede la separazione di diversi range energetici; la funzione ha infatti quattro radici e distingue tre zone energetiche accettate. Per  $K$  dispari fino a  $K = 9$  si distinguono solo 2 livelli. Le regioni positive, dove il determinante è esso stesso positivo, rappresentano le energie accettate. Si nota che in particolare per  $K$  pari relativamente alti, dove i vincoli sono definiti da polinomi con più radici, iniziano a distinguersi più zone in cui le energie vengono rigettate e accettate.

### 2.1.1 Risultati per lo spettro di energia

Nei grafici di seguito si riportano gli intervalli di energia accettati (ovvero quelli che compongono la soluzione approssimata dello spettro dell'oscillatore) e rigettati dalla procedura, associando alle energie accettate il valore 1 nell'asse delle ascisse.

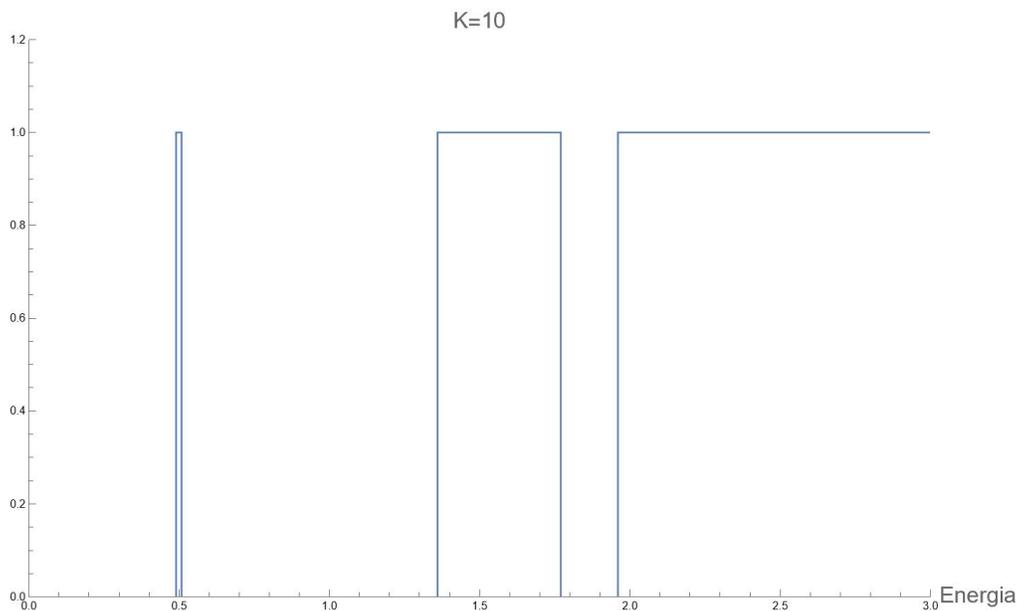


Figura 2.3: Energie accettate con matrice di Hankel  $M_{K \times K}$  con  $K = 10$ .

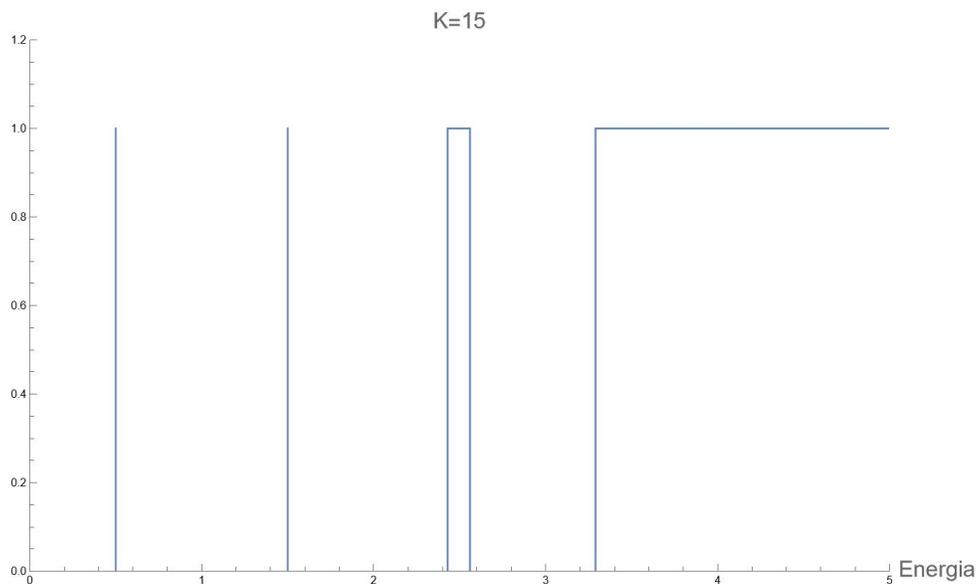


Figura 2.4: Energie accettate con matrice di Hankel  $M_{K \times K}$  con  $K = 15$ .

I grafici appena illustrati mostrano l'andamento appena descritto al variare di  $K$ . Per  $K = 10$  in 2.3 sono distinti i due livelli energetici con  $n$  pari a 0 e 1, e da un valore vicino a 2 sono accettate tutte le successive energie. In 2.4 invece, avendo aumentato il valore di  $K$ , si distingue un ulteriore livello energetico con indice  $n = 2$ , e i valori dei range corrispondenti a  $n = 0, 1$  sono molto più piccati.

Il seguente grafico è invece relativo a una matrice di grandezza  $K = 50$ :

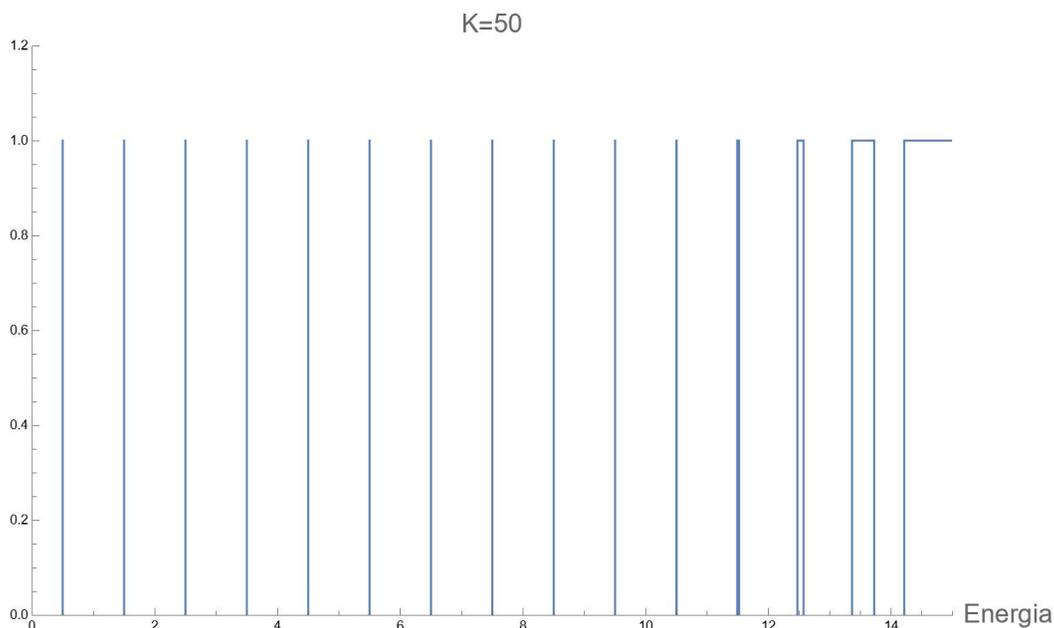


Figura 2.5: Energie accettate per potenziale armonico con matrice di Hankel  $M_{K \times K}$  con  $K = 50$ .

Si può notare che per  $K = 50$  in 2.5 le energie accettate si raggruppano intorno ai primi quattordici stati dell'oscillatore armonico con numeri quantici  $n = 0, 1, 2, \dots, 13$ . Le stime teoriche di tali energie sono date, nelle unità

usate per ottenere la ricorsione, da  $E_n = n + \frac{1}{2}$  che corrispondono ai valori  $E_n = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$ . Per ottenere ulteriori livelli energetici sarebbe necessario utilizzare valori più alti di  $K$ . Si nota che i livelli energetici più bassi convergono più velocemente fissato il valore di  $K$  e i livelli più alti distinguibili hanno un range più esteso. In particolare all'aumentare di  $K$  si hanno più livelli energetici distinti, e l'ultimo livello (che per  $K = 50$  corrisponde a  $E_{14} = 14.5$ ) è definito da un range infinito.

Poiché sono note a priori le soluzioni del sistema in questione è possibile confrontare i dati ottenuti con le soluzioni esatte. Viene naturale definire una precisione come il range di energie attorno il valore teorico. Nella tabella sottostante sono riassunte le precisioni per la matrice che nella analisi ha dato i risultati più precisi, ossia  $M_{K \times K}$  con  $K = 50$ :

n	$E_{th}$	range	n	$E_{th}$	range
0	0.5	$< 1 \cdot 10^{-16}$	8	8.5	$1 \cdot 10^{-5}$
1	1.5	$< 1 \cdot 10^{-16}$	9	9.5	$1 \cdot 10^{-4}$
2	2.5	$1 \cdot 10^{-14}$	10	10.5	$1 \cdot 10^{-3}$
3	3.5	$1 \cdot 10^{-12}$	11	11.5	$31 \cdot 10^{-2}$
4	4.5	$1 \cdot 10^{-10}$	12	12.5	$1 \cdot 10^{-1}$
5	5.5	$1 \cdot 10^{-8}$	13	13.5	0.36
6	6.5	$1 \cdot 10^{-7}$			
7	7.5	$1 \cdot 10^{-6}$			

Tabella 2.1: Intervalli energetici ottenuti con il metodo di bootstrap con matrice  $M_{50 \times 50}$  confrontati con i valori teorici delle energie.

## 2.2 Atomo di idrogeno

Il secondo sistema analizzato è l'atomo di idrogeno. La sua Hamiltoniana è

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{l(l+1)}{2r^2} + V(r) \quad (2.5)$$

con  $V(r) = -\frac{1}{r}$ . Gli autostati esatti di  $H$  sono indicizzati con il numero quantico  $n$  e le energie degli stati legati sono date dalla relazione, nelle unità utilizzate:

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}. \quad (2.6)$$

Usando la ricorsione generale per un'Hamiltoniana  $H = \frac{p^2}{2} + V(x)$

$$0 = 2mE \langle x^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2) \langle x^{m-3} \rangle - \langle x^m \frac{dV}{dx} \rangle - 2m \langle x^{m-1} V(x) \rangle \quad (2.7)$$

e sostituendo il potenziale efficace dell'atomo di idrogeno

$$V(r)_{eff} = \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{1}{r}, \quad \frac{dV}{dr} = \frac{l(l+1)}{r^3}(-2) + \frac{1}{r^2} \quad (2.8)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= 2mE\langle r^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle r^{m-3} \rangle - \langle r^m \left( \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{1}{r} \right)' \rangle - 2m\langle r^{m-1} \left( \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) \rangle = \\
&= 2mE\langle r^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle r^{m-3} \rangle - \langle r^m \left( \frac{l(l+1)}{2} - \frac{(-2)}{r^3} \right) \rangle + \langle r^m \frac{(-1)}{r^2} \rangle + \\
&\quad - 2m\langle r^{m-1} \left( \frac{l(l+1)}{2r^2} \right) \rangle + 2m\langle r^{m-1} \frac{1}{r} \rangle = \\
&= 2mE\langle r^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle r^{m-3} \rangle + l(l+1)\langle r^{m-3} \rangle - \langle r^{m-2} \rangle - ml(l+1)\langle r^{m-3} \rangle + 2m\langle r^{m-2} \rangle = \\
&= 8mE\langle r^{m-1} \rangle + \langle r^{m-3} \rangle (m(m-1)(m-2) + 4l(l+1) - 4ml(l+1)) + \langle r^{m-2} \rangle (8m-4),
\end{aligned}$$

e quindi la ricorsione specifica per il sistema di interesse:

$$0 = 8mE\langle r^{m-1} \rangle + (m-1)[m(m-2) - 4l(l+1)]\langle r^{m-3} \rangle + 4(2m-1)\langle r^{m-2} \rangle. \quad (2.9)$$

Per generare i momenti in questo caso sono necessarie solamente due condizioni iniziali; si scelgono  $\langle r^0 \rangle = 1$  come normalizzazione, e utilizzando  $m = 1$  si ottiene il teorema del viriale  $\langle r^{-1} \rangle = -2E$ . Ottenute alcune serie di momenti usando (2.9), è necessario assicurarsi che la norma (1.12) sia positiva. Nel caso specifico dell'atomo di idrogeno ne derivano due condizioni distinte. La prima, similmente all'oscillatore armonico, si ottiene prendendo un operatore  $O = \sum_{n,m}^K c_n r^n$ :

$$0 \leq \langle O^\dagger O \rangle = \sum_{n,m}^K c_m^* \langle r^{n+m} \rangle c_n \equiv \sum_{n,m}^K c_m^* M_{nm} c_n = c^T M c \geq 0 \quad (2.10)$$

questa condizione implica che  $M = \langle r^{n+m} \rangle \geq 0$  per ogni dimensione  $K$  della matrice. Definendo l'operatore  $\tilde{O} = \sqrt{r}O$  dato  $r > 0$  otteniamo una relazione del tipo

$$0 \leq \langle \tilde{O}^\dagger \tilde{O} \rangle = \sum_{n,m}^K c_m^* \langle r^{n+m+1} \rangle c_n \equiv \sum_{n,m}^K c_m^* \tilde{M}_{nm} c_n = c^T \tilde{M} c \geq 0 \quad (2.11)$$

che implica  $\tilde{M} = \langle r^{n+m+1} \rangle \geq 0$ .

### 2.2.1 Risultati per lo spettro di energia

Sono state seguite due tipologie di analisi. Nella prima ci si è concentrati sul numero quantico  $l = 1$ ; la seconda invece è stata fatta per diversi numeri quantici  $l$  utilizzando una dimensione alta di matrice in modo da avere dei risultati più precisi.

Per il primo tipo di analisi sono state utilizzate matrici di diverse grandezze  $K$ , così da confrontare la convergenza dei risultati numerici ottenuti grazie al metodo di bootstrap con le energie esatte dell'atomo di idrogeno. In seguito si riporta il grafico delle energie ottenute con  $K = 4, 8, 10, 12, 16, 20$  :

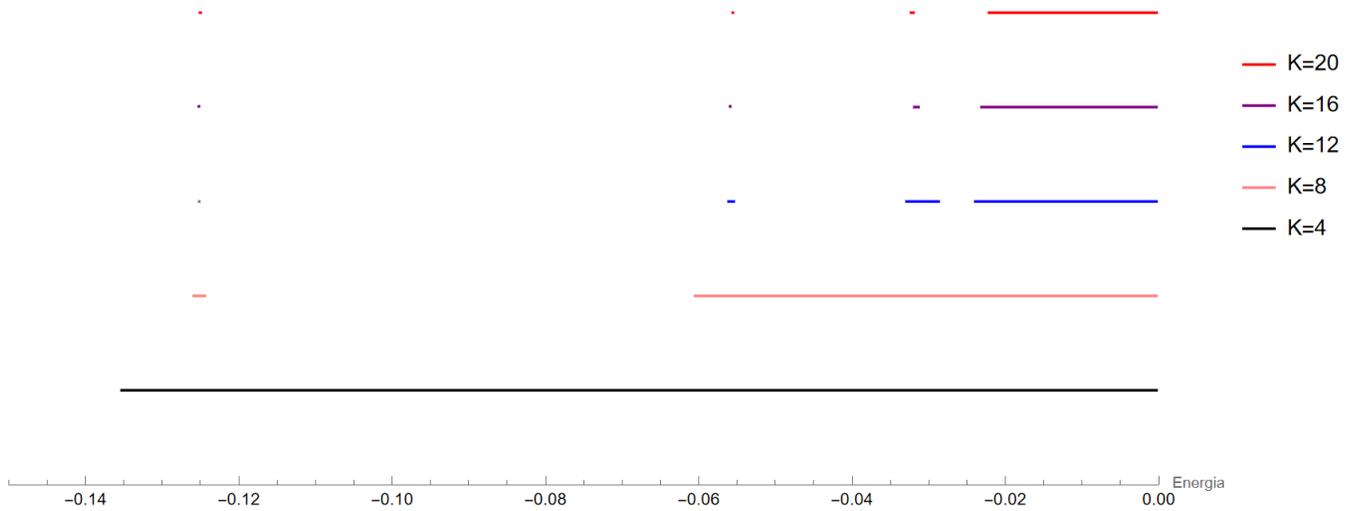


Figura 2.6: Sono rappresentati i valori dell'energia per il numero quantico  $l = 1$  ottenuti tramite varie dimensioni di matrice  $K$ .

Si nota da 2.2.1 che lo spettro converge aumentando la dimensione della matrice alle energie teoriche, che nelle unità in cui si è lavorato, equivalgono a  $E_n = -\frac{1}{2n^2}$  con  $n = 1, 2, \dots$ . In particolare  $E_2 = -0.1250$ ,  $E_3 = -0.0556$ ,  $E_4 = -0.3125$ . Per  $K = 4$  i livelli energetici dell'idrogeno non sono ancora distinguibili ma vengono rigettati solo valori lontani dallo spettro. Da  $K = 8$  si osserva la divisione del primo stato eccitato con  $n = 2$ . Questo livello è il primo a separarsi ed è quello che descrive meglio a basse dimensioni la convergenza verso il valore teorico. Man mano che cresce  $K$ , ovvero la grandezza delle matrici, si dividono sempre più livelli, nel nostro caso distinguiamo fino a 4 livelli energetici per  $K = 20$ .

La tabella seguente indica l'ordine di grandezza dei range energetici ottenuti dell'atomo di idrogeno per i valori di  $K$  in 2.2.1. Si può vedere in modo quantitativo la velocità di convergenza degli intervalli:

$E_{th}$	n	range $K = 4$	range $K = 8$	range $K = 12$	range $K = 16$	range $K = 20$
0.125	2	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$
0.0556	3	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-10}$	$< 10^{-16}$
0.3125	4	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-1}$
0.02	5	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$

Tabella 2.2: Intervalli energetici per l'atomo di idrogeno.

Il grafico seguente mostra invece in modo qualitativo l'andamento delle energie accettate per  $K$  ancora bassi, dove gli intervalli sono ancora apprezzabili.

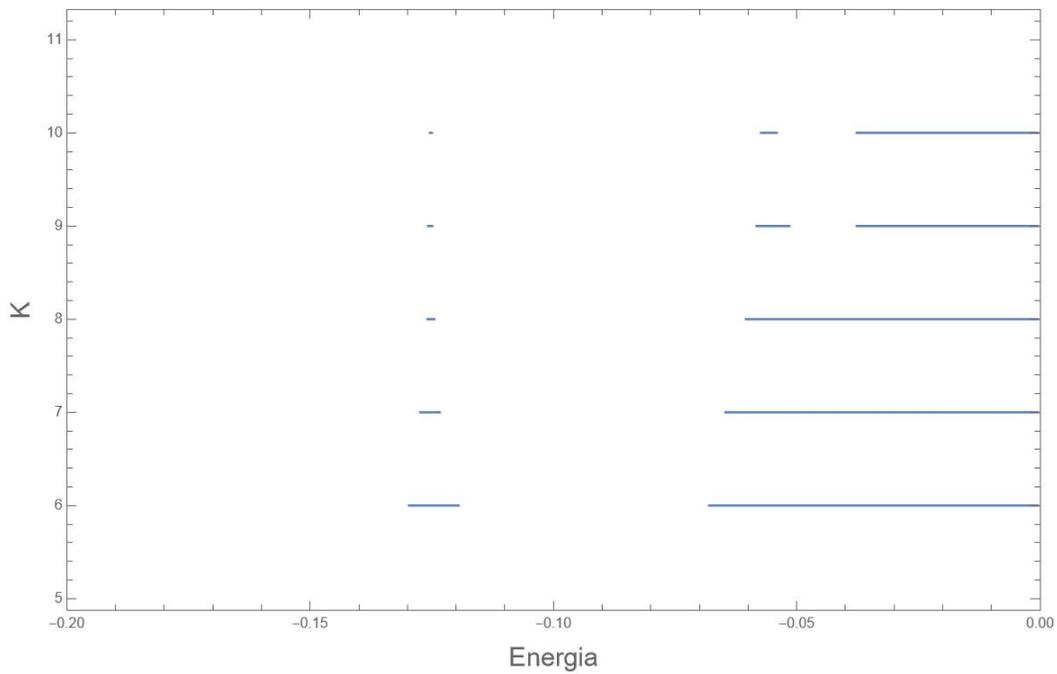
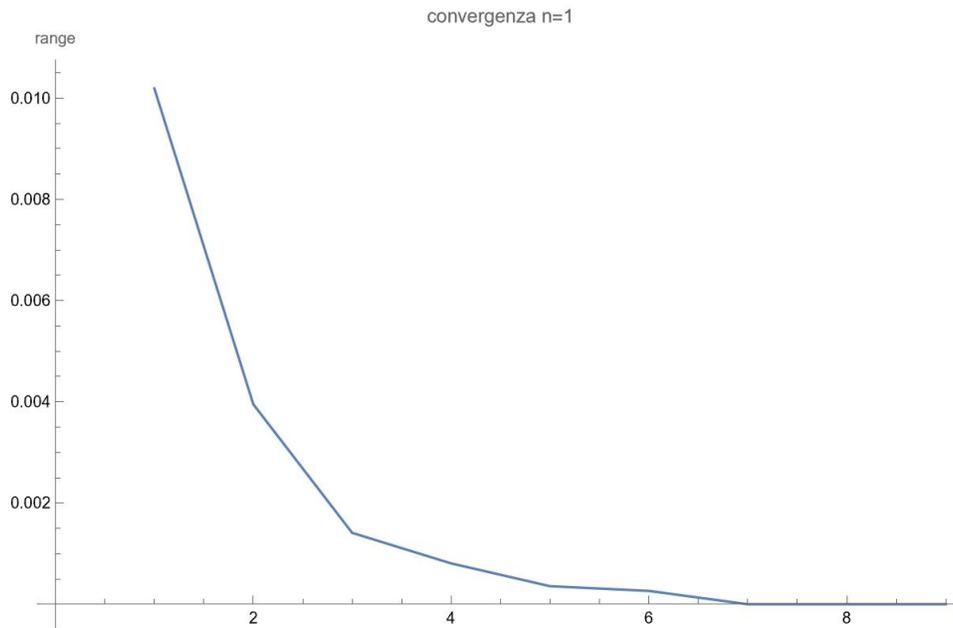
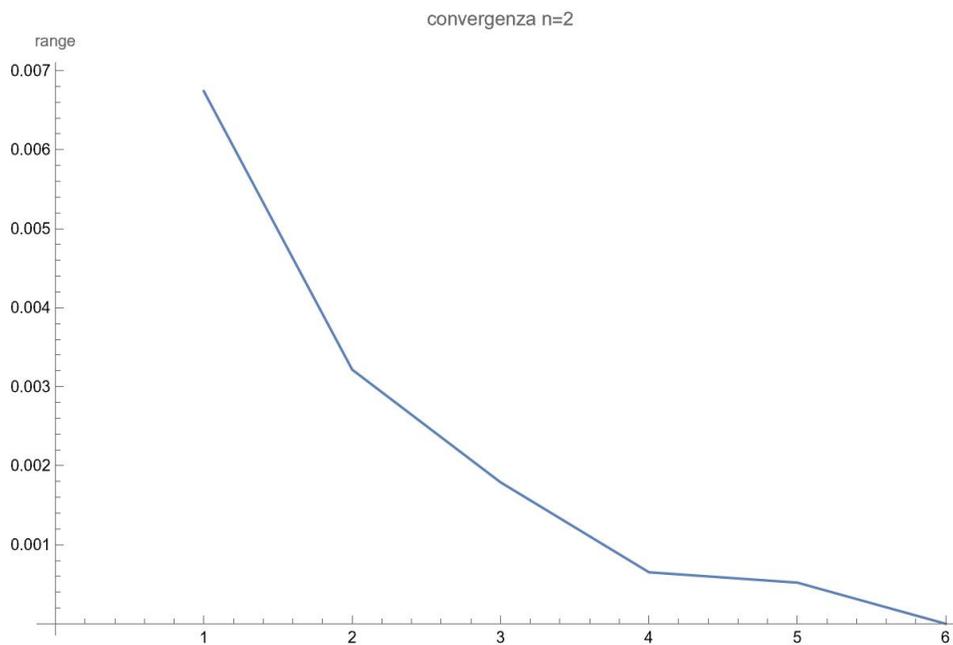


Figura 2.7: Energie per  $l = 1$  con  $K = 6, 7, 8, 9, 10$ .

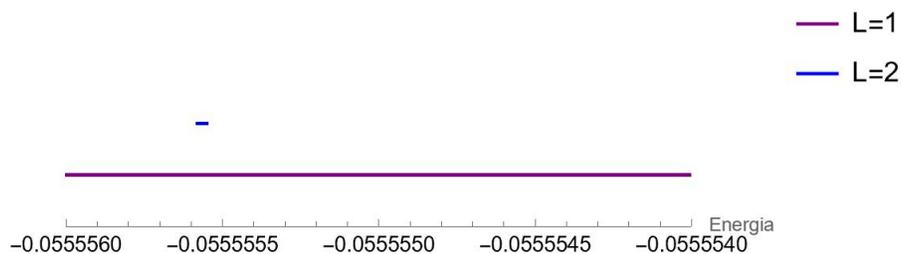
E' interessante notare che la convergenza non è simmetrica, cresce infatti più velocemente da destra. Di seguito sono riportati due grafici che mostrano l'andamento della convergenza, in particolare per il primo e secondo livello dell'atomo di idrogeno. Come si può notare anche da 2.3.1, essa è definita meglio per  $n = 1$  dato che il livello è fin da subito distinto. In entrambi i casi hanno un andamento esponenziale decrescente.

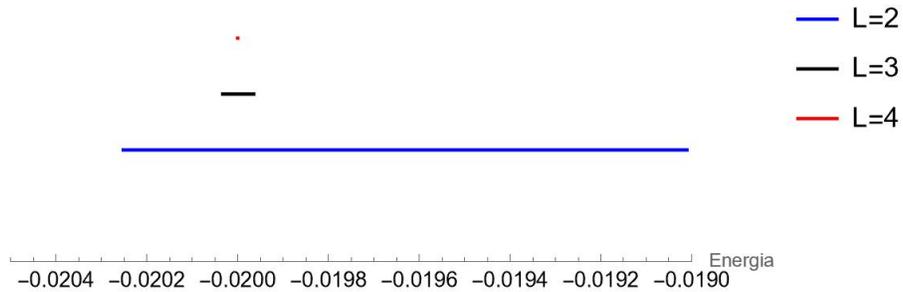
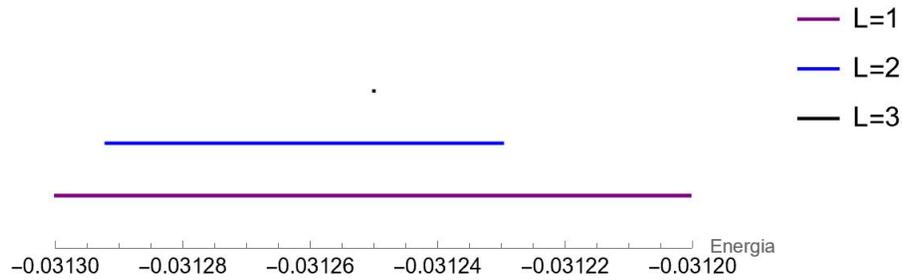




Nella seconda analisi si osserva l'andamento per diversi  $l$  a un  $K$  fissato; in questo caso si sceglie la matrice  $M_{K \times K}$  con vincoli più stringenti usata per  $l = 1$ , quindi  $K = 20$ . Per ogni numero quantico  $n$  esiste una degenerazione su  $l$ , che prende valori da 0 a  $n - 1$ . Quindi per  $l = 1$  le energie partiranno dal ground state con  $n = 1$  (ci limiteremo a studiare in realtà le energie con  $n > 1$ ), invece al crescere di  $l$  crescerà anche il numero quantico minimo  $n$  che caratterizza l'energia  $E_n$ .

Di seguito sono presentati grafici diversi per ogni energia  $E_n$ ; questo perché anche all'aumentare di  $l$  aumenta la precisione delle soluzioni trovate. Si fa quindi un confronto qualitativo osservando i range energetici tra i diversi numeri quantici orbitali:





Non è stato possibile fare un'analisi per il ground state perché il metodo utilizzato non dà nessun tipo di vincolo sull'energia.

## 2.3 Oscillatore anarmonico

Come ultimo sistema si analizza l'oscillatore anarmonico. Di quest'ultimo non si conoscono a priori le soluzioni esatte dato che l'equazione differenziale associata non è risolvibile analiticamente. L'Hamiltoniana analizzata è:

$$H = p^2 + x^2 + gx^4, \quad (2.12)$$

con  $x$  operatore posizione,  $p$  operatore momento e  $g > 0$  un parametro reale.

Per ottenere la ricorsione dell'oscillatore anarmonico si impone  $m = 1$  in (1.11):

$$E = \frac{1}{2} \langle xV'(x) \rangle + \langle V(x) \rangle, \quad (2.13)$$

e nel sistema in questione il potenziale e la sua derivata sono dati da:

$$V = x^2 + gx^4, \quad \frac{dV(x)}{dx} = 2x + 4gx^3. \quad (2.14)$$

La (2.13) diventa

$$E = 2\langle x^2 \rangle + 3g\langle x^4 \rangle. \quad (2.15)$$

Inoltre utilizzando sempre (1.11) e sostituendo il potenziale otteniamo :

$$\begin{aligned}
0 &= 2mE\langle x^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle - \langle x^m(2x+4gx^4) \rangle - 2m\langle x^{m-1}(x^2+gx^4) \rangle \\
&= 2mE\langle x^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle - \langle 2x^{m+1} \rangle + 4g\langle x^{m+3} \rangle - 2m\langle x^{m+1} \rangle + 2mg\langle x^{m+3} \rangle \\
&= 2mE\langle x^{m-1} \rangle + \frac{1}{4}m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle - 2(m+1)\langle x^{m+1} \rangle + 2g(m+2)\langle x^{m+3} \rangle,
\end{aligned}$$

da cui la ricorsione generale per l'oscillatore anarmonico:

$$0 = 4mE\langle x^{m-1} \rangle + m(m-1)(m-2)\langle x^{m-3} \rangle - 4(m+1)\langle x^{m+1} \rangle - 4g(m-2)\langle x^m + 3 \rangle. \quad (2.16)$$

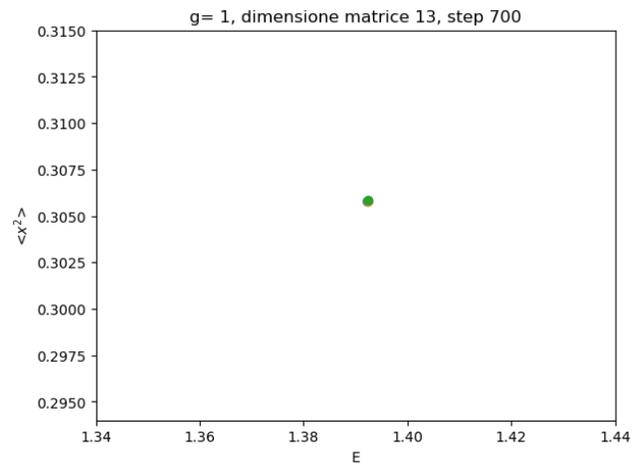
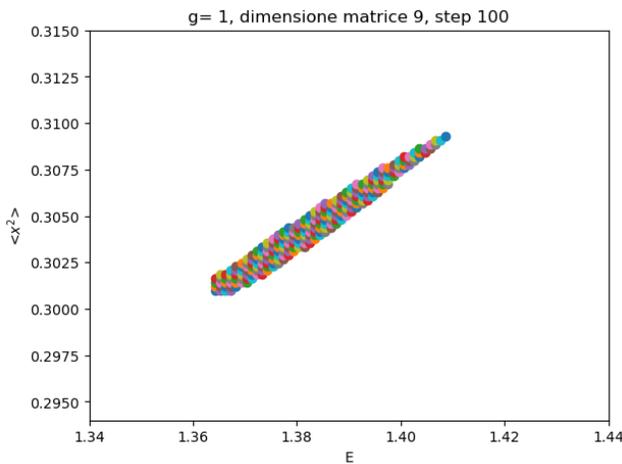
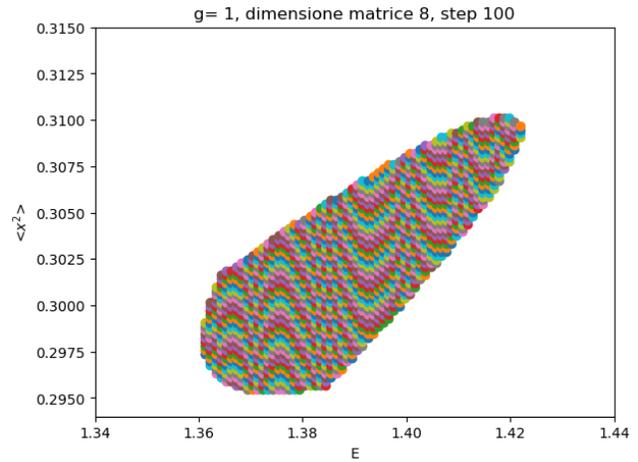
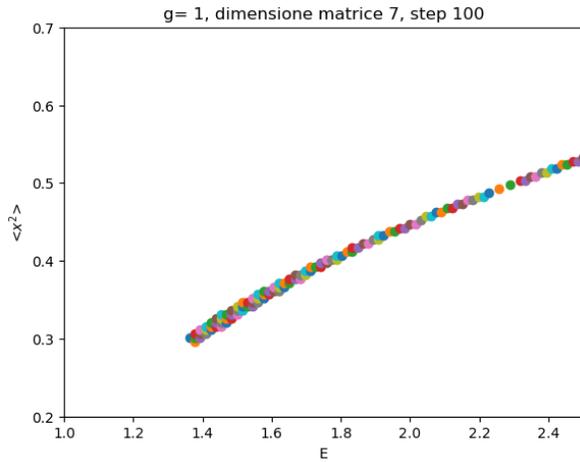
Per generare una sequenza di momenti servono delle condizioni iniziali: si utilizza (2.15) per ottenere  $\langle x^4 \rangle$ , si normalizza  $\langle x^0 \rangle = 1$ , e data la simmetria del potenziale, si pongono tutti i momenti a esponente dispari pari a 0, ovvero  $\{\langle x^k \rangle\}_{k=2n+1} = 0$ . Quindi lo spazio minimale dei momenti  $S$  in questo sistema ha dimensione 2 ed è formato da  $S = \{E, \langle x^2 \rangle\}$ . Si ottiene per ogni elemento  $s \in S$ , ovvero per ogni coppia di energia e momento quadro, una matrice di Hankel. Se quest'ultima è definita semipositiva allora possiamo accettare il punto. All'aumentare della dimensione della matrice i punti  $s$  accettati convergono ad una sola coppia che contiene l'autovalore dell'Hamiltoniana.

### 2.3.1 Risultati

A differenza dei sistemi precedenti, i risultati ottenuti con il metodo di bootstrap per l'oscillatore anarmonico non hanno come soluzione solo l'energia, ma anche il momento quadro  $\langle x^2 \rangle$ . Quindi la matrice di Hankel che viene costruita dipende da due variabili. Nel caso particolare dell'Hamiltoniana (2.12) c'è una dipendenza anche dal parametro di perturbazione  $g$ . Per questo motivo inizialmente si analizzano le soluzioni per un  $g$  fissato ( $g = 1$ ), e solo successivamente si confrontano gli andamenti delle coppie  $s = \{E, \langle x^2 \rangle\} \in S$  per diversi valori di  $g$ .

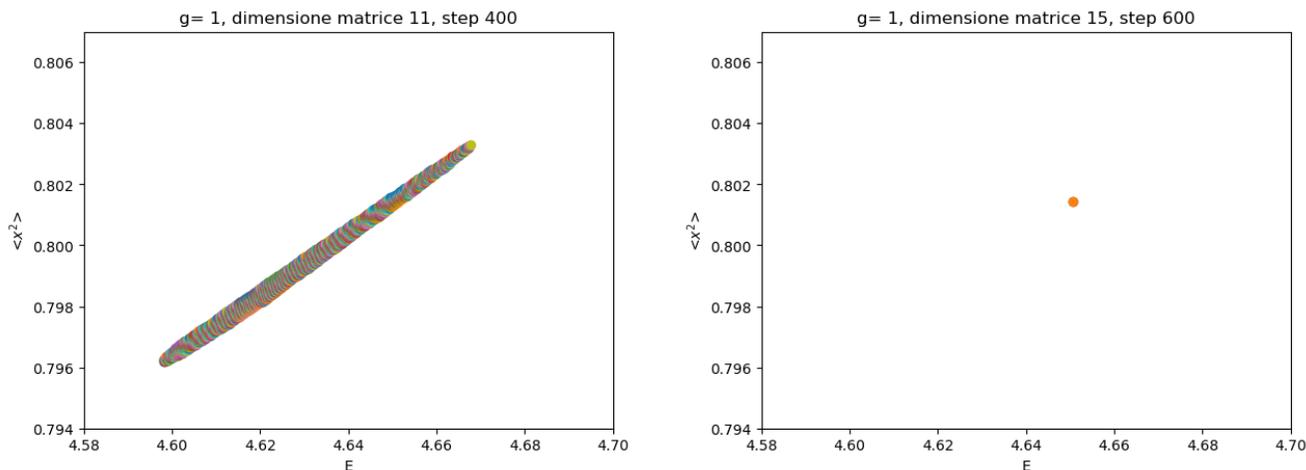
La metodologia per trovare le soluzioni in uno spazio  $S$  a due dimensioni invece che a una dimensione non è più così banale. In questo caso è necessario ipotizzare due range nel quale cercare le soluzioni, quello di  $E$  e quello di  $\langle x^2 \rangle$ . Il programma in appendice A usa quattro variabili per determinare i punti  $s \in S$  accettabili: la grandezza di matrice  $K$ , il range di  $E$ , il range di  $\langle x^2 \rangle$  e il numero di passi tra un estremo all'altro (così da stabilire per quanti punti  $s$  valutare la matrice di Henkel). In particolare se si mantiene lo stesso range e si aumentano i passi si valuta una densità maggiore di punti. Lo stesso accade diminuendo il range e tenendo lo stesso numero di passi.

Sono riportati in seguito, in ordine da sinistra verso destra, gli step per trovare il ground-state dell'Hamiltoniana (2.12) con  $g = 1$ :



Inizialmente si prende una matrice di dimensione bassa ( $K = 7$ ) in un range largo; in questo intervallo esistono più soluzioni. Nella seconda immagine si è isolato il ground state aumentando la dimensione della matrice e diminuendo il range. Si nota una forma a "isola" che contiene tutti i punti  $s$  accettati. Nelle immagini successive è stato tenuto lo stesso range ma sono stati aumentati i passi e  $K$ , fino ad arrivare ad un punto per  $K = 13$  in  $E \subseteq [1.34, 1.44]$ ,  $\langle x^2 \rangle \subseteq [0.2950, 0.3150]$ , con una precisione di  $E$  pari a  $10^{-4}$  (nelle unità scelte per la ricorsione).

Per  $g = 1$  è possibile trovare anche il primo stato eccitato. La forma dell'"isola" è sempre più allungata man mano che i livelli energetici crescono e ciò rende più difficile identificare l'area di punti di interesse. Come è mostrato in seguito, per osservare le soluzioni del primo livello eccitato, definite da un'area isolata, si è arrivati a  $K$  più alti rispetto al ground state.



Si può identificare il primo livello eccitato per  $K = 15$  in  $E \subseteq [4.58, 4.70]$ ,  $\langle x^2 \rangle \subseteq [0.794, 0.806]$ , con una precisione dell'energia pari a  $10^{-4}$  (nelle unità scelte per la ricorsione).

In seguito si analizza la dipendenza dell'energia da  $g$ . Si mostra inoltre in modo qualitativo il comportamento del ground state per diversi valori di  $g$ .

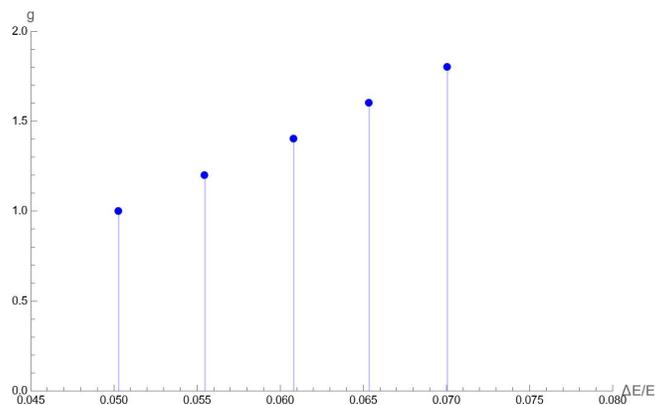


Figura 2.8: Si rappresenta il rapporto tra  $g$  e  $\frac{\Delta E}{E}$  con  $g \subseteq [1, 2]$ .

Il grafico precedente si concentra sulla differenza di energia normalizzata per  $K = 8$  nell'intervallo di  $g$  tra 1 e 2. Si può notare che al crescere del parametro  $g$  cresce l'errore relativo sull'energia.

Di seguito si riporta il grafico dell'energia dello stato fondamentale in funzione di  $g$ . Il valore dell'energia è stato trovato, usando una matrice di dimensione 15, facendo la media aritmetica sul range ottenuto.

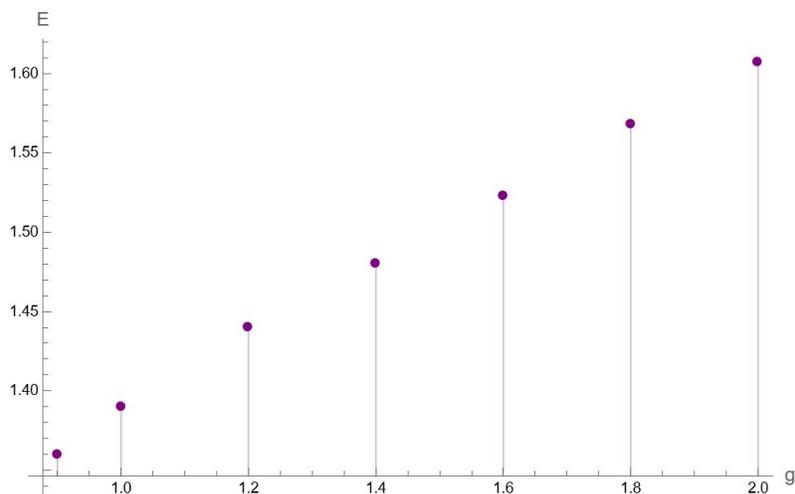


Figura 2.9: Funzione  $E(g)$

Anche in questo caso, come per il suo errore relativo, l'energia cresce con l'aumentare del parametro  $g$ . Si mostra anche in modo qualitativo tale dipendenza:

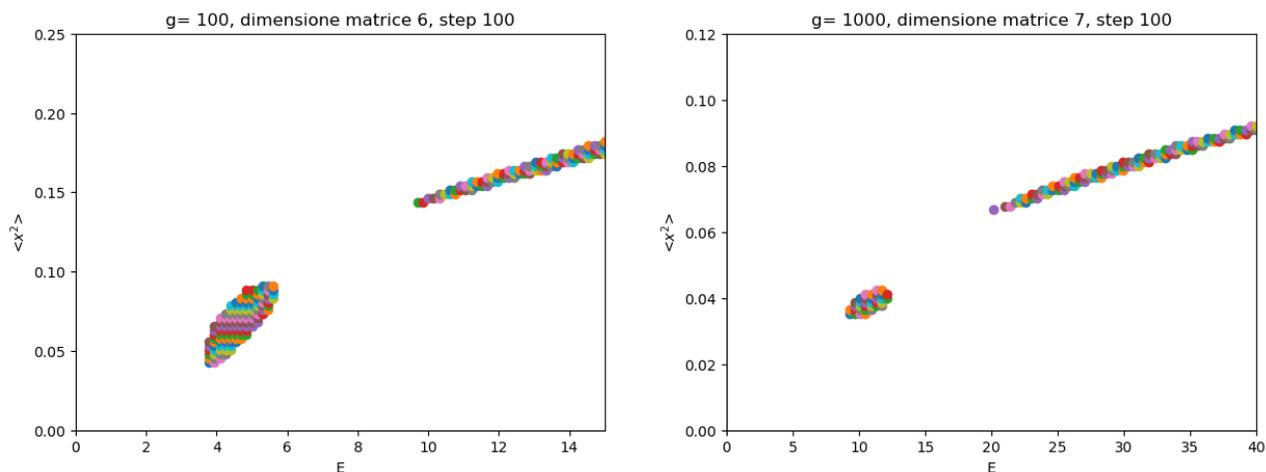


Figura 2.10: A sinistra i punti  $s \in S$  accettati per  $K = 6$  e  $g = 100$ , a destra per  $K = 7$  e  $g = 1000$ .

Nelle immagini precedenti è già visibile la separazione del ground state per  $g = 100$  e  $g = 1000$ , rappresentato da delle "isole" sulla sinistra dei grafici. Per il primo valore della perturbazione  $g$  quest'area è centrata su  $E = 5$ , invece per il valore di  $g$  più grande è centrata su  $E = 11$ ; quindi all'aumentare di  $g$  cresce l'energia del ground state e di conseguenza anche gli altri livelli energetici che sono identificabili con la retta colorata sulla destra di ogni immagine.

Per verificare la validità del metodo di bootstrap applicato all'oscillatore anarmonico, i suoi risultati sono stati confrontati con quelli del metodo di troncamento dell'Hamiltoniana. Seguendo quest'ultimo metodo si scrive l'Hamiltoniana in forma matriciale in seconda quantizzazione. Per l'oscillatore armonico, la cui Hamiltoniana è  $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 X^2}{2}$ , si possono definire gli operatori di posizione  $X$  e momento  $P$  utilizzando gli operatori di creazione

e annichilazione  $a^\dagger$  e  $a$  come:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a), \quad (2.17)$$

e ottenere l'Hamiltoniana in questo formalismo:

$$H_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \quad (2.18)$$

Ridefinendo le costanti  $m = \frac{1}{2}$ ,  $\omega = \frac{1}{2}$ ,  $\hbar = 1$  e aggiungendo il termine  $X^4$ , si ottiene l'Hamiltoniana dell'oscillatore anarmonico  $H = H_0 + gX^4$  nella base di  $H_0$ . Calcolando i suoi elementi di matrice si trova l'operatore  $H$  scritto in forma matriciale. L'elemento di matrice di  $X$  ha la forma:

$$\langle n|X|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{m}\delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}). \quad (2.19)$$

In questo metodo approssimato si calcolano gli autovalori della matrice  $H$  (che avrebbe dimensione infinita) troncata a una dimensione  $N$  arbitraria. La matrice ha la forma seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{3g}{4} & 0 & \frac{3g}{\sqrt{2}} & 0 & \dots \\ 0 & 3 + \frac{15g}{4} & 0 & 5\sqrt{\frac{3}{2}}g & \dots \\ \frac{3g}{\sqrt{2}} & 0 & 5 + \frac{39g}{4} & 0 & \dots \\ 0 & 5\sqrt{\frac{3}{2}}g & 0 & 7 + \frac{75g}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Per lo stato fondamentale viene mostrato l'andamento rispetto al parametro  $g$  ottenuto tramite questo ultimo metodo approssimato.

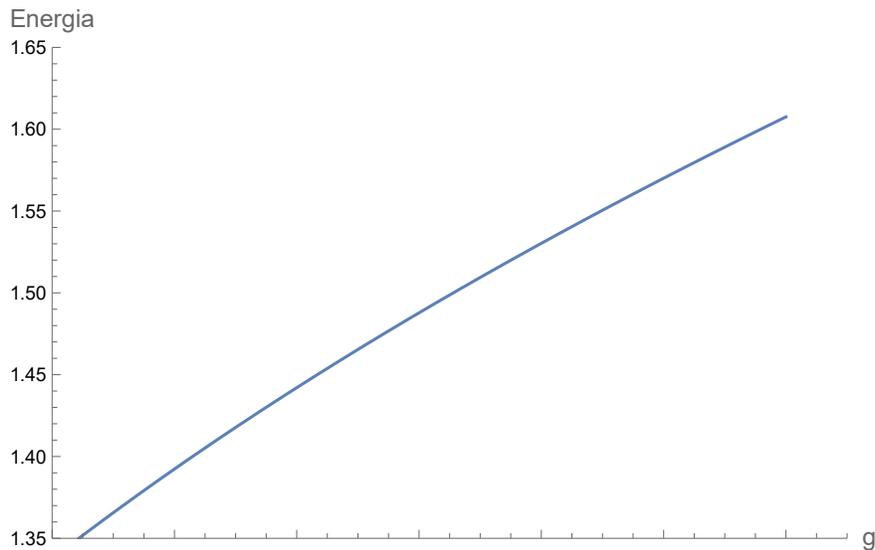


Figura 2.11: Stato fondamentale al variare di  $g$ .

Si può mettere a confronto il grafico precedente con la figura 2.9. Si nota che l'andamento del parametro  $g$  in funzione delle energie è lo stesso per entrambi i metodi di troncamento e il bootstrap.

Nella tabella seguente si confrontano i risultati ottenuti grazie ai due metodi per il ground-state al variare di  $g$ . In particolare nel metodo di troncamento dell'Hamiltoniana si utilizza una matrice di dimensione  $N = 35$  e nel metodo di bootstrap una di dimensione  $K = 15$ .

$g$	Bootstrap range	metodo di troncamento
0.5	1.24185- 1.24187 ( $\Delta = 10^{-5}$ )	1.24185
0.9	1.3656-1.3657( $\Delta = 10^{-4}$ )	1.3656
1	1.39235-1.39238 ( $\Delta = 10^{-5}$ )	1.39235
1.2	1.4420-1.44428( $\Delta = 10^{-5}$ )	1.44208
2	1.60751-1.60754( $\Delta = 10^{-5}$ )	1.60754

Tabella 2.3: Confronto per il ground-state tra bootstrap ( $K = 15$ ) e metodo matriciale ( $N = 35$ ).

I risultati ottenuti dai due metodi sono quindi compatibili in un intervallo che dipende dal valore di  $g$ . In particolare per  $g = 1$  l'ordine di grandezza dell'intervallo è  $10^{-5}$ .

### 3. Conclusioni

Nelle presente tesi è stato applicato il metodo di bootstrap numerico a tre diversi sistemi in meccanica quantistica. Con questo metodo, attraverso identità matematiche, si ottengono delle ricorsioni dalle quali si costruisce una matrice di Hankel a uno o più parametri. Quest'ultima viene testata per alcuni dati iniziali il cui numero dipende dal sistema in oggetto. Se questa matrice è definita semi-positiva, i valori delle condizioni iniziali considerate appartengono alle soluzioni del sistema. La precisione dei risultati dipende dalla grandezza della matrice di Hankel. In primo luogo il metodo di bootstrap è stato applicato all'oscillatore armonico e all'atomo di idrogeno, sistemi le cui equazioni differenziali associate sono risolvibili in maniera esatta, in modo da testare tale metodo e valutarne l'accuratezza. Come terzo sistema è stato studiato l'oscillatore anarmonico con Hamiltoniana  $H = p^2 + x^2 + gx^4$ ,  $g > 0$ , la cui equazione agli autovalori non è risolvibile analiticamente. Questo, tra i tre sistemi, è l'unico con più di un parametro iniziale. E' stato possibile identificare lo stato fondamentale per diversi valori del parametro  $g$ . I risultati sono stati confrontati con un'altra soluzione numerica, dove si diagonalizza un troncamento della matrice che rappresenta l'Hamiltoniana in una base di autostati dell'oscillatore armonico. I valori ottenuti dai due metodi sono, con la precisione utilizzata, compatibili.

Oltre ai sistemi precedentemente presi in considerazione potrebbe essere interessante studiare l'applicazione del metodo di bootstrap numerico in altri ambiti: una semplice applicazione, sempre per sistemi quantistici, è la doppia buca di potenziale, data dal potenziale  $V = -x^2 + x^4$ . In questo caso si possono ottenere risultati numerici sullo splitting del ground state, dovuto ad effetti non perturbativi. Inoltre sarebbe interessante analizzare sistemi in dimensione maggiore di uno, come ad esempio l'oscillatore armonico in 2D o 3D e confrontare l'implementazione del metodo di bootstrap numerico con il caso dell'oscillatore unidimensionale qui esaminato. Infine questo metodo potrebbe essere applicato a modelli di matrici in meccanica quantistica che svolgono diversi ruoli importanti in fisica teorica, come una descrizione olografica dei buchi neri quantistici [3].

## A. Codici utilizzati

Di seguito sono riportati i programmi usati per l'atomo di idrogeno e l'oscillatore anarmonico.

### A.1 Atomo di idrogeno

```
import numpy as np
import numpy.random as npr
from matplotlib import pyplot as plt

def is_pos_def(x): #definisco funzione che accetta matrici positive
    eigvalues, _ = np.linalg.eig(x)
    return np.all(eigvalues >= 0)

def recursion(E,r_3,r_2,m): #definisco una funzione per la ricorsione dell'idrogeno
    l = 3
    A = (m-1)*(m*(m-2) - 4*l*(l+1))*r_3
    A += 4*(2*m-1)*r_2
    return -A/(8*m*E)

e_min = -0.032
energies = np.linspace(e_min,-0.031,30000) # range energie cercate
dim = 20 #dimensione matrice di Henkel

seq = np.zeros((len(energies),2*dim+1))
seq[:,0] = -2*energies
seq[:,1] = 1

mat1 = np.zeros((dim,dim)) #definisco le matrici
mat2 = np.zeros((dim,dim))
fig, axes = plt.subplots()
count = 0
is_in = 0

for j in range(len(energies)):
    for i in range(2,len(seq[0,:])):
        seq[j,i] = recursion(energies[j],seq[j,i-2],seq[j,i-1],i)

    vec = seq[j,1:]
```

```

for p in range(dim):
    for q in range(dim):
        mat1[p,q] = vec[p+q]/(vec[p+1]*vec[1+q])
        mat2[p,q] = vec[p+q+1]/(vec[p+2]*vec[2+q]) #costruisco le matrici per ogni E(j)

if(is_pos_def(mat1) and is_pos_def(mat2)):
    print('%.48f' % energies[j])
    axes.scatter(energies[j],1,s=4, c="C0")
    axes.set_xlim(e_min,0)
    is_in += 1
# else:
#     print('%.48f' % energies[j], "no") #se sono positive stampo l'energia

plt.show()

```

## A.2 Oscillatore anarmonico

```

import numpy as np
import numpy.random as npr
from matplotlib import pyplot as plt

def is_pos_def(x): #definisco funzione che accetta matrici positive
    return np.all(np.linalg.eigvals(x) > 0)

from __future__ import print_function
from ipywidgets import interact, interactive, fixed, interact_manual
import ipywidgets as widgets

def f(nn, x2max, x2min, Emax, Emin, ste, gg=2): #definisco funzione che con i le variabili
#nn=grandezza matrice x{2} max emin , energia max e min step e g plotta le energie e
#x{2} in due dimensioni accettate

    n = int(nn)
    g = gg

    steps = int(ste)
    param_x2 = np.linspace(x2min, x2max, steps) #momento x{2}

```

```

param_E = np.linspace(Emin, Emax, steps) # energia

x2,Eok = np.meshgrid(param_x2, param_E)

x4 = (Eok - 2*x2)/(3*g)
results = []

dim = 2*(n-1) +1
seq = np.zeros((steps, steps, dim))
seq[:, :, 0] = 1 #definisco dei tensori con variabili numero del momento della ricorsione,
#energia e x^{2}
seq[:, :, 2] = x2
seq[:, :, 4] = x4

for i in range(3, dim-3, 2):
    seq[:, :, i+3] = (4*i*Eok*seq[:, :, i-1] + i*(i-1)*(i-2)*seq[:, :, i-3]-
    +4*(i+1)*seq[:, :, i+1])/ (4*g*(i+2)) #definisco ricorsione

m = np.zeros((n,n))
a= plt.figure()
axes= a.add_axes([0.1,0.1,0.8,0.8])
axes.set_xlim([Emin,Emax])
axes.set_ylim([x2min,x2max])

for l in range(steps):
    for i in range(steps):
        for j in range(n):
            for k in range(n):
                m[j,k] = seq[l,i,j+k]
            if(is_pos_def(m)):

                axes.scatter(Eok[l,i],x2[l,i])
                axes.set_title("g= {}, dimensione matrice {}, step {}".format(gg,nn,ste))
                axes.set_xlabel("E")
                axes.set_ylabel("<$x^2$>")

```

## Bibliografia

- [1] David Berenstein and George Hulse. Bootstrapping Simple QM Systems. 8 2021.
- [2] Jyotirmoy Bhattacharya, Diptarka Das, Sayan Kumar Das, Ankit Kumar Jha, and Moulindu Kundu. Numerical bootstrap in quantum mechanics. *Phys. Lett. B*, 823:136785, 2021.
- [3] Xizhi Han, Sean A. Hartnoll, and Jorrit Kruthoff. Bootstrapping Matrix Quantum Mechanics. *Phys. Rev. Lett.*, 125(4):041601, 2020.
- [4] David Poland, Slava Rychkov, and Alessandro Vichi. The Conformal Bootstrap: Theory, Numerical Techniques, and Applications. *Rev. Mod. Phys.*, 91:015002, 2019.